arXiv:2302.04955v2 [math.NA] 8 Mar 2023

消除有限元逼近空间中吉布斯现象的约束

Marco F.P. ten Eikelder*Institute for Mechanics, Computational Mechanics Group Technical University of DarmstadtFranziska-Braun-Straße 7, 64287 Darmstadt, Germanymarco.eikelder@tu-darmstadt.de

Stein K.F. StoterDepartment of Mechanical Engineering Eindhoven University of TechnologyP.O. Box 513, 5600 MB, Eindhoven, The Netherlandss.k.f.stoter@tue.nl

Yuri BazilevsSchool of Engineering Brown University184 Hope Street, Providence, RI 02912, United Statesyuri bazilevs@brown.edu

-

Dominik SchillingerInstitute for Mechanics, Computational Mechanics Group Technical University of DarmstadtFranziska-Braun-Straße 7, 64287 Darmstadt, Germany dominik.schillinger@tu-darmstadt.de

有限元方法面临的一项重大挑战，是减弱尖锐层和不连续性附近的伪振荡，这种现象称为吉布斯现象。本文提出了一组泛函，用于识别有限元空间中最佳逼近问题里的伪振荡。随后，我们在约束的表述中采用这些泛函，以期消除吉布斯现象。通过在最佳逼近问题中施加这些约束，我们可以完全消除一维连续逼近中的过冲与欠冲，并显著抑制一维及更高维不连续近似中的过冲与欠冲。

Keywords：吉布斯现象；有限元方法；约束优化；等几何分析；间断伽辽金。

AMS学科分类：65N30，65K10，35L67

*通讯作者。

1. 引言

1.1. 历史概述

吉布斯现象的发现可追溯至 Henry Wilbraham（1848 年）；J. Willard Gibbs（1898—1899 年）在研究傅里叶级数时重新发现了这一现象 [1, 2]。传统上，人们将其描述为：无法通过截断的傅里叶展开恢复不连续函数在间断点处的函数值。随着展开项数增加，间断点附近的误差并不会消失，过冲与欠冲的幅度则趋近于一个固定极限。这个极限值称为吉布斯常数。鲜为人知的是，吉布斯现象也会出现在其他正交函数系的截断展开中 [3, 4]。事实上，相关的吉布斯常数往往相同，例如勒让德多项式、埃尔米特多项式或拉盖尔多项式的展开[5, 6]。

然而，从根本上说，吉布斯现象与傅里叶级数或正交多项式展开关系不大。这种效应源自平方积分度量下的最佳近似，而这些展开就是此类近似的例子 [7]。因此，在 L^2 度量下通过分段线性多项式 [7] 或样条 [8]求解最佳近似问题时，也会出现这种现象。度量在这里起着关键作用：当 q 趋近于 1 时， L^2 度量下出现的伪振荡比 L^q 度量下严重得多；在某些情况下，后者甚至完全不会出现振荡 [9]。文献 [10] 对如何在 L^q 最佳逼近中，通过分段线性有限元形函数消除吉布斯现象进行了详细研究。因此，在过去几十年里，人们开始探索 $L^1(\Omega)$ 泛函框架，将其作为近似偏微分方程（PDEs）解的出发点 [11, 12, 13, 14, 9]。这些方法面临的主要挑战是，它们需要将一个不可微泛函最小化，从而导致非线性问题的性质不佳。因此，即使是计算数学中的标准问题，也缺乏实用的求解算法。此外，尽管在$L^1(\Omega)$ 子空间中进行近似可以减少伪振荡，但在某些网格上，伪振荡通常仍不会消失 [15, 10]

更为传统的（Bubnov-）Galerkin方法所产生的解，在内积诱导范数下是最优的（该范数与 $L^2(\Omega)$的子空间相关）。因此，对内部层和边界层的近似确实容易出现伪振荡。这一问题在有限元领域广为人知，人们也提出了许多解决方案。可以说，最成功的是基于残差的稳定化方法 [16, 17, 18], ，它们主要用于流体力学相关应用。基于残差的稳定化显著改善了无剧烈变化区域内的解质量，但在存在尖锐层的区域，吉布斯现象仍然会出现。为此，有限元公式通常会加入一种非线性稳定化机制，以局部引入人工扩散 [19, 20, 21]。这些方法被称为

激波捕捉或不连续捕捉方法。

对于非线性（双曲型）演化方程，上述稳定化方法仍然不够。为了提高这类问题数值逼近的质量，人们设计了能够继承底层偏微分方程某些稳定性性质的算法。一个典型例子是熵解所具有的熵稳定性。非线性演化方程的弱解并不唯一，而熵稳定性则从中选出在物理上有意义的熵解 [22]。熵稳定性这一概念对于许多物理系统而言可归结为能量耗散性质，因此常被用于构造稳定的有限元方法 [23, 24, 25, 26, 27, 28]。尽管解的质量显著提高，继承熵稳定性的数值解仍无法杜绝伪振荡。对于某些特定的变量组，Galerkin方法甚至可以精确满足熵稳定性条件，但仍会出现伪振荡 [29]。显然，熵稳定性这一概念与吉布斯现象并无必然联系。不过，它似乎是识别激波的良好指标，因此也可用来指示吉布斯现象可能出现的位置。

一种更直接针对消除吉布斯现象的稳定性概念，是 Harten 引入的全变差不增（TVD）性质[30, 31]。具有 TVD 性质的解可防止解的全变差增大。设计具有 TVD 性质的数值格式仍是一个活跃的研究领域。设计 TVD 格式的动机，是希望得到满足最大值原理及某些单调性性质的数值近似。尽管 TVD 格式取得了成功，尤其是在有限差分和有限体积领域，但其适用性仍有限。具体而言，它仅适用于随时间变化的标量守恒律，且无法提供有关局部解质量的信息。此外，将其引入离散框架时依赖笛卡尔网格，且不具备参考系不变性。

上述两点观察，即（i）熵稳定离散解中会出现吉布斯现象，以及（ii）TVD 格式存在局限性，促使人们设计一种名为变分熵理论[32]的新型稳定性概念。该理论在熵框架下，为一般守恒律提供了 TVD 稳定性条件的局部连续推广。与经典熵解类似，变差熵解满足一种内在的稳定性条件。在离散框架中，这一稳定性条件可作为吉布斯现象的指标函数。该理论已成功应用于变分多尺度法（VMS）范式 [33, 34, 35] ，用于构建不连续捕捉方法的框架 [21]。

1.2. 目标

尽管吉布斯现象备受关注，但目前尚无对其精确的数学定义。因此，任何消除吉布斯

现象的尝试都必须首先采用一种识别策略。我们提出的识别方法以变分熵理论为基础。随后，我们提出通过施加约束来消除吉布斯现象。

这引出了本文的主要目标：确定一组实用约束，以消除有限元空间中对尖锐层和不连续性进行近似时产生的吉布斯现象。为便于分析，我们在等几何分析框架下讨论所得结果，并将该框架视为 $\mathcal{C}^0$-和 $\mathcal{C}^{-1}$-有限元空间向更高阶连续性的推广。

有几点需要说明。首先，显式选择基函数的系数，使数值逼近不超出解析剖面的界限，从而构造出消除振荡的约束，这看起来或许可行。然而，这种策略在实际计算中并不可行。因此，挑战在于确立一组能够在实践中采用的约束。其次，在数值方法中先验地施加约束这一想法并不新鲜。在这方面，Evans 等人 [36], 提出了一项重要工作，其中介绍了在VMS框架中施加约束的方法。

1.3. 主要结果

本文的主要结果是一组旨在识别并消除吉布斯现象的积分约束。在某种近似中出现吉布斯现象，不能仅凭该近似本身推断出来。相反，它与被近似的函数有关，并取决于所关注的（子）区域。我们提出如下形式的指标函数：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0, \tag{1.1}$$

其中，函数 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 是函数 $\phi \in H^1(\Omega)$ 在 $\omega \subset \Omega$ 上的近似。此处，$H^1(\tilde{\Omega})$ 是破Sobolev空间，而 $\tilde{\Omega}$ 是由互不相交的子域组成的集合（精确定义见第4节）。我们将这一约束称为吉布斯约束。它源自吉布斯泛函，其定义如下：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) := \int_\omega g_\phi(\phi^*)\ \mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 g_ϕ 为：

$$g_\phi(\phi^*) := \begin{cases} \|\nabla\phi^*\|_2^{-1} \nabla\phi^* \cdot \nabla(\phi^* - \phi) & \text{for } \nabla\phi^* \neq 0, \\ 0 & \text{for } \nabla\phi^* = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

我们寻找函数 ϕ^* 作为 ϕ 的近似，使其在预先确定的子域集合 ω上满足吉布斯约束。我们研究吉布斯约束在有限元最佳逼近问题中的应用。具体而言，我们考虑以下约束最佳逼近问题：

$$\phi^h = \underset{\theta^h \in \mathcal{K}_{p,\alpha}}{\operatorname{arginf}} \ \|\phi - \theta^h\|_{\mathcal{H}}, \tag{1.4}$$

其中， $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 是由某个内积诱导的范数，可行集定义如下：

$$\mathcal{K}_{p,\alpha} := \left\{ \phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,p,\alpha} : \quad \mathcal{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0,\ j = 1, ..., J,\ \omega_j \in \mathcal{T}_\omega \right\}. \tag{1.5}$$

文中后面将给出 $\mathcal{V}^h_{D,p,\alpha}$ 和 $\mathcal{T}_\omega$ 的精确定义。对于尖锐层，我们证明：若满足吉布斯约束（一维连续逼近），则任意次数和连续性的有限元近似都不会出现过冲与欠冲；对于不连续近似，这些振荡则会显著减弱。

子域 ω 的选择取决于有限元近似空间的正则性 α 以及区域的维数。在一维中，当有限元空间为不连续空间或 $\mathcal{C}^0$-连续空间时，可以逐单元应用约束（$\omega_j = K_j$）。对于正则性更高的有限元空间（$\alpha \geq 1$），子域 ω 必须由若干相邻单元组成，且所包含的单元数量随正则性的提高而增加。在高维中，吉布斯约束对于连续有限元空间过于严格，因此其适用范围仅限于不连续有限元空间。

1.4. 概述

本文其余部分安排如下。首先，在 第2节 中，我们介绍有关函数空间和投影算子的预备知识。然后，在 第3节中，我们概述任意次数和连续性的有限元空间中最佳逼近的吉布斯现象。在第4节中，我们确定一维情形下的约束。接下来，我们在第5节中将这一构造推广到高维。最后，我们在第6节中总结全文并展望未来。

2. 预备知识

2.1. 函数空间

我们采用标准的泛函分析框架。记 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为具有空间维数 d且边界为 $\partial\Omega$ 的有界开连通区域。 $L^2(\Omega)$ 表示 Ω 上平方可积函数构成的勒贝格空间。此外， $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ 表示由 $L^2(\Omega)$ 函数组成的索об列夫空间，其中这些函数的梯度也属于$[L^2(\Omega)]^d$。子空间 $H^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ 由在 $\partial\Omega$ 上具有零迹的函数构成。相应的范数记为 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_\Omega$ 和 $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$。此外，我们采用 Ω 上 L^2- 内积的标准记法 $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)} = (\cdot,\cdot)_\Omega$，并用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_D$ 表示某个边界区域 D 上的对偶配对 $H^{-1/2}(D) \times H^{1/2}(D) \to \mathbb{R}$。

本文研究任意次数和连续性的有限元空间。因此，我们采用等几何分析框架[37, 38, 39]。我们介绍节点向量、一元和多元B样条、几何映射

以及物理网格。次数为 p、维数为 n 的有序节点向量 Ξ 定义如下:

$$\Xi := \{-1 = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1} = 1\}, \tag{2.1}$$

其中，$\xi_i \in \mathbb{R}$ 表示第 i个节点，且 $i = 1, ..., n + p + 1$。我们采用如下约定: $p = 0, 1, 2, \ldots$ 分别表示分段常数、线性函数、二次函数等。本文仅考虑开节点向量，即首尾节点各出现 $p+1$ 次。对于 $p = 0, 1, 2, \ldots$，递归定义单变量B样条基函数。首先从分段常数函数开始:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 \quad \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.2}$$

而对于 $p = 1, 2, \ldots$，B样条基函数定义如下:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \tag{2.3}$$

该定义还约定：若分母（即 $\xi_{i+p} - \xi_i$或 $\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}$）为零，则相应的分数取零。对于 $p = 0$ 和1，B样条基函数与标准有限元拉格朗日基函数一致；对于 $p \geq 2$则不同。次数为 p 的B样条基函数由非负的、具有局部支撑的分段 p次多项式函数组成，并构成单位分解。B样条基函数的线性组合称为B样条。我们引入向量 $\zeta = \{\zeta_1, ..., \zeta_m\}$，它由所有不重复的节点组成。开节点向量意味着基函数在区间端点处具有插值性。在节点区间内部，B样条基函数是光滑的；而节点的重复会降低B样条基函数在该节点处的连续性。更准确地说，在重数为 k_i 的节点 ξ_i处，次数为 p 的B样条基函数具有 $\alpha_i := p - k_i$ 阶连续导数（注意，$\alpha_1 = \alpha_m = -1$）。我们将多项式次数为 p 且正则性为$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$的B样条空间记作:

$$S^p_{\boldsymbol{\alpha}} := \operatorname{span} \{N_{i,p}\}_{i=1}^n. \tag{2.4}$$

次数为 p、内部重数统一为 p 的 B样条基函数具有插值性，且张成与标准 $\mathcal{C}^0$-拉格朗日基函数相同的空间。同样，次数为 p、内部重数统一为 $p + 1$ 的 B样条基函数是不连续的，且张成与不连续拉格朗日基函数相同的空间。

多变量 B样条的构造方式是对单变量B样条取张量积。我们引入开放节点向量:

$$\Xi_l := \{\xi_{1,l}, \xi_{2,l}, ..., \xi_{n_l+p_l+1,l}\}, \tag{2.5}$$

对于多项式次数 p_l和维数整数 $n_l$for $l = 1, \ldots, d$。对于每个节点向量 Ξ_l，我们定义多项式次数为 p_l的单变量 B样条基函数$N_{i_l,p_l,l}$，其中 $i_l = 1, ..., n_l$。同样，我们引入带重复节点的节点向量

