稳定性条件与典范度量

John Benjamin McCarthy

提交的哲学博士学位论文

指导教师：Sir
Simon Donaldson 与
Dr Ruadha´ı
Dervan

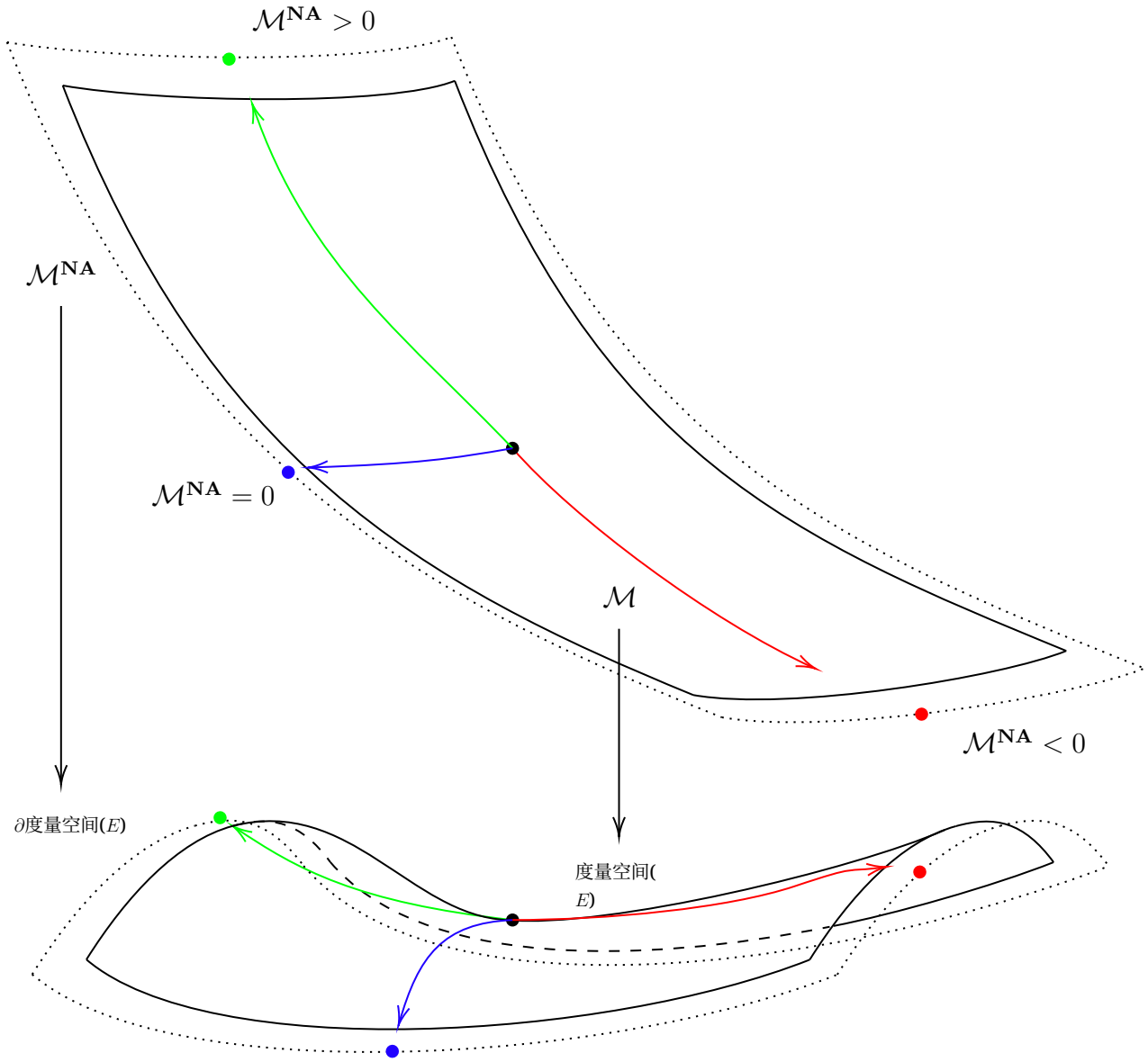
数学系，伦敦帝国学院 & 伦敦几何与数论学院

2023年2月

Imperial College London

LSGNT

献给我的迪杰勒汗。


$\mathcal{M}^{\mathbf{NA}} > 0$
$\mathcal{M}^{\mathbf{NA}}$
$\mathcal{M}^{\mathbf{NA}} = 0$
$\mathcal{M}$
$\mathcal{M}^{\mathbf{NA}} < 0$
∂度量空间(E)
度量空间(E)

摘要

在本论文中，我们研究这样一个原理：微分几何中的极值对象对应于代数几何中的稳定对象。在导论中，我们概述了这一原理最著名的实例，并着眼于后续章节所需的结果与背景。在第一部分 中，我们讨论近期与 Ruadha Z- 临界度量的概念，该概念是在与 Ruadha´ı Dervan 和 Lars Martin Sektnan [DMS21]的合作工作中提出的。我们证明了存在性与大体积极限下 Bridgeland 稳定性的一个类似概念之间的对应关系，并研究了远离该极限时次解条件的重要性质，包括确定该方程对应的 Donaldson 泛函和杨–米尔斯泛函的类似物。在第二部分 中，我们研究等变情形下 K¨ahler 纤维化上的最优辛联络这一近期理论。我们证明了它与全纯主丛上 Hermite–Einstein 度量的存在性之间的对应关系。

原创声明

我声明，除明确说明的情况外，本论文中的研究工作均为本人独立完成，且所有内容均已适当注明出处。尤其是，第 4 章 和 第 5 章 的大部分内容是与 Ruadhaí Dervan 和 Lars Martin Sektnan [DMS21] 合作完成的，本文在重现这些内容时着重体现了本人所作的贡献。

版权声明

本论文的版权归作者所有。除非另有说明，论文内容均依据知识共享署名 4.0 国际许可协议（CC BY）授权。根据此许可，您可以出于商业或非商业目的，以任何媒介或格式复制和传播材料。您也可以创作并传播本作品的修改版本，但须注明作者。

重新使用或分享本作品时，请明确说明许可条款，注明许可协议名称并附上许可文本链接。如对作品进行了改编，应说明作品已被修改并描述所作的修改。对于本许可未涵盖或英国版权法未允许的本作品用途，请向版权所有者征求许可。

致谢

首先，我要感谢我的导师 Simon Donaldson 和 Ruadha´ı Dervan，在我攻读博士学位期间给予我的支持和专业指导。特别感谢 Simon，他向我分享了自己对微分几何这一学科深刻而广博的见解，也让我懂得了如何发现有趣的问题；还要感谢 Ruadha´ı，他总能清晰、准确地阐释复微分几何和代数几何中的概念。导师们的帮助与指导对我的博士学业至关重要，也帮助我加深了对数学这门学科的理解与欣赏。

感谢 Lars Martin Sektnan 在我们合作期间与我进行的许多有益讨论，感谢我的学术同辈 Michael Hallam 和 Annamaria Ortu 在我们开启 K¨ahler 几何探索之旅时给予我的陪伴，也感谢复几何读书会的所有参与者带来的精彩且启发性的讨论与报告。还要感谢我在 LSGNT 的同学们，包括 Jaime、Jordan、Jordan、Qaasim、Wendelin、Federico、Federico、Liam、Corvin 等许多人，感谢我们那些愉快且偶尔富有成效的交谈，也感谢大家与我一同作为博士生熬过了疫情。

感谢 Richard Thomas 让我相信代数几何很简单，尽管我至今还没完全弄明白其中的道理；也感谢他引导我关注变形 Hermitian–Yang–Mills 方程，这一研究促成了本论文的主体工作。

感谢我的家人在我攻读博士学位期间给予支持与鼓励，尽管这份支持只能跨越重洋而来；也感谢他们在疫情期间奇迹般地帮我顺利通过澳大利亚边境。

最后，感谢 Diclehan 这些年来一直耐心地等我。若没有你的善良、喜悦和无尽支持，我的博士学位研究或许无法安然度过新冠肺炎疫情。尽管我们相隔万里，你仍对我不离不弃，这份坚持令人鼓舞，也令人惊叹；我深感荣幸能够拥有这一切。

本博士学位研究由英国工程与物理科学研究委员会资助，资助编号为 EP/L015234/1。感谢各位考官提出许多有益的意见并指出需要更正之处。

目录

1 引言 1

2 预备知识 部分 **9**

2.1 几何不变理论.10 2.1.1 Hilbert–Mumford 判据.12 2.1.2 Kempf–Ness 定理.13

2.2 全纯向量丛.17 2.2.1 稳定性.18 2.2.1.1 斜率稳定性.18 2.2.1.2 滤过.22 2.2.1.3 Gieseker 稳定性.26 2.2.2 杨–米尔斯联络.27 2.2.2.1 Hermite–Einstein 度量.29 2.2.2.2 陈联络的厄米几何 . . . . . 32 2.2.2.3 近似 Hermite–Einstein 度量 39 2.3

簇.41

2.3.1 K-稳定性.41 2.3.2 正则 K¨ahler 度量.45 2.3.3 具有 SL(2, ℂ) 作用的 Fano 三维簇的变形 . . . . . 47 2.3.3.1 Mukai–Umemura 三维簇.48 2.3.3.2 V_5流形.52 2.3.3.3 V_{14} 类中的一个奇异三维簇 52 2.3.3.4 一般性评论.62

I Z-临界度量 63

3 背景 65

3.1 镜像对称与 BPS 膜.65 3.1.1 大体积极限.67 3.1.2 BPS 膜.68 3.2 Π-稳定性与 Bridgeland 稳定性.70 3.2.1 多项式稳定条件.76 3.3 变形厄米杨–米尔斯方程.76 3.3.1 高秩.79

4 **Z-临界联络 81**

4.1 渐近 Z-稳定性.81 4.1.1 示例.92 4.2 Z-临界联络.97 4.3 次解.106 4.3.1 线性化与椭圆性.106 4.3.2 关于子簇的稳定性.112 4.4 曲面上的存在性.120 4.5 动量映射.125 4.5.1 变分泛函.131 4.6 未来方向.136 4.6.1 因 Freed–Kapustin–Witten 反常而作的修改 . . . . . 136 4.6.2 范畴 K¨ahler 几何.141 4.6.3 复形上的度量与变分方案.142

5 对应 大体积极限下的对应 145

5.1 存在性蕴含稳定性.145 5.2 稳定性蕴含存在性.154 5.2.1 步骤 1：斜率稳定情形.157 5.2.2 复结构变形.161 5.2.3 步骤 2：偏差阶以下的近似解.166 5.2.4 步骤 3：偏差阶上的稳定性.169

5.2.5 步骤 4：任意阶近似解.173 5.2.6 步骤 5：扰动至解.178 5.2.7 关于一般情形的备注.184

II K¨ahler纤维化 187

6 背景 189

6.1 最优辛联络.189 6.1.1 K¨ahler纤维化.189 6.1.2 全纯势与自同构.191 6.1.3 方程.194 6.2 纤维化的稳定性.198 6.3 主丛.204 6.3.1 Hermite–Einstein联络.204 6.3.2 稳定性.206 6.4 乘积纤维化.208

7 等变　纤维化 213

7.1 最优辛联络的存在性.213 7.1.1 诱导的最优辛联络.215 7.1.2 诱导的Hermite–Einstein结构.223 7.1.2.1 P 的另一种描述.224 7.1.2.2 P 上的联络的曲率.225 7.2 未来方向.226 7.2.1 稳定性.226 7.2.1.1 射影丛的情形.229 7.2.2 非等变纤维化的主丛 233

参考文献 **235**

第1章

引言

自 20 世纪末以来，以下基本原理一直指导着复几何领域的大量研究：

原理 1.1。 代数几何中的稳定对象对应于微分几何中的极值对象。

这一原理的起源可以追溯到黎曼关于代数曲线一致化的研究。具体而言，稳定或极值的含义取决于具体背景，而如今，原理 1.1已在点、簇、向量丛以及许多相关几何主题中，以著名定理的形式出现。

本文将探讨若干检验原理 1.1的新方向。在第一部分，我们将结合代数几何中一项令人振奋的新进展——*Bridgeland* 稳定性条件——研究这一原理。本部分在很大程度上重现了作者与 Ruadhaí Dervan 和 Lars Martin Sektnan [DMS21] 的合作成果，并着重介绍作者的贡献。

稳定性条件这一概念源自镜像对称的物理学，而这套新的代数几何理论的关键特征包括能够改变稳定性条件的选择（第一近似下，它由某个代数不变量 Z ——称为中心荷——给出），并且确实将这一稳定性概念从阿贝尔范畴推广到三角范畴。

因此，这一原理提出了一个诱人的可能性：我们或许能在微分几何中看到稳定性条件理论的若干新特征，例如以与具体情形的代数几何相契合的有趣方式改变微分方程，从而研究壁穿越行为；以及运用微分几何研究导出几何现象。

以下是研究镜像对称 B 侧 D-膜时广为流传的核心猜想，也是我们所处情形下与原理 1.1 相对应的猜想。它是辛几何中（大体上）同样含糊的 Thomas– Yau–Joyce 猜想的镜像版本，通常被归于 Douglas、Aspinwall–Douglas、Bridgeland、Leung–Yau–Zaslow、Maria˜no–Minasian– Moore–Strominger、Collins–Jacob–Yau，以及那位单名的“Physics” [DFR05、AD02、Bri07、LYZ00、MnMMS00、JY17、CJY20、HKK+03、ABC+09]。

猜想 1.2 (民间猜想)。 对于任意带有复化 *K¨ahler* 形式 $B + i\omega$ 的卡拉比–丘三维流形 X，其导出范畴 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上都存在一个 ***Bridgeland***稳定性条件$(Z, \mathcal{A})$，其中心荷由下式给出

$$Z(E) = -\int_X e^{-i\omega} e^{-B} \,\mathrm{Ch}(E)\sqrt{\mathrm{Td}(X)},$$

以及一个微分方程 $D_Z(h) = 0$，它针对对象 $E \in \mathcal{A}$ 上的一种 ***Hermitian***度量型结构 h；当且仅当 E 相对于 $(Z, \mathcal{A})$是 ***Bridgeland*** 稳定的， $D_Z(h) = 0$ 才有解 E。

这一猜想的若干特征尚需进一步明确，我们在此总结要点：

- 对于一般的卡拉比–丘三维簇而言，Bridgeland稳定性条件本身是否存在，仍是一个重要的开放问题；其中许多困难源于如何为导出范畴中的对象构造 Harder–Narasimhan 滤子。Haiden–Katzarkov–Kontsevich–Pandit [HKKP20] 正在推进一项利用微分几何解决这一问题的计划，称为“范畴 K¨ahler 几何”，但任何此类方案实际上都将依赖猜想中提出的 Donaldson–Uhlenbeck–Yau型定理。

- 精确的中心荷 Z 可能需要调整（例如去掉 $\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$、改为 $\sqrt{\hat{A}(X)}$，或考虑量子修正）。

- 其精确的微分方程尚不清楚，目前最有希望的猜测是变形 *Hermitian–Yang–Mills* 方程，由 Leung–Yau–Zaslow 和 Maria˜no–Minasian–Moore–Strominger [LYZ00、MnMMS00]提出[1]。目前，该方程仅在线丛的情形下通过镜像对称或物理学推导得出，但基于一般原理，可以论证其在高秩情形下的自然类比。

在第一部分中，我们在猜想 1.2方面取得了一些进展。特别是，在一定程度上受原理 1.1的指引，我们不局限于上述 Z 中心荷，而是考虑 Bayer 引入的更大一类 [多项式中心荷09]。我们也不只考虑 Calabi–Yau 三维流形，而是考虑任意紧致 K¨ahler 流形。对于 Bayer 的任意多项式中心荷 Z，我们都关联一个相应的极值度量，它是全纯向量丛上一条微分方程的解。我们称这样的极值度量为 Z-临界度量，[2]并证明在渐近极限（即 Z-临界方程的大体积极限）下，稳定性条件与解的存在性之间存在对应关系。[3]

第一部分的主要结果如下，它事后证明了我们基于一般考虑所选取的微分方程是合理的。

定理 1.3。 紧致 *K¨ahler* 流形上的单纯斜率半稳定全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$，若其分次对象 $\mathrm{Gr}(E)$ 局部自由，则当且仅当它渐近 Z-稳定时，才在大体积极限下存在一个 Z-临界度量。

上述结果的存在性部分在以下情形中有一个特别简单的证明：E 实际上是斜率稳定的，这一情形将在第 5.2.1 节中讨论；这类丛给出了在

[1]Li 的最新讨论 [Li22] 表明，即使是一个 微分方程 一般而言也可能是奢望，但物理推理让我们确信，这类厄米度量型对象必定是某种作用泛函的临界点。[2]“Zed 临界”[3]这是将 K¨ahler 度量 ω 替换为 $k\omega$ 并对其进行缩放 $k \to \infty$的极限。用物理学的语言来说，这是弦理论的“量子极限”：弦长趋于零，弦可以用点粒子很好地近似。

高秩向量丛上变形厄米杨-米尔斯方程的首批解的例子。在第 5.2 节中，我们将详细证明定理 1.3在 Gr(E) 具有两个分支时的情形；这最清楚地展示了渐近 Z-稳定性的代数几何条件如何进入分析，并请读者参阅 [DMS21、§4] 以了解更一般情形的细节。我们在第 5.2 节中证明的情形足以在 Z-临界度量作用于 $\mathbb{CP}^2$ 上的严格半稳定秩 3 向量丛上产生新的“非平凡”例子，这些向量丛在例 4.1.22中有所描述。

此外，在第4章中，我们将研究这些新方程在大体积极限之外的基本几何理论。这引出了一个此前在文献中的非阿贝尔规范理论语境下从未出现过的新概念：次解，并研究它所带来的几何后果。特别地，我们证明：

定理 1.4。限制在全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$上的陈联络空间内次解的轨迹上时， Z-临界方程是椭圆的，并且源自规范群作用下的无限维矩映射构造。

Z-临界方程的解的存在性障碍预计既来自子层，也来自子簇；后者是规范理论中的一种新现象，但在代数几何稳定性条件的文献中早已为人熟知。近期，这一问题已在线丛上的变形厄米杨–米尔斯方程以及J-方程的语境下得到研究；这两者都可以描述为针对特定 Z.[4] 选择的 Z-临界方程。已有研究表明，在这些情形下，由子簇导致的代数几何障碍如何通过次解的概念得到刻画；我们进一步在复曲面的情形中展示这一点。

定理 1.5。 对于紧致凯勒曲面上的全纯线丛 $L \to (X, \omega)$ 以及一个满足体积假设的多项式中心荷的选取，以下条件等价：

(i) L 存在一个满足 Z-临界方程的解，

[4]在 J-方程的情形下，具有退化稳定性向量。

(ii) L 存在一个满足 Z-临界方程的次解，

(iii) L 关于解析曲线 $C \subset X$ 是 Z-稳定的。

我们首次开始研究这一现象在高秩情形下的表现，并首次解释如何利用次解条件，在非阿贝尔规范理论的背景下捕捉子簇所导致的障碍。

定理1.6。 如果全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$ 存在 Z-临界方程的次解，那么 E 关于不可约解析除子 $D \subset X$ 是 Z-稳定的。此外，如果 E 存在强次解，那么它关于所有不可约解析子簇都是 Z-稳定的。

在 第4.5.1节 中，我们通过构造 Z-临界方程的 Donaldson 泛函和 Yang–Mills型泛函，进一步证明次解条 Z件的重要性；并证明，将 Donaldson 型泛函限制在次解的集合上时，该泛函是凸的，其临界点恰好是 Z-临界度量，同时也是 Yang–Mills 型泛函的绝对极小值。

有趣的是，由 Z-临界方程的次解条件所蕴含的代数几何稳定性条件，与 Bridgeland 稳定性所预言的并不相同，Collins–Yau 已经注意到了这一点 [CY21]。事实上，由于这一差异，Collins–Shi 已在（非 Calabi–Yau）$\mathrm{Bl}_p \mathbb{CP}^2$ 上构造了一个反例 [CS19]，从而否定了猜想 1.2。这表明，为了准确反映这一差异，或许有必要修改 Bridgeland 稳定性的定义。物理学文献中已经提出一种可能的（初步）修改方案，该方案由 Freed–Kapustin–Witten 反常所暗示，但数学文献似乎尚未注意到这一点。在第4.6节 中，我们将简要考察这一修改，并讨论若干其他未来研究方向，包括如何利用向量丛复形的微分几何来体现拟同构这一概念。

在第二部分中，我们将关注点转向一种截然不同的几何背景，在此背景下，原理 1.1 以*Kähler* 纤维化的形式出现。这一新背景介于向量丛（在此背景下，它们被视为源自射影丛，即 Kähler 纤维化的特例）与簇（即以一点为底的 Kähler 纤维化）之间。

这两种背景在复几何中都已得到深入研究，其中原理 1.1分别体现为著名的 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理和 Chen–Donaldson–Sun 定理；我们将在第 2 章中回顾这两个定理。

在纤维化的插值情形中，Dervan–Sektnan 引入了融合丛与簇的稳定性条件的一种混合形式 [DS21a], ，他们还确定了纤维化上相应的典范度量概念，即 最优辛联络 [DS21b]。

原理预言了这些概念之间存在对应关系，我们将在<style id='1'>等变 K¨*ähler* 纤维化的情形下研究这一点；在此情形中，纤维的复结构不会随底空间变化。所有这类纤维化都可作为全纯主丛的伴随丛出现，并且在这一几何情形下，我们证明如下结论。

定理 1.7。 设等变 *K¨ähler* 纤维化 $(X, \omega_X) \to (B, \omega_B)$ 通过伴随丛构造，由带有联络 A 的全纯主丛 $P \to (B, \omega_B)$ 产生。那么，自然诱导的辛联络 ω_X 是最优辛联络，当且仅当 A 是 P上的 *Hermite–Einstein*联络。

特别是，这意味着 原理 1.1 的一个版本，其中我们利用已有的全纯主丛稳定性理论：

推论 1.8。 若全纯主丛 $P \to (B, \omega_B)$ 是多稳定的，则与之相关的等变 *K¨ähler* 纤维化 $(X, \omega_X) \to (B, \omega_B)$ 存在最优辛联络。

当所考虑的主丛是等变 K¨ähler 纤维化的相对自同构丛时，这一结论便成为 当且仅当 的结论。

得益于 Dervan–Sektnan 关于在 K¨ähler 纤维化的全空间上，丰沛 K¨ähler 类中常数标量曲率 K¨ähler 度量存在性的研究（X， ω_X） $\to$ （B， ω_B），上述最优辛联络存在性结果使我们得以构造许多新的例子：等变 K¨ähler 纤维化的全空间上存在常数标量曲率 Kähler 度量。

推论 1.9。 设 $P \to (B, \omega_B)$ 是一个单纯、稳定的全纯主G-丛。设 (B, ω_B) 具有常数标量曲率 *Kähler* 度量，且自同构群离散。若 G 全纯地作用于

一个常标量曲率 *Kähler* 流形 (Y, ω_Y)，且极大紧子群 $K \subset G$ 通过全纯等距变换作用，那么伴随丛 $X = P \times_G Y$ 的全空间在绝热 *Kähler* 类中存在常标量曲率 *Kähler* 度量。

我们利用一个主 SL(2, $\mathbb{C}$)-丛和以 Mukai–Umemura 三维簇为模型纤维，描述了这样一个全空间上存在常标量曲率 Kähler 度量的纤维丛实例。Mukai–Umemura 三维簇是一个 K¨ahler–Einstein Fano 三维簇，带有 SL(2, $\mathbb{C}$) 的作用。这样的主丛有很多，因此这为一大类在绝热 K¨ahler 类中存在常标量曲率 Kähler 度量的纤维化提供了新实例。

除了这种等变情形之外，在 第 7.2 节 中，我们将讨论等变纤维化的稳定性，特别是 Ross–Thomas 已利用斜率 K-稳定性研究透彻的射影丛情形 [RT06]，并将讨论如何用主丛来描述非等变纤维化。

第 2 章

预备知识

本章将回顾一些预备知识，以便理解Z-临界联络（见第一部分）和 K¨ahler 纤维化（见第二部分），并概述原理 1.1最著名的一些实例。

我们将简要介绍几何不变理论，以及通过 Kempf–Ness 定理阐述它与 K¨ahler 几何的关系。虽然本文不会用到该定理，但它为这一原理提供了哲学背景。

接下来，我们将回顾紧致 K¨ahler 流形上全纯向量丛的斜率稳定性与典范度量理论，其中原理 1.1在著名的 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理（定理 2.2.21）中得到了精确表述，并着重强调后续章节所需的厄米几何。这对于理解 Z-临界度量在大体积极限 $k = \infty$下的行为，以及理解等变 K¨ahler 纤维化上典范度量的存在性。

最后，我们稍作转向，探讨簇的相应稳定性理论——K-稳定性，并着手陈述该领域中的对应关系，即 Yau–Tian– Donaldson 猜想（猜想2.3.7）。这一理论将退化的概念置于核心位置，并借助这一语言，通过所谓的纤维化退化来理解纤维化的稳定性，正如我们将在第二部分中所述。Collins–Yau 也曾运用同一套语言研究变形的厄米杨–米尔斯方程 [CY21]。