$\boldsymbol{\zeta}_l = \{\zeta_{1,l}, ..., \zeta_{m_l,l}\}$ 和正则性向量 $\boldsymbol{\alpha}_l = \{\alpha_{1,l}, \ldots, \alpha_{m_l,l}\}$。参数域 $\hat{\Omega} = (-1,1)^d \subset \mathbb{R}^d$ 上的笛卡尔网格现在定义如下：

$$\hat{\mathcal{T}} = \{Q = \otimes_{l=1,\ldots,d}(\zeta_{i_l,l}, \zeta_{i_l+1,l}), 1 \le i_l \le m_l - 1\}. \tag{2.6}$$

$\hat{}$ 开单元 $Q \in \mathcal{T}$ 的边界记为 ∂Q。多元张量积 B样条基函数定义在参数网格 $\mathcal{T}$ 上，如下所示：

$$N_{i_1,\ldots,i_d,p_1,\ldots,p_d} = N_{i_1,p_1,1} \otimes \cdots \otimes N_{i_d,p_d,d}. \tag{2.7}$$

$\hat{}$ 与之对应的张量积B样条函数空间定义在 $\mathcal{T}$ 上，如下：

$$S^{p_1,\ldots,p_d}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_d} := \operatorname{span}\{N_{i_1,\ldots,i_d,p_1,\ldots,p_d}\}^{n_1,\ldots,n_d}_{i_1=1,\ldots,i_d=1}. \tag{2.8}$$

本文始终将内部的均匀正则性向量限制为 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_l$，即 $\alpha_{2,\,l} = \cdots = \alpha_{m-1,\,l} = \alpha$，并采用相同的多项式次数 $p_1 = \cdots = p_d = p$。我们假设物理域可以由连续可微的几何映射（其逆映射也连续可微）$\mathbf{F} : \boldsymbol{\xi} \in \Omega \to \mathbf{x} \in \Omega$ 精确描述。物理网格 Ω 由将几何映射 $\mathbf{F}$ 应用于参数网格的各单元得到：

$$\mathcal{T} = \left\{K : K = \mathbf{F}(Q), Q \in \hat{K}\right\}. \tag{2.9}$$

按照通常要求，单元 $K \in \mathcal{T}$ 应为形状正则。单元 $K \in \mathcal{T}$ 的边界记为 ∂K。我们将映射 $\mathbf{F}$ 的雅可比矩阵定义为 $\mathbf{J} = \partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi}$。最后，引入有限元近似空间 $\mathcal{V}^h_{p,\,\alpha} = \{\mathbf{F}(\mathcal{S}^p_\alpha)\} := \left\{\mathbf{F}\left(\mathcal{S}^{p,\,\ldots,\,p}_{\boldsymbol{\alpha}\,\ldots\,\boldsymbol{\alpha}}\right)\right\}$，以及其子空间 $\mathcal{V}^h_{0,\,p,\,\alpha} \subset \mathcal{V}^h_{p,\,\alpha}$ 和 $\mathcal{V}^h_{D,\,p,\,\alpha} \subset \mathcal{V}^h_{p,\,\alpha}$；这些子空间分别由在 $\partial\Omega$ 上满足齐次和非齐次边界条件的函数组成。

2.2. 投影算子

在本小节中，我们介绍一些正交投影算子 $\mathscr{P} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^h_{D,p,\alpha}$。首先考虑（受约束的）$\mathcal{H}$-最佳逼近问题：

$$\phi^h = \underset{\theta^h \in \mathcal{V}^h_{p,\alpha}}{\operatorname{arginf}} \|\phi - \theta^h\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.10}$$

满足迹相等条件：

$$\phi^h|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}, \tag{2.11}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 是由内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$诱导的范数。约束 (2.11) 可通过采用提升论证将其齐次化，这在有限元方法中是标准做法；在此过程中，逼近空间变为$\mathcal{V}^h_{0;p,\alpha} \subset \mathcal{V}^h_{p,\alpha}$. $\mathcal{H}$ 最佳逼近可通过求解对 (2.10) 中的盖托导数求导后得到的一阶最优性条件来确定：

求 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\alpha}$ 使得对所有 $w^h \in \mathcal{V}^h_{0;p,\alpha}$:

$$(\mathscr{P}_{\mathcal{H}}\phi - \phi, w^h)_{\mathcal{H}} = (\phi^h - \phi, w^h)_{\mathcal{H}} = 0. \tag{2.12}$$

对于由连续函数组成的近似空间 $\mathcal{V}^h_{p,\,\alpha}$ （即 $\alpha \geq 0$），我们分别引入 L^2-正交投影算子和 H^1_0-正交投影算子，定义如下:

$$(\mathscr{P}_{L^2}\phi - \phi, w^h)_{\Omega} = (\phi^h - \phi, w^h)_{\Omega} = 0, \tag{2.13a}$$

$$(\mathscr{P}_{H^1_0}\phi - \phi, w^h)_{H^1_0(\Omega)} = (\phi^h - \phi, w^h)_{H^1_0(\Omega)} = 0. \tag{2.13b}$$

接下来，我们考虑由不连续函数组成的近似空间 $\mathcal{V}^h_{p,\,\alpha}$ （即 $\alpha = -1$）。在此背景下，标准的 H^1_0-范数并不适用于最佳逼近问题。为了引入适用于 H^1_0-最佳逼近问题的替代方案，我们先引入一些额外的记号。我们将 (n_{el}) 个开单元域的并集及其对应的界面骨架定义如下:

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{el}}} K_i, \tag{2.14a}$$

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{el}}} \partial K_i, \tag{2.14b}$$

并将 $\Gamma^0 = \Gamma \backslash \partial\Omega$ 定义为界面骨架的内部部分。接下来，我们引入一些适用于不连续基函数的迹算子。对于由单元 K^+ 和 K^- 共享的内部边 e，我们将 e 上的外指单位法向量分别定义为 $\mathbf{n}^+$ 和 $\mathbf{n}^-$。记标量 ϕ 的 $\phi^+ = \phi|_{\partial K^+}$ 和 $\phi^- = \phi|_{\partial K^-}$ 为 ....., 则其在 Γ^0 上的平均值 $\{\!\{\phi\}\!\}$ 和跳跃 $[\![\phi]\!]$ 定义如下:

$$\{\!\{\phi\}\!\} = \frac{1}{2}\left(\phi^+ + \phi^-\right), \tag{2.15a}$$

$$[\![\phi]\!] = \phi^+\mathbf{n}^+ + \phi^-\mathbf{n}^-. \tag{2.15b}$$

对于 e 上的向量值量 $\boldsymbol{\psi}$，我们类似地定义 $\boldsymbol{\psi}^+$ 和 $\boldsymbol{\psi}^-$，并在 Γ^0 上引入平均值 $\{\!\{\boldsymbol{\psi}\}\!\}$，如下:

$$\{\!\{\boldsymbol{\psi}\}\!\} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\psi}^+ + \boldsymbol{\psi}^-\right). \tag{2.16}$$

我们不定义向量量的跳跃，并将其留作未定义。

现在，我们给出 H^1_0-最佳逼近问题的一种适定替代方案。该替代方案与众所周知的内罚方法密切相关。该方法要求计算 Γ^0 上的边界通量 $\partial_n\phi$，这是一个无界算子，并且对于 $\phi \in \mathcal{V} = H^1(\Omega)$ 会产生一个双值函数。为规避这一问题，我们首先引入分片空间:

$$H^1(\tilde{\Omega}) = \left\{\phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in H^1(K) \ \text{ for all } K \in \mathcal{T}\right\}, \tag{2.17}$$

并考虑解函数 $\phi \in \tilde{\mathcal{V}} = H^1(\tilde{\Omega})$。为缓解

无界边界通量算子的问题，我们引入一个合适的附加函数空间。鉴于边界通量具有双值性，我们将边界通量的函数空间定义为积空间 $\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}$，其中 $\mathcal{Q}=H^{-1/2}(\Gamma^0)$。接下来考虑以下算子：

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}:\tilde{\mathcal{V}}\times\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}&\longrightarrow \mathrm{ran}\mathscr{P}_{\mathrm{IP}},\\ (\phi,\mu^+,\mu^-)&\longrightarrow \left(\phi^h,\partial_n\phi^{+,h},\partial_n\phi^{-,h}\right),\end{aligned}\tag{2.18}$$

with

$$\begin{aligned}\phi^h=\underset{\theta^h\in\mathcal{V}^h_{D,p,\alpha}}{\mathrm{arginf}}\ &\frac{1}{2}\|\phi-\theta^h\|^2_{H^1_0(\tilde{\Omega})}-\left\langle\{\!\{\mu\mathbf{n}-\nabla\theta^h\}\!\},[\![\phi-\theta^h]\!]\right\rangle_{\Gamma^0}\\ &+\frac{1}{2}\left\langle\eta[\![\phi-\theta^h]\!],[\![\phi-\theta^h]\!]\right\rangle_{\Gamma^0}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

$\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}$ 的值域为：

$$\mathrm{ran}\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}=\left\{(w^h,\partial_n w^{+,h},\partial_n w^{-,h}):w^h\in\mathcal{V}^h_{D,p,\alpha}\right\},\tag{2.20}$$

其维数 $\dim\left(\mathrm{ran}\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}\right)=\dim\mathcal{V}^h_{D,\ p,\ \alpha}$。此外，映射 $\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}$ 是幂等的~，并且是空间 $\mathcal{V}\times\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}$上的线性有界算子。$\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}$ 因此，$\mathscr{P}_{\mathrm{IP}}$ 是一个投影算子，我们称其为内罚投影算子[40, 41]。罚参数 η 用于惩罚界面跳跃的不匹配。当罚参数满足某个下界时，可确保问题适定。在本文中，我们基于 Shahbazi η 的工作来确定罚参数[42]。

注释 2.1（边界通量的解释）。双值量 μ作为（ $\partial_n\phi$ 2.19）中的替代量 $\nabla\phi$，并被引入以使投影算子成为有界算子。在实践中，我们只需使用 μ**来替代**（2.19）中的n。为阐明这一替代的一致性，我们展开（2.19）中第二个被积函数的一部分：

$$\begin{aligned}\{\!\{\mu\mathbf{n}\}\!\}\cdot[\![\phi-\phi^h]\!]=\frac{1}{2}\big(&\mu^+(\phi-\phi^h)^+-\mu^+(\phi-\phi^h)^-\\ &-\mu^-(\phi-\phi^h)^++\mu^-(\phi-\phi^h)^-\big).\end{aligned}\tag{2.21}$$

随后将 μ 替换为 $\partial_n\phi$，得到：

$$\begin{aligned}\{\!\{\partial_n\phi\mathbf{n}\}\!\}\cdot[\![\phi-\phi^h]\!]&=\frac{1}{2}\big(\mathbf{n}^+\cdot\nabla\phi^+(\phi-\phi^h)^+-\mathbf{n}^+\cdot\nabla\phi^+(\phi-\phi^h)^-\\ &\quad-\mathbf{n}^-\cdot\nabla\phi^-(\phi-\phi^h)^++\mathbf{n}^-\cdot\nabla\phi^-(\phi-\phi^h)^-\big)\\ &=\{\!\{\nabla\phi\}\!\}\cdot[\![\phi-\phi^h]\!],\end{aligned}\tag{2.22}$$

这揭示了 $\mu\mathbf{n}$ 与 $\nabla\phi$之间的联系。

为了使用内罚投影算子来求足够光滑函数的最佳逼近，我们可以将 $\mu\mathbf{n}$ 替换为 $\nabla\phi$ （参见注释 2.1）。对（2.19）取 Gateaux 导数，并使用这一替换，可得以下

一阶最优性条件：

$$\begin{aligned}&\textit{find } \phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,0} \textit{ such that for all } w^h \in \mathcal{V}^h_{0;p,0}\textit{:}\\&\quad(\phi^h-\phi,w^h)_{H^1_0(\tilde{\Omega})} - \langle[\![\phi^h-\phi]\!],\{\!\{\nabla w^h\}\!\}\rangle_{\Gamma^0} - \langle\{\!\{\nabla\phi^h-\nabla\phi\}\!\},[\![w^h]\!]\rangle_{\Gamma^0}\\&\quad+\langle\eta[\![\phi^h-\phi]\!],[\![w^h]\!]\rangle_{\Gamma^0}=0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

通过这一代换，很容易看出，内部罚投影算子确实对应于一个最佳逼近问题：

$$\phi^h = \underset{\theta^h\in\mathcal{V}^h_{D,p,-1}}{\operatorname{arginf}} \quad \|\phi-\theta^h\|_{\mathrm{IP}(\Omega)},\tag{2.24}$$

其中，范数定义为：

$$\|v\|^2_{\mathrm{IP}(\Omega)} := \|v\|^2_{H^1_0(\tilde{\Omega})} - 2\,\langle\{\!\{\nabla v\}\!\},[\![v]\!]\rangle_{\Gamma^0} + \langle\eta[\![v]\!],[\![v]\!]\rangle_{\Gamma^0}\,.\tag{2.25}$$

3. 有限元空间中最佳逼近的吉布斯现象阐述

本节将展示，在涉及任意连续性和次数的有限元近似空间的最佳逼近问题中，吉布斯现象会如何出现。为简便起见，我们采用节点等距的 B样条。我们在第 3.1 节讨论一维情形，在第 3.2 节讨论二维情形。

3.1. 一维中的吉布斯现象

我们考虑阶跃函数 $\phi \in L^2(\Omega)$ 的最佳逼近，其定义如下：

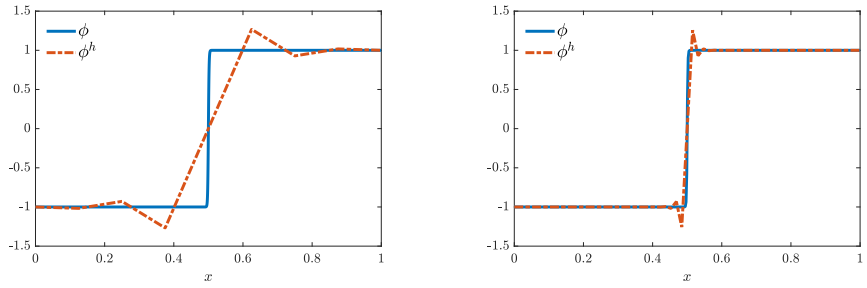
$$\phi = \phi_a(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ -1 & x < a \end{cases},\tag{3.1}$$

其中，a 表示跳跃间断的位置。由于一些最佳逼近结论涉及弱导数，我们希望在 $H^1(\Omega)$中处理解函数。因此，我们引入阶跃函数的如下光滑（可微）近似$\phi \in H^1(\Omega) =: \mathcal{V}$

$$\phi = \phi^\epsilon_a(x) = \tanh\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right),\tag{3.2}$$

其中，$\epsilon \ll 1$ 是一个平滑参数。

我们首先考虑逼近空间 $\mathcal{V}^h_{p,\,\alpha}$ 由连续函数构成的情形，即 $\alpha \geq 0$。光滑阶跃函数的 L^2-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;1,\,0}$（由连续分片线性基函数张成的空间）如图 1所示。我们观察到，数值逼近 ϕ^h 在尖锐层附近出现过冲与欠冲。随着单元数量增加，这些振荡并不会消失。事实上，间断两侧的过冲与欠冲均收敛到值 $1-\sqrt{3}/2 \approx 0.13$，此时单元数量

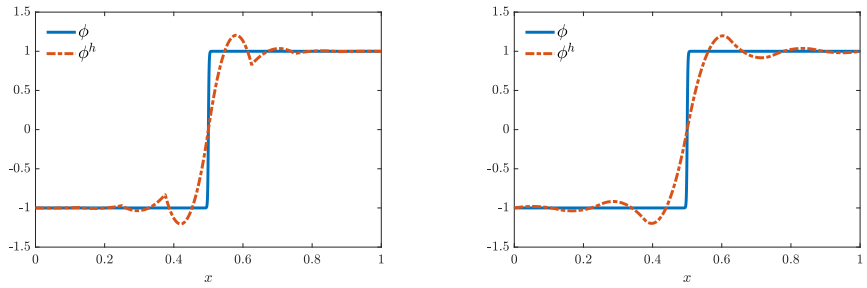


(a) $n_{\mathrm{el}} = 8$。 (b) $n_{\mathrm{el}} = 64$。

图 1：光滑阶跃函数的 L^2-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;1,\ 0}$。

增加（假设该层“足够尖锐”） [7]。我们注意到，吉布斯现象常被误认为与采用高阶基函数进行近似有关。这个例子表明，事实并非如此。

图2 展示了 $\mathcal{V}^h_{D;2,\ 0}$ 和 $\mathcal{V}^h_{D;2,\ 1}$中的近似，这些是连续二次有限元空间。该图展示了幅度大约为



(a) $p = 2$ 和 $\alpha = 0$。 (b) $p = 2$ 和 $\alpha = 1$。

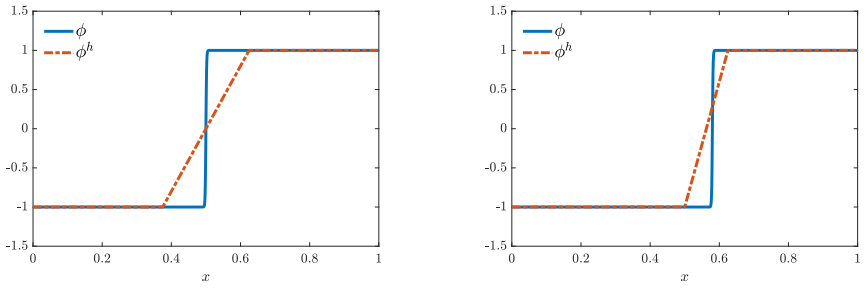
图 2：光滑阶跃函数 $\phi = \phi_{0.5}$ 的 L^2-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;2,\ 0}$ （左）和 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;2,\ 1}$ （右），二者均采用 $n_{\mathrm{el}} = 8$。

其幅值与线性近似的过冲与欠冲相同。对于二次B样条，间断两侧的过冲与欠冲会随着单元数量增加而收敛到约 0.10 [8]。当最大正则性B样条基函数的多项式阶数 p 增加时，吉布斯现象仍然存在。此外，过冲与欠冲的幅值会收敛到与截断傅里叶级数相同的值。该值约为 0。09，称为吉布斯常数。

备注 3.1（不同的自由度）。需要注意的是

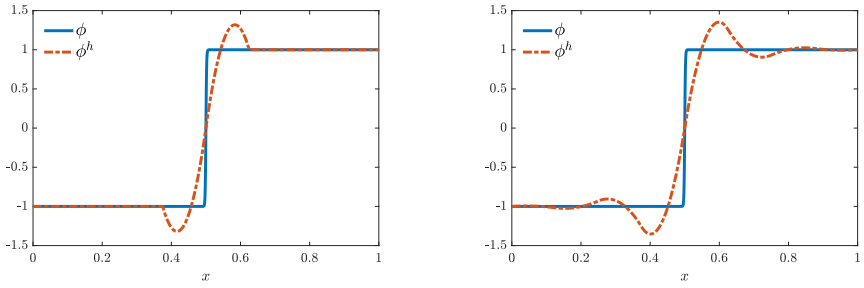
对于具有相同单元数和多项式次数 p 、但正则性 α 不同的结果，自由度数量存在显著差异。在这种情况下，$\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,2,0}$ 有 21 个自由度，而 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,2,1}$只有 10 个自由度（计数包括边界自由度）。

在图 3中，我们展示了针对 $a = 0.5$ 和 $a = 0.58$的 H^1_0最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;1,\ 0}$（由连续分段线性基函数张成的空间）。我们观察到，这两种情况下的数值逼近都具有节点精确性。线性基函数与节点精确性的结合意味着数值逼近不会出现过冲与欠冲，即不存在吉布斯现象。



(a) $a = 0.5$。　　(b) $a = 0.58$。

图 3：对于不同的 a，光滑阶跃函数 $\phi = \phi_a$ 的 H^1_0-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;1,0}$，其中 $n_{\text{el}} = 8$。



(a) $p = 2$ 和 $\alpha = 0$。　　(b) $p = 2$ 和 $\alpha = 1$。

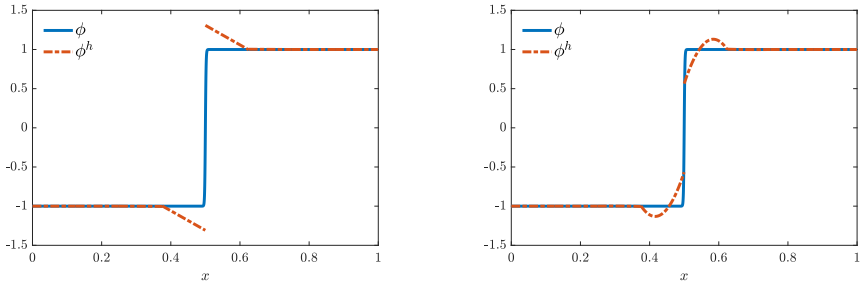
光滑阶跃函数 $\phi = \phi_{0.5}$ 的 H^1_0-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;2,0}$ （左）和 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;2,1}$ （右），其中$n_{\text{el}} = 8$。

在图 4中，我们展示了 H^1_0-最佳逼近的近似

二次有限元空间$\mathcal{V}^h_{D;2,\ 0}$和$\mathcal{V}^h_{D;2,\ 1}$。对于二次拉格朗日多项式和 B 样条函数，我们都观察到了过冲与欠冲。网格加密后，这些振荡依然存在。对于拉格朗日基函数，在单元边界节点处具有节点精确性，但在单元内部则失去了单调性 [43]。

引理 3.1（节点插值算子）。一维空间$\mathcal{V}^h_{D;p,0}$ 中的 H^1_0-最佳逼近在单元边界节点处具有节点插值性。对于线性单元（$p = 1$），该最佳逼近保持单调性；而对于高阶基函数（$p > 1$），单元内部的单调性通常会丧失。

接下来，我们关注不连续近似，即 $\alpha = -1$。我们选取罚参数 $\eta = 6(p+1)^2/h$。光滑阶跃函数的内罚最佳逼近如图 5 所示，所采用的逼近空间为$\mathcal{V}^h_{D,1,-1}$（不连续分片线性函数）以及$\mathcal{V}^h_{D,2,-1}$（不连续分片二次函数）。对于这一最佳逼近问题，我们看到，数值近似 ϕ^h 在尖锐层附近出现过冲与欠冲； H^1_0-最佳逼近问题的节点精确性并未得到保留。此外，我们观察到，近似 ϕ^h 在单元边界处的平均值与 ϕ的值一致。这是内罚投影算子 [40]的一个性质。



(a) $p = 1$。　　(b) $p = 2$。

图 5：光滑阶跃函数 $\phi = \phi_{0.5}$ 的内罚最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，其中 $n_{\text{el}} = 8$，对应不同的 p。

命题 3.1（单元边界上的平均误差消失）。一维情况下，ϕ 的内罚最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,\ p,\ -1}$ 满足以下性质：

$$\{\!\{\phi^h - \phi\}\!\}\Big|_{\Gamma^0} = 0, \tag{3.3}$$

对于所有多项式阶数 p。

3.2. 二维中的吉布斯现象

我们考虑正方形区域 $\Omega = (-1,1)^2$ 上二维阶跃函数 $\phi \in L^2(\Omega)$ 的最佳逼近：

$$\phi = \phi(x,y) = \begin{cases} 1 & x-y>0 \\ -1 & x-y<0 \end{cases}.$$

同样，我们使用阶跃函数的光滑近似 $\phi \in H^1(\Omega) =: \mathcal{V}$：

$$\phi = \phi^\epsilon(x,y) = \tanh\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right),$$

其中 $\epsilon \ll 1$ 是平滑参数。

与一维情形类似，我们从由连续函数（$\mathcal{V}_{D、p、\alpha}^h$）组成的近似空间开始。回顾一维情形，$\alpha \geq 0$-最佳逼近包含过冲与欠冲。这种情况在高维中同样存在，因此我们省略可视化。我们在 L^2中展示连续有限元近似空间 H_0^1、$\mathcal{V}_{D1、0、}^h$、2、0 和 、2、1 在 图6中的最佳逼近。我们观察到每一种近似都出现了过冲与欠冲。

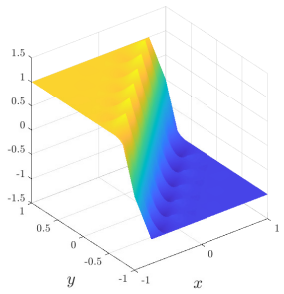
接下来，我们考虑不连续近似（$\alpha = -1$）。与一维情形类似，我们只考虑内罚最佳逼近。我们选取 $\eta = 2(2p+1)(2p+2)/h$ 作为罚参数。在 图7 中，我们展示近似空间 $\mathcal{V}_{1、-1}^h$ 和 $\mathcal{V}_{2、-1}^h$ 的内罚最佳逼近，即线性和二次不连续基函数对应的逼近。与前面一样，我们观察到这两种情况下有限元近似都出现了过冲与欠冲。

4. 消除一维中的吉布斯现象

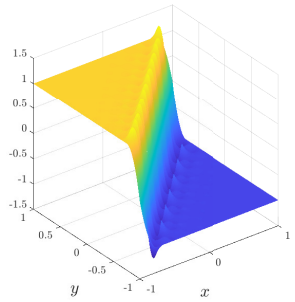
本节介绍在一维有限元空间中消除吉布斯现象所需的约束。我们称这些约束为吉布斯约束。为此，我们首先在第4.1节中概述我们提出的吉布斯约束在一般近似空间中的构造，并在第4.2节中介绍这些约束的性质。接下来，我们在第4.3节中进一步讨论最佳逼近问题。最后，在第4.4节中，我们将吉布斯约束应用于具有任意连续性的有限元空间，并进行数值实验。

4.1. 吉布斯约束

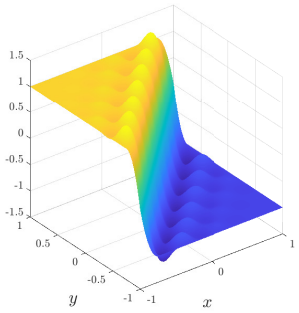
处理吉布斯现象的挑战之一在于，不确定需要何种程度的局部性才能识别该现象。对函数或其导数进行逐点求值所携带的信息不足以推断吉布斯现象是否发生。另一方面，从全局求值（例如全局积分）中获得的信息过于粗略，无法确定局部尺度上是否存在伪振荡。在这



(a) $p = 1$ 和 $\alpha = 0$。



(b) $p = 2$ 和 $\alpha = 0$。



(c) $p = 2$ 和 $\alpha = 1$。

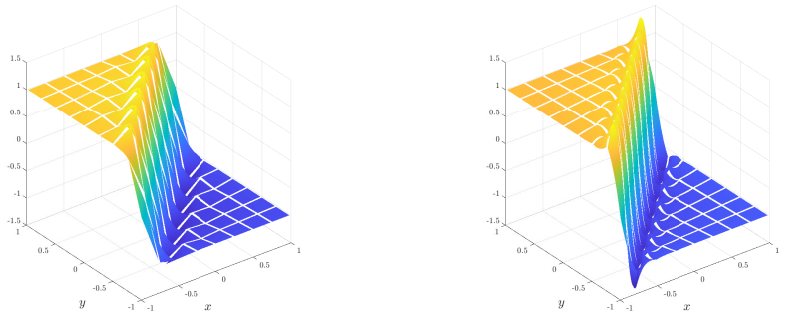
图 6：对于不同的 p 和 α，光滑二维阶跃函数的 H_0^1-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\,\alpha}$（其中 $n_{\mathrm{el}} = 8 \times 8$）。

小节中，我们构造了一种约束，以消除给定子域上的吉布斯现象。子域的选取仍然是一个重要问题，我们将在第4.4节结合有限元近似进行深入讨论。

考虑一维单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}$，并令 $\phi^* : \Omega \to \mathbb{R}$ 表示 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 的一个近似。消除吉布斯现象的关键在于勒贝格积分微积分基本定理，我们在此回顾该定理。