作为介绍 K-稳定性的一部分，我们将探讨一个有趣的新例子：一个奇异簇，其在 Fano 变形类 V_{14} 中的变形理论，可以通过 SL(2，$\mathbb{C}$) 的表示明确理解。

2.1 几何不变理论

我们将从原理 1.1最简单的有限维体现形式开始介绍。除 Bridgeland 稳定性外，该原理或是被直接应用，或是作为指导，应用于此后几乎所有的实例中。稳定性理论称为几何不变理论 （GIT），而该原理则体现为 Kempf–Ness 定理。

几何不变理论是 Mumford 发展出来的语言，用于通过群作用定义代数簇的商 [MFK94]。随着20世纪中期代数几何的变革，函数环成为关注的核心，GIT 研究交换环中在群作用下不变的元素。Hilbert 在其不变理论中已在不同程度上考察了这一问题，名称也由此而来。

Mumford 的基本观察[1] 如下：为了使代数簇 X 在群作用 G 下的商成为一个性质良好的代数空间，必须将范围限制在由性质良好的、稳定点组成的轨迹 $X^s \subset X$ 上。

我们将讨论范围限定为约化群 G 作用于极化簇 (X，L) 的情形。我们只考虑复数域 $\mathbb{C}$上的簇，尽管相关理论已在更一般的域上得到发展。我们要求 G 在 X 上的作用能够提升为对丰线丛 $L \to X$的作用，[2] 因此也作用于它的所有幂 L^k 以及整体截面空间 $H^0(X，L^k)$。

我们有一个齐次坐标环

$$R(X,L) = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(X, L^k)$$

[1]在一定程度上，这一点在 Hilbert 的研究中已隐含体现：他借助权不等式刻画了半稳定点（“零形式”）这一概念 [Hil93，第 359]。[2]等价地，若我们将 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$视为某个 N，那么 $G \subset \mathrm{PGL}(N，\mathbb{C})$ 必须提升为 $G \subset \mathrm{GL}(N+1，\mathbb{C})$ 并作用于 $\mathbb{C}^{N+1}$。

G 作用于其上，而不变量环为

$$R(X,L)^G = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(X,L^k)^G.$$

这是一个分次 $\mathbb{C}$代数；当 G 为约化群时，它是有限生成的 [Hil90，Nag64]。因此，我们可以定义一个射影簇

$$X /\!\!/ G = \operatorname{Proj} R(X,L)^G,$$

由 G 对 $(X,\ L)$ 取商所得的几何不变理论商。第一个关键观察是，这个商簇遗漏了 X 中的一些点。也就是说，存在一个由包含 $R^G \hookrightarrow R$ 诱导的自然有理映射 $X \dashrightarrow X /\!\!/ G$；若 $x \in X$ 是一个点，使得对于每个不变截面 $f \in H^0(X,\ L^k)^G$，对每个 k，都有 $f(x) = 0$，那么态射 $X \dashrightarrow X /\!\!/ G$ 在 x 处没有定义。Mumford 将此类点称为不稳定点（Hilbert 称之为“零形式”）。我们对 X 中的点还有如下进一步的刻画：

定义 2.1.1。称点 $x \in (X,\ L)$ 为：

- 半稳定，如果存在某个 $f \in H^0(X,\ L^k)^G$ 使得 $f(x) \neq 0$。将半稳定点的轨迹称为 X^{ss}。
- 多稳定，如果轨道 $G\cdot x$ 在 X中是闭的。将多稳定点的轨迹称为X^{ps}。
- 稳定，如果轨道是闭的，且 x 具有有限稳定子 G_x。将稳定点的轨迹称为 X^s。
- 不稳定，如果它不是半稳定的。

根据定义，有理态射 $X \dashrightarrow X /\!\!/ G$ 在限制到半稳定轨迹 X^{ss}上时，就成为真正的态射。此外，如果两个半稳定点 $x,\ y \in X^{ss}$ 的轨道闭包相交，即 $\overline{G\cdot x} \cap \overline{G\cdot y} \neq \emptyset$，那么每个$G$-不变截面在 x 和 y 上取值相同，因此它们在 $X /\!\!/ G$中被视为等同。这种关系称为S-等价 （以 Seshadri 命名，他曾研究其

对向量丛模空间构造的影响）。反过来，不变函数能够区分闭包不相交的点，因此几何不变量理论商 $X^{ps} \to X^{ps} /\!\!/ G$ 实际上是一个轨道空间 $X^{ps} /\!\!/ G = X^{ps}/G$。事实上，根据 Kempf–Ness 定理，轨道空间 X^{ps}/G等于几何不变量理论商 $X /\!\!/ G$。[3] 由此我们得到著名的几何不变量理论商图：

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X /\!\!/ G \\ \uparrow & & \| \\ X^{ss} & \longrightarrow & X^{ss} /\!\!/ G \\ \uparrow & & \| \\ X^{ps} & \longrightarrow & X^{ps}/G \\ \uparrow & & \uparrow \\ X^{s} & \longrightarrow & X^{s}/G \end{array}$$

可以证明，几何不变量理论商 $X /\!\!/ G$ 满足 G 在 X上的作用所对应的范畴商公理，因此它是在代数簇（或概形）范畴中对约化群取商的最佳解。

注 2.1.2. 当 X 为仿射或非射影概形，且仍由线丛 $L \to X$扭曲时，还存在其他几何不变量理论商的概念。这在例如将 $\mathbb{CP}^n$ 构造为 $\mathbb{C}^{n+1}$的扭曲仿射几何不变量理论商，或按照 King 的工作构造表示模空间 [Kin94] 时非常重要。

2.1.1 希尔伯特–Mumford判据

上述点 $x \in X$ 稳定性的判定标准在实践中往往难以验证，因为它们需要了解 x 的整个 G 轨道。Mumford 确定了一个更简单的判据，只需了解 G 的一参数子群 (1-PS) $\lambda\colon\ \mathbb{C}^* \hookrightarrow G$，称为 ***Hilbert–Mumford*** 判据。

[3] 然而，我们注意到，X^{ps} 无法描述为X的某个良好的代数子簇，而只是 X的一个可构造子集。因此，要得到一个同时也是轨道空间的代数商，就必须进一步限制到稳定轨迹 X^s。

再次考虑约化群 G 作用于极化簇 (X, L) 的情形。给定一个点 $x \in X$ 和一个一参数子群 λ，极限点 $y := \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ 是 λ 在 X 上作用的一个不动点。因此，由于该作用可提升到 L，位于 y 上方的纤维 L_y 也被 λ 固定，因此带有一个权 $\mu(x, \lambda)$，使得对于每个 $v \in L_y$，$\lambda(t) \cdot v = t^{\mu(x,\lambda)} v$。这就是 (x, λ) 的 ***Hilbert–Mumford*** 权重。

Hilbert–Mumford 判据如下：[MFK94, Tho06]:

定理 2.1.3（Hilbert–Mumford 判据）。点 $x \in X$ 是：

- 半稳定，如果对每个一参数子群 λ 属于 G, $\mu(x, \lambda) \geq 0$。
- 多稳定，如果 x 是半稳定的，并且只要 $\mu(x, \lambda) = 0$，λ 就属于 x的稳定子 G_x。
- 稳定，如果 x 是多稳定的且稳定子有限，因此仅当 λ 是平凡的一参数子群时，$\mu(x, \lambda) = 0$。
- 不稳定，如果至少存在一个一参数子群 λ 属于 G, $\mu(x, \lambda) < 0$.

关于 $\mathbb{C}^*$-轨道闭性的 Hilbert–Mumford 判据，有一个著名的图示证明见图 2.1。

不过，接下来我们不会直接运用 Hilbert–Mumford 判据；然而，正如我们随后将要说明的，对对象进行一参数退化这一概念，对于理解丛和簇的稳定性都至关重要。

2.1.2 Kempf–Ness 定理

根据原理 1.1，与点的 GIT 稳定性相对应的应当是一种极值概念，下面我们将对此作出解释。

现在考虑 (X, ω) 这一情形：K 是一个紧辛流形，且一个实紧李群作用于 X 上，并通过哈密顿辛同胚实现。也就是说，对每个 $\xi \in \mathfrak{k}$，诱导向量场 v_ξ 都是哈密顿的。

定义 2.1.4。对于 K 在 (X, ω) 上的哈密顿作用，K等变映射 $\mu\colon X \to \mathfrak{k}^*$ 称为一个动量映射，其中等变性是相对于 $\mathfrak{k}^*$ 上的余伴随作用而言的，并且满足

$$d\langle \mu, \xi \rangle = -i_{v_\xi} \omega$$

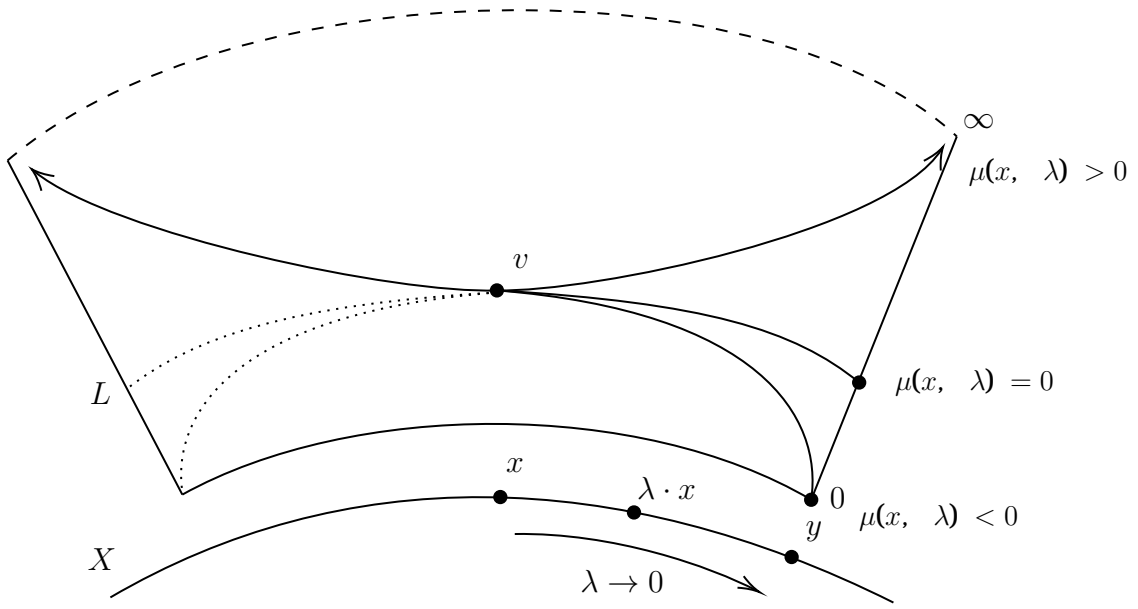


图 2.1：希尔伯特–芒福德判据。若 v位于 x之上，那么当 $\lambda \to 0$, $\lambda(t)\cdot v \in L_{\lambda(t)\cdot x}$ 时，对于 $\mu(x,\lambda) > 0$ 它将趋于无穷，而对于 $\mu(x,\lambda) < 0$则趋于零。注意，若 $\mu(x,\lambda) > 0$，则 $\tilde{x}$ 的轨道是半闭的；而当 $\mu(x,\lambda) = 0$时，则是半开的。将一参数子群替换为其逆算子，即可检查轨道的另一端（$\lambda \to \infty$）。结合这两个一参数子群的陈述，便得到希尔伯特-芒福德判据：它将 λ 的渐近权与轨道 $\lambda \cdot x$的闭性联系起来。

对所有 $\xi \in \mathfrak{k}$，其中 $\langle -,- \rangle$ 是 $\mathfrak{k}^*$ 与 $\mathfrak{k}$之间的自然配对。。将 $\xi \mapsto \langle \mu, \xi \rangle$ 发送到 $\mathfrak{k} \to C^\infty(X)$ 的映射称为余动量映射，有时记作 μ^*。

的辛 或 ***Marsden–Weinstein*** 商（X, ω）除以 K 由下式给出

$$X /\!\!/ K := \mu^{-1}(0)/K.$$

如果 0 是 μ 的正则值，且 K 在 $\mu^{-1}(0)$上自由作用，那么辛商是一个光滑流形，并自然继承来自 X 的辛结构 ω_{red}，使得

$$\pi^*\omega_{\mathrm{red}} = \iota^*\omega$$

其中 $\iota\colon\ \mu^{-1}(0) \hookrightarrow X$ 是包含映射，$\pi\colon\ \mu^{-1}(0) \to X /\!\!/ K$ 是投影 .

现在回到射影簇 $(X,\ L)$ 的情形。固定一个 K¨ahler 度量$\omega \in c_1(L)$，并假设群 G 在线性作用于 $(X,\ L)$ 上。此外，假设极大紧子群 $K \subset G$ 通过哈密顿辛同胚作用于 $(X,\ \omega)$ 上。这样，我们现在有 X 的两种可能的商：一种来自几何不变量理论，另一种来自辛几何。Kempf–Ness 定理将二者联系起来。

定理 *2.1.5*（*Kempf–Ness* [*KN*79], *Guillemin–Sternberg* [*GS*84], *Kirwan* [*Kir*84]）。设 G 是一个约化群，其极大紧子群 K 线性作用于射影簇 (X, L) 上，并且 K 通过哈密顿量作用于 (X,ω) 上，其中 $\omega \in c_1(L)$ 是一个 *K¨ahler* 形式。设 μ*:* $X \to \mathfrak{k}^*$ 是该 K 作用的动量映射。当且仅当 $G \cdot x$ 与 $\mu^{-1}(0)$ 相交时，点 $x \in X$ 对于 G 作用是几何不变量理论多稳定的。[4]此外，若 x 是多稳定的，则 $G \cdot x$ 与 $\mu^{-1}(0)$ 的交集是唯一的 K-轨道。

该结论最初由 Kirwan 证明 [Kir84]，即这给出了商空间之间的一个同胚。事实上，进一步结合定理 2.1.5 可得:

- $G \cdot \mu^{-1}(0) = X^{ps}$,
- 点 $x \in X$ 是半稳定的，当且仅当 $G \cdot x$ 与 $\overline{\mu^{-1}(0)}$ 相交于一个单独的 K-轨道。
- 0 是 μ 的正则值，当且仅当 $X^{ss} = X^s$。
- 包含映射 $\mu^{-1}(0) \hookrightarrow X^{ss}$ 诱导出商对象之间的一个同胚

$$X /\!\!/_0 K \to (X, L) /\!\!/ G.$$

商对象之间的同胚源于这样一个事实：从紧空间到豪斯多夫空间的连续双射是同胚。连续逆映射

$$(X, L) /\!\!/ G \to X /\!\!/_0 K$$

[4]在 Kempf– Ness 定理的表述中，取动量映射的哪个水平集至关重要，因为将水平集平移到某个 $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k}^*)$ 相当于将 $\mathbb{C}^*$ 丰线丛上的线性化 L 按一个特征进行扭曲。参见 [Sz´e14，注释 5。22]。

可通过沿着动量映射范数平方的梯度流来求得,

$$V = \|\mu\|^2.$$

特别地， V的梯度流会将半稳定点 $x \in X^{ss}$ 流向一点 $y \in X^{ps}$ 该点属于 $G \cdot x$ [Kir84]闭包中的唯一多稳定轨道。

Kempf–Ness 定理可通过在 G 的一个固定轨道中进行研究，并考察所谓的 ***Kempf–Ness*** 泛函来证明,

$$\mathcal{M} : G/K \to \mathbb{R}.$$

轨道 $G \cdot x$ 上的 Kempf–Ness 泛函 $\mathcal{M}_x$ 满足以下特征性的变分性质（或者说，可将其定义为满足该性质的唯一泛函）：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{M}([\exp(it\xi)g]) = -2\langle \mu(g \cdot x), \xi \rangle$$

当 $\xi \in \mathfrak{k}$时。特别地，点 $g \cdot x \in G \cdot x$是动量映射 $\mu(g \cdot x) = 0$的零点，当且仅当 $[g]$ 是 Kempf–Ness 泛函的临界点。为证明该定理，进一步证明 $\mathcal{M}$沿着 G/K中的测地线是凸函数；在选定 G上的双不变度量后， G/K相对于诱导的黎曼度量是一个完备负曲率度量空间。由此可推得， $g \cdot v$的轨道是闭的，当且仅当 v 的某个提升 x 使得 $\mathcal{M}_x$ 在 G/K上是适当的；根据 $\mathcal{M}$ 的凸性，这恰好发生在它存在一个临界点 [Sz´e14， GRS21]。

与几何不变量理论图景的关系可以表述得更加明确。事实上，有如下结果。

引理 2.1.6 (例如参见 [GRS21, 引理 5。2])。 设 $\xi \in \mathfrak{k}$ 为有理数，并设λ : $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G$ 为由 ξ生成的一参数子群。则 ***Hilbert–Mumford*** 权重 $\mu(x, \lambda)$是 ***Kempf–Ness*** 泛函的无穷远斜率:

$$\mu(x, \lambda) = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathcal{M}_x([\lambda(t)])}{t}.$$

d 在$\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}$ 中有理方向的稠密性以及上述引理得出

以下哲学性表述：只要 $\mathcal{M}$ 具有足够良好的性质，只需通过检验沿有理定义的测地线的极限斜率均为正，就能验证在整个 G/K 上的适当性。这是支撑原理 1.1的基本事实，也解释了为何仅凭代数（即有理）信息就足以推出解析存在性定理（例如参见 [Bou18，§1]，其中讨论了这一原理在有限维情形中的应用，以及它与研究 K-稳定性的变分方法之间的关系）。

2.2 全纯向量丛

全纯向量丛的稳定性与极值度量研究始于 Narasimhan 和 Seshadri 的工作。他们将紧黎曼曲面上的代数向量丛按照 Mumford–Takemoto 的意义所定义的斜率稳定性，与该曲面基本群存在射影酉表示联系起来 [NS65]。这项工作发展了 Andr´e Weil 的思想。Weil 早已理解了线丛情形下的这种对应关系，并提出高秩情形也可能有类似的图景。

Atiyah 和 Bott 将 Narasimhan 和 Seshadri 的定理置于更广阔的背景之中 [AB83], ，并强调了杨–米尔斯联络所发挥的作用。对于紧黎曼曲面而言，这类联络就是射影平坦联络，因此其全纯会产生基本群的表示。Atiyah–Bott 还提出了杨–米尔斯方程作为无限维矩映射的一种解释，使几何不变理论的概念图景更加清晰；此外，他们还在等变 Morse 理论中提供了新方法，用以计算这些辛商——即曲线上的稳定向量丛的模空间——的拓扑（Kirwan 随后将这套理论发展到多种辛商）。与此同时，Donaldson [Don83], 独立地使用杨–米尔斯联络的语言证明了 Narasimhan–Seshadri 定理。用 Atiyah 和 Bott 的语言来解读，这一证明可视为曲率作为动量映射时的无限维 Kempf–Ness 定理。

关于 t 20世纪80年代，Donaldson、Uhlenbeck 和 Yau 等人将这一理论推广到了更高维的底空间 _

，最终建立了以他们命名的对应关系。下面我们将介绍这一理论。

2.2.1 稳定性

我们首先转向全纯向量丛的稳定性理论，特别是斜率稳定性，以及（简要介绍）Gieseker 稳定性。

2.2.1.1 斜率稳定性

向量丛斜率稳定性的概念由 Mumford 在发展几何不变理论后不久提出 [Mum63]。Mumford 考虑的是曲线上的问题，而高维底空间上的条件则由 Takemoto 提出 [Tak72], ，因此这一概念常称为 Mumford–Takemoto 稳定性。我们将在紧致 K¨ahler 流形的框架下给出定义，其中也包括 Mumford 和 Takemoto 所研究的射影情形。

定义 2.2.1。紧致 K¨ahler 流形 (X, ω) 上相干解析层 $\mathcal{E}$ 的斜率定义为

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg \mathcal{E}}{\operatorname{rk} \mathcal{E}} = \frac{(c_1(\mathcal{E}).[\omega]^{n-1})[X]}{\operatorname{rk} \mathcal{E}}$$

当 $\operatorname{rk} \mathcal{E} > 0$ 时，以及当 $\operatorname{rk} \mathcal{E} = 0$ 时， $\mu(\mathcal{E}) = +\infty$。

定义 2.2.2. 紧致 K¨ahler 流形 (X, ω) 上的相干解析层 $\mathcal{E}$ 称为斜率半稳定，如果对于所有非平凡的相干解析子层 $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$，都有不等式

$$\mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E}).$$

此外，如果当 $\operatorname{rk} \mathcal{S} < \operatorname{rk} \mathcal{E}$ 时有以下关系，我们称 $\mathcal{E}$ 为斜率稳定

$$\mu(\mathcal{S}) < \mu(\mathcal{E}).$$

如果该层是斜率相同的斜率稳定层的直和，我们就称它为斜率多稳定。如果该层不是斜率半稳定的，就称它为斜率不稳定。

注 2.2.3。 通常，稳定性是针对无挠 相干解析层来定义的。根据我们的定义，正秩的斜率（半）稳定相干层必然无挠，这一点是立刻可得的。一般而言，对于固定维数的纯相干层，存在一套性质良好的理论，详见 [HL10，§1。6], 但在这种情况下，必须将挠层的斜率定义为希尔伯特多项式首项系数之商。

当 $\mathcal{E}$ 是一个全纯向量丛时，可以直观地理解斜率稳定性 E。特别是，它是关于E的全纯几何的一种拓扑条件，要求 E 内部不存在比 E 自身“扭曲得更多”的全纯子层（需除以秩进行适当归一化）。参见图 2.2。

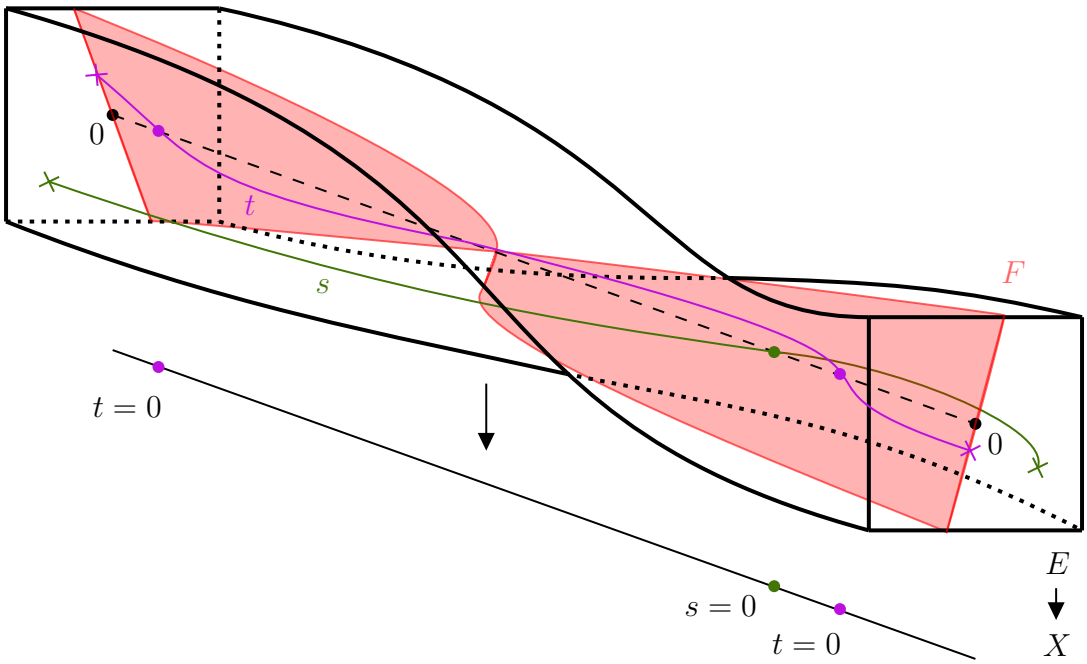


图 2.2：不稳定向量丛 E 含有比 E扭曲得更多的全纯子丛 F 。

这一限制 E 全纯几何复杂性的判据有多种推论，尤其涉及 E 自同构的存在性。我们回顾如下：

命题 2.2.4 (参见 [Kob87，命题 5.7.11，推论 5.7。12])。设 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ 是紧致 *Kähler* 流形 (X, ω)上的斜率半稳定凝聚层。那么

(i) 若 $\mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{E}')$，则 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = 0$。

(ii) 假设 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ 是斜率稳定的，$\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}')$，且 $u\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ 是一个非零态射。那么 u 是单射，且 $\mathrm{rk}\,\mathrm{im}\, u = \mathrm{rk}\,\mathcal{E}'$（也就是说，$u$ 是泛点上满射）。特别地，u 在一个余维为 ≥ 2 的轨迹之外是同构。若 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 的陈数相同，即

$$c_i(\mathcal{E}).[\omega]^{n-i} = c_i(\mathcal{E}').[\omega]^{n-i}$$

对所有 i，则 u 实际上是同构，因为 $\mathcal{E}'/\mathrm{im}\, u$ 必须具有消失的陈数，但若它非零，则 $\mathrm{Ch}_k(\mathcal{E}'/\mathrm{im}\, u).[\omega]^{n-k} > 0$ 其中 k 是 $\mathcal{E}'/\mathrm{im}\, u$ 的支集的余维。[5] 此外，在这种情况下，作出一个识别 $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ 后，u 总是恒等态射的一个常数倍 $u = \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$。

上面的第二点对斜率稳定相干层的自同构施加了严格限制。我们回顾以下定义：

定义 2.2.5. 若相干层 $\mathcal{E}$ 在 X 上满足以下条件，则称其为单纯

$$H^0(X, \mathrm{End}(\mathcal{E})) \cong \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{E}}.$$

因此，命题 2.2.4 的第二点断言，斜率稳定的相干层是单纯的。每个这样的层的自同构都是恒等态射的常数倍，因此，单纯层的自同构群尽可能小。[6] 正如我们在讨论几何不变理论时所观察到的，对象的自同构（即 Quot 概形中对应点的稳定子）往往会给构造性质良好的商带来问题。特别是，

[5] 当 $\mathcal{E}$、$\mathcal{E}'$ 均为局部自由时，只需满足 $\mathrm{rk}\,\mathcal{E} = \mathrm{rk}\,\mathcal{E}'$ 且 $\deg\,\mathcal{E} = \deg\,\mathcal{E}'$即可。此情形的证明见 [Kob87，推论 5.7。12] 另一种视角是考虑射影化规范群 [6] $\mathcal{G})E$，在该群作用下，稳定丛的自同构群是平凡的。

人们尤其预期，将范围限制在（半）稳定层之后，便能得到性质更好的模空间。斜率（半）稳定层的模空间在一维和二维情形下尤其容易理解 [HL10，§8。2], 而近来，人们也已对一般情形有了理解 [GT17]。

关于稳定丛和稳定层的代数几何理论如今已相当成熟，Huybrechts 和 Lehn 的著作 [HL10]是一本很好的综述。我们将着重介绍几个关于向量丛稳定性的其他要点，这些内容稍后会用到。首先，我们回顾层的短正合列所具有的以下跷跷板性质。为了强调它与第4章中出现的关于子簇的 Z-稳定性概念之间的比较，我们明确陈述挠层情形下的跷跷板引理。

引理 2.2.6 (跷跷板引理；参见 [Kob87，命题 5.7。6])。 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

是相干层的短正合列。设 秩$\mathcal{E} > 0$。则

$$\mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{Q})$$

and

$$\mu(\mathcal{S}) \geq \mu(\mathcal{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\mathcal{E}) \geq \mu(\mathcal{Q}).$$

此外：

- 若 $0 <$ 秩$\mathcal{S} <$ 秩$\mathcal{E}$，则

$$\mu(\mathcal{S}) < \mu(\mathcal{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{Q})$$

and

$$\mu(\mathcal{S}) > \mu(\mathcal{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{Q}).$$

- 若 秩 $\mathcal{S} = 0$，则 $\mu(\mathcal{S}) > \mu(\mathcal{E})$且 $\mu(\mathcal{E}) \geq \mu(\mathcal{Q})$；当 $\mathcal{S}$的支集余维为 ≥ 2时取等号。

- 若 秩 $\mathcal{S}$ =秩 $\mathcal{E}$，则 $\mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E})$，当且仅当 $\mathcal{Q}$ 的支集余维为 ≥ 2时取等号，并且 $\mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{Q})$。

证明。 注意到秩 rk 和次数 deg 在相干层的短正合列中具有可加性，证明即可迅速得出，此处从略。我们在 Z-稳定性方面给出一个类似的证明，见 引理 4.1.18。最后的论述基于以下事实：若 $\mathcal{T}$ 是一个挠层，则 $\deg \mathcal{T} \geq 0$；此外，若 $\mathcal{T}$ 的支集余维为 ≥ 2，则 $\deg \mathcal{T} = 0$ (例如参见 [Kob87，引理 5.7。5])。

□

层的斜率所满足的跷跷板性质，使我们可以用几种方式重新表述稳定性的特征不等式：设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ 是一个相干子层，其商为 $\mathcal{E} \to \mathcal{Q}$。那么，以下稳定性概念彼此等价（参见[Kob87，命题 5.7。6]）：

(i) 若对所有相干子层 $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ 都有 $\mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E})$，且等号成立当且仅当 rk $\mathcal{S} =$ rk $\mathcal{E}$，则称其稳定。(ii) 若对所有相干商 $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$，都有 $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{Q})$，且等号成立当且仅当 rk $\mathcal{Q} =$ rk $\mathcal{E}$，则称其稳定。

(iii) 若对所有短正合列 $S \hookrightarrow \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 都有 $\mu(\mathcal{S}) < \mu(\mathcal{Q})$，则称其稳定。

我们将在第一部分看到，Z 稳定性通常用上述条件 (ii) 来表述更为自然，因为由子簇导致的障碍 $V \subset X$ 会通过商层 $E \to E \otimes \mathcal{O}_V$出现。此外，我们将在第5章看到，在 Z-临界方程的分析中，自然体现出来的其实是条件 (iii)，而不是与之等价但对称性较差的条件 (i)。

我们将在下一节看到引理 2.2.6的一种几何体现，它体现了厄米几何的原理：曲率在子丛中通常会减小，在商对象中则会增大。

2.2.1.2 滤过

回顾全纯向量丛中自然出现的几种滤过，对我们会很有帮助。

首先，对于半稳定全纯向量丛 $E \to X$，存在一类自然的所谓约当–*Hölder* 滤过 E。

定义 2.2.7。 半稳定向量丛 $E \to X$ 的约当–*H¨lder* 滤过 $\mathscr{E}$ 是一个滤过

$$\mathscr{E}: \quad 0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = E$$

由 E 的无挠相干子层构成，使得对于每个 i， $\mathcal{E}'_i := \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 都是斜率稳定的，且 $\mu(\mathcal{E}'_i) = \mu(E)$。这个多稳定层

$$\mathrm{Gr}(E) := \bigoplus_i \mathcal{E}'_i$$

称为 E 关于 $\mathscr{E}$ 的伴随分次对象。

对于 E 的 Jordan–H¨older 滤过，存在一个基本的存在性与唯一性结果。但这里有一个微妙之处：分次对象并非严格唯一。由于斜率稳定性不受余维为 ≥ 2 的挠层影响，分次对象 Gr(E) 仅在余维 2 之外唯一。这可以通过取 Gr(E)** 的反身包来解决，该反身包取自 Gr(E)。[7]

命题 2.2.8（参见 [HL10，定理 1.6.7，命题 1.6。10]或 [Kob87，定理 5.7。18]）。任意半稳定向量丛都存在 *Jordan–H¨older* 滤过。任意两个 *Jordan–H¨older* 滤过的分次对象在余维 ≥ 2之外同构。任意两个 *Jordan–H*$\mathrm{Gr}(E)^{**}$ *older* 滤过的反身包均同构，因此该反身包是唯一确定的。

注记 2.2.9。 由于我们所定义的斜率稳定性蕴含无挠性，因此对于任意半稳定层 E，分次对象 Gr(E) 的因子稳定便自动意味着其无挠。若 E 无挠，则具有此性质的滤过自动存在，因为半稳定无挠层的最大 destabilising 子层总是饱和的。此外，若某个滤过的逐次商只会被余维为 ≥ 2 的挠层所 destabilise，那么只需在每一步将 $\mathcal{E}_i$ 替换为其在 $\mathcal{E}_{i+1}$ 中的饱和 $\mathcal{E}_i$，便可将该滤过升级为 Jordan–H¨older 滤过。所得滤过具有相同的数值性质，且每个逐次商在我们的意义下都是斜率稳定的。

[7]反身层是一个与其双对偶同构的层 $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{**}$。层 $\mathcal{E}$ 的反身包是其双对偶 $\mathcal{E}^{**}$，而双对偶总是反身的。反身层是无挠的，并且足够接近局部自由，因此可以对其进行分析。

同样的注记也适用于定理 2.2.13 中 Harder–Narasimhan 滤过的存在性（不同之处在于，各直和项是半稳定且无挠的）。在这种情况下，关于最大不稳定层为无挠层的完整证明细节见 [Kob87，定理 5.7。15]。

构造 Jordan–H¨older 滤过并证明其唯一性时所用到的斜率稳定性的关键性质是 命题 2.2.4 和 引理 2.2.6。特别地，任何满足这些性质的斜率型稳定性函数，都将为半稳定层导出类似的 Jordan–H¨older 滤过理论（例如，可以用 Gieseker 稳定性或 Z-稳定性代替斜率稳定性）。

注 2.2.10. 即使 E 是向量丛，也不能保证多稳定退化 Gr(E) 是局部自由的，甚至不能保证它是反身的。然而，在第5章中，我们将假设 Gr(E) 是局部自由的。

在证明 E-临界度量的对应关系时，我们将利用 Gr(Z) 上 Hermite–Einstein 度量的存在性。Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理可扩展到多稳定反身层（见 [BS94]），因此第5章 中关于对应关系的证明应可推广到 Gr(E) 不一定局部自由的情形，并在扰动论证中改用多稳定反身层 Gr$(E)^{**}$ 上的奇异 Hermite–Einstein 度量。此时的关键难点在于理解 Gr$(E)^{**}$ 的奇异集上的 HE 度量的行为（即构成挠层 Gr$(E)^{**}/\mathrm{Gr}(E)$ 支集的解析子簇；规范理论中的起泡现象理论已对此进行了深入研究）。

可以通过一系列扩张，从其分次对象 Gr(E) 获得向量丛 E。固定 E 的 Jordan–H¨older 滤过 $\mathscr{E}$ 后，我们注意到 E 适合于一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{k-1} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E}'_k \longrightarrow 0$$

因此， E 对应于由子层 $\mathcal{E}_{k-1}$ 对分次因子 $\mathcal{E}'_k$ 的一个扩张，该扩张由类 $e_k(\mathscr{E}) \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}'_k, \mathcal{E}_{k-1})$ 分类。事实上，我们可以重复这一过程，构造一列扩张类 $e_i(\mathscr{E}) \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}'_i, \mathcal{E}_{i-1})$；给定 $\mathscr{E}$，这些扩张类能够从 Gr(E) 重构 E。

注 2.2.11。这一过程应被视为从 Gr(E) 到 E 的复结构变形，或者反过来，从 E 到 Gr(E) 的退化，其过程是“关闭一个扩张”（参见 [RT06，Rmk. 5。14]）。特别地，给定向量丛 E（不一定是半稳定向量丛的 Jordan–H¨older 滤过）的任意一个一步滤过 $0 \subset \mathcal{F} \subset E$，我们得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow E \longrightarrow E/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

它定义了一个扩张类 $e \in \mathrm{Ext}^1(E/\mathcal{F}, \mathcal{F})$。通过对 λe 进行缩放，当 $\lambda \in \mathbb{C}$ 时，我们得到一个族 $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$，其一般纤维在 $t \neq 0$ 时为 $\mathcal{E}_t \cong E$，而中心纤维分解为直和 $\mathcal{F} \oplus E/\mathcal{F}$。

在第一部分中，我们将从复结构变形的视角来构造这一对象，特别是在第5章中证明对应关系时。

在第二部分中，我们将从丛退化的视角来探讨，这为 E 作为一个对象的稳定性提供了另一种解释，这种解释更符合研究簇的 K-稳定性和几何不变理论时所使用的语言。参见例如 [Don05] 关于这一视角的讨论。

为使讨论完整，我们还将提及任意全纯向量丛 $E \to X$ 都存在一个滤过，其中 E 不必是斜率半稳定的。这就是著名的*Harder–Narasimhan* 滤过，记作 E [HN75]。

定义 2.2.12. 全纯向量丛 $E \to X$ 的 Harder–Narasimhan 滤过是一个

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = E$$

由凝聚子层构成的滤过，其中每个商 $\mathcal{E}'_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 都是斜率半稳定的，且斜率严格递减：$\mu(\mathcal{E}'_i) > \mu(\mathcal{E}'_{i+1})$ 对所有 i 均成立。

与 Jordan–H¨older 滤过不同，后者只有相应分次对象的唯一性，而 E *is* 的 Harder–Narasimhan 滤过是唯一的。事实上，我们有：

定理 2.2.13（例如参见 [Kob87，定理 5.7。15]）。任意全纯向量丛 $E \to X$ 在紧致 *K¨ahler* 流形上都存在 *Harder–Narasimhan* 滤过，并且存在一个唯一的滤过，使其每个逐次商都 $\mathcal{E}'_i$ 无挠。

与 E 的 HN过滤相关联的是一个分次对象 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{HN}}(E)$，其各个直和项都是无挠的，并且按斜率递减排列的斜率半稳定对象。对于每个直和项 $\mathcal{E}'_i$，我们随后可以取 Jordan–H¨older 滤过 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{JH}}(\mathcal{E}'_i)$，从而得到 $\mathcal{E}$的一个双重过滤。由于 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{HN}}(E)$ 的每个直和项的 JH过滤并不唯一，E 的双重过滤也不唯一；但与*Harder–Narasimhan–Seshadri*过滤相关联的双重分次对象，记为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{HNS}}(E)$，是 唯一的。[8]

2.2.1.3 Gieseker 稳定性

我们简要回顾一下 Gieseker 稳定性的概念，以便与 Z-稳定性进行比较；后者将在第一部分中出现。Gieseker 稳定性由 Gieseker 和 Maruyama 引入 [Gie77, Mar77, Mar78]，它是斜率稳定性的一种替代概念，与层的几何不变理论关系更为密切。首先，让我们回顾相干层的希尔伯特多项式的定义。

定义 2.2.14. 设 (X, L) 是一个光滑极化簇。相干层 $\mathcal{E}$ 在 X 上的希尔伯特多项式定义为

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(k) := \chi(\mathcal{E} \otimes L^k) = \sum_{i>0} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{E})$$

其中，χ 是 $\mathcal{E} \otimes L^k$的全纯欧拉示性数。

根据黎曼–罗赫公式，我们可以将欧拉示性数计算为

$$\chi(\mathcal{E} \otimes L^k) = \int_X \mathrm{Ch}(\mathcal{E} \otimes L^k)\,\mathrm{Td}(X)$$

显然这是关于 k的多项式。若 L 是丰沛的（按定义，对于 (X, L) 是极化的），那么根据 Serre消失定理，我们得到 $H^i(X, \mathcal{E} \otimes L^k) = 0$，对于 $i > 0$ 和 $k \gg 0$ 成立。因此，当 k 充分大时，我们有

$$\chi(\mathcal{E} \otimes L^k) = \dim H^0(X, \mathcal{E} \otimes L^k).$$

[8] 更准确地说，双重分次对象的反身包是唯一的。

请注意，后者并非对所有 k都是多项式，但对于 $k \gg 0$，黎曼–罗赫公式表明它是多项式。

定义 2.2.15。 若无挠相干层 $\mathcal{E}$ 在 (X, L) 上满足以下条件，则称其为 *Gieseker* 稳定（分别称为 *Gieseker* 半稳定）：对于所有真非零相干子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$，均有

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k)}{\operatorname{rk}\mathcal{F}} < \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(k)}{\operatorname{rk}\mathcal{E}} \quad (\text{resp. } \leq)$$

对于所有 $k \gg 0$。

量 $^{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(k)\text{秩}\,\mathcal{E}}$ 称为 $\mathcal{E}$ 的 *Gieseker* 斜率 。Gieseker 稳定性是层在 (X, L) 的“大体积”极限附近的一种渐近稳定性形式（其中 L 被 L^k 取代）。Gieseker 稳定性的第一个关键性质如下，它可由应用于 Gieseker 斜率的黎曼–罗赫公式直接推出。

引理 2.2.16。 在 k 的最高阶项上，*Gieseker* 斜率（忽略依赖于 (X, L) 的无关紧要的几何因子）由斜率 $\mu(E)$ 给出。因此，斜率稳定向量丛是 *Gieseker* 稳定的。特别地，存在以下蕴含关系：斜率稳定 $\implies$ *Gieseker* 稳定 $\implies$ *Gieseker* 半稳定 $\implies$ 斜率半稳定。

还可以进一步观察到，命题 2.2.4 和引理 2.2.6的类似结论对 Gieseker 斜率也成立，因此第 2.2.1.2 节的讨论同样可以针对 Gieseker 稳定性展开。关于该理论的详细介绍，参见 [HL10，第 1]。

2.2.2 杨–米尔斯联络

鉴于原理 1.1，与前述斜率稳定向量丛概念相对应，微分几何中应当存在一种极值对象的概念。关于这种极值对象的最初线索，来自 Donaldson 和 Atiyah–Bott：他们用规范理论重新表述了纳拉西姆汉–塞沙德里定理 [Don83、AB83]。

特别是，Atiyah 和 Bott 提出了以下卓越见解：若 A 是紧黎曼曲面上 Hermitian 向量丛 (E, h) 的陈联络，则映射

$$\mu : A \mapsto F(A)$$

是酉规范群 $\mathcal{G}$ 在 E 上作用的动量映射。事实上，我们回顾一下， A 属于可积 h- 酉联络空间 $\mathcal{A}(h)$，该空间是一个以 $\Omega^1(X,\ \mathrm{End}_{SH}(E,\ h))$ 为模型的仿射空间，其中 $\mathrm{End}_{SH}(E,\ h)$ 表示相对于 h 而言 E 的反厄米自同态。曲率 $F_A \in \Omega^{1,1}(X,\ \mathrm{End}_{SH}(E,\ h))$ 可视为李代数 $\mathfrak{g} = \Omega^0(X,\ \mathrm{End}_{SH}(E,\ h))$ 的形式对偶中的一个元素，该李代数属于 $\mathcal{G}$，二者通过自然配对相联系

$$(\varphi, \psi) \mapsto -\int_X \mathrm{tr}\,\varphi\psi$$

对于 $\varphi \in \mathfrak{g},\ \psi \in \Omega^2(X,\ \mathrm{End}_{SH}(E,\ h))$。这里，$\mathcal{A}(h)$ 上的底层辛结构由 *Atiyah–Bott* 辛形式给出，

$$\Omega_{AB}(a, b) = -\int_X \mathrm{tr}(a \wedge b).$$

主要通过 Donaldson 的观察 [Don85，§4], 这种将曲率理解为紧黎曼曲面上的动量映射的认识，可以推广到紧致 K¨ahler 流形。[9] 与这一动量映射构造相关联的有两个自然泛函，它们具有我们在第2.1节中见过的有限维类比。第一个是杨–米尔斯泛函 $\|\mu\|^2$，定义为

$$\mathrm{YM}(A) = \int_X |F_A|^2 d\mathrm{vol}. \qquad \text{(Eq. 2.1)}$$

为了确定第二个泛函，我们现在回顾：任意陈联络 A 对于 h都由一个 Dolbeault 算子唯一确定 $\nabla^{0,\ 1}_A = \partial_A$ 该算子满足可积性条件 $\partial_A^2 = F^{0,\ 2}_A = 0$。这样的 Dolbeault 算子与底层光滑向量丛上的全纯结构一一对应 E，因此利用这一关于陈联络空间 $\mathcal{A}(h$与全纯结构的对应关系，我们将复规范群在 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 上的作用转移到 $\mathcal{A}(h$上，并得到与有限维情形类似的形式 Kempf–Ness 图景，如第2.1节所述。

在固定的 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 轨道内部 $\mathcal{A}(h)$，我们可以像第2.1.2节那样考察本问题的“Kempf–Ness 泛函”。事实上，在这种情形下，我们转换视角：

[9] 这里，Atiyah–Bott 辛形式只是使被积函数中多出一个 $\wedge\omega^{n-1}$ 。

我们不再改变 (E,h) 的全纯结构，而是固定全纯结构∂_E 并改变度量，具体如下：在固定的复规范轨道 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}\cdot\partial_E$ 内部$\mathcal{A}(h)$，将固定的厄米度量 h 从 $(E, g\cdot\partial_E)$ 拉回到 (E,∂_E)，便得到 (E,∂_E) 上的新厄米度量 g^*h （模去酉规范变换$g\in\mathcal{G}$），由此产生陈联络 $A(g^*h)$。这一构造在 Dolbeault 算子 $\partial_A\in\mathcal{G}^{\mathbb{C}}\cdot\partial_E$ 与 (E,∂_E) 上的厄米度量 h 之间建立了一一对应；现在， $\mathcal{A}(h)$ 中的轨道可以描述为商$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}\cong$ Herm(E)。

在这种情形下，Kempf–Ness 泛函称为*Donaldson* 泛函，由 Donaldson 于 [Don85]引入。给定一个固定的参考度量 h 在E上，Donaldson 泛函是唯一满足以下条件的泛函

$$\mathcal{M}:\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}\to\mathbb{R}$$

满足 $\mathcal{M}(h)=0$，且其一阶变分为

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}(h_t)=\int_X \mathrm{tr}(h_t^{-1}\partial_t h_t\circ(\Lambda_\omega iF(h_t)-\lambda\mathbf{1}_E))\omega^n.$$

2.2.2.1 Hermite–Einstein 度量

与原理 1.1中的 Kempf–Ness 形式体系一样，我们可以研究两类极值对象：

(i) 泛函 $\|\mu\|^2$ 在 $\mathcal{A}(h)$上的临界点。

(ii) $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}\cong$Herm$(E)$上的临界点。

后者临界点对应于 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}$ 轨道内 $\mathcal{A}(h)$上 $\|\mu\|^2$ 的绝对极小值，但 $\|\mu\|^2$ 还存在高阶临界点，我们将在稍后对此加以说明。

对杨–米尔斯泛函 YM 或 Donaldson 泛函的变分进行分析， $\mathcal{M}$ 可以发现，杨–米尔斯泛函 YM 的绝对极小值 $=\|\mu\|^2$由所谓的*Hermite–Einstein* 度量给出（参见 [Kob87，定理 4.3。9]）。

定义 2.2.17。紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$ 上的厄米度量 h 称为 *Hermite–Einstein* 度量（或称 厄米杨-米尔斯度量），如果

$$iF(h) \wedge \omega^{n-1} = \lambda \mathbf{1}_E \otimes \omega^n \qquad \text{(Eq. 2.2)}$$

对于某个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$。

若度量 h 满足 Hermite–Einstein 方程，且其中的 $\lambda = f \in C^\infty(X)$ 是非常数函数，我们称 h 为带函数 f 的弱 Hermite–Einstein 度量。

这是关于度量 h 的二阶椭圆偏微分方程，它关于曲率 $F(h)$ 是线性的。下面作几点说明:

注 2.2.18. 我们注意到，爱因斯坦常数 λ 纯粹由拓扑决定，并通过积分及运用陈–外尔理论可推出

$$\lambda = \frac{2\pi}{n! \operatorname{vol}(X)} \mu(E).$$

若爱因斯坦函数 $\lambda = f$ 为非常数，则上述计算只确定了 f 在 X 上的拓扑平均值。

注 2.2.19. 经过共形度量变换，任何弱 Hermite–Einstein 度量都可以变为真正的 Hermite–Einstein 度量，因此不失一般性，我们总可以令 λ 为常数（参见 [Kob87，§4.2]）。特别地，稳定性与存在性之间的关系也适用于弱 Hermite–Einstein 度量。

弱 Hermite–Einstein 度量自然会出现在 Z-临界方程的第一部分大体积极限中。

注2.2.20。 杨–米尔斯泛函 YM 的高阶临界点对应于 Hermite–Einstein 型度量，其块对角矩阵的系数取决于 E 的 Harder–Narasimhan–Seshadri 型（见 [Kob87，定理 4.3。27]）。特别地，设 $E \to （X, \omega）$是一个 HNS 型为 $\nu（E）$的全纯向量丛。若厄米度量 h 在 E 上是杨–米尔斯的，即 h 是杨–米尔斯泛函（式 2.1）的临界点，那么 E 具有一个全纯正交

分解

$$E = E_1' \oplus \cdots \oplus E_k'$$

其中的各个直和项 E_i' 各向量子丛恰好使得 $E \cong \mathrm{Gr}^{\mathrm{HNS}}(E)$ 双全纯。可以通过一个类似于 Hermite–Einstein 方程的微分方程来刻画 h 上的厄米度量 E 何时为杨–米尔斯度量。当且仅当该度量为杨–米尔斯度量时

$$iF(h) \wedge \omega^{n-1} = \frac{2\pi}{n!\,\mathrm{vol}(X)} \,\mathrm{diag}(\nu(E)) \otimes \omega^n$$

相对于 E 的此正交分解，其中 $\mathrm{diag}(\nu(E))$ 在直和项 E_i' 上的值为 $\mu(E_i')$。

我们不再拖延，立即陈述 Hermite–Einstein 度量与斜率稳定性之间著名的对应关系。

定理 2.2.21 (唐纳森–乌伦贝克–丘)。 紧致 K $E \to (X, \omega)$ *ähler* 流形上的全纯向量丛当且仅当它是斜率多稳定时，才存在 *Hermite–Einstein* 度量。