定理 4.1（勒贝格积分微积分基本定理）。设$\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个绝对连续函数，则 θ 几乎处处可微，并且对于每个 $\omega = [x_L, x_R] \subset \Omega$，我们有

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathrm{D}\theta \, \mathrm{d}x = \theta_R - \theta_L, \tag{4.1}$$



(a) $p = 1$ (b) $p = 2$

图 7：对于不同的 p，光滑二维阶跃函数的内罚最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，其中 $n_{\text{el}} = 8 \times 8$。

满足迹等式 $\theta(x_L) = \theta_L$ 和 $\theta(x_R) = \theta_R$，且属于 $\mathrm{D}\theta \in L^1(\Omega)$。

基本定理表明，迹值（（4.1）右端）由积分控制。然而，迹值无法提供函数 θ 在 ω 内的任何振荡行为信息。相比之下，全变差这一概念确实包含了相关信息。

定义 4.1（全变差）。设 $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个给定函数，并令 $P = \{x_L = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = x_R\}$ 表示 Ω $\omega = [x_L, x_R] \subset$ 的一个划分。θ 关于划分 P 的变差定义为：

$$V_{\omega,P}(\theta) := \sum_{i=0}^{N} |\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)|. \tag{4.2}$$

用 $\mathfrak{P}$ 表示 ω的所有可能划分的集合。全变差为：

$$V_\omega(\theta) := \sup_{P \in \mathfrak{P}} V_{\omega,P}(\theta). \tag{4.3}$$

全变差 $V_\omega(\theta)$表示 θ 在 ω上的波动程度。若函数 θ 满足性质 $V_\omega(\theta) < \infty$，则称其具有有界变差，记作 $\theta \in \mathrm{BV}(\omega)$。绝对连续函数具有有界变差。若 θ 是连续可微函数，则全变差 $V_\omega(\theta)$可按如下方式计算。

引理 4.1（连续可微函数的全变差）。设 $\theta \in C^1(\Omega)$。θ 在 $\omega \subset \Omega$ 上的全变差为：

$$V_\omega(\theta) = \int_\omega |\mathrm{D}\theta| \ \mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

如果函数 θ 仅为分段连续可微，则引理 4.1 中的表达式需要加入跳跃项，如引理 4.2所述。

引理 4.2（分段连续函数的全变差）。设 $\theta \in \mathrm{BV}(\Omega)$ 为一个函数，它在每个 $(a_i, a_{i+1}) \subset \Omega$ $i = 0, \ldots, M$ 上都有连续导数，并在 $a_i, i = 1, \ldots, M$ 处有跳跃间断点。记 a_i^-, a_i^+ 为 a_i 处间断的左右极限。θ 在 $\omega \subset \Omega$ 上的全变差定义为：

$$V_\omega(\theta) = \sum_{i=0}^{M} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\mathrm{D}\theta| \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{M} \left|\theta(a_i) - \theta(a_i^-)\right| + \left|\theta(a_i^+) - \theta(a_i)\right|. \tag{4.5}$$

接下来，我们注意到 V_ω 是凸的，并满足齐次性性质。

命题 4.1（全变差的凸性与齐次性）。
在满足与 θ 相同的假设引理 4.2中的假设时，泛函 V_ω 是凸的，并满足齐次性性质：

$$\mathrm{d}V_\omega(\theta)(\theta) = V_\omega(\theta). \tag{4.6}$$

注 4.1。满足齐次性性质的凸泛函称为变分熵 [32]。变分熵泛函构成了双曲守恒律熵稳定性理论的基础，该理论称为变分熵理论。

单调函数的全变差与其迹值的关系如下。

引理 4.3（单调函数的全变差）。设 $\omega = [x_L, x_R] \subset \Omega$，并令 $\mathcal{C}_D^0(\Omega)$ 表示满足迹等式$\theta(x_L) = \theta_L$ 和 $\theta(x_R) = \theta_R$的连续函数空间 θ。对于 $\theta \in \mathcal{C}_D^0(\Omega)$，有

$$V_\omega(\theta) \geq |\theta_R - \theta_L|, \tag{4.7}$$

其中，仅当 θ 为单调函数时等号成立。

这是设计吉布斯约束的重要依据。它表明，迹值的跳跃受全变差控制。

我们引入如下量

$$\mathscr{V}_{\phi,\omega}(\phi^*) := V_\omega(\phi^*) - V_\omega(\phi). \tag{4.8}$$

为了消除吉布斯现象，可以引入约束 $\mathscr{V}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0$。其缺点在于，全变差没有考虑其自变量的符号：

$$V_\omega(-\theta) = V_\omega(\theta). \tag{4.9}$$

因此，我们有：

$$\mathscr{V}_{\phi,\omega}(-\phi) = 0. \tag{4.10}$$

现在，我们将区域 Ω 的基于单元的细分定义（2.14a）推广到 (J) 个互不相交的一般子区域的并集，即

$$\tilde{\Omega} := \bigcup_{j=1}^{J} \omega_j, \tag{4.11}$$

对于 $\omega_j \cap \omega_k = \emptyset$ 对于 $j \neq k$。此外，我们针对该细分重新定义分片空间（2.17）如下：

$$H^1(\tilde{\Omega}) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_\omega \in H^1(\omega) \text{ for all } \omega \in \mathcal{T}_\omega \right\}, \tag{4.12}$$

其中 $\mathcal{T}_\omega$ 为 ω_j、$j = 1$、$\ldots J$的集合。

受上述观察的启发，我们希望找到这样的近似：除了限制近似的跳跃大小之外，还能携带有关解析解 ϕ方向的信息。为此，我们现在提出吉布斯泛函 及其相应的吉布斯约束。

定义 4.2（吉布斯泛函）。函数 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 在 $\omega = \omega_j$ （对于某个 j）上、相对于给定函数 $\phi \in H^1(\Omega)$ 的吉布斯泛函定义为：

$$\mathcal{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) := \int_\omega g_\phi(\phi^*) \, \mathrm{d}x, \tag{4.13}$$

其中，泛函 g_ϕ 定义为：

$$g_\phi(\phi^*) := |\mathrm{D}\phi^*| - \operatorname{sgn}(\mathrm{D}\phi^*)\, \mathrm{D}\phi = -\operatorname{sgn}(\mathrm{D}\phi^*)\, \mathrm{D}\phi'. \tag{4.14}$$

此处 sgn 为符号函数（即，对于 $t \neq 0$，$\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$，且 $\operatorname{sgn}(0) = 0$），而 $\phi' : \Omega \to \mathbb{R}$ 定义为 $\phi' := \phi - \phi^*$ 表示误差函数。

定义 4.3（吉布斯约束）。函数 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 在 ω 上相对于给定函数 $\phi \in H^1(\Omega)$ 的吉布斯约束定义为：

$$\mathcal{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0. \tag{4.15}$$

请注意，通过以下等价关系，可以在吉布斯约束中识别出正确符号的纳入：

$$\left.\begin{aligned} |\mathrm{D}\phi^*| - |\mathrm{D}\phi| &\leq 0 \\ \operatorname{sgn}(\mathrm{D}\phi^*) - \operatorname{sgn}(\mathrm{D}\phi) &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow g_\phi(\phi^*) \leq 0, \tag{4.16}$$

对其进行积分即可得到吉布斯约束。

现在的目标是寻找作为 ϕ 近似的函数 ϕ^*，使其在某些 ω 上满足吉布斯约束。

4.2. 吉布斯约束的性质

本小节旨在讨论吉布斯约束的性质，并阐明它与单调解和最大值原理这些众所周知的概念之间的联系。

我们有一个简单但重要的性质： ϕ 作为自身的近似满足吉布斯约束。

命题 4.2（完美逼近）。完美逼近 *(*$\phi^* = \phi$*)* 的吉布斯泛函为零:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi) = 0. \tag{4.17}$$

此外，我们还得到吉布斯泛函的如下下界。

引理 4.4（吉布斯泛函下界）。吉布斯泛函满足以下下界:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \geq \mathscr{V}_{\phi,\omega}(\phi^*). \tag{4.18}$$

我们现在着手建立吉布斯约束与函数逼近某些性质之间的联系。首先，我们给出吉布斯泛函的刻画。

引理 4.5（吉布斯泛函刻画）。设 $\phi^* \in H^1$（˜Ω） 和 $\phi \in H^1$（Ω），并给定 $\omega = [x_L, x_R] \subset \Omega$。记D$\phi^*$ 的符号变化位置为 x_i、$i = 1$、.....、N，其中 $x_i < x_{i+1}$。吉布斯泛函 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}$ 的形式取决于Dϕ^* 在 $[x_L, x_1]$ 上的符号以及符号变化的数量 N:

(1) 当 N 为奇数且 D$\phi^* \geq 0$ 在 $[x_L, x_1]$上时:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = \phi'(x_L) + 2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i) + \phi'(x_R), \tag{4.19}$$

(2) 当 N 为奇数且 D$\phi^* \leq 0$ 在 $[x_L, x_1]$上时:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = -\phi'(x_L) - 2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i) - \phi'(x_R), \tag{4.20}$$

(3) 当 N 为偶数且 D$\phi^* \geq 0$ 在 $[x_L, x_1]$上时:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = \phi'(x_L) + 2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i) - \phi'(x_R), \tag{4.21}$$

(4) 当 N 为偶数且 D$\phi^* \leq 0$ 在 $[x_L, x_1]$上时:

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = -\phi'(x_L) - 2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i) + \phi'(x_R), \tag{4.22}$$

其中我们回顾 $\phi' = \phi - \phi^*$。

这一刻画的一个直接推论是下面的引理。

引理 4.6（插值单调逼近）。 $\phi^* \in H^1$(˜Ω) 在 $\omega \subset \Omega$ 上的 $\phi \in H^1$(Ω) 插值单调逼近满足吉布斯

约束：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0. \tag{4.23}$$

此外，不含吉布斯现象的单调解析剖面近似满足迹值的一个界。

引理 4.7（单调函数的近似）。假设 $\phi \in H^1(\Omega)$ 在 $\omega = [x_L, x_R] \subset \Omega$ 上单调递增（递减），且近似 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 满足吉布斯约束：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0, \tag{4.24}$$

那么，ϕ^* 的增量（减量）受 ϕ的增量（减量）约束，即

$$\phi^*(x_R) - \phi^*(x_L) \leq \phi(x_R) - \phi(x_L) \qquad (\textit{if } \phi \textit{ is monotonically increasing}), \tag{4.25a}$$
$$\phi^*(x_L) - \phi^*(x_R) \leq \phi(x_L) - \phi(x_R) \qquad (\textit{if } \phi \textit{ is monotonically decreasing}). \tag{4.25b}$$

当 (4.24)取等号时，(4.25) 中的等号成立。

证明。我们省略一般情形的证明，转而考虑两个简单情形。不失一般性，假设 ϕ 单调递增。首先，假设 $\mathrm{D}\phi^*$ 没有符号变化，即 ϕ^* 在 $\omega = [x_L, x_R]$上单调递增。那么，(4.21)化简为：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = (\phi^*(x_R) - \phi^*(x_L)) - (\phi(x_R) - \phi(x_L)), \tag{4.26}$$

当且仅当（4.25a）成立时，它为负。现在假设 $\mathrm{D}\phi^* > 0$ 仅有一次符号变化，发生在 x_1，且对于 $x < x_1$，$\mathrm{D}\phi^* > 0$。此外，由于我们可以将 ϕ^* 平移 $\phi'(x_L)$，因此取 $\phi'(x_L) = 0$。容易验证，$\phi^*(x_1) \leq \phi(x_R)$，否则 $\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \geq 0$。由于 ϕ^* 在 $[x_1, x_R]$ 上递减，而 ϕ 递增，我们立即得到 $\phi'(x_R) \geq 0$。对于 $x < x_1$，$\mathrm{D}\phi^* < 0$ 的情况可用类似论证得出。 □

接下来，我们介绍最大值原理的经典定义。

定义 4.4（最大值原理）。若近似 $\phi^* : \Omega \to \mathbb{R}$ 属于 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$，则其在 $\omega \subset \Omega$ 上满足最大值原理，当且仅当它不超出 ϕ 在 ω上的界：

$$\inf_{\omega} \phi^* \geq \inf_{\omega} \phi, \tag{4.27a}$$
$$\sup_{\omega} \phi^* \leq \sup_{\omega} \phi. \tag{4.27b}$$

定理 4.2（单调函数的插值逼近）。假设 $\phi \in H^1(\Omega)$ 在 $\omega = [x_L, x_R] \subset \Omega$ 上单调，且 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 是插值逼近，即 $\phi^*(x_L) = \phi(x_L)$ 和 $\phi^*(x_R) = \phi(x_R)$。我们有以下结果：

(1) $\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \geq 0$,

(2) ϕ^* 是单调函数，当且仅当 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) = 0$；*(3)* 若 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) = 0$，则 ϕ^* 在 ω上满足最大值原理。

证明。 1. 不失一般性，假设 ϕ 是递增的。若 $\mathrm{D}\phi^*$ 不变号，则利用4.26式引理 4.7，得到 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) = 0$。否则，将 $\mathrm{D}\phi^*$ 发生符号变化的位置记为 $x_i \in \omega$、$i = 1$、……、N，其中$x_i \leq x_{i+1}$。引理 4.5 给出：

- 对于 $[x_L, x_1]$ 上的 $\mathrm{D}\phi^* \geq 0$：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = 2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i), \tag{4.28}$$

- 对于 $[x_L, x_1]$ 上的 $\mathrm{D}\phi^* \leq 0$：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) = -2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\phi'(x_i), \tag{4.29}$$

这里回顾一下 $\phi' = \phi - \phi^*$。为了证明（4.28）和（4.29）的非负性，需要考虑各种情况。例如，对于 $N = 1$，有 $\mathscr{G} = 2\,|\phi'(x_1)| \geq 0$。一般情形的详细证明从略。