这一对应关系由 Kobayashi 和希钦独立猜想[Kob82，Hit79] 于20世纪80年代初提出。“存在性蕴含稳定性”这一“容易”的方向由 Kobayashi 和 L¨ubke [Kob80、L¨ub83]证明。在相反方向，紧黎曼曲面的情形本质上是纳拉西姆汉–塞沙德里定理 [NS65] 通过 Donaldson 的证明重新诠释 [Don83]而来。代数曲面的情形由 Donaldson [Don85], 证明，而紧 K¨ähler 流形上的完整对应则由 Uhlenbeck 和 Yau 于次年利用连续性方法证明 [UY86]。此后，Donaldson 使用不同于 Uhlenbeck 和 Yau 的技术，沿着代数曲面情形的思路，通过归纳论证，为所有射影流形给出了该定理的新证明 [Don87]。

关于 定理 2.2.21 的推广，已知其适用于非 K¨ähler 流形；布赫达尔已证明曲面上的情形 [Buc88] ，李–丘则证明了一般情形 [LY87]。此外，我们还回顾一下：当 E 不再是 X 上的向量丛，而是反身层时，坂东–萧证明了相应对应关系的一个版本；这在某些情形下尤其适用

到半稳定向量丛 E的分次对象 Gr(E)；它总是多稳定的，但不一定是局部自由的 [BS94]。

正如向量丛的斜率稳定性所体现的那样，我们注意到，已有大量工作利用 Hermite–Einstein 方程构造丛上的度量模空间；事实上，描述同一模空间的代数与微分几何技术之间存在丰富的相互作用。我们不再对这些结果作进一步评论，例如可参见 [GSTW21] 以了解更多细节。

2.2.2.2 陈联络的厄米几何

本节将分析 Hermite–Einstein 方程，并在此过程中汇集复向量丛厄米几何中的若干事实，这些事实将在 第一部分 和 第二部分中发挥重要作用。作为其中的一部分，我们将观察到第 2.2.1 节 中出现的许多稳定性的基本性质如何在微分几何中体现出来；特别地，我们将证明 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理中较为容易的方向（至少当子对象也是局部自由时）。

我们首先对 Hermite–Einstein 方程进行线性化（方程 2.2）。为此，我们回顾全纯向量丛上厄米度量空间 Herm(E) 的切空间结构。对于固定的参考度量 E, 同构 $\cong \mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$（$E$， h） h 表明，任意邻近的度量（等价地，任意处于 A（h）的同一规范轨道中的邻近陈联络）都可表示为

$$h_t = \exp(tV) \cdot h = h(-, \exp(tV)-)$$

其中 $V \in \Omega^0(X,\ \mathrm{End}_H(E,\ h))$ 是关于 h 的厄米自同态。这将导致如下变换：

$$\overline{\partial}_{h_t} = \overline{\partial}_h = \overline{\partial}_E$$

and

$$\partial_{h_t} = \exp(-tV) \circ \partial_h \circ \exp(tV).$$

事实上，我们有：

引理 2.2.22。 厄米度量的曲率 $F(h)$ 变换为

$$F(h_t) = F(h) + \overline{\partial}\partial_h V t + O(t^2).$$

证明。 回忆一下，在局部坐标中，陈联络的 (1,0) 部分具有如下形式

$$A = H^{-1}\partial H$$

其中 H 是表示 h 的局部厄米矩阵。在局部坐标中，$H_t = H\exp(tV)$，因此 $H_t^{-1} = \exp(-tV)H^{-1}$。于是我们计算得

$$\begin{aligned} A_t &= H_t^{-1}\partial H_t \\ &= \exp(-tV)H^{-1}(\partial H\exp(tV) + Ht\partial V\exp(tV)) \\ &= \exp(-tV)A\exp(tV) + t\exp(-tV)\partial V\exp(tV) \\ &= A + (-VA + AV + \partial V)t + O(t^2) \\ &= A + \partial_h V t + O(t^2). \end{aligned}$$

陈曲率进一步计算为 ∂A_t，从而得到

$$F(h_t) = F(h) + \overline{\partial}\partial_h V t + O(t^2). \qquad \square$$

我们不必固定 E 上的全纯结构并在 $\mathrm{Herm}(E)$ 中改变 h，也可以固定 h，并在 $\mathcal{A}(h)$ 内的复规范轨道中改变陈联络 A。通过酉规范变换 $g \in \mathscr{G}^{\mathbb{C}}$（即满足 $g^*g = \mathbf{1}_E$ 的变换）作用会共轭陈联络；特别地，F_A 满足一个规范不变方程，当且仅当 $F_{g\cdot A}$ 满足该方程。因此，若要捕捉复规范轨道内曲率的真正变化，就应在酉规范变换的正交补方向上进行。酉变换的正交补是厄米变换 $g \in \mathscr{G}^{\mathbb{C}}$，满足 $g^* = g$（也就是说，相对于 $\mathscr{G}$ 的自然迹配对，厄米自同态构成酉李代数的正交补）。复规范群作用于陈联络的众所周知的公式如下

by

$$\begin{aligned} g \cdot d_A &= g^* \circ \overline{\partial}_A \circ g^{*-1} + g^{-1} \circ \partial_A \circ g \\ &= g \circ \overline{\partial}_A \circ g^{-1} + g^{-1} \circ \partial_A \circ g \end{aligned} \tag{Eq. 2.3}$$

其中在第二行我们用到了 $g = g^*$ 在我们的情形下。[10] 为了对陈联络 A 在其复规范轨道内作小扰动，我们施加$g_t = \exp(tV)$，其中 V是一个厄米自同态，从而得到 $d_{A_t} = g_t \cdot d_A$。于是有如下结论。

引理 2.2.23. 固定厄米度量 h下陈联络的曲率 F_A 变换为

$$F_{A_t} = F_A + \left(\overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} - \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}}\right) Vt + O(t^2).$$

证明。利用公式 $F_{A_t} = d_{A_t}^2$ 以及 $\partial_A^2 = \partial_A^2 = 0$ 这一事实（因为陈曲率的类型为 (1,1)），可得

$$\begin{aligned} F_{A_t} &= (g_t \circ \overline{\partial}_A \circ g_t^{-1} + g_t^{-1} \circ \partial_A \circ g_t) \circ (g_t \circ \overline{\partial}_A \circ g_t^{-1} + g_t^{-1} \circ \partial_A \circ g_t) \\ &= g_t \overline{\partial}_A^2 g_t^{-1} + g_t \overline{\partial}_A g_t^{-2} \partial_A g_t \\ &\quad + g_t^{-1} \partial_A g_t^2 \overline{\partial}_A g_t^{-1} + g_t^{-1} \partial_A^2 g_t \\ &= g_t \overline{\partial}_A g_t^{-2} \partial_A g_t + g_t^{-1} \partial_A g_t^2 \overline{\partial}_A g_t^{-1} \\ &= \overline{\partial}_A \partial_A + \partial_A \overline{\partial}_A + t(V \overline{\partial}_A \partial_A - 2\overline{\partial}_A V \partial_A + \overline{\partial}_A \partial_A V \\ &\quad - V \partial_A \overline{\partial}_A + 2\partial_A V \overline{\partial}_A - \partial_A \overline{\partial}_A V) + O(t^2). \end{aligned} \tag{Eq. 2.4}$$

回顾自同态联络

$$\partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} V = \partial V + [A^{1,0}, V], \quad \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} V = \overline{\partial} V + [A^{0,1}, V]$$

[10] 有些文献采用这样的约定：$g \cdot \partial_E = g^{-\mathsf{T}} \circ \partial_E \circ g$ 这会导致线性化计算中的符号差异，但除此之外没有其他区别。我们的约定与厄米度量的变换相符，例如遵循 [Don85]，但代价是将对 $\mathrm{Herm}(E)$ 的作用视为右作用，而将对 $\mathcal{A}(h)$ 的作用视为左作用。

并展开 $\partial_A = \partial + A^{1,0}$ 和 $\overline{\partial}_A = \overline{\partial} + A^{0,1}$，得到

$$\partial_A V = \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} V - A^{1,0}V, \quad \overline{\partial}_A V = \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} V - A^{0,1}V,$$

并将这些代入（方程 2.4）即可计算得到

$$F_{A_t} = F_A + \left(\overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}}\partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} - \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}}\overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}}\right) Vt + O(t^2). \qquad \square$$

注 2.2.24。可以看出，曲率的两种线性化方式是等价的。事实上，回忆一下，$\mathscr{G}^{\mathbb{C}} \cdot d_A$ 与 $\mathrm{Herm}(E, \partial_E)$ 之间的同构通过将 $(h, g \cdot \partial_E)$ 映为 $(g \cdot h, \partial_E)$ 给出，其中 g 是一个厄米自同态。可以证明

$$F(h, g^{1/2} \cdot \overline{\partial}_E) = g^{1/2} \circ F(g \cdot h, \overline{\partial}_E) \circ g^{-1/2}$$

并令 $g = \exp(tV)$，再计算 t中的一阶表达式，可以观察到引理 2.2.23左端出现的表达式会变为引理 2.2.22右端出现的表达式。

根据这些计算，我们现在可以求出 Hermite–Einstein 方程的线性化。

命题 2.2.25。*Hermite–Einstein* 算子在

$$D : A \mapsto iF_A \wedge \omega^{n-1} - \lambda \mathbf{1}_E \otimes \omega^n$$

厄米规范变换[11] 作用下的线性化（相差一个常数因子）由$\mathrm{End}\ E$-拉普拉斯算子 $\Delta_{A^{\mathrm{End}\,E}} = d_A^* d_A$给出。

证明。 设 $A_t = \exp(tV) \cdot A$ 是陈联络的一个小扰动，其中

[11]相反，我们可以研究同一轨道中固定丛上的厄米度量。

V 是厄米的。因此由 引理 2.2.23可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} D(A_t) &= i\omega^{n-1} \wedge \left(\overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} - \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}}\right) V \\ &= \frac{i}{n} \Lambda_\omega \left(\left(\overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} - \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}}\right) V\right) \omega^n \\ &= \frac{1}{n} (\Delta_{A^{\mathrm{End}\,E}} V) \omega^n.\end{aligned}$$

最后一个等式由中野恒等式得出

$$\Lambda_\omega \partial_{A^{\mathrm{End}\,E}} = i\overline{\partial}^*_{A^{\mathrm{End}\,E}}, \quad \Lambda_\omega \overline{\partial}_{A^{\mathrm{End}\,E}} = -i\partial^*_{A^{\mathrm{End}\,E}}.$$

例如参见 [Bal06，命题 5。22]。 □

我们明确记录一些关于线性化计算的有用推论，这些推论将在第一部分中使用。这些推论可由丛拉普拉斯算子的已知性质直接得出。

推论 2.2.26。 *Hermite–Einstein* 方程是椭圆的，且线性化的核由全局全纯自同态给出

$$\ker P_A = H^0(X, \mathrm{End}(E, d_A^{0,1})).$$

Re标记 2.2.27。 Hermite–Einstein 算子的线性化作为映射

$$D : h \mapsto iF(h) \wedge \omega^{n-1} - \lambda \mathbf{1}_E \otimes \omega^n$$

由中野恒等式得到 ∂_h-拉普拉斯算子 Δ_{∂_h}

$$-i\partial_h^* = \Lambda\overline{\partial}.$$

这与丛拉普拉斯算子 $\Delta_{A^{\mathrm{End}\,E}}$ 在命题 2.2.25中的形式不同，差异在于一个涉及曲率缩并的交换子：

$$2\Delta_{\partial_h} V = \Delta_{A^{\mathrm{End}\,E}} V + [i\Lambda_\omega F_h, V].$$

因此在 *Hermite–Einstein* 方程的解处，两种线性化一致，且都是标准的丛拉普拉斯算子。我们只需要解处的线性化，因此这里不会引入任何微妙之处。

现在我们简要回顾第二基本形式的理论，以及子丛的厄米几何。由此得到一条基本原理：“全纯子丛中的曲率（一般而言）会减小”。这条原理支撑着 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理中较容易的方向，并且我们将在定理 5.1.4中广泛运用它。

设 A 是全纯向量丛 $E \to X$ 上厄米度量 h 的陈联络。设 $S \subset E$ 是一个全纯子丛，从而得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

其中 $Q = E/S$ 是商。相对于光滑（但不一定是全纯的！）分解

$$E \cong S \oplus Q$$

由度量 h 诱导，陈联络可写成分块矩阵形式：

$$A_E = \begin{pmatrix} A_S & \beta \\ -\beta^* & A_Q \end{pmatrix} \tag{Eq. 2.5}$$

其中 $\Omega^{0,1}(X,\mathrm{Hom}(Q,S))$ 是子丛$S \subset E$的第二基本形式。此外，相对于同一分解，A 的曲率 F 可计算为

$$F_E = \begin{pmatrix} F_S - \beta \wedge \beta^* & \partial_{A^{\mathrm{Hom}(Q,S)}}\beta \\ -\overline{\partial}_{A^{\mathrm{Hom}(S,Q)}}\beta^* & F_Q - \beta^* \wedge \beta \end{pmatrix}. \tag{Eq. 2.6}$$

注 2.2.28. 第二基本形式可以借助 Dolbeault 同构定理作代数解释，例如可仿照 [Ati57，命题 4]。[12] 也就是说，若 $e \in \mathrm{Ext}^1(Q,S)$ 是下列

[12] Atiyah 的计算针对的是如何在主丛上定义全纯联络这一具体问题，但被分裂的特定序列（“Atiyah 序列”）对其证明并不重要。

短正合列的扩张类，那么利用如下识别：当 Q 和 S 局部自由时，$\mathrm{Ext}^1(Q,S) \cong H^1(X,\mathrm{Hom}(Q,S))$，以及 Dolbeault 同构

$$H^1(X,\mathrm{Hom}(Q,S)) \cong H^{0,1}_{\bar\partial_E}(X,\mathrm{Hom}(Q,S))$$

有 $e=[\beta]$。特别地，如果 β 在 Dolbeault 上同调中为零，那么短正合列会分裂。事实上，在这种情况下，陈联络 A 可以通过规范变换化为满足 $\beta=0$的形式，此时 S 在协变导数 d_A作用下保持不变，因此其正交补也如此（因为 d_A 是酉的），从而使 Q 成为 E的全纯子丛。

为了结束关于子丛的厄米几何的讨论，我们来说明这样一个原理：曲率在子丛中（一般而言）减小，在商对象中则增大。这是厄米几何中对应于斜率稳定性跷跷板性质引理 2.2.6 的类似物，并且很快就能由此证明定理 2.2.21 的一个方向（至少当子对象是子丛时）。

命题 2.2.29。 假设 $E\to(X,\omega)$ 不可分解，且存在爱因斯坦度量 h。那么 E 相对于全纯子丛$S\subset E$是斜率稳定的。

证明。 这里我们使用陈曲率的分解以及 Hermite–Einstein 度量的性质。我们知道

$$iF(h)\wedge\omega^{n-1}=\lambda\mathbf{1}_E\otimes\omega^n.$$

设 $S\subset E$ 是任意一个非零真全纯子丛， $Q=E/S$ 是商丛。那么，关于 C^∞ 直和分解 $E=S\oplus Q$，Hermite–Einstein 方程的 End(S) 分量为

$$i(F_S-\beta\wedge\beta^*)\wedge\omega^{n-1}=\frac{2\pi}{n!\,\mathrm{vol}(X)}\mu(E)\mathbf{1}_S\otimes\omega^n.$$

取迹并积分后，我们注意到

$$-\int_X\mathrm{tr}(\beta\wedge\beta^*)\wedge\omega^{n-1}=\frac{i}{2\pi}\|\beta\|^2$$

（经过适当归一化）因此我们得到

$$2\pi(\deg S + \|\beta\|^2) = 2\pi\mu(E)\,\mathrm{rk}\,S$$

并利用 $\|\beta\|^2 > 0$，由于 E 不可分解（否则 $E = S \oplus Q$ 全纯地作为 $\beta = 0$，这意味着该短正合列分裂），我们得到

$$\mu(S) < \mu(E).$$

因此，关于 S， E 是斜率稳定的。 □

2.2.2.3 近似 Hermite–Einstein 度量

为了补充全纯向量丛的背景知识，我们将讨论第 2.2.1.3 节中所述 Gieseker 稳定性的微分几何类比。这一理论由 Leung 在 [Leu97、Leu98], 中发展，并且与第一部分中的理论有许多相通之处。

让我们采用动量映射的方法来处理这个问题。正如 Atiyah–Bott 和 Donaldson 所指出的，Hermite–Einstein 方程可以导出为如下辛形式的动量映射方程

$$\Omega_{AB}(a,b) = -\int_X \mathrm{tr}(a \wedge b) \wedge \omega^{n-1}$$

定义在 Hermitian 向量丛（ $\mathcal{A}(h)$（E， h） $\to (X$， ω）上可积酉联络的空间上。Donaldson 构造了行列式线丛 $\mathcal{L} \to \mathcal{A}(h)$，使 Atiyah–Bott 辛形式成为某个厄米度量的曲率[Don87]。Donaldson 的构造运用了指标定理的局部版本以及 Bismut–Freed 的思想，并且追溯至 Quillen，从而确定正确的行列式丛 [Qui85、BF86a、BF86b]。作为这一构造的一部分，人们考虑泛丛

$$\mathbb{E} \to \mathcal{A}(h) \times X$$

其具有一个万有联络 $\mathbb{A}$，满足性质 $\mathbb{A}|_{\{A\}\times X} = A$。该联络具有泛曲率 $F_{\mathbb{A}} \in \Omega^2(\mathcal{A}(h) \times X)$。由 Bismut–

Freed 关于族的 Atiyah–Singer 指数定理的局部版本可知,

$$\Omega := c_1(\operatorname{ind}\mathbb{E}) = \left\{ \int_X \exp\left(\frac{i}{2\pi} F_{\mathbb{A}}\right) \operatorname{Td}(X) \right\}_{(2)}$$

其中，右侧取形式在$\mathcal{A}(h)$上的二次分量。

由此形式在 $\mathcal{A}(h)$上诱导的辛结构由 Leung [Leu98]研究过。特别地, Leung 考虑了将 $E \to X$ 替换为 $E \otimes L^k$ 的情形，其中 $L \to X$ 是一个丰线丛，而 $\omega \in c_1(L)$是一个代表元 K¨ahler 形式。Leung 计算得

$$\Omega_k(A)(a,b) = \int_X \operatorname{tr}\left[\exp\left(\frac{i}{2\pi} F_A + k\omega \otimes \mathbf{1}_E\right), a, b\right]_{\mathrm{sym}} \operatorname{Td}(X) \qquad \text{(Eq. 2.7)}$$

对称括号的定义见定义 4.3.1。对于规范群 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{A}(h$上的作用，可得到一个动量映射方程

$$\left\{ \exp\left(\frac{i}{2\pi} F_A + k\omega \otimes \mathbf{1}_E\right) \widetilde{\operatorname{Td}}(X) \right\}^{(2n)} = \frac{1}{\operatorname{rk}(E)} \chi(E \otimes L^k) \frac{\omega^n}{n!} \otimes \mathbf{1}_E \qquad \text{(Eq. 2.8)}$$

其中 Td(X)是陈类的陈–韦伊代表元，它们是相对于由 K Xähler 度量¨诱导的 Levi-Civita 联络 ω而言的。这个动量映射的形式强烈暗示它与 Gieseker 稳定性有关。满足 A 的联络(方程 2.8) 称为近似 *Hermite–Einstein* 联络(或者对于厄米度量 h，称为近似 *Hermite–Einstein* 度量)。[13] 在大体积极限下，近似 Hermite–Einstein 方程收敛到 Hermite–Einstein 方程，Leung 证明了以下结果。

定理 2.2.30 ([Leu97])。 设 $E \to (X, \omega)$ 是一个单纯的斜率半稳定向量丛，其分次对象局部自由 $\operatorname{Gr}(E)$。那么 E 对所有

[13]不要将其与 Kobayashi 定义的“近似 Hermite–Einstein 度量”混淆[Kob87], 后者是指任意一列在某个适当范数下与 Hermite–Einstein 度量相差 ε的厄米度量。事实上，几乎 HE 度量就是近似 HE 度量的例子，此外还有 Z_k-临界度量（其中 $k \gg 0$ 将在 第一部分中出现）。

当且仅当 E 是 *Gieseker* 稳定时，存在爱因斯坦度量。

注记 2.2.31. 定理 2.2.30 是我们关于 Gieseker 稳定性的主定理 定理 1.3 的直接类比，与渐近 Z-稳定性相对。证明思路相似：Leung 在极限附近应用了一个扰动结果$k \to \infty$，利用 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理以及分次对象上 Hermite–Einstein 度量的存在性。然而，证明的细节有所不同。特别是，Leung 对线性化算子的分析没有考虑分次对象的对称性可能带来的自同构，这使得一般情况下证明定理 5.1.1 时，给线性化算子的逆算子作出界估计变得困难。[14]

2.3 簇

在详细介绍了全纯向量丛稳定性的背景之后，我们现在来讨论簇的相应理论。在这里，退化的概念比子对象的视角更为重要；对于丛而言，后者在几何上最有意义。这类退化称为测试构形，在第二部分中，我们将用这一术语来描述纤维化退化。

2.3.1 K-稳定性

簇稳定性理论源于 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理的成功定理 2.2.21 该定理成功预测了丛上几何偏微分方程解的存在性，同时也推动了人们寻找一种判据，以推出 K¨ahler–Einstein 度量在 Fano 流形上的存在性（Calabi–Yau 情形和一般型情形已由 Yau 证明的 Calabi 猜想解决）。事实上，根据 Matsushima 和 Lichnerowicz 的研究，人们已知任何 K¨ahler–Einstein Fano 流形的自同构群的李代数都必须是约化的 [Mat57，Lic58]。

[14]注意，这些术语并未出现在第5章 的证明中，我们在那里只考虑更简单的情形，即 Gr(E) 有两个分支。

然而，例子 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{CP}^2$ 是 Fano 流形，且其自同构群非约化。[15]

Yau 猜想，光滑 Fano 簇上 K¨ahler–Einstein 度量的存在，应等价于一种类似于向量丛斜率稳定性的稳定性条件；他还提出，也许其存在性等价于切丛的斜率多项式稳定性 [Yau93]。Tian 确定了正确的判据，并将这一条件称为*K*-稳定性 [Tia97]。“K”取自 Mabuchi 引入的 K 能量泛函 [Mab86]，，代表动能或规范的（而不是*K¨ahler*！）。[16] Donaldson 将 Tian 的稳定性条件改写为纯粹的代数几何条件，并将其推广到所有极化簇 [Don02]。我们将用 Donaldson 的表述介绍 K-稳定性的概念。

K-稳定性的定义直接类比于带群作用的簇上点的稳定性所用的 Hilbert–Mumford 判据。因此，为了精确建立这一类比，必须定义：

- 极化簇（X， L）的一种单参数退化概念，以及
- 在该单参数退化的极限纤维上计算的权的概念。

首先，我们将描述单参数退化。

定义 2.3.1 (测试构型)。一个极化簇（$\mathcal{X}$， $\mathcal{L}$）的指数为 r 的测试构型（参见图 2.3）（X， L）是一个概形 $\mathcal{X}$，带有平坦态射π： $\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ 以及其上的相对丰线丛 $\mathcal{L}$，满足

- 存在一个作用于极化族（$\mathcal{X}$， $\mathcal{L}$）的 $\mathbb{C}^*$ 作用，该作用覆盖 $\mathbb{C}$ 上的标准 $\mathbb{C}^*$ 作用，并使 π 具有等变性。
- 对每个 $t \in \mathbb{C}^*$，$(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t) \cong (X, L^r)$。

如果一个测试构型是乘积，我们就称其为平凡的，当且仅当它是一个乘积，且 $\mathbb{C}^*$ 在 X 因子上的作用是平凡的。

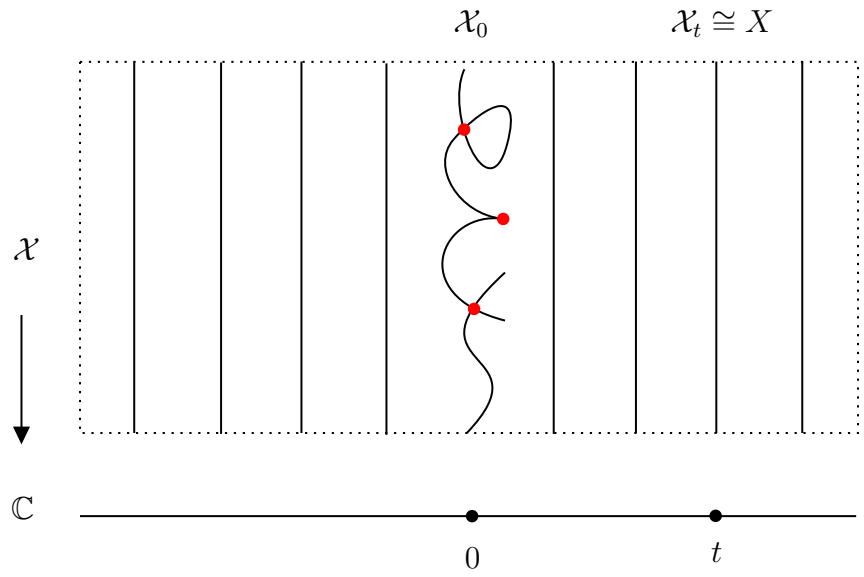


图 2.3：一个测试构型。一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 同构于 X，但中心纤维 $\mathcal{X}_0$ 可能有奇点或多个分支。

π 态射的平坦性带来的一个结果是，希尔伯特多项式$\chi(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t) = \chi(X, L)$与 $\chi(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$一致。事实上，这不仅仅是一种类比：测试构型确实是将单参数子群作用于作为希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}^{\mathcal{P}(r)}$ 中一点的（X, L^r）而得到的轨道（的闭包），其中 $\mathcal{P}(r) = \chi(X, L^r)$（参见 [RT07，命题 3.7]）。

与测试构型相关联的权定义如下。中心纤维（$\mathcal{X}_0$，$\mathcal{L}_0$）在（$\mathcal{X}$，$\mathcal{L}$）上的 $\mathbb{C}^*$ 作用下保持不变，因此该作用提升到H^0（$\mathcal{X}_0$，$\mathcal{L}_0^k$），对 $k \gg 0$ 亦然。向量空间上的 $\mathbb{C}^*$ 作用会将其分解为权空间之和，而总权是各因子上权的总和。等价地，我们将总权函数 $w(k)$ 定义为诱导的 $\mathbb{C}^*$ 作用在 $\det H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^k)$ 上的权。明确写出

$$\mathcal{P}(k) = \dim H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + O(k^{n-2}), \quad w(k) = b_0 k^{n+1} + b_1 k^n + O(k^{n-2}).$$

[15]自同构群同构于 Aff(2，$\mathbb{C}$)，由于它包含加法群 $\mathbb{C}^2_+$ 的一个因子，因此不是约化的。[16]这一点已在 Ruadhaí Dervan 与 Mabuchi 的私人通信中得到确认。

定义 2.3.2（Donaldson–Futaki 不变量）。对于（$\mathcal{X}$，$\mathcal{L}$）到（X，L^r）的测试构型，其权或*Donaldson–Futaki* 不变量为

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X},\mathcal{L}) := \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_0}.$$

现在已知一种根据交理论计算 Donaldson–Futaki 权的替代方法。事实上，Tian 在引入其最初的 K-稳定性条件时，就已经通过 CM 线丛理解了一个交理论公式 [Tia97], ，而这些概念之间的等价性后来得到了证明 [PT09、PRS08]（另见 [Wan12、Oda13]）。将测试构型在 ∞ 处以平凡方式紧化为一个族（$\bar{\mathcal{X}}$、$\bar{\mathcal{L}}$）$\to \mathbb{CP}^1$。于是，DF 不变量或 CM权重为

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X},\mathcal{L}) := \frac{1}{2(n+1)L^n}\left(n\mu(X,L)(\bar{\mathcal{L}})^{n+1} + (n+1)K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{CP}^1}.\bar{\mathcal{L}}^n\right) \qquad \text{(Eq. 2.9)}$$

其中 μ（X、L）$= -(L^{n-1}.K_X)/L^n$ 是（X、L）的斜率。该交理论公式将在第二部分中定义纤维化稳定性时发挥作用。

定义 2.3.3。设（X、L）是一个极化簇。我们称这对对象为

- *K*-半稳定 若对任意测试构型（$\mathcal{X}$、$\mathcal{L}$），DF（$\mathcal{X}$、$\mathcal{L}$）≥ 0。
- *K*-多项式稳定当且仅当它是 K-半稳定的，并且 DF($\mathcal{X},\mathcal{L}$) $= 0$ 仅在 ($\mathcal{X},\mathcal{L}$) 正规化为乘积测试构型时成立。
- *K*-稳定当 DF($\mathcal{X},\mathcal{L}$) > 0 对任何不正规化为平凡测试构型的测试构型都成立时。
- *K*-不稳定当它不是 K-半稳定时。

注 2.3.4. Ross–Thomas 曾尝试定义一种更符合 Yau 最初预言的 K-稳定性概念，即类似于斜率稳定性的稳定性条件 [RT06, RT07]。斜率 K-稳定性 这一概念有助于找出

K-稳定性的障碍，但除了曲线的情形，它并不等价于 K-稳定性。[17] 事实上，Panov–Ross 证明了 $\mathrm{Bl}_{p,q}\,\mathbb{CP}^2$ 是斜率 K-稳定的，但并非 K-稳定 [PR09, 例 7。8]。斜率 K-稳定性考虑由子概形 $Z \subset X$ 的正规锥变形所产生的测试构型（见 [RT06,§4]），但若要得到与 K-稳定性等价的理论，就必须改为考虑子概形的 旗 。Mumford 已指出这一点 [Mum77]，Ross–Thomas 也对此作了详细讨论 [RT07, §3]。在 第二部分，我们将讨论研究纤维化稳定性时，由子概形旗标产生的某些测试构型。

注 2.3.5. 预计在 (X, L) 不是 Fano 的情况下，需要修改 K-稳定性的定义，使其足够强，从而能够推出常数标量曲率 K¨ahler 度量的存在性。Sz´ekelyhidi 基于 Witt-Nystr¨om [Sz´e15、WN12], 提出了一种修改方案，称为滤过 *K*-稳定性。在 Berman–Boucksom–Jonsson 的工作之后（见 [BBJ21]），这一概念随着关于 K-稳定性的变分方法以及李关于极化簇的 YTD 猜想的精彩工作而得到了极大拓展 [Li20]。

2.3.2 典范 K¨ahler 度量

重复地，受原理 1.1的指导，我们现在引入与 K-稳定性相对应的极值对象概念。事实上，K-稳定性直接源于它与典范 K¨ahler 度量存在性的关系，我们强调 Donaldson 关于常数标量曲率 *K¨ahler* 度量的观点。与 K¨ahler 流形 (X, ω) 相关联的 Ricci 形式为

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det\omega$$

而标量曲率为

$$S(\omega) = \Lambda_\omega\,\mathrm{Ric}(\omega).$$

[17]然而在这种情况下，它实质上提供了首个关于光滑曲线 K-稳定性的纯代数证明。光滑曲线只能被奇点以斜率意义破坏 K-稳定性，因此，一致化定理也就可以被诠释为原理 1.1的一个实例。

S 的平均值由拓扑决定，且为

$$\hat{S} = \frac{nc_1(X).[\omega]^{n-1}}{[\omega]^n} = n\mu(X, L)$$

其中 $[\omega] = c_1(L)$，若 ω 是整的，且已选定一个极化充足线丛 .

定义2.3.6。若 K¨ahler 度量满足*K¨ahler–Einstein* 条件，则称其为

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$而言。若其为常标量曲率 ***K¨ahler*** （cscK），则称其为

$$S(\omega) = \hat{S}.$$

Calabi 提出寻找满足上述性质的典范 K¨ahler 度量的例子 [Cal82], ，这最终引出了 Calabi 的极值度量概念（此处不再赘述）。在这一背景下，原则1.1 的具体形式是一个猜想：Yau 和 Tian 针对 Fano 流形提出了该猜想，Donaldson 则针对极化流形提出了该猜想（不过，Fujiki 的工作已隐含了这种对应关系应在如此一般的情形下成立这一想法[Fuj92]）。

猜想2.3.7 （Yau–Tian–Donaldson）。若光滑极化簇 (X, L) 是 ***K***-多稳定的，当且仅当它存在一个常标量曲率 ***K¨ahler*** 度量 $\omega \in c_1(L)$。

Fano 流形的情形中，cscK 度量即 K¨ähler–爱因斯坦度量；在光滑情形下，这一结果由 Chen–Donaldson–Sun [CDS15a、CDS15b、CDS15c], 证明。此后，Tian 给出了新的证明，Datar– Sz´ekelyhidi、Chen–Sun–Wang 和 Berman–Boucksom–Jonsson 则采用了多种不同的方法 [Tia15、DS16、CSW18、BBJ21]。如今，Li–Tian–Wang、李以及 Liu–Xu–Zhuang 的工作已在非常一般的情形下证明了奇异 Fano 流形的 YTD 猜想。他们的工作共同表明，任意对数 Fano 对 (X, Δ) 存在弱 K¨ähler–爱因斯坦度量，当且仅当它是 K-多项式稳定的 [LTW21、Li22、LXZ22]。

让我们通过强调 Kempf–Ness 型泛函在这一情形中的重要性，来完成对簇的原理 1.1 的简短概述。这里的

泛函由 Mabuchi 引入，也称为 K 能量[Mab86]。如常，我们通过其一阶变分来定义该泛函。若 ω 是一个 K¨ahler 度量，而 $\omega_\varphi = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ 是同一 K¨ahler 类中的任意度量，那么 Mabuchi 泛函是在该类的 K¨ahler 度量空间 $[\omega]$上满足以下条件的唯一泛函： $\mathcal{M}(\omega) = 0$ 并且

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}(\varphi_t) = \int_X \dot{\varphi}_t(\hat{S} - S(\omega_t))\omega_t^n.$$

按照构造，Mabuchi 泛函的临界点必然是常数标量曲率 Kähler 度量。关于 Fano 流形上 Mabuchi 泛函的引理 2.1.6 版本——将测地射线所对应的测试构型的 Donaldson–Futaki 不变量作为极限斜率来计算——如今已可在变分框架下得到充分理解（参见 [BHJ19] 及其中的参考文献）。随后，Berman–Boucksom–Jonsson [BBJ21]沿用 Kempf–Ness 定理的原始思路，利用这一泛函证明了 YTD 猜想。如今已有大量工作证明了任意极化流形上的 Kempf–Ness 泛函所具有的类似性质，其中 Chen 和 Cheng 的工作尤为突出[CC21a、CC21b]。

2.3.3 具有 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$ 作用的 Fano 三维簇的变形

本节将简要介绍 Donaldson [Don08、§5], 所阐述的 Mukai–Umemura 三维簇的显式 K-稳定性问题，并介绍一个新的奇异三维簇。该三维簇具有较大的自同构群，或可应用相同的技术。该奇异三维簇尚未见于文献，我们还将探讨其变形理论可能如何与 K-稳定性交互。

我们将利用 Mukai–Umemura 三维簇，构造与主 SL(2，$\mathbb{C}$)-丛相关的等变纤维化示例，这些丛在第 7 章中具有最优辛联络。

这些自同构群为 SL(2，$\mathbb{C}$) 的三维簇，是通过取格拉斯曼流形上丛截面的公共零点轨迹构造的；我们将介绍三个这样的例子。为了寻找自同构群为 $G =$ SL(2，$\mathbb{C}$) 的三维簇，我们

ma用到了 SL(2, $\mathbb{C}$) 的基本表示论，现将其回顾 l.

定理 2.3.8 （例如参见 [FH91，第 11]章）。 对于每个非负整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在唯一的、不可约的、有限维的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$表示，其维数为 $k+1$，记作 s^k。该表示可明确描述为

$$s^k = \mathbb{C}[X,Y]_k,$$

在两个变量中次数为 k 的齐次多项式，按标准方式作用。

引理 2.3.9。 给定 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的两个不可约表示 s^k, s^l，且 $k \geq l$，我们有如下分解

$$\begin{aligned} s^k \otimes s^l &\cong s^{k+l} \oplus s^{k+l-2} \oplus \cdots \oplus s^{k-l+2} \oplus s^{k-l}, \\ \mathrm{Sym}^2 s^k &\cong s^{2k} \oplus s^{2k-4} \oplus \cdots \oplus s^4 \oplus s^0, \\ \bigwedge^2 s^k &\cong s^{2k-2} \oplus s^{2k-6} \oplus \cdots \oplus s^6 \oplus s^2. \end{aligned}$$

这些分解可以通过分析不可约表示的张量积的最高权，并利用以下事实得到：每个 SL(2, $\mathbb{C}$) 的不可约表示 s^k 都以最高权 k作用。也可以将 s^k 视为标准表示 $s^1 = \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}[X,Y]_1$.的对称积 $\mathrm{Sym}^k s^1$，从而使用 Cayley–Sylvester 公式

2.3.3.1 Mukai–Umemura 三维簇

为了将 Mukai–Umemura 三维簇构造为格拉斯曼流形的子集，考虑向量空间 $V = s^6$ 以及 V 中 3维平面的格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(V)$。这是 $3 \cdot (7-3) = 12$ 维的。首先选取一个 3 维子空间 $\Pi \subset \bigwedge^2 V^*$，并定义

$$X_\Pi := \{P \in \mathrm{Gr}_3(V) \mid \omega|_P = 0 \text{ for all } \omega \in \Pi\}.$$

我们也可以将其视为格拉斯曼流形上丛的截面的零点集，具体如下。记

$$\mathcal{V} \to \mathrm{Gr}_3(V)$$

$\mathrm{Gr}_3(V)$ 上三维平面的典范丛，并令 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为$\Pi \subset \bigwedge^2 V^*$的一组基。然后定义 $\bigwedge^2 \mathcal{V}^*$ 的截面 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$，使得 $\sigma_i(P) := \omega_i|_P$，并注意到

$$X_\Pi = Z(\sigma_1) \cap Z(\sigma_2) \cap Z(\sigma_3) \subset \mathrm{Gr}_3(V).$$

所得的簇仅取决于三维平面 Π，维数计算表明，对于 Π的一般选择， X_Π 是一个三维簇。事实上，通过扰动二形式ω_i，我们得到 3维平面的 Zariski 开子空间 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*)$ Π，使得 X_Π 是一个光滑三维簇；而 Mukai 的一项结果表明，不等价的 3维平面位于 $\mathrm{SL}(V)$ 在 $\mathcal{U}$ 上作用的不同轨道中。因此，这些可能的三维簇X_Π 由商空间分类

$$\mathcal{M} = \mathcal{U}/\operatorname{SL}(V).$$

引理 *2.3.10.* </style>对于任意 $\Pi \in \mathcal{U}$，三维簇 X_Π 都是 *Fano*。

证明. </style>设 $H = \bigwedge^2 \mathcal{V}^*$。那么 $H = \mathcal{V} \otimes L$，其中 $L = \det \mathcal{V}^*$。因此我们有

$$\det H = L^{\otimes 2}.$$

$\mathrm{Gr}_3(V)$ 的切丛为

$$T\,\mathrm{Gr}_3(V) = \mathcal{V}^* \otimes ((V \otimes \mathcal{O})/\mathcal{V}),$$

因此我们看到 $\det T\mathrm{Gr}_3(V) = L^{\otimes 7}$。给定某个 $\Pi \in \mathcal{U}$， X_Π 的切丛是一个满射 $T\mathrm{Gr}_3(V) \to H \oplus H \oplus H$ 的核。因此我们得到

$$\det TX_\Pi \cong L^{\otimes 7} \otimes 3L^{\otimes -2} \cong L$$

因此 $K_{X_\Pi}^{-1} \cong L > 0$ 是丰沛的。 □

Mukai–Umemura 三维簇是通过对 Π 作特定选择得到的。具体而言，若 $V = s^6$，则 $V^* \cong V$，因为 SL(2，$\mathbb{C}$) 的 7维不可约表示是唯一的，因此

$$\bigwedge^2(V^*) = s^{10} \oplus s^6 \oplus s^2.$$

该 s^2 直和项定义了一个三维平面 Π_0，位于 $\mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*)$ 中，相应的三维簇 $X_0 = X_{\Pi_0}$ 是 *Mukai–Umemura* 三维簇。Mukai–Umemura 证明了X_0 是非奇异的，换句话说，$s^2 \in \mathcal{U} \subset \mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*)$ [MU83，§2]。由于Π_0具有 SL(2, $\mathbb{C}$)-不变性，因此可在 X_0上得到自然的 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用。

Donaldson 对 Mukai–Umemura 三维簇的 Tian 的阿尔法不变量进行了显式计算。该不变量是一个判据，可用于推断光滑Fano流形上存在 K¨ähler–爱因斯坦度量 [Tia87]。具体而言，可得:

命题 2.3.11 ([Don08])。 *Mukai–Umemura 三维簇 X_0 是光滑的，并且存在 K¨ähler–爱因斯坦度量。因此，它是 K-多项式稳定的。*

此外，还存在一个 SL(2, $\mathbb{C}$)-等变嵌入

$$X_0 \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X_0, K_{X_0}^{-1}))$$

其中 $H^0(X_0, K_{X_0}^{-1}) \cong s^0 \oplus s^{12}$. 在 ∞ 处的 X_0 除子由生成 $s^0 \cong \mathbb{C}$ 因子的截面 $\sigma \in H^0(X_0, K_{X_0}^{-1})$ 的零点集给出。X_0 的几何性质可以通过这个除子得到明确理解，例如可以观察到 $X_0 \backslash Z(\sigma)$ 同构于 SL(2, $\mathbb{C}$)/Γ，其中 Γ 是二十面体的对称群，因此 X_0 是这个空间的一种自然紧化。

此外，X_0 的变形理论可以通过 SL(2, $\mathbb{C}$) 的表示论来计算。回顾一下，簇 X_0 可识别为一个点 $\Pi_0 \in \mathcal{U} \subset \mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*$。在 $[\Pi_0] \in \mathcal{M} = \mathcal{U}/\mathrm{SL}(V)$ 处的万有变形空间可按以下方式计算。[18] 我们有 $\bigwedge^2 V^* = s^{10} \oplus s^6 \oplus s^2$ 因此

$$T_{\Pi_0} \mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*) = (s^{10} \oplus s^6) \otimes s^2 = s^{12} \oplus s^{10} \oplus 2s^8 \oplus s^6 \oplus s^4.$$

[18]根据 Mukai 的一项结果，所有秩1、次数22的光滑 Fano 三维簇都表现为格拉斯曼流形的截面，并由 $\mathcal{U}$ 参数化，因此 $\mathcal{M}$ 是这一变形族中 Fano 模空间的一个代表。

SL(V) $=$ SL(s^6) 在 $\mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*)$ 上有一个作用，其核由 $\Pi_0 = s^2$ 处的稳定子给出，该稳定子是 SL$(2,\mathbb{C})$。GL(s^6) $\cong$ End(s^6) $\cong s^6 \otimes s^6$ 的李代数为

$$\mathfrak{gl}(s^6) = s^6 \otimes s^6 = s^{12} \oplus s^{10} \oplus s^8 \oplus s^6 \oplus s^4 \oplus s^2 \oplus s^0$$

因此，在对生成 $\mathbb{C}^* \cdot \mathbf{1} \in$ GL(s^6) 的因子 s^0 取商后，$\mathfrak{sl}(s^6) \cong s^{12} \oplus \cdots \oplus s^2$。在 $T_{\Pi_0}\mathrm{Gr}_3(s^6)$ 上的诱导作用无法察觉稳定子因子 s^2。因此可得，Zariski切空间 $T_{[\Pi_0]}\mathcal{M}$ 由以下态射的商给出

$$\frac{\mathfrak{sl}(s^6)}{s^2} \to T_{\Pi_0}\,\mathrm{Gr}_3(s^6)$$

根据上述计算，该态射为

$$T_{[\Pi_0]}\mathcal{M} = s^8.$$

注意，$\mathcal{M}$ 的光滑轨迹的预期一般维数为 6，而点 $[\Pi_0] \in \mathcal{M}$ 预期是一个奇异点。这对应于 X_0具有 3 维自同构群，而 $\mathcal{M}$ 的一般成员的自同构群是平凡的（因此，正如计算所得，Zariski切空间的维数为 $6{+}3{=}9$）。

表示中点的 GIT稳定性 s^k 对于 SL$(2,\mathbb{C})$ 已广为人知，可以用相关齐次多项式在 $\mathbb{CP}^1$ 上的零点来表述（例如参见 [Tho06]）。由此引出了 Donaldson 关于这种 GIT 稳定性与 X_0 在 $\mathcal{U}$ [Don08] 中的变形的 K- 稳定性之间关系的诱人猜想。该猜想通过 Sz´ekelyhidi 和 Br¨onnle 的工作得以解决 [Sz´e10, Br¨o11],；他们的工作适用于更广泛的情形，即具有自同构的常标量曲率 Kähler 流形的变形。

定理2.3.12。 $\mathcal{U}$ 中的 X_0 的小变形 X_Π 是 *K-*（半/多项式）稳定的，当且仅当相关点 $v_\Pi \in T_{[\Pi_0]}\mathcal{M}$ 关于SL$(2,\ \mathbb{C}) =$自同构群$(X_{\Pi_0},\ L)$ 在 $T_{[\Pi_0]}\mathcal{M}$上的作用是 *GIT*（半/多项式）稳定的。

CompTian 的计算表明，由 GIT 不稳定或严格

上述 GIT半稳定轨道并非 K¨ahler–Einstein [Tia87]。变形 X_0 会破坏 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用，但有些变形可能保留该 $\mathbb{C}^*$ 作用，并且在 $X(\tau$附近存在一个由这类三维簇构成的一参数族 X_0，其中 X_0 对应于 $\tau = 1$。Donaldson 针对这一情形提出了一个更精细的猜想 [Don18，§4.1] 其中，K-多稳性应由除子的奇异性的性质来刻画。Cheltsov–Shramov 已解决这一猜想，证明除少数几个 $X(\tau$取值外，) 均为 K-多稳 τ [CS18]。

2.3.3.2 V_5流形

还可以构造另一个带有 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用的光滑 Fano 三维簇实例，将其作为格拉斯曼流形中截面的零点集；这次它属于变形族 V_5。在此情形下，使用不可约表示 $V = s^4$ ，并考虑 $\mathrm{Gr}_2(V)$ 中的三重交，该交为 $2\cdot(5-2) = 6$ 维。事实上，若 $\mathcal{V} \to \mathrm{Gr}_2(V)$ 是典范丛，则 $\bigwedge^2\mathcal{V}^*$ 是线丛，而由平面 $\Pi \subset \bigwedge^2 V^*$ 定义的三个截面会产生一个 Fano 三维簇；与上文的 V_{22} 和 Mukai–Umemura 三维簇情形类似，此处也存在相应的形式理论。

事实上，可以计算

$$\bigwedge^2 V^* = s^6 \oplus s^2$$

并令 $\Pi_0 = s^2$ 即可得到一个光滑 Fano 三维簇 Y_0 ，其带有 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用。流形 Y_0 的代数几何已在 [PCS19，§6] [San14]中描述。特别是，可以计算 Y_0 的 α 不变量，且其大于 $\frac{5}{6}$，因此 Y_0存在一个 K¨ahler–Einstein 度量，并且是 K-多项式稳定的 [CS09]。

然而，对 Y_0 的万有变形空间进行计算后发现， $\mathcal{M} = \{Y_0\}$ 和 Y_0 是刚性的。因此，无法像研究 Mukai– Umemura 三维簇 X_0 那样，研究 Y_0 所具有的相同变形图景。

2.3.3.3 类 V_{14} 中的一个奇异三维簇

还有第三个 Fano 三维簇变形族，可以通过一种直接的方式，将格拉斯曼流形上的截面零点构造出来，类为 V_{14}。这里取 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^6)$ 中形式的 5 重交。这类光滑 Fano 三维簇的局部模空间维数为 15。它们的 K-稳定性已得到彻底理解。

定理 2.3.13 ([ACC+21，例 4.1。7])。 变形类 V_{14} 中的每个光滑 *Fano* 三维簇都具有离散自同构群，且是 *K*-稳定的。

现在我们将描述这个变形类中具有较大自同构群的一个奇异三维簇。现在考虑 $V = s^5$ SL(2, $\mathbb{C}$) 的 6 维不可约表示。按照惯例，令 $\mathcal{V} \to \mathrm{Gr}_2(V)$ 表示典范丛，并考虑由一个 5 维平面 $\Pi \subset \bigwedge^2 V^*$定义的 $\bigwedge^2 \mathcal{V}^*$ 的五元截面组。我们有

$$\bigwedge^2 s^5 = s^8 \oplus s^4 \oplus s^0$$

并取 $\Pi_0 \coloneqq s^4 \subset \bigwedge^2 s^5$。然后令

$$Z_0 := Z_{\Pi_0} \subset \mathrm{Gr}_2(V).$$

由于 Π_0 是 SL(2, $\mathbb{C}$-不变的， Z_0 带有一个 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用。不同于 Mukai–Umemura 三维簇和 V_5 流形的情形（由于它们被明确描述为 SL(2, $\mathbb{C}$)/Γ 的某个 Γ 有限子群的紧化，因此可以证明是光滑的），上述光滑 V_{14} 流形的分类表明，Z_0 必定是奇异的。[19] 事实上，我们将明确描述 Z_0 并确定两个奇点。

注 2.3.14. 虽然我们无法证明 Z_0 本身是 Fano，但我们预期情况确实如此。对 V_5 或 V_{22} 的光滑情形采用类似论证可知，丰丛 $\det \mathcal{V}^*$ 在一般点处同构于 $K_{Z_0}^{-1}$，因此接下来需要更详细地了解 Z_0 的奇异轨迹如何改变其反典范丛。尽管如此，Z_0 是光滑 Fano 三维簇的一个退化，因此具有数值有效反典范丛。

考虑 Pl¨ucker 嵌入

$$\mathrm{Gr}_2(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^2 V).$$

在典范同一 $\bigwedge^2(s^5)^* \cong \bigwedge^2 s^5$ 下， s^4 直和项映射到自身。事实上， Z_0 可识别为与 $_2$ 正交的二维平面 $P \in \mathrm{Gr}_2(V)$