2. '⇒'：假设 ϕ^* 是单调函数。不失一般性，假设ϕ 是递增的。由于 ϕ^* 是单调函数，(4.29) 和(4.28) 中的求和项为空，因此表达式为零。

'⇐'：假设 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) = 0$。引理 4.4 推出 $\mathscr{V}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) \leq 0$。不失一般性，假设 ϕ 是单调递增的。于是得到：

$$V_\omega(\phi^*) \leq \phi(x_R) - \phi(x_L). \tag{4.30}$$

由于 ϕ^* 是插值的，引理 4.3 推出 ϕ^* 是单调递增的。

3. 若$\mathscr{G}_{\phi,\ \omega}(\phi^*) = 0$ 则根据论断 2，ϕ^* 是单调的，而(4.25a)通过以下方式给出最大值原理：

$$\sup_\omega \phi^* = \phi^*(x_R) = \phi(x_R) = \sup_\omega \phi, \tag{4.31a}$$

$$\inf_\omega \phi^* = \phi^*(x_L) = \phi(x_L) = \inf_\omega \phi. \tag{4.31b}$$

吉布斯约束与最大值原理之间有如下联系。

引理 4.8（吉布斯约束与最大值原理）。设解析剖面 $\phi^* \in H^1(\Omega)$ 在每个 ω_j，$j = 1, \ldots, J$ 上均为单调的，并设 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$是满足 $\mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0, j = 1, \ldots, J$ 的近似，其中 ϕ^* 在 $\partial\Omega$ 上是插值的。那么 ϕ^* 在 Ω 上满足最大值原理。

为了在整个区域上消除吉布斯现象，策略是要求 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega_j}(\phi^*) \leq 0$，对于 $j = 1$、……、J。我们注意到，该策略的实际适用性

取决于对 Ω 进行适当的细分。在下一小节中，我们将在最佳逼近问题的背景下讨论吉布斯约束。我们将在有限元的背景下，于第 4.4 节。

4.3. 吉布斯约束下的最佳逼近问题

现在给定 $\phi \in H^1(\Omega)$，并考虑以下最佳逼近问题：

$$\phi^* = \operatorname*{arginf}_{\theta^* \in \mathcal{K}} \|\phi - \theta^*\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.32a}$$

其中，可行集定义为：

$$\mathcal{K} := \left\{ \phi^* \in H^1(\tilde{\Omega}) : \quad \mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0, \ j = 1, ..., J \right\}. \tag{4.32b}$$

我们注意到，一般而言 $\mathcal{K}$不存在严格可行点。例如，在 Ω 中$\phi \equiv 0$的情况下，有 $\mathscr{G}_{\phi,\ \omega_j}(\phi^*) = 0$当 $j = 1$，……，J时。下文中我们排除这一平凡情形。

研究最佳逼近问题的标准技术是基于梯度的方法。然而，我们指出，由于符号函数的出现，$\phi^* \to \mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^*)$ 的盖托导数不存在。为采用标准梯度方法，我们对不可微的约束函数作如下正则化。引入参数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，并定义可微正则化 $|\cdot|_\varepsilon$：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 以及 $\operatorname{sgn}_\varepsilon$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$|r|_\varepsilon := \left| r^2 + \varepsilon^2 \right|^{1/2}, \tag{4.33a}$$

$$\operatorname{sgn}_\varepsilon(r) := r\,|r|_\varepsilon^{-1}, \tag{4.33b}$$

满足以下关系：

$$\mathrm{D}\,|r|_\varepsilon = \operatorname{sgn}_\varepsilon(r). \tag{4.34}$$

接下来，我们引入正则化泛函

$$\mathscr{G}^\varepsilon_{\phi,\omega}(\phi^*) := \int_\omega g^\varepsilon_\phi(\phi^*)\ \mathrm{d}x, \tag{4.35}$$

其中，泛函 g^ε_ϕ 定义为：

$$g^\varepsilon_\phi(\phi^*) := |\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon - \operatorname{sgn}_\varepsilon(\mathrm{D}\phi^*)\,\mathrm{D}\phi = -\operatorname{sgn}_\varepsilon(\mathrm{D}\phi^*)\,\mathrm{D}\phi' + \varepsilon^2\,|\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon^{-1}. \tag{4.36}$$

现在显然，正则化泛函 $\mathscr{G}^\varepsilon_{\phi,\ \omega}(\phi^*)$ 在盖托意义下可微。$\mathscr{G}^\varepsilon_{\phi,\ \omega}(\phi^*)$ 的盖托导数记为 $\mathrm{d}\mathscr{G}^\varepsilon_{\phi,\ \omega}(\phi^*)(w)$，其表达式为：

$$\mathrm{d}\mathscr{G}^\varepsilon_{\phi,\omega}(\phi^*)(w) = \int_{\omega_j} |\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon^{-1}\,\mathrm{D}\phi^*\mathrm{D}w - \varepsilon^2\,|\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon^{-3}\,\mathrm{D}\phi\mathrm{D}w\ \mathrm{d}x. \tag{4.37}$$

关于正则化吉布斯泛函的凸性，我们有以下性质

。

命题 4.3（吉布斯泛函的凸性）。泛函 g^{ε}_{ϕ} 是拟凸的：

$$g^{\varepsilon}_{\phi,\omega}(\zeta\phi^*_1 + (1-\zeta)\phi^*_2) \leq \max\left\{g^{\varepsilon}_{\phi,\omega}(\phi^*_1), g^{\varepsilon}(\phi^*_2)\right\}, \tag{4.38}$$

对于所有 $\phi^*_1, \phi^*_2 \in H^1(\tilde{\Omega})$，$\zeta \in [0,1]$。泛函 $\mathscr{V}_{\phi,\,\omega}$ 是凸的，但 $\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\,\omega}$ 通常不是（拟）凸的。

现在考虑最佳逼近问题：

$$\phi^* = \underset{\theta^* \in \mathcal{K}^{\varepsilon}}{\operatorname{arginf}} \|\phi - \theta^*\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.39a}$$

其中正则化可行集定义为：

$$\mathcal{K}^{\varepsilon} := \left\{\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega}) : \quad \mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0,\ j = 1, ..., J\right\}. \tag{4.39b}$$

命题 4.3 的一个推论是可行集 $\mathcal{K}^{\varepsilon}$ 不是凸集。这是由于 g^{ε}_{ϕ}中出现了（正则化的）符号函数。

注释 4.2。由（正则化的）泛函$\mathscr{V}_{\phi,\,\omega}(\phi^*) \leq 0$所确定的可行集，即

$$\left\{\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega}) : \quad \mathscr{V}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0, j = 1, ..., J\right\}, \tag{4.40}$$

with

$$\mathscr{V}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) = \int_{\omega} |\mathrm{D}\phi^*|_{\varepsilon} - |\mathrm{D}\phi|_{\varepsilon}\ \mathrm{d}x, \tag{4.41}$$

是凸的。此外，请注意，泛函的拟凸性足以保证与之关联的可行集是凸的。

现在，我们引入约束最佳逼近问题（4.39）的一阶最优性 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件。我们注意到，由于可行集 $\mathcal{K}^{\varepsilon}$缺乏凸性，KKT 条件的解只能保证是局部最优解。若将 $\mathcal{K}^{\varepsilon}$ 替换为（4.40）中的可行集，则可保证全局最优。

定理 4.3（Karush-Kuhn-Tucker 条件）。函数 $\phi^* \in \mathcal{K}$ 是问题 (4.39) 的局部最优解，当且仅当存在拉格朗日乘子$\lambda_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, \ldots\ldots, J)$，使得以下 *Karush-Kuhn-Tucker*（*KKT*）条件成立：

驻点条件：

Find $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega}), \lambda_j \in \mathbb{R}$ *for* $j = 1, ..., J$ *such that*

$$(\phi^* - \phi, w)_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*)(w) = 0 \quad \textit{for all } w \in H^1(\tilde{\Omega}), \tag{4.42a}$$

原始可行性：

$$\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) \leq 0 \quad \textit{for } j = 1, ..., J, \tag{4.42b}$$

对偶可行性：

$$\lambda_j \geq 0 \quad \textit{for } j = 1, ..., J, \tag{4.42c}$$

互补松弛：

$$\lambda_j \mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^*) = 0 \quad \textit{for } j = 1, ..., J. \tag{4.42d}$$

命题 4.4（齐次 Gibbs 泛函）。泛函 $\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\ \omega}$ 满足以下性质：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega}(\phi^*)(\phi^*) = V_\omega(\phi^*) \geq 0. \tag{4.43}$$

证明。将 $w = \phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 代入 (4.37) 得到

$$\mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega}(\phi^*)(\phi^*) = \int_\omega \mathrm{d}g^{\varepsilon}_{\phi}(\phi^*)(\phi^*)\ \mathrm{d}x, \tag{4.44a}$$

$$\mathrm{d}g^{\varepsilon}_{\phi}(\phi^*)(\phi^*) = |\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon - \varepsilon^2 |\mathrm{D}\phi^*|_\varepsilon^{-3} \left(|\mathrm{D}\phi^*|^2_\varepsilon + \mathrm{D}\phi \mathrm{D}\phi^* \right). \tag{4.44b}$$

被积函数 $\mathrm{d}g^{\varepsilon}_{\phi}(\phi^*)(\phi^*)$ 在 $\mathrm{D}\phi^* = 0$ 时为零。另一方面，当 $\mathrm{D}\phi^* \neq 0$ 时，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{d}g^{\varepsilon}_{\phi}(\phi^*)(\phi^*) = |\mathrm{D}\phi^*| \geq 0. \tag{4.45}$$

□

引理 4.9（正性）。优化问题的解 (4.32) 具有以下内积形式，且为正：

$$(\phi', \phi^*)_{\mathcal{H}} \geq 0. \tag{4.46}$$

证明。将 $w = \phi^*$ 代入驻定条件（4.42a），得到：

$$-(\phi', \phi^*)_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega}(\phi^*)(\phi^*) = 0, \tag{4.47}$$

其中我们采用了代换 $\phi' = \phi - \phi^*$。取极限 $\varepsilon \to 0$，利用 命题 4.4 并应用对偶可行性（4.42c），即可得到结论。

□

4.4. 有限元空间中的最佳逼近

在本小节中，我们寻求满足吉布斯约束的有限元近似。考虑以下最佳逼近问题：

$$\phi^h = \operatorname*{arginf}_{\theta^h \in \mathcal{K}_{p,\alpha}} \|\phi - \theta^h\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.48a}$$

其中，对于次数为 p 且正则性为 α 的有限元近似空间，可行集 $\mathcal{K}_{p,\ \alpha}$ 定义为：

$$\mathcal{K}_{p,\alpha} := \left\{ \phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\alpha} : \quad \mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^h) \leq 0, j = 1, ..., J, \right\}. \tag{4.48b}$$

接下来，我们根据（4.35）-（4.36）对不可微约束进行正则化，并引入正则化问题的 KKT 条件。

驻点条件：

Find $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,p,\alpha}, \lambda_j \in \mathbb{R}$ for $j = 1, ..., J$ *such that*

$$\left(\phi^h - \phi, w^h\right)_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^h)(w^h) = 0 \quad \text{for all } w^h \in \mathcal{V}^h_{0,p,\alpha}, \tag{4.49a}$$

原始可行性：

$$\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^h) \leq 0 \quad \text{for } j = 1, ..., J, \tag{4.49b}$$

对偶可行性：

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, ..., J, \tag{4.49c}$$

互补松弛：

$$\lambda_j \mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\omega_j}(\phi^h) = 0 \quad \text{for } j = 1, ..., J. \tag{4.49d}$$

问题（4.49）可写成如下代数形式：求 $\boldsymbol{\phi}^h$, $\boldsymbol{\lambda}$ 使得：

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}^h = \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}^h), \tag{4.50a}$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}^h) \leq 0, \tag{4.50b}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0, \tag{4.50c}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}^h) = 0, \tag{4.50d}$$

其中，矩阵 $\mathbf{M} = [M_{AB}] \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{dof}} \times n_{\mathrm{dof}}}$ 和 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}^h) = [G_{jB}] \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{el}} \times n_{\mathrm{dof}}}$ 定义如下：

$$M_{AB} = (N_A, N_B)_{\mathcal{H}}, \tag{4.51a}$$

$$G_{jB} = \int_{\omega_j} \left|\mathrm{D}\phi^h\right|_{\varepsilon}^{-1} \mathrm{D}\phi^h \mathrm{D}N_B - \varepsilon^2 \left|\mathrm{D}\phi^h\right|_{\varepsilon}^{-3} \mathrm{D}\phi \mathrm{D}N_B \ \mathrm{d}x, \tag{4.51b}$$

向量为 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}^h) = [\mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^h)] \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{el}}}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_j]$。其中，$n_{\mathrm{dof}}$ 表示自由度的数量。

注释 4.3（计算约束解）。本文采用精心挑选的例子，以便构造约束最佳逼近问题（4.48）的解。使用标准的基于梯度的方法计算约束解通常非常困难。原因包括：

诸多挑战。首先，在某些情况下，可行解集中的自由度可能非常少，甚至可能出现可行集仅由一个函数构成的情况（见注释 4.4）。使用基于梯度的方法很难找到这样的解。其次，该问题通常是非凸的，因此基于梯度的方法可能会陷入局部最优点。这使得一大类强大的凸优化方法无法应用（这些方法通常依赖 KTT 条件）。第三，该问题具有高度非线性的特点。这意味着标准的牛顿-拉夫森线性化方法往往无法收敛，因此必须采用效率较低的方法，例如拟牛顿类方法。最后，我们注意到，在取 L^q 时，计算 $q \to 1$-最佳逼近也会遇到类似问题，尤其是在 $q = 1$ 时。

我们从不连续逼近空间（$\alpha = -1$）开始。为了在实践中应用吉布斯约束，需要选定子域 ω_j。我们选取子集 $\omega_j \subset \Omega$ $j = 1, \ldots\ldots, J$ 作为有限元：$\omega_j = K_j$。注意，集合$\mathcal{K}_{p,\,-1}$ 非空（其中至少包含所有分段常数）。对于不连续分片线性基函数，可行集是凸的（请回想，一般情况下它并不凸）。