[19]有趣的是，能否将 Z_0 识别为 SL(2, $\mathbb{C}$)/Γ 的某个有限子群 Γ对应的奇异紧化。Mukai 和 Umemura 已经确定了允许光滑紧化的子群。

于 $s^4 \subset \bigwedge^2 s^5$。因此，$\mathrm{Gr}_2(s^5)$ 的 Plücker 嵌入限制为一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$- 等变嵌入

$$Z \hookrightarrow \mathbb{P}(s^0 \oplus s^8).$$

s^0 直和项定义了 $Z_0 \subset \mathbb{P}(s^8 \oplus s^8)$ 中 ∞ 处的一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-不变除子 D，对应于交 $D = Z_0 \cap \mathbb{P}(s^8) \subset \mathbb{P}(s^0 \oplus s^8)$。该直和项由丰线丛 $\det \mathcal{V}^*$ 在 Z_0 上的限制的一个截面生成，我们将对此进行明确识别。

现在我们来明确描述这个嵌入。首先，我们将明确描述 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的表示。取 $s^5 = \mathbb{C}[x,y]_5$ 的一组基 $x^i y^{5-i}$。那么，$\mathfrak{sl}(2)$ 的生成元为

$$X = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad H = [X,Y] = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

子空间 是一个由这些形式张成的 5维空间

$$x^2y^3 \wedge x^5 - 3x^3y^2 \wedge x^4y, \quad 2xy^4 \wedge x^5 - 4x^2y^3 \wedge x^4y, \quad y^5 \wedge x^5 + xy^4 \wedge x^4y - 8x^2y^3 \wedge x^3y^2,$$
$$3y^5 \wedge x^4y - 6xy^4 \wedge x^3y^2, \quad y^5 \wedge x^3y^2 - 3xy^4 \wedge x^2y^3.$$

10维补空间 $s^8 \oplus s^0$ 由这些形式张成

$$x^4y \wedge x^5, \quad x^3y^2 \wedge x^5, \quad 3x^2y^3 \wedge x^5 + 5x^3y^2 \wedge x^4y,$$
$$xy^4 \wedge x^5 + 5x^2y^3 \wedge x^4y, \quad y^5 \wedge x^5 + 15xy^4 \wedge x^4y + 20x^2y^3 \wedge x^3y^2,$$
$$y^5 \wedge x^5 - 5xy^4 \wedge x^4y + 10x^2y^3 \wedge x^3y^2, \quad y^5 \wedge x^4y + 5xy^4 \wedge x^3y^2, \quad 3y^5 \wedge x^3y^2 + 5xy^4 \wedge x^2y^3,$$
$$y \not\wedge xy, \quad y \not\wedge xy, \quad y \not\wedge xy, \quad y \not\wedge xy, \quad \text{(Eq. 2.10)}$$

其中不可约分量 s^0 由形式张成

$$\tilde{\sigma} = y^5 \wedge x^5 - 5xy^5 \wedge x^4y + 10x^2y^3 \wedge x^3y^2.$$

因此 不变截面 σ 可与丰沛

线丛 $\bigwedge^2\mathcal{V}^*$ 中由形式 $\tilde{\sigma}$ 通过映射.....所定义的截面

$$P \mapsto \tilde{\sigma}|_P$$

对于所有满足 $\omega|_P = 0$ 对所有 ω 属于 s^4 的张成空间的 $P \in \mathbf{Gr_2}(s^5)$。$Z_0 \subset \mathbb{P}(s^0 \oplus s^8)$ 的点可以与元素 $P = a \wedge b$ for $a,\ b,\ \in s^5$ 建立对应，这些元素与 Π_0 中的每个二形式都正交。特别地，我们可以选出四个点，它们都位于 SL(2，$\mathbb{C}$)-不变除子 $D = Z(\sigma) = \mathbb{P}(s^8) \cap Z_0 \subset Z_0$ 在 ∞ 的 Z_0 处：

$$x^4y \wedge x^5, \quad x^3y^2 \wedge x^5, \quad y^5 \wedge x^2y^3, \quad y^5 \wedge xy^4. \tag{Eq. 2.11}$$

现在我们可以将这些表示转换为簇 Z_0 的显式嵌入 $Z_0 \hookrightarrow \mathbf{Gr_2}(s^5) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 s^5))$。我们稍微改变记号，将$x^5 \in s^5$ 记为 e_1, $x^4y = e_2$，.....，$y^5 = e_6$。那么，如果 $W = a \wedge b \in \bigwedge^2 s^5$ 是 s^5 中的一个二维平面，且 $a = \sum a_i e_i,\ b = \sum b_i e_i$，则 W 属于 Z_0 的条件由以下关系给出：

$$\begin{aligned}
(a_4b_1 - a_1b_4) - 3(a_3b_2 - a_2b_3) &= 0 \\
2(a_5b_1 - a_1b_5) - 4(a_4b_2 - a_2b_4) &= 0 \\
(a_6b_1 - a_1b_6) + (a_5b_2 - a_2b_5) - 8(a_4b_3 - a_3b_4) &= 0 \\
3(a_6b_2 - a_2b_6) - 6(a_5b_3 - a_3b_5) &= 0 \\
(a_6b_3 - a_3b_6) - 3(a_5b_4 - a_4b_5) &= 0.
\end{aligned}$$

在 Pl¨ucker 坐标中，对于 W，这些关系变为

$$\begin{aligned}
-W_{14} + 3W_{23} &= 0 \\
-2W_{15} + 4W_{24} &= 0 \\
-W_{16} - W_{25} + 8W_{34} &= 0 \\
-3W_{26} + 6W_{35} &= 0 \\
-W_{36} + 3W_{45} &= 0.
\end{aligned}$$

组合 结合 Pl¨ucker 关系，这将产生一个明确的表示 f

Z_0 嵌入到 $\mathbb{P}(\bigwedge^2 s^5)$ 中，作为格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_2(s^5)$ 与 $\bigwedge^2 s^5$ 中 5 个超平面的交。

注记 2.3.15. 此时可以清楚地看出，尽管$s^4 \subset \bigwedge^2 V$ 并非一般情形（例如， Z_0 是奇异的），簇 Z_0 仍具有预期的维数 3，它是 8 维的$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^6)$与 5 个超平面的交。

现在来描述 SL(2, $\mathbb{C}$)-等变嵌入 $Z_0 \hookrightarrow \mathbb{P}(s^8 \oplus s^0$。簇 Z_0可以识别为全可分解二形式的轨迹 $a \wedge b \in s^8 \oplus s^0$。利用(式 2.10) 中的基，我们可以从上述嵌入中提取出 Z_0 的嵌入，方法如下。设 $\alpha \in s^8 \oplus s^0$ 是一个二形式。那么 α 可表示为一个向量

$$\alpha = \alpha_i v_i$$

其中 $v_1, \ldots, v_{10}$是(式 2.10)中列出的基向量。若满足¨关于 $\bigwedge^2 s^5$的 Plücker 关系，这样的向量就是全可分解的。我们将$s^8 \oplus s^0$ 的基用 s^5的标准基表示如下：

$$\begin{gathered} e_2 \wedge e_1, \quad e_3 \wedge e_1, \quad 3e_4 \wedge e_1 + 5e_3 \wedge e_2, \\ e_5 \wedge e_1 + 5e_4 \wedge e_2, \quad e_6 \wedge e_1 + 15e_5 \wedge e_2 + 20e_4 \wedge e_3, \\ e_6 \wedge e_1 - 5e_5 \wedge e_2 + 10e_4 \wedge e_3, \quad e_6 \wedge e_2 + 5e_5 \wedge e_3, \quad 3e_6 \wedge e_3 + 5e_5 \wedge e_4, \\ e_6 \wedge e_4, \quad e_6 \wedge e_5, \end{gathered} \tag{Eq. 2.12}$$

那么，元素 α 的 Pl¨ucker 坐标为

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\alpha_1 \\ W_{13} &= -\alpha_2 \\ W_{14} &= -3\alpha_3 \\ W_{15} &= -\alpha_3 \\ W_{16} &= -\alpha_5 - \alpha_6 \\ W_{23} &= -5\alpha_3 \\ W_{24} &= -5\alpha_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{25} &= -15\alpha_5 + 5\alpha_6 \\
W_{26} &= -\alpha_7 \\
W_{34} &= -20\alpha_5 - 10\alpha_6 \\
W_{35} &= -5\alpha_7 \\
W_{36} &= -3\alpha_8 \\
W_{45} &= -5\alpha_8 \\
W_{46} &= -\alpha_9 \\
W_{56} &= -\alpha_{10}.
\end{aligned}
$$

利用 Pl¨ucker 关系可得定义 Z_0 的齐次理想

$$
\begin{gathered}
\alpha_8^2 - 5\,\alpha_7\alpha_9 + 20\,\alpha_5\alpha_{10} + 10\,\alpha_6\alpha_{10}, \\
5\,\alpha_7\alpha_8 - 15\,\alpha_5\alpha_9 + 5\,\alpha_6\alpha_9 + 5\,\alpha_4\alpha_{10}, \\
5\,\alpha_7^2 - 45\,\alpha_5\alpha_8 + 15\,\alpha_6\alpha_8 + 5\,\alpha_3\alpha_{10}, \\
20\,\alpha_5\alpha_7 + 10\,\alpha_6\alpha_7 - 15\,\alpha_4\alpha_8 + 5\,\alpha_3\alpha_9, \\
5\,\alpha_5\alpha_8 + 5\,\alpha_6\alpha_8 - \alpha_3\alpha_9 + 3\,\alpha_3\alpha_{10}, \\
5\,\alpha_5\alpha_7 + 5\,\alpha_6\alpha_7 - 3\,\alpha_3\alpha_8 + \alpha_2\alpha_{10}, \\
15\,\alpha_5^2 + 10\,\alpha_5\alpha_6 - 5\,\alpha_6^2 - \alpha_3\alpha_7 + \alpha_1\alpha_{10}, \\
20\,\alpha_5^2 + 30\,\alpha_5\alpha_6 + 10\,\alpha_6^2 - 9\,\alpha_3\alpha_8 + \alpha_2\alpha_9, \\
5\,\alpha_4\alpha_5 + 5\,\alpha_4\alpha_6 - 3\,\alpha_3\alpha_7 + \alpha_1\alpha_9, \\
5\,\alpha_3\alpha_5 + 5\,\alpha_3\alpha_6 - \alpha_2\alpha_7 + 3\,\alpha_1\alpha_8, \\
300\,\alpha_5^2 + 50\,\alpha_5\alpha_6 - 50\,\alpha_6^2 - 25\,\alpha_4\alpha_7 + 25\,\alpha_3\alpha_8, \\
20\,\alpha_3\alpha_5 + 10\,\alpha_3\alpha_6 - 15\,\alpha_3\alpha_7 + 5\,\alpha_2\alpha_8, \\
5\,\alpha_3\alpha_4 - 45\,\alpha_3\alpha_5 + 15\,\alpha_3\alpha_6 + 5\,\alpha_1\alpha_8, \\
5\,\alpha_3^2 - 15\,\alpha_2\alpha_5 + 5\,\alpha_2\alpha_6 + 5\,\alpha_1\alpha_7, \\
15\,\alpha_3^2 - 5\,\alpha_2\alpha_4 + 20\,\alpha_1\alpha_5 + 10\,\alpha_1\alpha_6
\end{gathered}
$$

在 $\mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}]$内。

一个 c 从计算偏导数的雅可比矩阵可以直接观察到 :

引理 2.3.16。 簇 Z_0 在此处是奇异的

$$P = x^4y \wedge x^5, \quad Q = y^5 \wedge xy^4.$$

证明。 定义理想 Z_0 的雅可比矩阵的一般秩为 6，而在点 P 和 Q 处降为 5。注意，沿着不变除子 D 上、位于 (公式 2.11) 中的其他点，都是 Z_0 的非奇异点，此处雅可比矩阵的秩为 6。

事实上，可以给出一个计算性较弱的论证来说明 P 和 Q 是奇异的。根据 [Kuz03，命题 A 中的讨论，4] 我们注意到，若二维子空间$P \subset V$满足 $P \in Z_0$，则它是 Z_0 的奇异点，当且仅当 $P \subset$ 核α 对于某个二形式 $\alpha \in \Pi_0$成立。现在注意到， $P = x^4y \wedge x^5$ 包含于该形式的核中

$$\alpha = y^5 \wedge x^3y^2 - 3xy^5 \wedge x^2y^3 \in s^4$$

且 $Q = y^5 \wedge xy^4$ 完全位于该形式的核中

$$\beta = x^2y^3 \wedge x^5 - 3x^3y^2 \wedge x^4y \in s^4. \qquad \square$$

注意， $\mathbb{C}^*$ 的 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用由对易子 $H = [X, Y]$无穷小生成，而形如 $P \in Z_0$ 的平面（其中 $a \wedge b$对于 a， b的特征向量）将是不动点，因为 H在 $\mathbb{C}^*$ 上的作用会将其固定。事实上，上述四个点(公式 2.11) 在 D 上都是 $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 作用的不动点。

沿着 Donaldson [Don08, §5.2]，以几何方式描述 Mukai–Umemura 三维簇的相同思路，可以进一步尝试描述除子 D 在 ∞ 处的结构，以及 Z_0的辛几何。事实上，在 Z_0 上选取一个不变的辛结构，例如通过 SL(2, $\mathbb{C}$)-等变的 Pl¨ucker 嵌入 $Z_0 \hookrightarrow \mathbb{P}(s^8 \oplus s^0)$，拉回 SL(2, $\mathbb{C}$)-不变的 Fubini–Study 形式，就可以考虑 $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ 作用的动量映射；该作用有四个不动点。这应当像一个 Morse 函数那样作用于 ∞ 处的 SL(2, $\mathbb{C}$)-不变除子（不过 Z_0 现在是奇异的）。例如，这个 Morse 函数在 $\mathbb{C}^*$ 不动点处的指标，应由 $\mathbb{C}^*$ 作用在这些点上 $\det \mathcal{V}^*$ 的纤维上的权给出。特别是，我们

有权

$$w(x^4y \wedge x^5) = 8, \quad w(x^3y^2 \wedge x^5) = 6, \quad w(y^5 \wedge x^2y^3) = -6, \quad w(y^5 \wedge xy^4) = -8.$$

我们看到，点 P和 Q 应被视为 Morse 函数的最高和最低临界点。与 [Don08] 一样，我们预测，通过研究除子 D上的 Morse 函数的水平集，可以相当明确地描述除子 Z_0 附近的几何，并且例如可以恢复其同伦型，明确写出除子 D 的局部定义方程，从而有助于计算 α不变量。

We 预测上述确定的点是 Z_0 的唯一奇点 .

猜想 2.3.17。 点 P, Q 是 Z_0 的唯一奇点。

现在我们来讨论 Z_0 的万有变形空间，这与 Mukai–Mumemura 三维簇的情形类似。为了在变形类内改变我们的 Fano 三维簇，我们可以改变 $V = s^5$ 上二形式的 5 维平面的选取，因此我们关注的是 50 维的格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_5(\bigwedge^2 V^*)$。$\Pi = s^4$ 处的切空间为

$$T_{s^4} \mathrm{Gr}_5(\bigwedge^2 s^5) = s^4 \otimes (s^8 \oplus s^0) = s^{12} \oplus s^{10} \oplus s^8 \oplus s^6 \oplus 2s^4$$

并且 $\mathrm{SL}(V)$ 在 $\mathrm{Gr}_3(\bigwedge^2 V^*)$ 上有一个作用，其无穷小描述为

$$\mathfrak{sl}(s^5) = \frac{s^5 \otimes s^5}{s^0} = s^{10} \oplus s^8 \oplus s^6 \oplus s^4 \oplus s^2.$$

对于 $\mathrm{SL}(s^5)$ 的此作用， s^4 处的稳定子由生成 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 作用的 s^2 给出，因此我们得到一个 18 维的万有变形空间

$$T_{[s^4]}\mathcal{M} = s^{12} \oplus s^4.$$

注 2.3.18。 注意，这个变形空间的维数大于类型为 V_{14} 的光滑 Fano 簇的模空间维数。更高维的扎里斯基

模空间在点 $[s^4]$ 处的切空间表明 $\mathcal{M}$ 在该点具有奇异性，而这种差异恰好由 $[s^4]$ 处额外的 3 维稳定子所体现；光滑点则不存在这种稳定子，且所有光滑点的自同构群都是离散的。

受 Mukai–Umemura 三维簇光滑情形中类似图景的启发，我们猜想如下：

猜想 2.3.19. 奇异三维簇 $(Z_0, -K_{Z_0})$ 是 *Fano* 且 *K*-多项式稳定。此外，Z_0 在 $\mathcal{M}$ 中的小变形 Z_x 是 *K-(*不稳定/半稳定/多稳定*)*的，当且仅当相应点 $x \in T_{[s^4]}\mathcal{M}$ 在该向量空间上的$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 作用下是几何不变量理论 *(*不稳定/半稳定/多稳定*)*的。

与 Mukai–Umemura 三维簇的情形一样，只需分析 Z_0 在唯一的 SL(2, $\mathbb{C}$)-不变除子 $D = Z(\sigma)$附近的行为，就应能验证其 K-多稳性。事实上，若假设等变 α_G-不变量在此情形下适用，那么这一不变除子将是计算中唯一的贡献项。

我们预计，近期发展的 β 不变量或 δ 不变量计算技术在此情形下也适用；这些技术在奇异 Fano 流形的 K-稳定性计算中极为有效。该除子的形式结构似乎与 X_0 或 Y_0 的情形相似；若其局部描述同样是由一条具有 $z_1^2 = z_2^3$ 形式尖点奇异性的有理曲线的切线并集给出，那么可以合理地预期，同一界 $\alpha_G(Z_0) \geq \frac{5}{6}$ 在此情形下也成立。

猜想猜想 2.3.19 实际上是关于 $\mathbb{Q}$-Gorenstein Fano 簇的一个定理，这是 Spotti–Sun–Yao [SSY16], 的工作，他们将 Sz´ekelyhidi 和 Br¨onnle 的技术推广到了该情形下奇异对数 Fano 簇的光滑变形。如果 Z_0 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 且 K-多项式稳定，那么 Spotti– Sun–Yao 的结果将解决这一猜想。

为了更精确地说明关于变形的 K-多稳性猜想，我们回顾一下 GIT，即 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用于 s^p 时的结构。

命题 2.3.20 （例如参见 [Tho06，定理 3。10]）。 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$在 s^p 上的轨道分为五种类型：

(*i*) 平凡的轨道 $\{0\}$。

(ii) s^p 中没有重数为 $\geq p/2$ 的零点的多项式轨道。这些轨道在 s^p 中是闭的。*(iii)* 具有两个不同零点且每个零点重数均为 $= p/2$ 的多项式轨道。这些轨道是闭的，并且具有正维稳定子 $\mathbb{C}^* \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。*(iv)* 具有一个重数为 $= p/2$ 的零点，且其余零点的重数都较小的多项式轨道。这类轨道不是闭的，但其闭包包含一个 *(iii)* 类轨道。*(v)* 具有重数为 $> p/2$ 的零点的多项式轨道。这些轨道不是闭的，且其闭包包含 0。

从几何不变量理论的角度看，这些轨道可分类如下。(i) 类和 (v) 类轨道在几何不变量理论意义下是不稳定的。(iv) 类轨道是半稳定的，(iii) 类和 (ii) 类轨道是多稳定的。(iii) 类轨道是严格多稳定的。

现在让我们 用这一描述来描述直和 $s^{12}\oplus s^4$ 中的轨道 .

命题 2.3.21. 内部的一个轨道 $s^{12} \oplus s^4$ 是几何不变量理论意义下的（不/半/多项式）稳定，当且仅当两个多项式的零点并集在 命题 *2.3.20* 意义下 $p = 16$。

证明。 从相应的动量映射描述可以最直接地看出这一点。SL(2, $\mathbb{C}$) 在 s^p 上的作用的动量映射由配置中 p 个点的质心给出。在$s^{12} \oplus s^4$ 上的作用的动量映射则由动量映射之和给出，对应于 16 个零点组成的组合系统的质心。

□

记 $M := s^{12} \oplus s^4$。记 M^s 为 M 中对应于 Z_0 附近 V_{14} 的光滑代表元的轨迹。由于 V_{14} 的每个光滑代表元的自同构群都是平凡的，这一事实表明， M^s 必须包含在 M 中稳定点的轨道之并内。由于光滑性是一个开条件，人们预期 M^s 在 M 的 GIT 稳定点中定义一个 18 维扎里斯基开子集，而商 $M^s/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 则为类 V_{14} 的光滑代表元所构成的 15 维模空间提供一个模型。

2.3.3.4 一般性 remarks

上述奇异三维簇应是研究簇的 K-稳定性的典型例子。也就是说，通过测试构形（$\mathcal{X}, \mathcal{L}$）研究极化簇（X, L）的 K-稳定性，会产生一系列具有较大自同构群的轻度奇异极化簇。事实上，任意测试构形的中心纤维都至少具有一个 $\mathbb{C}^*$ 作用。

在 (X, L) 为 K-半稳定的情形下，猜想存在一种最优退化，使其退化到一个可能奇异的 K-多项式稳定簇，因此通常预期会存在大量自同构群非离散的奇异 K-多项式稳定簇的例子。近年来，关于奇异簇上 K¨ahler–爱因斯坦度量的存在性结果有所增强，尤其是在 Fano 情形下。对 K-多项式稳定簇的变形的 K-稳定性研究（例如见 [Sz´e10, SSY16], ，以及丛的情形，例如见 [BS20]）表明，要有效理解 K-多项式稳定簇的局部模空间，乃至 K¨ahler–爱因斯坦度量或常标量曲率 Kähler 流形，一个有效方法是考察模空间中自同构群较大的奇异点附近光滑轨的 GIT稳定性。

上述变形类中的例子 V_{14} 似乎很适合纳入现有的变形理论框架，也为这种局部模空间方法提供了绝佳的测试案例，因为 Z_0 的光滑变形结构得益于K-稳定 Fano流形强有力的分类结果而得到了完全理解 [ACC+21]。

第一部分

Z-临界度量

第3章

背景

本章将概述民间流传的猜想 1.2、Bridgeland 稳定性、变形厄米杨–米尔斯方程，以及 Z临界方程的起源，以及它们与镜像对称的关系。本章的内容不会直接用于后续章节，但我们希望它能更新对 dHYM 或 Z临界方程在镜像对称图景中所处位置的综述。关于以稳定性条件与物理学之间的关系为重点的早期综述，参见 [HKK+03、Asp05、ABC+09]。

3.1 镜像对称与 BPS 膜

本节将简要概述 BPS D-膜的物理起源，以及它们在弦理论各种模型中的体现。关于卡拉比-丘流形上的 D 膜综述，参见 [Asp05] 。

在超弦理论中，时空模型 $\mathcal{S}$ 是十维的，一个常见的玩具模型是考虑乘积结构

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}^{3,1} \times X$$

其中， X 是一个 6 维流形。为了在宏观上反映（超）引力的规则 4 维时空，通常假设流形 X 是紧致的，

其直径大致接近普朗克长度。

通过分析 $\mathcal{S}$ 的超对称条件，Candelas–Horowitz–Strominger– Witten 推导出，忽略量子修正（即取弦张力 α' 的主阶近似）时，流形 X 必须具有 SU(3)全纯群 [CHSW85]。也就是说， X 是一个带有 K¨ahler 度量 ω 和满足方程的全纯体积形式 Ω 的卡拉比–丘三维流形

$$\frac{\omega^n}{n!} = c\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为某个常数。

在时空 $\mathcal{S}$ 中，开弦世界面 $\iota : \Sigma \hookrightarrow \mathcal{S}$ 必须满足边界条件。[1] 狄利克雷型边界条件引出了“D-膜”的概念。它由以下数据组成：

- 时空中的一个子流形 $L \subset \mathcal{S}$，D-膜“缠绕”于其上。该子流形必须满足某些几何条件，具体取决于所考虑的弦理论模型。

- 子流形上的一个“Chan–Paton丛” E，其上带有一个规范场（联络）。这个丛（连同联络）通常被视为 D-膜电荷的几何代表；该电荷取值于子流形的 K 理论（也可能是带联络的 K 理论，即微分K理论）中。

D-膜作为边界条件，要求 $\iota(\partial\Sigma) \subset L$，并要求规范场在 Σ 上与在 E 上的场之间存在附加耦合。时空中子流形 $L \subset X$ 的具体几何结构，以及其上的丛 $E \to L$，取决于所考虑的超弦理论模型。在 II 型弦理论中，D-膜有两种不同模型，分别源于该理论的 A型和B型拓扑扭曲。在这两种模型中，时空都紧致化在一个卡拉比–丘流形上（X， ω，Ω）。

在 A-模型中，D膜包裹在拉格朗日子流形 $L \subset (X, \omega)$ 上，而 Chan–Paton丛是其上的平坦酉丛 L。在 B模型中，

[1]弦世界面 是曲面 $\iota : \Sigma \hookrightarrow \mathcal{S}$，它位于时空中，由弦在时间中运动时扫过。弦开放时，其世界面可建模为带边界的黎曼曲面 Σ，嵌入在 $\mathcal{S}$ 中。

D膜包裹在复子流形 $L \subset X$ 上，而 Chan–Paton丛允许存在一个曲率为 (1，1) 型的酉联络，即陈联络。因此，Chan–Paton丛是 L 上的全纯丛。事实上，取和的过程

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (E_n, L_n)$$

对包裹不同子流形的 D-膜进行研究，并结合对这类对象变形的研究，表明应当扩展 IIB 型弦理论中的 D-膜，将其推广为包含全纯丛的复形 [ABC+09，§5.3]。这种对 D-膜的同调描述最早由 Kontsevich 预言 [Kon95] ，当时物理文献中尚未提炼出 D-膜的精确定义。

3.1.1 大体积极限

超弦理论通常被认为是在弦长 ℓ_s 趋于零的极限附近作微扰研究的。[2] 这等价于卡拉比–丘流形（X，ω，Ω）上的 $\omega \mapsto k\omega$ 和 $k \to \infty$。[3] 超弦理论和镜像对称的预言并非仅依赖拓扑A模型或B模型（即度量方面的考量，或需要同时理解卡拉比–丘流形上的 K¨ahler ω 结构与复 Ω 结构的考量）的有效性，应当被视为近似的；当偏离大体积极限（或其镜像，即大复结构极限）时，这些预言会受到量子效应和弦效应所产生修正的影响。

例如，正如 Li 近期所讨论的 [Li20]（另请参见 [ABC+09，§7]，较早的讨论见此处）只有在卡拉比–丘三维流形 X的某些一般区域内，才应能预期存在由特殊拉格朗日环面构成的 SYZ纤维化。存在 SYZ纤维化的区域，其体积应趋近于整体积

[2]在物理文献中，弦长常以弦张力 $\alpha' \sim \ell_s^2$取代。这个因子 α' 总是作为微扰常数，出现在 D-膜上 Chan–Paton丛 F 的规范场的任意曲率项前 E 。极限 $\alpha' \to 0$ 等价于 $\ell_s \to 0$，而在 第5章 中，我们考察 Z临界方程按 $\varepsilon^2 = 1/k$ 缩放时，注意到$\varepsilon \sim \ell_s$ 这是一个类似的缩放极限。[3]可以认为弦长相对于时空尺度变得非常小，也可以认为时空相对于固定的弦长变得非常大。

当 X 趋近大复结构极限时。

同样，下一节将讨论的 BPS D-膜研究属于弦理论的非拓扑[4] 方面，取决于 K¨ahler 模空间和复模空间 X，偏离大体积极限时也应会受到类似的修正。靠近大体积极限时，对 D-膜、 Z-临界度量和稳定性条件的理解，更接近于在 $k = \infty$ 处出现的非导出理论（对应于传统的斜率稳定性和 Hermite–Einstein 度量，详见 第 2.2.1 节）。随着我们远离这一极限，导出范畴的更多特征以及计数几何修正带来的影响应会逐渐显现。从某种意义上说，这解释了为何 第 4 章和第 5 章中用于研究 Z-临界联络的渐近假设如此有效；也解释了为何研究 Bayer 的多项式 Bridgeland 稳定性条件（见第3.2.1节）比研究真正的 Bridgeland 稳定性更为容易。

3.1.2 BPS 膜

超弦理论的关键要求之一，是所考虑的 D-膜必须保持超对称性。此类膜称为*BPS* 膜；对于选定的 IIA 型或 IIB 型，关于一对 $(E,\ L)$ 必须满足哪些几何条件才能成为 BPS 膜，则有不同的观点。

- 在 IIA 型弦理论中，D-膜成为 BPS 膜的条件最早由 [BBS95] 推导得出，要求子流形 L 应当是一个特殊拉格朗日，其含义是

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi}\,\Omega|_L) = 0$$

  其中 Ω 是 X 上的全纯体积形式（因此是 L上的最高次形式），而 φ 是一个常数辐角。

[4]这里的“拓扑的”取其物理意义，指的是几何中那些不依赖于黎曼度量的性质。也就是说，这并不排除依赖于复结构或辛结构的效应，因此它当然不只是数学意义上的拓扑性质。

•受 原理 1.1 和 定理 2.2.21成功的启发，Thomas 和 Thomas–Yau 猜想用拉格朗日子流形的稳定性来刻画 A-模型中的 BPS D-膜 [Tho01、TY02], ，这一猜想如今被称为 *Thomas–Yau* 猜想。此后，Joyce 将其推广到了导出 Fukaya 范畴 [Joy15] ，因此有时也会加上 *–Joyce* 后缀。在这种情况下，稳定性条件应具有中心荷

$$Z(L) = \int_L \Omega$$

其中 $L \hookrightarrow X$ 是拉格朗日量，而 Ω。参见 [李22] ，了解关于这一提案现状的最新讨论。

• 在 B 侧，Douglas 基于物理理由提出了 BPS 条件，称为 Π-稳定性 [DFR05、Dou02]。这一概念后来由 Bridgeland *Bridgeland* 稳定性 抽象为数学概念 [Bri07]。我们将在第3.2节中更详细地讨论这一概念。

• 在 IIB 型弦理论中，根据相关规范场对 BPS 条件进行刻画，已由 [MnMMS 00] 直接针对阿贝尔 D-膜完成（即 $E \to L$ 为线丛[5]）。此外，利用 SYZ 镜像对称的半平坦模型，同样针对线丛进行了推导，见[LYZ00]。在 A 侧，特殊拉格朗日方程转化为变形厄米杨–米尔斯方程 ，我们将在第3.3节中对此进行回顾。

受原理 1.1 以及 Π-稳定性和 dHYM 方程的物理起源启发，人们提出了引言中讨论的广为流传的 猜想 1.2 。结合镜像对称（它预言 A 和 B 模型中的 BPS 膜应当互换） [ABC+09，猜想 1。4], 由此，我们得到了更多推测中的对应关系，见图 3.1。

[5]对于这里容易引起混淆的记号，我们只能表示歉意： L 表示子流形，而不是线丛。

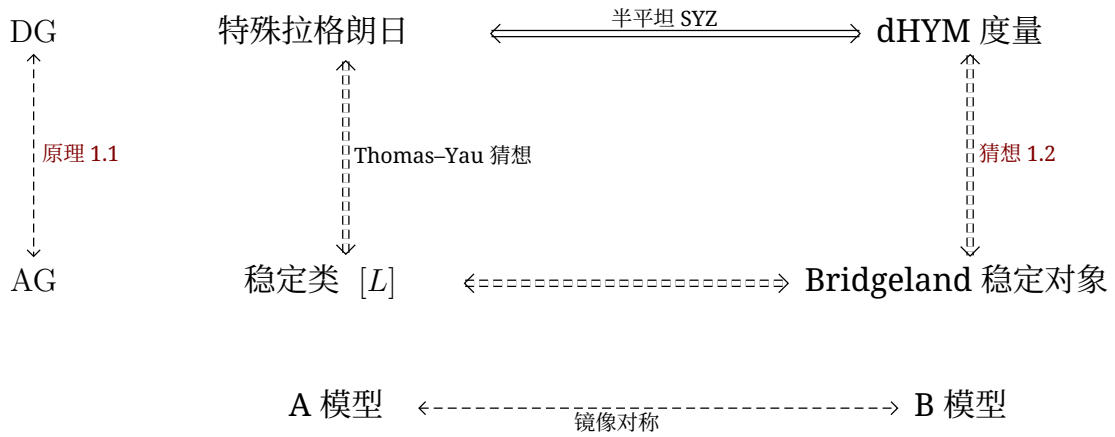


图 3.1：宏大的镜像对称/原理 1.1 猜想。

3.2 Π-稳定性与 Bridgeland 稳定性

Π-稳定性这一概念由 Douglas 引入 [DFR05]，作为判定 IIB 型弦理论中的 D-膜是否为 BPS 膜的标准。关于 [AD02]对 Π-稳定性的物理诠释，参见相关讨论。其基本原理是考察一个短正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

作为 D-膜 E 衰变为一对 F 和 Q（反之，也可以将 E 视为 F 和 Q的“束缚态”）。若要使 E 成为 BPS 态，它必须处于极值状态，即具有最大的超对称荷密度。判定这一点的一项标准是： E 不能衰变为任何超对称荷密度比其自身更大 的 D-膜 F E 。这可转化为以下判据：

$$\mu_Z(F) < \mu_Z(E)$$

其中 Z 是超对称荷（而 μ_Z 是荷密度，或称“归一化荷”，由斜率给出）。

这一判据与第 2.2.1 节中讨论的传统斜率稳定性十分相似，但如前所述，从同调镜像对称的角度深入理解 D-膜后会发现，我们必须考虑 E， F，

而且 Q 是相干层复形。此时，短正合列的概念不再适用（而是由正合三角取代），并且不清楚 F、E 和 Q 中，哪个复形应当衰变为另外两个。为了始终如一地追踪这一点，必须在复形上引入分次。[6] Bridgeland 对这一物理理论作出了精确表述 [Bri07]。现在我们来回顾 Bridgeland稳定性条件的概念（参见 [MS17]，其中综述了这一理论在代数几何中的诸多有趣方面）。我们只考虑三角范畴 $\mathcal{D} = \mathcal{D}^b \mathrm{Coh}(X)$ 是流形上相干层的有界导出范畴这一情形 X。

为了强调与第4章中出现的阿贝尔理论之间的联系，我们将首先介绍阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$上的稳定性条件的概念，并以此定义 Bridgeland 稳定性条件。

定义 3.2.1 (例如，参见 [Rud97])。设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。称稳定性条件 Z 是 $\mathcal{A}$ 上的一个加法群同态

$$Z : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

使得

- 对于每个非零的 $E \in \mathcal{A}$，都有 $\operatorname{Im} Z(E) \geq 0$；若等号成立，则 $\operatorname{Re} Z(E) < 0$。[7]

- 任意非零的 $E \in \mathcal{A}$ 都存在一个 *Harder–Narasimhan* 滤过，

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{\ell-1} \subset E_\ell = E$$

斜率严格递减的对象 $E_i \in \mathcal{A}$，使得 $E'_i = E_i/E_{i-1}$ 关于 Z 半稳定，具体含义如下。

[6] 或者对中心荷作此要求，尽管正如 [AD02 中所讨论的，§8] 这会引入其他困难。这里实际上只需要求 $Z(E) \in e^{i\theta} \cdot \mathbb{H}$ 对每个非零的 E都成立，其中 $\theta \in [0, 2\pi)$ 是一个仅取决于 Z的角度，并且对每个 E都相同。任何这样的稳定性函数都可以旋转，使其值落在上半平面内，而不改变理论。

将 E 的广义斜率定义为

$$\mu_Z(E) := -\frac{\operatorname{Re} Z(E)}{\operatorname{Im} Z(E)}$$

当 $\operatorname{Im} Z(E) > 0$ 且 $+\infty$ 当 $\operatorname{Im} Z(E) = 0$时。对象 $E \in \mathcal{A}$ 若满足对所有真非零子对象 $0 \to F \to E$，均有（半）稳定

$$\mu_Z(F) < \mu(E) \quad (\text{resp. } \leq).$$

等价地，我们可以使用辐角 $\arg Z(F) <$ 辐角 $Z(E)$ 代替广义斜率 μ_Z，因为它们位于同一个半平面内（参见 引理 4.1.11）。

利用阿贝尔范畴上的稳定性条件这一概念，我们将给出 Bridgeland 稳定性的定义；它与标准表述略有不同，但完全等价。

定义 3.2.2 ([Bri07])。 在 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上的 Bridgeland稳定性条件由以下选择构成：一个映到有限秩格的满射群同态

$$v : K_0(X) \twoheadrightarrow \Lambda,$$

以及一对 $\sigma = (Z, \mathcal{A})$

- 一个有界 t-结构在 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上的心 $\mathcal{A}$，它是 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 的满阿贝尔子范畴，并且
- 一个定义在 $\mathcal{A}$ 上的稳定性条件 Z，使得

$$Z : K_0(X) = K_0(\mathcal{A}) = K_0(\mathcal{D}^b \operatorname{Coh}(X)) \to \mathbb{C}$$

factors 经过 v，因此只取决于 $[E] \in K_0(X)$ 在 Λ 中的像 .

这些必须满足支撑性质（最初由 Kontsevich–Soibelman 提出[KS08], 但等价于 *Bridgeland* 的完整局部有限条件）：

- 令 $\|\cdot\|$ 为 $\Lambda_{\mathbb{R}}$ 上的任意范数（它们都等价），则

$$\inf\left\{\frac{|Z(v(E))|}{\|v(E)\|}\,\middle|\, 0\neq E\in\mathcal{A}\text{ is semistable}\right\}>0.$$

注 3.2.3. 这不同于通过 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 的切片来定义稳定性条件的标准方法；这种方法与上文提到的导出范畴元素的分次概念更加契合。$\mathcal{P}$ $\mathrm{Coh}(X)$ 的切片本质上是为任意 $E\in\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 指定相位角 φ 的一个提升 ϕ，使得

$$Z(E)=re^{i\pi\varphi}$$

那么 $\varphi=\phi$ 模 $\mathbb{Z}$。由相位为 ϕ 的半稳定对象构成的全子范畴 $\mathcal{P}(\phi)\subset\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 必须满足

- $\mathcal{P}(\phi)[1]=\mathcal{P}(\phi+1)$,
- 若 $\phi_1>\phi_2$，则对于任意 $A\in\mathcal{P}(\phi_1)$ $B\in\mathcal{P}(\phi_2)$，$\mathrm{Hom}(A,\ B)=0$，并且
- 任意对象 $E\in\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 都存在一个*Harder–Narasimhan* 滤过，其连续商对象的相位 ϕ_i 递减，且属于 $\mathcal{P}(\phi_i)$。

给定这样的切片，子范畴 $\mathcal{A}:=\mathcal{P}((0,1])$ 定义了一个有界t-结构的心。注意，上述第二个条件说明了这种分次如何通过要求 $\phi(F)<\phi(E)$，来编码正合三角 $F\to E\to Q\to F[1]$ 中对象 E to F，Q 可能发生的衰变。

$\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 中心的标准例子是 $\mathcal{A}=\mathrm{Coh}(X)$。有限秩格及同态 v 通常取为陈特征

$$v=\mathrm{Ch}:K_0(X)\to H^*(X,\mathbb{Q})$$

复 $E\in\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$）。理想的稳定性条件选择（尽管这样的选择会表明，Bridgeland 稳定性并不比第 2.2.1 节中的斜率稳定性更复杂）是

$$Z(E):=-\deg E+i\,\mathrm{rk}\,E$$

在 Coh(X) 上。关于 Z 的稳定性重现了斜率稳定性（因为广义斜率 μ_Z 就是斜率）。在紧黎曼曲面 $X = \Sigma$ 上，如此描述的对 $(Z, \mathcal{A})$ 给出了 $\mathcal{D}^b$ Coh(Σ) 上的一个 Bridgeland稳定性条件。不过一般而言，我们有以下重要观察：

命题3.2.4 (例如参见 [MS17，例4。3])。 不存在定义在 $\mathcal{D}^b \operatorname{Coh}(X)$ 上且心为 $\mathcal{A} = \operatorname{Coh}(X)$ 或中心荷为 $Z = -\deg + i \operatorname{rk}$的稳定性条件，只要 X 的维数至少为二。

这一观察揭示了研究 Bridgeland 稳定性条件时的根本难点：它们的存在性。为了找到合适的心，人们会考虑对 倾斜 t-结构的过程，而候选中心荷主要源自物理学的输入。要理解一个心 $\mathcal{A}$ 何时能成为某个 Bridgeland 稳定性条件的候选，难点在于证明存在符合 定义3.2.1意义下的 Harder– Narasimhan 滤过。为此，通常需要强有力的陈数不等式，称为 广义 *Bogomolov–Gieseker* 不等式。

弦理论产生的主要关注对象中心荷（参见 [Asp05，§2。3]）如下：

$$Z_{\mathrm{dHYM}}(E) = \int_X e^{-i\omega} \operatorname{Ch}^B(E), \quad Z_{\mathrm{Td}}(E) = \int_X e^{-i\omega} \operatorname{Ch}^B(E) \sqrt{\operatorname{Td}(X)} \qquad \text{(Eq. 3.1)}$$

其中 $\operatorname{Ch}^B(E) = e^{-B} \operatorname{Ch}(E)$，其中某个类为 $B \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 且 $[\omega]$ 是某个 Kähler 类，定义在 X上。我们将在第4章中进一步深入讨论这些中心荷。

注 3.2.5。 正如通过物理方法计算所得（参见 [ABC+09，§5.1。4] 及其中的参考文献），D-膜（L, E）的预期中心荷，其中 $\iota\colon\ L \hookrightarrow X$ 是某个子流形，由下式给出

$$Z(L, E) = -\int_X e^{-i\omega} \operatorname{Ch}^B(\iota_* E) \sqrt{\hat{A}(X)}$$

其中，$\hat{A}(X)$ 是 A帽亏格，它与 Todd 类的关系为 $\operatorname{Td} = \exp(\frac{1}{2}c_1)\,\hat{A}$。这表明，对于一般的非 Calabi–Yau 簇，也应考虑

这种形式的中心荷（它们确实不同于 Z_{Td} 上文中的中心荷，因为$c_1(X)$ 不一定为零）。特别是，在子流形L上计算时，我们预期会出现与 $c_1(L)$ 有关的修正项。这一修正项在物理上被称为“Freed–Kapustin–Witten反常”，并且似乎至少在一定程度上解决了研究变形 Hermitian–Yang–Mills 方程时 $Z_V(L)$ 与 $Z(L \otimes \mathcal{O}_V)$ 之间出现的差异。我们将在第4.6.1节中对此作更详细的讨论。

对于复曲面，已经构造出了具有上述中心荷的稳定性条件（例如，参见 [Bri 08] 关于中心荷为 Z_{Td} 、构造于 K3 曲面上的稳定性条件）。

直到最近，对于严格Calabi–Yau三维簇，还没有已知的具有上述某种中心荷的稳定性条件实例。[8] 然而现在我们有了

定理3.2.6 ([李19])。 在每个光滑五次三维簇$(Z,\ \mathcal{A})$ 上都存在一族稳定性条件 X ，其中心荷由(式 3.1) 中的第一个中心荷给出，类 $B,\ [\omega]$的选择可变。

该结果利用了 Bayer–Macr´ı–Toda 和 Bayer–Macr´ı–Stellari [BMT14、BMS16] 的早期工作得以证明；这些工作表明，如果某个三维簇上的层满足广义 Bogmolov–Gieseker 型不等式，那么心 Coh(X) 的倾斜就具有上述中心荷的稳定性条件。

我们指出，关于研究稳定性条件的空间已有大量成果。Bridgeland 早已指出，它是一个复流形 [Bri07]。以下我们主要关注给定稳定性条件下稳定对象的研究，因此请读者参阅 [Bri09] ，其中还饶有趣味地讨论了稳定性条件空间如何被诠释为超弦理论中弦背景的模空间。

[8]由于 Bayer–Macr´ı–Toda [BMT14]的工作所发展出的技术，诸如 $\mathbb{P}^3$、阿贝尔三维簇 [MP15、MP16] 及其有限商的保正则解消 [BMS16] 上的稳定性条件的存在性已为人所知。

3.2.1 多项式稳定性条件

我们简要讨论 Bayer 引入的上述理论的一个极限版本[Bay09], ，它与 Z-临界度量的研究第4章密切相关。Bridgeland 稳定性的定义在定义 3.2.2 中的主要改动是，中心荷

$$Z : K_0(X) \to \mathbb{C}$$

现在取多项式值，

$$Z_k : K_0(X) \to \mathbb{C}[k].$$

这产生了一个相位 φ_k = 辐角 Z_k 或广义斜率 μ_{Z_k} ，定义在心 $\mathcal{A}$ 上，并且依赖于 k。多项式中心荷 Z 必须与定义在上的多项式相位函数 $\phi = \phi_k$ 相容 $\mathcal{A}$，它对应于 $\mathcal{A}$ 上的一个切片，按照 注 3.2.3 的意义与极限行为 $k \to \infty$相容，即

$$Z_k(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\pi\phi_k(E)}$$

对于任意非零的 E 属于 $\mathcal{A}$ 且 $k \gg 0$。这类稳定性条件与 Rudakov 引入的阿贝尔范畴上的多项式稳定性概念密切相关[Rud97，§2]它是 Gieseker 稳定性的一种推广。

多项式 Bridgeland 稳定性的渐近性质，使得在任意射影流形上证明这类稳定性条件的存在，比证明真正的 Bridgeland 稳定性条件更容易。具体而言，通过考虑由反常层定义的 t-结构的心，可以在大体积极限下比较多项式中心荷的首项 $k \to \infty$ ，从而证明强阿廷性和诺特性，进而推出 Harder–Narasimhan 滤过的存在。我们将在第4章遇到 Bayer 最感兴趣的中心荷。

3.3 变形厄米杨-米尔斯方程

本节将简要回顾有关变形厄米杨–米尔斯方程的现有文献。该方程刻画了 IIB 型

弦理论中的 BPS D-膜；在半平坦极限下，该方程可通过特殊拉格朗日方程导出 SYZ 镜像对称 [LYZ00]，，也可以像 [MnMMS00]中那样，直接分析超对称性和狄拉克–玻恩–英费尔德作用量的临界点而得到。

设 $(X,\ \omega)$ 是一个紧致 K¨ahler 流形，而 $[\alpha] \in H^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 是一个 $(1,\ 1)$ 型实上同调类。dHYM 方程要求找到一个典范代表元 $\alpha \in [\alpha]$，使其满足方程

$$\mathrm{Im}(e^{-i\hat{\theta}}(\omega + i\alpha)^n) = 0 \tag{Eq. 3.2}$$

ˆ其中 $\theta = \arg \hat{z}$ 且

$$\hat{z} = \int_X (\omega + i\alpha)^n.$$

通常要求 α 满足正性条件

$$\mathrm{Re}(e^{-i\hat{\theta}}(\omega + i\alpha)^n) > 0 \tag{Eq. 3.3}$$

即 $(n,\ n)$-形式具有正性。这称为近似校准 条件。一个典型例子是 $[\alpha] = c_1(L)$ 的情形；此时，给定 L 上的一个厄米度量 h，其陈曲率为 $F(h)$，则类 $c_1(L)$ 中的任何其他形式都可以表示为 $\frac{i}{2\pi}F(e^{\varphi}h)$，其中 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。

—

对 （方程（3.2））的解析研究由 Jacob–Yau 开创 [JY17]，随后一系列工作继续推进 [CJY20，CXY18，CY21，CS19]。事实上，Jacob–Yau 早已指出，（方程（3.2））是关于 α的全非线性椭圆型偏微分方程，并发现它与某种代数几何稳定性条件之间存在密切关系。一个关键观察是，若 λ_i 表示相对于 α 而言的特征值，且 ω，那么 （方程（3.2））可以改写为

$$\Theta := \sum_{i=1}^{n} \arctan(\lambda_i) = \hat{\theta} \mod 2\pi \tag{Eq. 3.4}$$

其中我们取反正切分支：$\mathbb{R} \to (-\pi/2,\ \pi/2)$。因此，ˆ dHYM 方程的一个解会产生 θ 到 $\hat{z}$ 实值相位的规范提升（详见[CXY18，§2] 了解更多详情）。dHYM 方程的行为对 Θ 所处的区域高度敏感。其可能达到的最大值为 Θ，即

$\frac{n\pi}{2}$。接近该最大值的取值称为临界相位范围。

定义 3.3.1。超临界相位范围定义为

$$\Theta \in \left(\frac{(n-1)\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}\right)$$

而超临界相位范围定义为

$$\Theta \in \left(\frac{(n-2)\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}\right)$$

Collins–Jacob–Yau 提出的、关于 dHYM 方程的核心猜想，在此情形下可粗略表述为猜想 1.2 如下。

猜想 3.3.2 ([CJY20，猜想 1。4])。设 (X, ω) 是一个紧致 *Kähler* 流形，且 $[\alpha] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个实 *(1,1)* 类。设

$$\Theta_V := \arg \int_V (\alpha + i\omega)^{\dim V}.$$

当且仅当对于每个真不可约解析子簇 $V \subset X$ 均有（式 3.4）存在 dHYM 方程的解

$$\Theta_V > \Theta_X - (n - \dim V)\frac{\pi}{2}.$$

注 3.3.3。将 dHYM 方程改写为中心荷的形式Z_{dHYM}，如 例 4.1.20所示，上述稳定性条件恰好是 Z-稳定性条件定义 4.1.13，例如 [CY21]中也已指出这一点。

在二维中猜想 3.3.2 早已由 Jacob–Yau 解决 [JY17]，其依据是 Demailly–Pˇaun 定理以及 Yau 对 Calabi 猜想的证明。我们将沿用 Z定理 4.4.2中的相同思路，证明曲面上线丛存在满足 -临界条件的度量。

一般而言，猜想 3.3.2 在超临界相位范围内现已得到充分理解。我们将超临界相位范围内的（方程（3.2））及其 Θ 称为“超临界

变形 Hermitian–Yang–Mills 方程”。

定理 3.3.4 (Chen [Che21], Datar–Pingali [DP21], Chu–Lee–Takahashi [CLT21])。设 (X,ω) 是一个射影 *Kähler* 流形，其中 $\omega \in c_1(L)$ 对应某个丰线丛 L。超临界变形厄米特–杨–米尔斯方程在类 $[\alpha]$ 中存在解，当且仅当 $[\alpha]$按照 *Collins–Jacob–Yau* 的意义是稳定的。