定理 4.4（$\mathcal{K}_{1,\,-1}$的凸性）。可行集 $\mathcal{K}_{1,\,-1}$ 是凸的。

证明。设 $\phi_1^h,\ \phi_2^h \in \mathcal{K}_{1,\,-1}$ 已给定。固定一个单元 $K_i = (x_i,\ x_{i+1})$；在此单元上，函数 ϕ_1^h和 ϕ_2^h可表示为 $\phi_1^h = a_1 x + b_1$和 $\phi_2^h = a_2 x + b_2$，其中 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ 为某些标量。由于 $\phi_1^h,\ \phi_2^h \in \mathcal{K}_{1,\,-1}$，我们现在得到：

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi_1^h) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\mathrm{D}\phi_1^h\right| - \operatorname{sgn}\left(\mathrm{D}\phi_1^h\right) \mathrm{D}\phi \,\mathrm{d}x \\ &= (x_{i+1} - x_i)|a_1| - \operatorname{sgn}(a_1)\left(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)\right) \leq 0, \end{aligned} \tag{4.52a}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi^h) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\mathrm{D}\phi_2^h\right| - \operatorname{sgn}\left(\mathrm{D}\phi_2^h\right) \mathrm{D}\phi \mathrm{d}x \\ &= (x_{i+1} - x_i)|a_2| - \operatorname{sgn}(a_2)\left(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)\right) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.52b}$$

不失一般性，我们假设 $\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i) > 0$。由（4.52），可得$a_1 > 0$ 以及 $a_2 > 0$，因此可以写成：

$$(x_{i+1} - x_i)a_1 - (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)) \leq 0, \tag{4.53a}$$

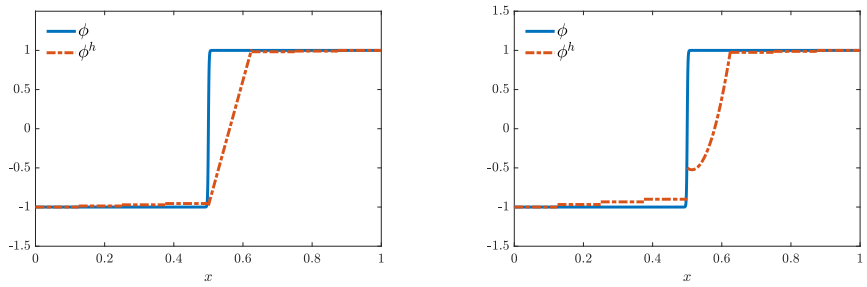
$$(x_{i+1} - x_i)a_2 - (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)) \leq 0. \tag{4.53b}$$

现在，令 $\zeta \in [0,1]$ 并定义 $\phi_\zeta^h = \zeta\phi_1^h + (1-\zeta)\phi_2^h$。凸性可直接由（4.53）得出：

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi_\zeta^h) = &\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\mathrm{D}\phi_\zeta^h\right| - \operatorname{sgn}\left(\mathrm{D}\phi_\zeta^h\right) \mathrm{D}\phi \mathrm{d}x \\ &= (x_{i+1} - x_i)(\zeta a_1 + (1-\zeta)a_2) - (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)) \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

□

现在考虑满足逐元素吉布斯约束的最佳逼近问题（4.48a）-（4.48b），其内罚最优性条件为（2.18）-（2.19）。注意，盖托导数 $\mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\ \omega_j}$ 线性无关。因此，拉格朗日乘子 λ_j 仅取决于定义在 K_j上的量。我们在图 8 中展示了满足逐元素吉布斯约束的光滑阶跃函数的内罚最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，其中 $p = 1,\ 2$。



(a) $p = 1$。　　(b) $p = 2$。

图 8：满足逐元素吉布斯约束的光滑阶跃函数 $\phi = \phi_{0.5}$ 的内罚最佳逼近$\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，其中 $n_{\mathrm{el}} = 8$，对应不同的 p。

我们观察到，受约束的内罚最佳逼近没有出现过冲或欠冲。需要注意的是，这一性质一般并不成立。并非所有可行解都是单调的，因为加上一个分段常数并不会改变吉布斯泛函。此外，两种近似在尖锐层之外都偏离了一个较小的分段常数。随着罚参数 η 增大，这种现象会减弱。

接下来，我们关注 $\alpha = 0$ 的情形，即连续逼近空间。同样，取 $\omega_j = K_j$。容易看出 $\mathcal{K}_{p,\ 0}$ 非空。具体而言，$\mathcal{K}_{1,\ 0}$ 包含分段线性插值函数，且 $\mathcal{K}_{1,\ 0} \subset \mathcal{K}_{p,\ 0}$ 对于 $p \geq 1$。考虑带有 4.48a)-(4.48b) 的最佳逼近问题，并令 $\mathcal{H} = H^1_0(\Omega)$，可得以下引理。

引理 4.10（H^1_0-正交连续线性函数）。设 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,1,0}$ 为 H^1_0-最佳逼近 $\phi \in \mathcal{V}$。我们具有以下性质：

$$\int_{K_i} \mathrm{D}\phi^h \mathrm{D}\phi' \ \mathrm{d}x = 0, \tag{4.55}$$

对于所有单元 $K_i = (x_{L,\ i}, x_{R,\ i}) \quad i = 1, \ldots, n_{\mathrm{el}}$。

证明。 应用第一个格林恒等式，我们得到：

$$\int_{K_i} \mathrm{D}\phi^h \mathrm{D}\phi' \,\mathrm{d}x = \int_{\partial K_i} n\mathrm{D}\phi^h \phi' \,\mathrm{d}a - \int_{K_i} \mathrm{D}^2\phi^h \phi' \,\mathrm{d}x, \tag{4.56}$$

其中 n 为外单位法向量。注意到，对于分段线性多项式，第二项为零，因此剩下：

$$\int_{K_i} \mathrm{D}\phi^h \mathrm{D}\phi' \,\mathrm{d}x = \phi'(x_{R,i})\mathrm{D}\phi^h(x_{R,i}) - \phi'(x_{L,i})\mathrm{D}\phi^h(x_{L,i}). \tag{4.57}$$

现在回想引理 3.1 指出， H_0^1-投影算子给出节点精确的解（即 $\phi'(x_{R,i}) = \phi'(x_{L,i}) = 0$），由此证明得证。 □

引理 4.11（拉格朗日乘子消失）。假设该近似满足齐次边界条件，$\phi^h \in \mathcal{V}^h_{0,1,0}$。*KKT* 条件 λ_j 中的拉格朗日乘子(4.49) 在 ϕ^h 在 ω_j上不为常数时消失，其中$\varepsilon \to 0$。

证明。注意到 H_0^1-最佳逼近是单调且插值的，引理 4.6 保证吉布斯约束$\mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi^h) \leq 0$ （对于 $\varepsilon \to 0$）。因此，式（4.49a）中的第一项为零（与引理 4.10一致），剩下：

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j \mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,K_j}(\phi^h)(w^h) = 0, \tag{4.58}$$

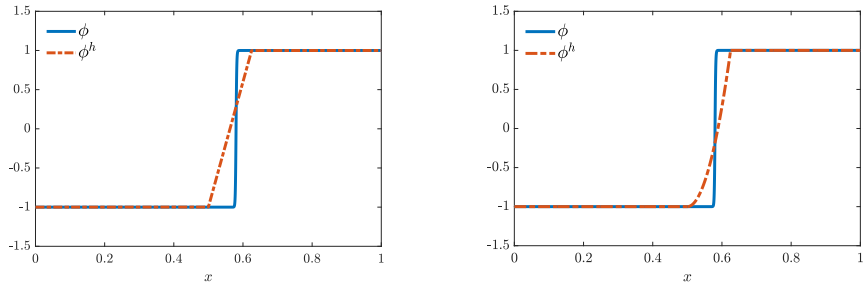
对于所有 $w^h \in \mathcal{V}^h_{0,\,1,\,0}$。代入 $w^h = \phi^h$，取极限 $\varepsilon \to 0$ 并利用命题 4.4的齐次性可得：

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j V_{\omega_j}(\phi^h) = 0. \tag{4.59}$$

注意到 $\lambda_j \geq 0$和 $V_\omega(\phi^h) \geq 0$，可得 $\lambda_j V_{\omega_j}(\phi^h) = 0$，其中 $j = 1, \ldots J$。如果 ϕ^h 在 ω_j上不是常数，则有 $V_{\omega_j}(\phi^h) > 0$，从而 $\lambda_j = 0$。 □

注意，由于基函数具有重叠支撑，盖托导数 $\mathrm{d}\mathscr{G}^{\varepsilon}_{\phi,\,K_j}$ 是线性相关的。因此，拉格朗日乘子 λ_j，$j = 1, \ldots n_{el}$ 是非局部的，即 λ_j 不仅取决于在 ω_j上定义的量。受逐元素吉布斯约束的光滑阶跃函数（其中 $a = 0.58$）的 H_0^1-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\,0}$， $p = 1$， 2 如图 9所示。我们在两幅图中都观察到插值单调逼近。此外，对于所有单元编号$j = 1, \ldots J$，有 $\mathscr{G}_{\phi,\,K_j}(\phi^h) = 0$。一般而言，以下定理成立。

定理 4.5（正则性的单调插值函数 $\alpha = 0$）。约束最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D,\,p,\,0}$ 由单调剖面 (4.48a)-(4.48b) 的问题定义 ϕ 是一个单调插值函数。



(a) $p = 1$。 (b) $p = 2$。

图 9：对于不同的 p，满足逐元素吉布斯约束的光滑阶跃函数 $\phi = \phi_{0.58}$ 的 $n_{\text{el}} = 8$ 下的 H_0^1-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ 0}$。

注 4.4（唯一性）。根据定理 4.5，多项式次数为 $p = 1$ 时的最佳逼近是$\mathcal{K}_{1,\ 0}$中的唯一可行解。因此，该函数与最优性条件 $\mathcal{H}$无关。

现在我们将注意力转向更高阶的光滑（$\alpha \geq 1$）逼近空间$\mathcal{V}^h_{D,\ p,\ \alpha}$。下面的命题表明，对于 $\omega_j = K_j$，一般而言解并不存在。

命题 4.5（不可行的逐元素约束）。约束最佳逼近问题(4.48a)-(4.48b) 在 $\omega_j = K_j$ 和 $a = 0.58$ 条件下，一般而言对 $\alpha \geq 1$没有解。

这是因为观察到，对于$\alpha = -1$ 和 $\alpha = 0$，插值解存在，但对于 $\alpha \geq 1$则不存在。我们以参数为 3.2的光滑阶跃函数（ $a = 0.58$ ）为例，在 图 10中进行说明。这里，我们展示了若干采用二次基函数（$p = 2$）且正则性为$\alpha = 1$的尖锐有限元逼近。有限元近似至少需要 2 个单元才能捕捉尖锐层。因此，必然存在一个单元 K_i，使得 $\mathcal{G}_{\phi,\ K_i}(\phi^h) > 0$，因此约束最佳逼近问题（4.48a)-（4.48b）无解。

一般而言，次数为 p 的 B样条基函数具有以下局部支撑：

$$\operatorname{supp}(N_{i,p}) = (\xi_i, \xi_{i+p+1}), \tag{4.60}$$

它取决于正则性 α。B样条基函数 $N_{i,p}$ 的支撑最多覆盖 $p - k + 2 = \alpha + 2$ 个单元。相邻 B样条基函数共享支撑：

$$\operatorname{supp}(N_{i,p}) \cap \operatorname{supp}(N_{i+1,p}) = (\xi_{i+1}, \xi_{i+p+1}), \tag{4.61}$$

由至多 $\alpha + 1$ 个单元组成。为了找到能实现最精确近似的 Ω 细分，我们选择 ω_j 作为并集

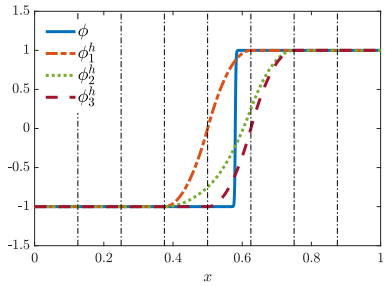
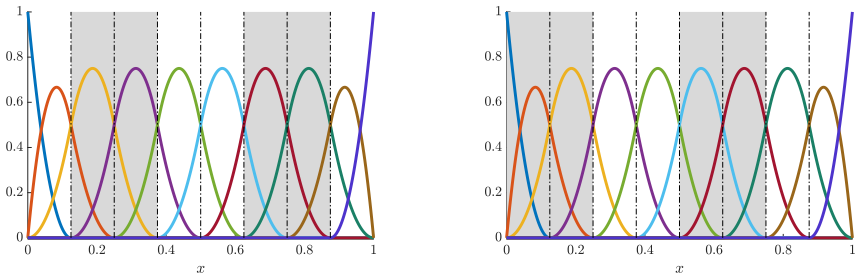


图 10：光滑一维阶跃函数 $\phi = \phi_{0.58}$ 的尖锐有限元逼近 ϕ_1^h，ϕ_2^h，$\phi_3^h \in \mathcal{V}_{D,\ 2,\ 1}^h$，其中 $n_{\text{el}} = 8$。竖直虚线表示单元边界。

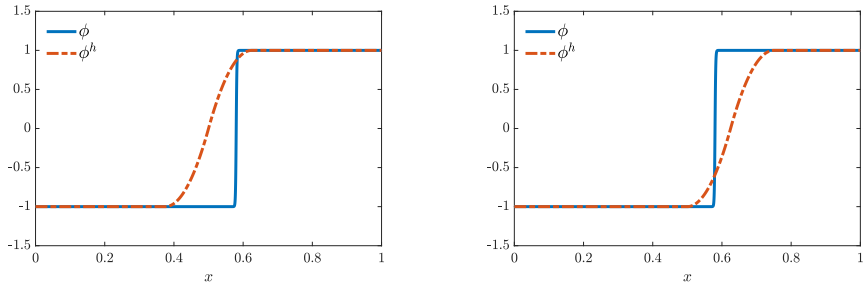
的 $\alpha + 1$ 相邻单元。我们将区域 Ω 细分为互不相交的子域$\omega_j = \cup_{i \in \mathcal{I}_j} K_i$，其中 $\mathcal{I}_j$ 表示一个指标集。注意，移动单元组会产生不同的细分（对于 $\alpha > 0$）。因此，该构造并不唯一，我们考虑 $\alpha + 1$ 种可能性。对于第一个指标集 $\mathcal{I}_1$，我们有以下选项$\{1\}$，……，$\{1, \ldots, \alpha + 1\}$。后续指标集包含接下来的 $\alpha + 1$ 个连续数字，最后一个集合以最后一个单元编号结束。我们在图 11中展示了两种可能的细分。



(a) 细分 1。　　(b) 细分 2。

图 11：当 $n_{\text{el}} = 8$ 时，$\mathcal{V}_{2,\ 1}^h$ 的两种可能细分。竖直虚线表示单元边界。

在图 12中，我们展示了受吉布斯约束的光滑阶跃函数在两个细分的子域上的 H_0^1-最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}_{D;2,\ 1}^h$。可以看到，这两个近似都完全不存在过冲与欠冲。一般而言，具有 $\alpha \geq 1$ 的约束最佳逼近问题是否存在可行解仍是一个悬而未决的问题。



(a) 细分 1。　　(b) 细分 2。

图 12：光滑阶跃函数 H_0^1 的最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;2,\ 1}$，满足 $n_{\text{el}} = 8$ 的约束，其中该函数 $\phi = \phi_{0.58}$ 在图中所示的各子域上受到吉布斯约束：图 11。

5. 消除高维中的吉布斯现象

在本节中，我们将第4节中提出的消除吉布斯现象的策略推广到高维。首先，我们在第5.1节中介绍在一般函数空间中消除吉布斯现象的吉布斯约束。随后，在第5.2节中，我们讨论有限元空间中最佳逼近背景下的吉布斯约束。

5.1. 吉布斯约束

我们基于第4节中介绍的一维框架，构造给定多维子域 ω 上的吉布斯约束。高维吉布斯约束设计中的主要区别特征是方向性的概念。因此，过冲与欠冲的出现取决于观察角度，这意味着高维中不存在单调性的精确定义。为构造一组约束，我们转而力求排除特定方向上的吉布斯现象。我们先假设一个任意方向 $\mathbf{e}$，然后给出 $\mathbf{e}$ 的一个特定闭式表达式。

定义 5.1（方向性吉布斯泛函）。函数 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 关于给定函数 $\phi \in H^1(\Omega)$ 且在 $\omega \subset \Omega$ 上的方向性吉布斯泛函定义为：

$$\mathcal{G}_{\phi,\omega}(\phi^*;\mathbf{e}) := \int_\omega g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{5.1}$$

其中泛函 g_ϕ 定义为：

$$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) := |\mathbf{e}\cdot\nabla\phi^*| - \operatorname{sgn}(\mathbf{e}\cdot\nabla\phi^*)\,\mathbf{e}\cdot\nabla\phi = -\operatorname{sgn}(\mathbf{e}\cdot\nabla\phi^*)\,\mathbf{e}\cdot\nabla\phi', \tag{5.2}$$

且$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$是一个单位向量（即 $\|\mathbf{e}\|_2 = 1$）。

在下面的注释中，我们将说明这种一维吉布斯泛函推广的动机。

注释 5.1（逐点动机吉布斯约束）。定义沿 $\mathbf{e}$ 方向的投影算子 $\mathcal{P}_\mathbf{e} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，即 $\mathcal{P}_\mathbf{e}\mathbf{v} := \mathbf{P}_\mathbf{e}\mathbf{v}$，其投影矩阵为 $\mathbf{P}_\mathbf{e} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$。因此，$\nabla\phi^*$ 和 $\nabla\phi$ 沿 $\mathbf{e}$ 方向的投影分别为 $\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi^*$ 和 $\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi$。局部泛函 $g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$ 的形式现在可由以下等价关系得到解释：

$$\left.\begin{array}{ll} \|\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi^*\|_2 - \|\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi\|_2 \le 0 & \Leftrightarrow \quad |\mathbf{e}\cdot\nabla\phi^*| \le |\mathbf{e}\cdot\nabla\phi|, \\ \operatorname{sgn}(\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi^*\cdot\mathbf{e}) = \operatorname{sgn}(\mathcal{P}_\mathbf{e}\nabla\phi\cdot\mathbf{e}) & \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\mathbf{e}\cdot\nabla\phi^*) = \operatorname{sgn}(\mathbf{e}\cdot\nabla\phi) \end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) \le 0. \tag{5.3}$$

我们有如下简单但重要的性质。

命题 5.1（方向性吉布斯泛函关于相反方向的不变性）。方向性吉布斯泛函关于将方向 $\mathbf{e}$ 的符号取反是不变的：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*;-\mathbf{e}) = \mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*;\mathbf{e}). \tag{5.4}$$

为继续讨论，我们简要研究泛函 $g_\phi = g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$。在下面的命题中，我们将讨论其符号如何取决于单位向量$\mathbf{e}$。

命题 5.2（方向 g_ϕ 的符号）。泛函 $g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$ 的符号根据单位向量 $\mathbf{e}$ 按以下方式变化：

$$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}\cdot\nabla\phi' > 0 \ \ \textit{and} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi^* > 0 \ \ \textit{if} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi > 0 \\ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi' < 0 \ \ \textit{and} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi^* < 0 \ \ \textit{if} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi < 0, \end{cases} \tag{5.5a}$$

$$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}\cdot\nabla\phi^* = 0 \ \ \textit{or} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi' = 0, \tag{5.5b}$$

$$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}\cdot\nabla\phi' < 0 \ \ \textit{or} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi^* < 0 \quad \textit{if} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi > 0 \\ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi' > 0 \ \ \textit{or} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi^* > 0 \quad \textit{if} \ \ \mathbf{e}\cdot\nabla\phi < 0. \end{cases} \tag{5.5c}$$

我们在 $g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$ 的符号随方向 $\mathbf{e}$ 变化的可视化结果（二维情形）见图 13。

一般而言，总存在一个方向 $\mathbf{e}$，使得 $g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) > 0$，如下述命题所示。

命题 5.3（$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$ 的上确界）。$g_\phi(\phi^*,\mathbf{e})$ 的上确界为

$$\sup_{\|\mathbf{e}\|_2=1} g_\phi(\phi^*,\mathbf{e}) = \begin{cases} \mathbf{b}\cdot\nabla\phi' & \textit{if} \ \ \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi' \ge 0 \\ \|\nabla\phi'\|_2 & \textit{if} \ \ \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi' < 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $\mathbf{b} \in \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \ \ \|\mathbf{a}\|_2 = 1, \ \ \mathbf{a}\cdot\nabla\phi^* = 0\}$。

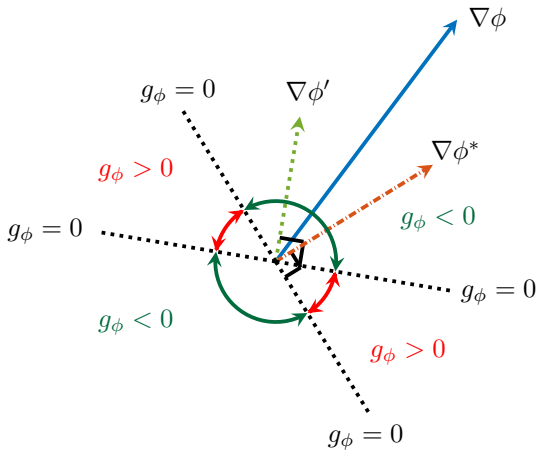


图 13：特定情形下 $g_\phi = g_\phi(\phi^*, \mathbf{e})$ 符号的二维可视化。绿色区域中的单位向量 $\mathbf{e}$ 对应 $g_\phi(\phi^*, \mathbf{e}) < 0$，红色区域中的单位向量对应 $g_\phi(\phi^*, \mathbf{e}) > 0$，而交点处的单位向量对应 $g_\phi(\phi^*, \mathbf{e}) = 0$。

证明。
区分以下两种情况：**(i)** $\nabla\phi^* \cdot \nabla\phi' < 0$ 和**(ii)** $\nabla\phi^* \cdot \nabla\phi' \geq 0$。

(i) 若 $\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* \geq 0$，则 g_ϕ 的上确界为 $\|\nabla\phi'\|_2$，并在 $\mathbf{e} = -\nabla\phi'/\|\nabla\phi'\|_2$ 处取得。类似地，若 $\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* < 0$，则 g_ϕ 的上确界仍为$\|\nabla\phi'\|_2$，并在 $\mathbf{e} = \nabla\phi'/\|\nabla\phi'\|_2$ 处取得。

(ii) 若$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* \geq 0$，则 g_ϕ是$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^*$中的递减函数。因此，当$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* = 0$时，$g_\phi$取得其上确界。同理，若$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* < 0$，则 g_ϕ 是$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^*$中的递增函数。同样，当$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi^* = 0$时，$g_\phi$ 取得其上确界。 □

命题 5.2 和 5.3 表明，要求在每个可能的方向上消除吉布斯泛函，虽然直觉上似乎能得到最理想的结果，但并不可取：选择方向 $\mathbf{e}$ 以使 $g_\phi = g_\phi(\phi^*, \mathbf{e})$ 最大化，随后将其用于吉布斯约束，只会使以下两种情况成为可行解：（i）零近似 $\phi^* = 0$ 和（ii）完美逼近 $\phi^* = \phi$。因此，我们必须选择一个方向 $\mathbf{e}$，使其导出的约束既合适又实用。需要考虑的相关方向是（近似）解梯度的函数：（i）$\mathbf{e} = \nabla\phi/\|\nabla\phi\|_2$，（ii）$\mathbf{e} = \nabla\phi^*/\|\nabla\phi^*\|_2$ 和

（iii）$\mathbf{e} = \nabla\phi'/\|\nabla\phi'\|_2$，由此得到以下表达式：

$$g_\phi\left(\phi^*, \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2}\right) = -|\nabla\phi\cdot\nabla\phi^*|^{-1}\|\nabla\phi\|_2^{-1}(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)(\nabla\phi\cdot\nabla\phi'), \tag{5.7a}$$

$$g_\phi\left(\phi^*, \frac{\nabla\phi^*}{\|\nabla\phi^*\|_2}\right) = -\|\nabla\phi^*\|_2^{-1}\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi', \tag{5.7b}$$

$$g_\phi\left(\phi^*, \frac{\nabla\phi'}{\|\nabla\phi'\|_2}\right) = -\|\nabla\phi'\||\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi'|^{-1}\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi'. \tag{5.7c}$$

为与一维情形保持一致，必须选择方向 $\mathbf{e} = \nabla\phi^*/\|\nabla\phi^*\|_2$；以下我们将只关注这一方向。

定义 5.2（吉布斯泛函与约束）。函数 $\phi^* \in H^1(\tilde{\Omega})$ 关于给定函数 $\phi \in H^1(\Omega)$ 且在$\omega \subset\Omega$上的吉布斯泛函定义如下：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) := \int_\omega g_\phi(\phi^*)\ \mathrm{d}\Omega, \tag{5.8}$$

其中，泛函 g_ϕ 定义如下：

$$g_\phi(\phi^*) := \begin{cases} -\|\nabla\phi^*\|_2^{-1}\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi' & \text{if } \nabla\phi^* \neq 0, \\ 0 & \text{if } \nabla\phi^* = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

相应的吉布斯约束为：

$$\mathscr{G}_{\phi,\omega}(\phi^*) \leq 0. \tag{5.10}$$

注意，吉布斯泛函具有框架不变性，且命题 4.2 和引理 4.4 的性质均继承自一维情形。

5.2. 有限元最佳逼近的吉布斯约束

在本小节中，我们将吉布斯约束应用于有限元最佳近似问题。同样，我们考虑以下一般形式的最佳近似问题：

求 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\alpha}$ 使得：

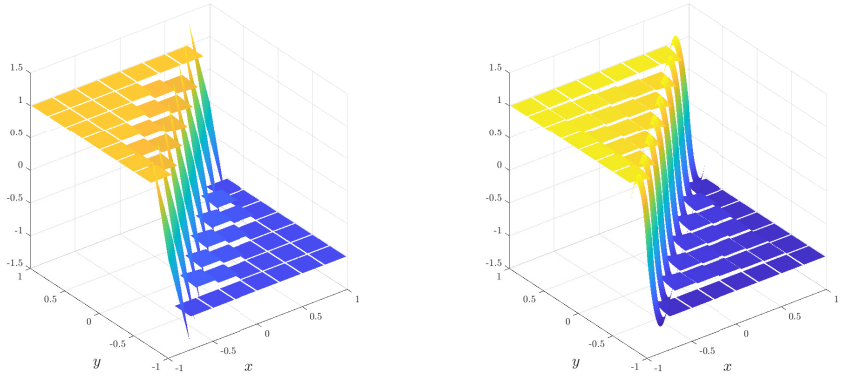
$$\phi^h = \operatorname*{arginf}_{\theta^h\in\mathcal{K}_{p,\alpha}} \|\phi - \theta^h\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.11a}$$

其中，可行集 $\mathcal{K}_{p,\alpha}$ 定义为：

$$\mathcal{K}_{p,\alpha} := \left\{\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\alpha} : \ \mathscr{G}_{\phi,\omega_j}(\phi^h) \leq 0, j = 1, ..., J\right\}. \tag{5.11b}$$

我们首先考虑不连续有限元逼近空间（$\alpha = -1$）。与一维情形类似，我们考虑（5.11a）-（5.11b），其中 $\mathcal{H}$ =IP，即内罚最佳逼近。我们选取子域 ω_j 作为有限元 K_j，$j = 1$，.....，n_{el}。约束优化问题的可行性源于逐单元常数解 ϕ^h的存在，对该解有

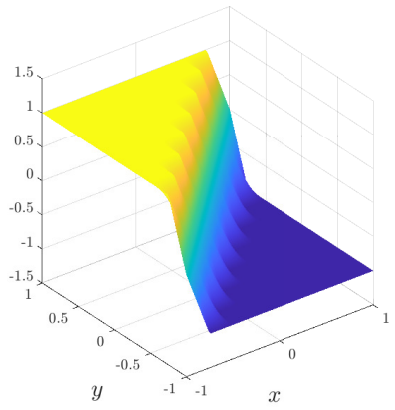
$\mathcal{G}_{\phi,\ K_j}(\phi^h) = 0$。同样，我们可以通过 KKT 条件（4.49）分析解的性质。在齐次边界条件下，有 $(\phi^h,\ \phi')_{\mathcal{H}} \geq 0$（引理 4.9）。在图 14中，我们展示了例 1 的剖面$\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，$p = 1$，2 的内罚最佳逼近，并施加了逐元素吉布斯约束。我们观察到，与第 3.2 节所示的非约束解相比，受约束的内罚最佳逼近显著减少了过冲与欠冲。。



(a) $p = 1$　　(b) $p = 2$

图 14：光滑阶跃函数的内罚最佳逼近 $\phi^h \in \mathcal{V}^h_{D;p,\ -1}$，在满足逐元素吉布斯约束且 $n_{\text{el}} = 8 \times 8$ 的条件下，针对不同的 p。

接下来，我们研究正则性为 $\alpha = 0$ 的情形。再次考虑尖锐层相对于网格倾斜的示例。在 图15 中，我们将最尖锐的可能近似 $\phi^h \in \mathcal{V}_{D,1,0}^h$ 可视化，并绘制吉布斯泛函 $\mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi^h)$ 的逐单元取值。我们注意到，最尖锐的近似是插值的。然而，吉布斯约束并未逐单元得到满足。与一维情形类似，可以将 ω_j 定义为若干单元的集合。然而，仔细检查后发现，唯一可能的选择是所有单元 $\omega = \cup_{j=1}^{n_{\mathrm{el}}} K_j$ 的集合，这将构成一个相当弱的条件。当使用由少数单元组成的子域 ω_j 时，似乎不可能得到可行解。这是基函数支撑的结果，因为其支撑包含多个单元。对于偏对角线上任意包含单元 K_i 且具有 $x \geq y$ ($x \leq y$) 的集合，吉布斯约束都会强制要求 $\phi_{K_i}^h$ 接近 1（以及 -1）。这与有限元逼近空间 $V_{D,1,0}^h$ 的连续性要求相冲突，并且在使用高阶多项式时仍然存在。



（a）近似 $\phi^h \in \mathcal{V}_1^h$,0·

						0.18	−0.33
					0.18	−0.33	0.18
				0.18	−0.33	0.18	
			0.18	−0.33	0.18		
		0.18	−0.33	0.18			
	0.18	−0.33	0.18				
0.18	−0.33	0.18					
−0.33	0.18						

（b）逐单元吉布斯泛函。

图 15：最尖锐的可能近似 $\phi^h \in \mathcal{V}_{1,0}^h$ （a）以及相应的逐单元吉布斯泛函值 $\mathscr{G}_{\phi,K_i}(\phi^h)$（b）。

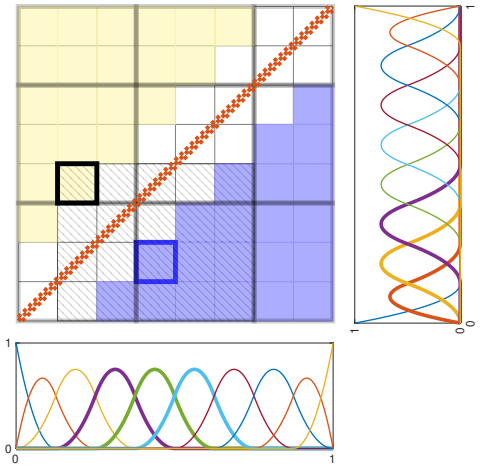


图16：将 8×8 单元域细分为最大包含 $3 \times$3个单元的组，逼近空间为$\mathcal{V}^h_{D,2,1}$。右侧和底部的插图展示了沿相应坐标轴的单变量基函数。

最后，我们考虑高阶光滑有限元逼近空间（$\alpha \geq 1$）。上述关于优化问题不可行性的讨论同样适用于高阶光滑近似。我们以具有二次B样条近似空间的光滑阶跃函数为例说明这一点 $\mathcal{V}^h_{D、2、1}$。考虑将单元细分为最大包含 3×3 个单元的组，如图16所示。为了满足中下部单元组上的吉布斯约束，我们必须在蓝框单元中有 $\phi^h = -1$。类似地，在黑框单元中，我们要求 $\phi^h = 1$。这两个条件是不相容的。

6. 结论

本文构造了一组积分约束，旨在消除有限元最佳逼近中的吉布斯现象。我们首先概述了有限元空间中最佳逼近的吉布斯现象。通过计算示例，我们说明，对于任意次数和正则性的有限元空间，投影到这些空间的标准投影在一维和二维中都会产生伪振荡（线性连续有限元下的一维 H^1_0-投影除外）。所提出的约束以全变差的概念为基础。为此，我们在一维中确立了吉布斯约束与插值逼近、单调逼近以及最大值原理之间的关联。此外，我们还展示了在一维中，当有限元空间为不连续或 $\mathcal{C}^0$-连续时，所提出的约束可以逐单元应用。对于正则性更高的有限元

空间，约束的积分域涉及多个单元。我们证明，施加这些约束可以消除连续有限元空间中的过冲与欠冲，并抑制不连续有限元空间中的过冲与欠冲。在高维中，这些约束沿解梯度的方向起作用。因此，这些约束仅适用于不连续有限元空间。我们证明，在这种情况下，过冲与欠冲也会大幅减少。

我们指出两个有待进一步研究的开放问题。第一个与上一条观察有关，即将约束集推广到高维的连续有限元空间。第二个开放问题是构造一种在实际计算中纳入这些约束的有限元方法。我们推测，一种可能的解决途径在于变分多尺度框架，尤其是通过 Evans 等人 [36] 以及第一作者 [32]的工作。

致谢

作者谨向 Thomas J.R. Hughes 致谢，感谢他就这一主题进行的富有启发性的讨论。MtE 得到了德国研究基金会（Deutsche Forschungsgemeinschaft，DFG）通过 Walter Benjamin 项目 EI 1210/1-1 提供的资助。DS 谨此感谢德国研究基金会（Deutsche Forschungsgemeinschaft，DFG）通过 Emmy Noether 奖 SCH 1249/2-1 提供的资助。

参考文献

1. E. Hewitt 和 R. E. Hewitt。《Gibbs-Wilbraham 现象：傅里叶分析中的一段历程》。精确科学史档案，第 129–160 页，1979 年。2. D. Gottlieb 和 C.-W. Shu。《关于吉布斯现象及其消除》。*SIAM* 综述，39：644–668，1997 年。3. M. M. Jacob。《Hermite 多项式级数展开中的吉布斯现象》。巴黎科学院报告，204：1540–1543，1937 年。4. S.-M. Kaber。《雅可比展开中的吉布斯现象》。应用分析通讯，10：133–148，2006 年。5. T. H. Fay 和 P. H. Kloppers。《正交多项式级数中的吉布斯现象》。《科学与技术中的数学教育国际杂志》，37：973–989，2006 年。6. J. M. Davis 和 P. Hagelstein。《若干经典正交多项式中的吉布斯现象》。数学分析与应用杂志，505：125574，2022 年。7. J. Foster 和 F. B. Richards。《分段线性逼近中的吉布斯现象》。《美国数学月刊》，98：47–49，1991 年。8. F. B. Richards。《样条函数中的一种吉布斯现象》。逼近理论杂志，66：334–351，1991 年。

9. J.-L. Guermond。《Lp 中求解一阶偏微分方程的有限元技术》。*SIAM* 数值分析杂志，42：714–737，2004 年。10. P. Houston、S. Roggendorf 和 K. G. Van Der Zee。《有限元空间中 Lq 最佳逼近的吉布斯现象》。*ESAIM*：数学建模与数值分析，56：177–211，2022 年。11. J. E. Lavery。《通过数学规划求解稳态无黏 Burgers 方程的非振荡解》。计算物理学杂志，79：436–448，1988 年。12. J. E. Lavery。《通过数学规划求解稳态二维守恒律》。*SIAM* 数值分析杂志，28：141–155，1991 年。13. R. B. Lowrie 和 P. L. Roe。《通过残差最小化求解守恒律》。计算物理学杂志，113：304–308，1994 年。14. B.-N. Jiang。《通过迭代重加权最小二乘有限元法求解对流问题的非振荡、非扩散解》。计算物理学杂志，105：108–121，1993 年。15. P. Houston、S. Roggendorf 和 K. G. van der Zee。《消除吉布斯现象：一种用于对流–扩散–反应方程的非线性 Petrov–Galerkin 方法》。计算机与应用数学，80：851–873，2020 年。16. A. N. Brooks 和 T. J. R. Hughes。《用于对流主导流的流线迎风/Petrov-Galerkin 公式，特别关注不可压缩 Navier–Stokes 方程》。计算力学与工程方法，32：199–259，1982 年。17. T. J. R. Hughes、L. P. Franca 和 M. Balestra。《计算流体力学的新有限元公式：V. 绕开 Babuška–Brezzi 条件：一种适用于等阶插值的稳定 Petrov-Galerkin 斯托克斯问题公式》。计算力学与工程方法，59：85–99，1986 年。18. T. J. R. Hughes、L. P. Franca 和 G. M. Hulbert。《流体动力学的新有限元公式：VIII. 对流–扩散方程的 Galerkin/最小二乘法》。计算力学与工程方法，73：173–189，1989 年。19. T. J. R. Hughes、M. Mallet 和 M. Akira。《计算流体力学的新有限元公式：II. 超越 SUPG》。计算力学与工程方法，54：341–355，1986 年。20. Y. Bazilevs、V. M. Calo、T. E. Tezduyar 和 T. J. R. Hughes。《针对对流主导过程的 YZβ不连续捕捉及其在动脉药物递送中的应用》。《国际流体数值方法杂志》，54：593–608，2007 年。21. M. F. P. ten Eikelder、Y. Bazilevs 和 I. Akkerman。《不连续捕捉的理论框架：结合变分多尺度分析与变分熵理论》。计算力学与工程方法，359：112664，2020 年。

22. S. N. Kruˇzkov. 多个自变量的一阶拟线性方程。苏联数学汇刊, 10:217, 1970. 23. J. Liu, H. Gomez, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, and C. M. Landis. 泛函熵变量：一种用于推导复杂流体热力学一致算法的新方法，特别适用于等温 Navier–Stokes–Korteweg 方程。计算物理学杂志, 248: 47–86, 2013. 24. J. Liu, C. M. Landis, H. Gomez, and T. J. R. Hughes. 液–汽相变：热力学理论、熵稳定数值格式与沸腾模拟。计算力学与工程方法, 297:476–553, 2015. 25. M. F. P. ten Eikelder and I. Akkerman. 稳定化格式的正确能量演化：通过动态正交小尺度和等几何分析揭示 VMS、SUPG 与 GLS 之间的关系。I：对流–扩散情形。计算力学与工程方法, 331:259–280, 2018. 26. M. F. P. ten Eikelder and I. Akkerman. 稳定化格式的正确能量演化：通过动态正交小尺度和等几何分析揭示 VMS、SUPG 与 GLS 之间的关系。II：不可压 Navier-Stokes 方程。计算力学与工程方法, 340:1135– 1159, 2018. 27. MFP ten Eikelder and I Akkerman. 一种新型弥散界面模型，以及一种用于具有表面张力和非匹配密度两相流的全离散保最大值原理能量稳定方法。计算力学与工程方法, 379:113751, 2021. 28. J.-L. Guermond, R. Pasquetti, and B. Popov. 非线性守恒律的熵黏度方法。计算物理学杂志, 230:4248–4267, 2011. 29. T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. 一种用于计算流体力学的新型有限元公式：I. 可压缩 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程的对称形式及热力学第二定律。计算力学与工程方法, 54:223–234, 1986. 30. A. Harten. 双曲守恒律的高分辨率格式。计算物理学杂志, 49:357–393, 1983. 31. A. Harten. 关于一类高分辨率全变差稳定有限差分格式。《*SIAM*数值分析杂志》, 21:1–23, 1984. 32. M. F. P. ten Eikelder and I. Akkerman. 变分熵：利用熵原理对全变差衰减性质进行连续局部推广。计算力学与工程方法, 355:261–283, 2019. 33. T. J. R. Hughes. 多尺度现象：格林函数、Dirichlet-to-Neumann 公式、亚网格尺度模型、气泡与稳定化方法的起源。计算力学与工程方法, 127: 387–401, 1995. 34. T. J. R. Hughes, G. Feij´oo., L. Mazzei, and J. B. Quincy. 变分多尺度方

法——计算力学的一种范式。计算力学与工程方法, 166:3–24, 1998. 35. Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrel, T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Scovazzi. 用于不可压流大涡模拟的基于变分多尺度残差的湍流建模。计算力学与工程方法, 197:173–201, 2007. 36. J. A. Evans, T. J. R. Hughes, and G. Sangalli. 在变分多尺度方法中施加约束和极大值原理。计算力学与工程方法, 199:61–76, 2009. 37. T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. 等几何分析：计算机辅助设计、有限元、非均匀有理B样条、精确几何与网格加密。计算力学与工程方法, 194:4135–4195, 2005. 38. J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs. 等几何分析：迈向计算机辅助设计与有限元分析的集成。Wiley，奇切斯特，2009. 39. Y. Bazilevs, L. Beirao da Veiga, J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and G. Sangalli. 等几何分析：h 加密网格的近似、稳定性与误差估计。《应用科学中的数学模型与方法》, 16:1031–1090, 2006. 40. S. K. F. Stoter, M. F. P. ten Eikelder, F. de Prenter, I. Akkerman, E. H. van Brummelen, C. V. Verhoosel, and D. Schillinger. 作为变分多尺度公式的 Nitsche方法及其导出的边界层细尺度模型。计算力学与工程方法, 382:113878, 2021. 41. S. K. F. Stoter, B. Cockburn, T. J. R. Hughes, and D. Schillinger. 从变分多尺度分析的视角看间断伽辽金方法。计算力学与工程方法, 388:114220, 2022. 42. K. Shahbazi. 内罚方法罚参数的显式表达式。计算物理学杂志, 205:401–407, 2005. 43. T. J. R. Hughes and G. Sangalli. 变分多尺度分析：细尺度格林函数、投影、优化、局部化与稳定化方法。《*SIAM*数值分析杂志》, 45:539–557, 2007.