Chen 通过稳定性条件的一个一致版本证明了这一点，Datar–Pingali 和 Chu–Lee–Takahashi 则将其推广到非一致情形。这些工作还证明了任意紧致 Kähler 流形上定理 3.3.4 的一个版本，只需稍弱的解析稳定性假设；在射影情形下，这些假设可进一步加强为 Collins–Jacob–Yau 猜想的纯代数几何判据。

3.3.1 高秩

一般而言，无论是从镜像对称出发，还是直接分析非阿贝尔规范理论的狄拉克– 玻恩–英费尔德作用量，都无法推导出高秩向量丛的 dHYM 方程。[9] 高秩方程应当是半平坦 SYZ 纤维化中拉格朗日多重截面的特殊拉格朗日方程的镜像 [LYZ00]。然而，采用 Leung–Yau–Zaslow 的技术进行朴素推导会得到 U(1)^n-dHYM 方程，而不是 U(n)-dHYM 方程，因为这种方法未能考虑多重截面分歧点周围的单值化。

尽管如此，Collins–Yau 还是出于美学上的考虑，提出了一个高秩类比

[9]在 [MnMMS00] 中，阿贝尔情形是直接从狄拉克–玻恩–英费尔德作用量推导出来的，而非采用 [LYZ00], 的方法；但文献中对这一作用量的高秩版本尚未完全理解，存在多种不同的提案。若选择最受欢迎的方案（采用对称化迹 [Tse97]），并尝试按照与阿贝尔情形类似的论证推导高秩 dHYM 方程，将会很有意思。

的（方程（3.2））对于厄米度量 h 在向量丛 $E \to (X,\ \omega)$ [CY21，§8。1]。

$$\mathrm{Im}\left(e^{-i\hat{\theta}}\left(\omega \otimes \mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n\right) = 0 \qquad \text{(Eq. 3.5)}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{Re}\left(e^{-i\hat{\theta}}\left(\omega \otimes \mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n\right)\right) > 0 \qquad \text{(Eq. 3.6)}$$

其中，$\hat{\theta} = \arg \int_X \mathrm{tr}(\omega \otimes \mathbf{1}_E - \frac{i}{2\pi} F(h))^n$，Re 和 Im 分别表示该 h-厄米部分和反厄米部分的端omorphism。

这个方程预计将成为非阿贝尔规范理论中首批具有代数几何障碍的方程之一；这些解的障碍既来自子层（如第2.2节中讨论的斜率稳定丛的情形），也来自子簇（以及支集在子簇上的层）。

进一步推导向量丛复形的情形，以便与 IIB 型弦理论中升级后的 D-膜概念建立联系，这方面的工作也尚付阙如。我们将在第4.6节对这个问题作一些评论。一般而言，我们不一定期待存在传统意义上的微分方程（李也讨论过这一点 [李22]），但通常会期待存在上述张量形式的方程，其中包含一些与底层复形几何相关的奇异对象或类流对象。

第4章

Z-临界联络

本章中，我们引入 Z-临界联络（以及 Z-临界度量）的概念，并考察它们的基本性质。 Z-临界度量是 dHYM 度量的推广，允许改变稳定性输入的选择；结合广为流传的猜想 1.2，根据原理 1.1，人们预期对于任意选择的 Z-临界方程，都存在与某个稳定性条件相对应的关系。

本章的讨论旨在帮助理解第5章中的对应关系，因此仍完全局限于全纯向量丛上的度量。这里略去了导出范畴中的种种微妙之处，但随着讨论的展开，我们会提及一些暗示更深层理论的蛛丝马迹。我们将在第4.6节讨论复形理论的可能性。

本章的大部分内容均为合作成果，但第4.3.2节、4.5.1 和4.6 节除外，合作对象为 Ruadhaí Dervan 和 Lars Sektnan [DMS21]。此处重现了这项工作，并着重强调作者的贡献。

4.1 渐近 Z-稳定性

本节将定义一个关键的稳定性概念，它与 第5章中的对应关系相关。特别地，这是导出范畴中出现的稳定性条件的一种极限形式，我们还将固定一个简单的几何背景。

这一稳定性概念的主要输入是一个中心荷，即为紧致 K¨ahler 流形上的每个层指定一个代数不变量。我们采用 Bayer 所确定的这类中心荷中的一个特定显式类别 [Bay09], ，称为多项式中心荷，我们已在第3.2.1节中简要讨论过。这一类别足够广泛，既包含变形厄米杨–米尔斯方程，也包含该方程的有趣替代形式或扰动。

首先，我们需要定义稳定性向量的概念。[1]

定义 4.1.1 （稳定性向量）。 一个稳定性向量 $\rho \in (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ 由一组 $\rho = (\rho_0, \ldots\ldots, \rho_n)$ 非零复数组成，满足 $\mathrm{Im}(\rho_n) > 0$ 以及

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\rho_d}{\rho_d + 1}\right) > 0$$

对于 $d = 0 \ldots\ldots n-1$。

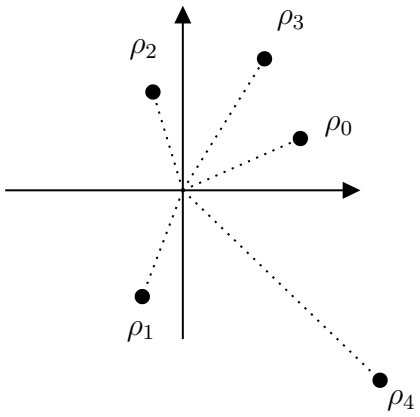


图 4.1：稳定性向量由一列非零复数组成，其辐角绕原点顺时针移动。

注记 4.1.2。 条件 $\mathrm{Im}(\rho_n) > 0$ 是一个归一化条件，它确保在大体积极限下，中心荷落在上半平面 $\mathbb{H}$ 中。如

[1]在 Bayer 的工作中，还引入了反常函数，它对于确定一个由反常层组成的特定 t-结构非常重要，该 t-结构用于其多项式稳定性条件的概念。我们在这里不需要这项技术。

在第3.2节中讨论的，真正重要的是，层的代数不变量落在同一半平面 $\mathbb{C}$中；事实上，任何稳定性向量都可以旋转，使得 $\mathrm{Im}(\rho_n) > 0$，而不改变 ρ_d 的逐次商条件或相应的稳定性概念。

现在我们来定义多项式中心荷。

定义4.1.3（多项式中心荷）。一个多项式中心荷

$$Z : K(X) \to \mathbb{C}$$

定义在紧致 K¨ahler 流形 X 上，由以下数据构成：

- 一个稳定性向量 $\rho = (\rho_0, \ldots, \rho_n)$，其中 $n =$ 维数 X。
- 一个 K¨ahler 类 $[\omega]$。
- 一个实幺幂类 $U \in H^*(X, \mathbb{R})$，使得 $U = 1 + N$ 其中 $N \in H^{>0}(X, \mathbb{R})$。

中心荷的密度 $[Z]$： $K(X) \to H^*(X, \mathbb{R})$ 是非齐次类

$$[Z(E)] := \left(\sum_{d=0}^{n} \rho_d [\omega]^d \right) . \mathrm{Ch}(E).U \in H^*(X, \mathbb{R}).$$

中心荷 Z： $K(X) \to \mathbb{C}$ 定义为

$$Z(E) := [Z(E)]([X]) = \int_X \sum_{d=0}^{n} \rho_d [\omega]^d . \mathrm{Ch}(E).U.$$

术语 多项式 源于以下原因：若将 K¨ähler 类 $[\omega]$ 替换为 $k[\omega]$ 一个不定元 $k > 0$，则可得到多项式映射Z_k： $K(X) \to \mathbb{C}[k]$ 以及第3.2.1节意义下的多项式中心荷。极限 $k \to \infty$ 即为大体积极限，以下我们将用Z_k 表示上述形式的中心荷，其中 K¨ähler 类替换为 $k[\omega]$。

为定义稳定性，我们使用 Z 来构造一种合适的概念，即传统斜率稳定性意义下的斜率 。或者也可以使用相位，这在 Bridgeland 稳定性文献中更为常见。

定义 4.1.4 （斜率与相位）。 设 Z 为一个多项式中心荷。假设E 是一个丛，且满足 $Z(E) \neq 0$。定义 Z-斜率 为

$$\mu_Z(E) := -\frac{\mathrm{Re}(Z(E))}{\mathrm{Im}(Z(E))}$$

若 Im $Z(E) = 0$ 且 Re$(Z(E)) < 0$（分别为 > 0），则 $\mu_Z(E) = +\infty$（分别为 $-\infty$）。定义 E 的 Z-相位 为

$$\varphi(E) := \arg Z(E)$$

其中我们使用主值分支 arg : $\mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$。若 $Z(E) = 0$，定义 $\mu_Z(E) = +\infty$，且 $\varphi(E) = \pi$。

现在，我们为 第5章 中的对应关系定义稳定性的核心概念。

定义 4.1.5 （渐近 Z-稳定性）。 若紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛 $E \to X$满足 $Z_k(E) \neq 0$，对 $k \gg 0$ 均成立，则称其关于多项式中心荷 Z 是渐近Z-稳定的，如果对每个真且非零的相干子层 $\mathcal{F} \subset E$，都有

$$\varphi_k(\mathcal{F}) < \varphi_k(E)$$

对所有 $k \gg 0$。

我们还明确地定义了大体积极限之外的另一种 Z-稳定性概念。

定义4.1.6 (Z-稳定性)。 若丛 $E \to X$ 满足 $Z(E) \neq 0$，则称其为 Z-稳定的，当且仅当对于每个非零真相干子层，都有

$$\varphi(\mathcal{F}) < \varphi(E).$$

现在让我们对 Z-稳定性的定义作一系列评论。

注 4.1.7. 请注意，渐近 Z-稳定性并不等同于对所有 $k \gg 0$ 都成立的 Z_k-稳定性，因为在渐近稳定性中， k 的选择可能取决于具体的相干子层 $\mathcal{F}$。人们预期，在远离大体积极限时， Z-稳定性应当是相关的稳定性条件；但在这里，就大多数用途而言，肯定需要考虑完整的导出范畴。

注 4.1.8。与第 2.2.1 节中的斜率稳定性和 Gieseker 稳定性类似，我们可以定义（渐近） Z-（半／多重）稳定性、Jordan–H¨older 滤过和相对于 Z-斜率的 Harder–Narasimhan 型过滤等。这些构造与我们的工作无关；事实上，人们预期它们在远离大体积极限时表现不佳，因此需要用到导出范畴的技术。

注 4.1.9。假设 $Z(E) \neq 0$ 不应是什么严重限制，因为在 Bridgeland 稳定性的情形下，这必然意味着 E 在数值上平凡。在我们更简化的设定中，Collins–Jacob–Yau 已经指出，如果一个线丛满足 $Z(L) = 0$ ，那么它就不可能存在变形 Hermitian–Yang–Mills 方程的任何解。因此，为了证明其与存在 Z-临界方程解之间的对应关系，可以将 $Z(E) = 0$ 的情形也纳入 Z-不稳定丛的定义中。

另一方面，根据定义，若 E 有一个子层满足 $Z(\mathcal{F}) = 0$ ，则 E会被 Z通过 $\mathcal{F}$-破坏稳定性，因此特别地，（渐近） Z-稳定的对象绝不包含满足 $Z(\mathcal{F}) = 0$的凝聚子层。这一假设的动机来自斜率稳定性中的类似假设（支集余维为 ≥ 2 的挠层具有斜率 $+\infty$），以及弱稳定性条件 [Tod10] 和弱多项式稳定条件 [Lo20]的定义。

注 4.1.10。正如 [Bay09] 中所述，可以将 Gieseker 稳定性理论嵌入多项式稳定条件的语言中。对于这类中心荷中的一小类，例如由 [Rud97], 可知， Gieseker 稳定性与渐近 Z-稳定性一致；但一般而言，我们在 Z 的选择上保留足够的自由度，以探索真正不同的稳定性条件。

渐近稳定性定义中的相位不等式较为繁琐；在丛和子丛的所有相位都位于同一

半平面的情况下，可以用一个更简单的条件来代替。

引理 4.1.11。 设 $E \to X$ 为一个全纯向量丛， $\mathcal{F} \subset E$ 为一个真且非平凡的相干子层。考虑以下条件：

(i) $\varphi_k(\mathcal{F}) < \varphi_k(E)$ 对所有 $k \gg 0$均成立

(ii) 虚部 $\left(\frac{Z_k}{Z_k(\mathcal{F})(E)}\right) < 0$对所有 $k \gg 0$均成立

(iii) $\mu_{Z_k}(\mathcal{F}) < \mu_{Z_k}(E)$对所有 $k \gg 0$均成立

若 $Z_k(\mathcal{F}) \neq 0$对所有 $k \gg 0$均成立，则上述条件等价。若 $Z_k(\mathcal{F}) = 0$，则条件 *(i)* 和 *(iii)* 等价。

证明。 稳定性向量 ρ 的归一化条件、多项式中心荷 Z 的黎曼–罗赫定理首项系数计算，保证了 k 的首项具有正虚部，即 $\mathrm{Im}(\rho_n) > 0$。在大体积极限下，当 k 足够大时，

$$Z_k(E), Z_k(\mathcal{F}) \in \mathbb{H}.$$

对于两个非零复数 $z = re^{i\theta}$， $z' = r'e^{i\theta'}$，取辐角分支 $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ 我们有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{r}{r'}\sin(\theta - \theta').$$

如果 $|\theta - \theta'| < \pi$使得 z和 z'位于同一个半平面内，那么 $\sin x$ 的符号与 x的符号相同，因此

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{z'}\right) < 0$$

当且仅当 $\theta < \theta'$。因此，(i) 与 (ii) 等价，除非对所有$k \gg 0$， $Z_k(\mathcal{F}) = 0$ 。

(ii) 与 (iii) 等价这一点直接由 Z-斜率的定义得到。

□

在引理4.1.11（ii）中以 Z-斜率表示的等价稳定性条件，将自然地出现在对 Z-

临界方程的分析中，这也是第5章对应性证明中的方程。它也自然出现在次解以及关于子簇的稳定性这一语境中。

为此，我们也明确地定义关于子簇的 Z-稳定性。令 $\iota: V \subset X$ 为一个子簇，$E \to X$ 为一个向量丛。定义 E 在 V 上的中心荷为

$$Z_V(E) := \iota^*[Z(E)]([V]) = \int_V \left(\sum_{d=0}^{n} \rho_d[\omega]^d\right).\mathrm{Ch}(E).U. \qquad \text{(Eq. 4.1)}$$

注4.1.12。 对 $Z_V(E$的这个定义不同于相干层 $Z(E\otimes\mathcal{O}_V$的中心荷，该相干层 $E\otimes\mathcal{O}_V$ 定义在 X上；在 Bridgeland 稳定性中，它将是自然的商对象。我们将在第4.6.1节中回到这一点。

注意，采用上述记号， $Z(E) = Z_X(E)$。现在我们来定义关于子簇的 Z-稳定性。

定义 4.1.13 （关于子簇的Z-稳定性）。 全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$ 关于不可约子簇 $V \subset X$ 且满足$Z_V(E) \neq 0$ 时称为 Z-稳定的，如果

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_V(E)}{Z_X(E)}\right) > 0.$$

我们再次指出，远离大体积极限时，这种稳定性概念的表现并不好，因为我们需要保证每个 $Z_V(E)$ 都落在与 $Z_X(E)$ 相同的半平面内（参见 注记 4.3.18 ，其中指出，有时需要根据 $V \subset X$ 的余维，要求将上述不等式反向）。事实上，在我们研究大体积极限附近的情形时，这种稳定性实际上并不重要；我们将在研究第 4.3 节中关于下列方程的次解时进一步讨论这一点：Z-临界方程。

确实 Z-稳定性以 定义 4.1.13 的形式，等价于 猜想 3.3.2 中 $Z = Z_{\mathrm{dHYM}}$ 在线丛上的 Collins–Jacob–Yau 稳定性条件，其中根据 定理 3.3.4，在 dHYM 方程的超临界相中，该条件是必要且充分的。在此相位假设下，所有 $Z_V(E)$ 对于所有 $V \subset X$ 都自动位于同一个半平面内。[2]

[2]这 似乎表明，关于相位范围的假设与 r

现在我们来讨论渐近 Z-稳定性的基本性质。首先，我们有以下关于斜率稳定性的关系。

引理 4.1.14。 如果相干层 E 是渐近 Z稳定的，那么它是斜率半稳定的。

证明。 根据引理 4.1.11，如果 $\mathcal{F}$ 是任意真非零相干子层（因此根据渐近 $Z_k(\mathcal{F}) \neq 0$ 稳定性的定义，它必须满足 $k \gg 0$ 对于 Z-稳定性），则有

$$\operatorname{Im}\left(\frac{Z_k(\mathcal{F})}{Z_k(E)}\right) < 0. \tag{Eq. 4.2}$$

考虑展开式

$$Z_k(E) = \rho_n k^n [\omega]^n \operatorname{rk}(E) + \rho_{n-1} k^{n-1} [\omega]^{n-1}.(c_1(E) + \operatorname{rk}(E)U_2) + O(k^{n-2}) \tag{Eq. 4.3}$$

其中 U_2 表示类 $U \in H^*(X, \mathbb{R})$ 的二次分量。 为简便起见，记作

$$\deg_U(E) := [\omega]^{n-1}.(c_1(E) + \operatorname{rk}(E)U_2). \tag{Eq. 4.4}$$

然后相除可得

$$\frac{Z_k(\mathcal{F})}{Z_k(E)} = \frac{\operatorname{rk}(\mathcal{F})}{\operatorname{rk}(E)} + k^{-1}\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\left(\frac{\deg_U \mathcal{F} \operatorname{rk} E - \deg_U E \operatorname{rk} \mathcal{F}}{([\omega]^n \operatorname{rk} E)^2}\right) + O(k^{-2}).$$

由于 ρ 是稳定性向量，我们有

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right) > 0.$$

由于（方程 4.2）对所有 k都成立，因此其关于 k 的展开的首项非正。因此，取虚部后，该不等式给出

$$\deg_U \mathcal{F} \operatorname{rk} E - \deg_U E \operatorname{rk} \mathcal{F} \leq 0$$

---

dHYM 方程与 t-结构的心。

这等价于要求

$$\frac{\deg_U \mathcal{F}}{\operatorname{rk} \mathcal{F}} \leq \frac{\deg_U E}{\operatorname{rk} E}.$$

由于 $\deg_U(E) = \deg E + \operatorname{rk} E[\omega]^{n-1}.U_2$，因此可以进一步简化为通常的斜率不等式

$$\frac{\deg \mathcal{F}}{\operatorname{rk} \mathcal{F}} \leq \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E}.$$

□

注记 4.1.15。上述证明用到了 U（或者说其二次分量）是一个实算子的条件；一般而言，对于复数域上的 U，需要对其二次分量的虚部施加额外的拓扑假设，这看起来略显不自然。因此，我们在中心荷的定义中加入了 U 为实的条件。这涵盖了我们将在下一节讨论的最受关注的例子。

下面说明，注记 4.1.9 中的考虑在大体积区域并不重要。

推论 4.1.16。对于任意无挠相干层 $\mathcal{E}$ 和多项式中心荷 Z_k，值 $Z_k(\mathcal{E}) \neq 0$ 对于 $k \gg 0$不为零。

我们还明确指出以下结论，它是引理 2.2.16在渐近 Z-稳定性情形下的直接类比。

推论 4.1.17。如果 $E \to X$ 是斜率稳定的，那么对于任意 Z，它都是渐近 Z-稳定的。特别是，有以下蕴含关系

$$\textit{Slope stable} \implies \textit{asymptotic } Z\textit{-stability} \implies \textit{Slope semistable}.$$

还需注意，渐近 Z-稳定性与斜率稳定性一样，满足跷跷板性质，见 引理 2.2.6。

引理 4.1.18. 考虑一个相干层的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

其中 秩$\mathcal{E}>0$。那么

$$\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) \leq \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \text{ for all } k \gg 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \leq \mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) \text{ for all } k \gg 0$$

and

$$\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) \geq \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \text{ for all } k \gg 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \geq \mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) \text{ for all } k \gg 0.$$

此外:

- 若 $Z_k(\mathcal{S}) \neq 0$ 且 $Z_k(\mathcal{Q}) \neq 0$，则

  $$\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \text{ for all } k \gg 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) \text{ for all } k \gg 0$$

  and

  $$\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) > \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) \text{ for all } k \gg 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{Z_k}(\mathcal{E}) > \mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) \text{ for all } k \gg 0.$$

- 若 $Z_k(\mathcal{S}) = 0$ 则 $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) > \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$ 且 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) = \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。

- 若 $Z_k(\mathcal{Q}) = 0$ 则 $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) = \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$ 且 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。

若将 Z-斜率替换为相位 φ_k，则 引理 *4.1.11*也成立。

证明。 由于 Z 在短正合列中具有可加性，我们有

$$Z_k(\mathcal{E}) = Z_k(\mathcal{S}) + Z_k(\mathcal{Q})$$

对所有 $k \gg 0$ 均成立。因此， Z 的实部和 Z 的虚部在短正合列中也具有可加性。

由于 $\operatorname{rk}\mathcal{E} > 0$，根据展开公式 (4.3)，我们有 $\operatorname{Im} Z_k(E) > 0$ 对所有 $k \gg 0$均成立。于是，假设对所有 $k \gg 0$均有 $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$。若出现以下任一情形：对所有 $k \gg 0$ 均有 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) > 0$ ；或者对所有 $k \gg 0$ 均有 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) = 0$ 且 $\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S}) > 0$ （后一种情况下，若 $\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S}) < 0$，则 $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) = +\infty$，但 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E})$ 是有限的）。若 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) > 0$

then

$$\begin{aligned}0 &> \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S})(\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) - \mu_{Z_k}(\mathcal{E})) \\ &= -\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S}) + \frac{\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{E})}{\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E})} \\ &= \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{Q}) - \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{E}) + \frac{(\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E}) - \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q})) \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{E})}{\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E})} \\ &= \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{Q}) - \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q}) \mu_{Z_k}(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

若 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q}) > 0$，则我们得出 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。若 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q}) = 0$，则我们得出 $\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{Q}) < 0$，因此 $\mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) = +\infty$，并再次得到 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。现在考虑对所有 $k \gg 0$均有 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) = 0$ 且 $\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S}) > 0$ 的情形。那么必有对所有 $k \gg 0$均有 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q}) = \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E}) > 0$。因此

$$\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q})(\mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) - \mu_{Z_k}(\mathcal{E})) = \operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S}) > 0$$

由此我们得出，对于所有 $k \gg 0$， $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。反向重复同样的论证，可得对于所有 $k \gg 0$， $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$，这也意味着对于所有 $k \gg 0$，$\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$。

另一方面，将不等号反向并重复同样的论证，可得类似结论：对于所有 $k \gg 0$， $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) > \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$，当且仅当对于所有 $k \gg 0$，$\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) > \mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。

现在假设对于所有 $k \gg 0$， $\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) = \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$。由于 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E}) > 0$ 且 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \infty$，我们必有 $\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) > 0$。我们有

$$\operatorname{Im} Z_k(\mathcal{E}) = \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S}) \frac{\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{E})}{\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{S})} > 0.$$

现在我们计算

$$0 = \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{S})(\mu_{Z_k}(\mathcal{S}) - \mu_{Z_k}(\mathcal{E})) = -\operatorname{Re} Z_k(\mathcal{Q}) - \operatorname{Im} Z_k(\mathcal{Q}) \mu_{Z_k}(\mathcal{E}).$$

由此我们得出，要么对于所有 $k \gg 0$， $\mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) = \mu_{Z_k}(\mathcal{E})$，要么 $Z_k(\mathcal{Q}) = 0$；在后一种情况下， $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) < \mu_{Z_k}(\mathcal{Q}) = +\infty$。同样的论证也解决了 $\mu_{Z_k}(\mathcal{E}) =$ 的情形

$\mu_{Z_k}(\mathcal{Q})$。 □

尤其是，正如斜率稳定性情形一样，我们得到渐近 Z-稳定层的单纯性；这对于我们在 Z-临界度量存在性蕴含稳定性的证明中至关重要，见第5章。

引理 4.1.19. 渐近 Z-稳定向量丛 E 是单纯的 .

证明。 这里只用到了跷跷板性质，因此可由斜率稳定层或 Gieseker 稳定层的标准论证得出 [HL10，推论 1.2。8]。设 $u\colon E \to E$是一个非零层自同态，并设 $\ker u \neq 0$。那么，根据渐近Z-稳定性，由于 $\ker u \hookrightarrow E$ ，我们有

$$\varphi_k(\ker u) < \varphi_k(E)$$

对所有 $k \gg 0$均成立。由跷跷板性质 引理 4.1.18 可得

$$\varphi_k(E) < \varphi_k(E/\ker u) = \varphi_k(\operatorname{im} u)$$

这与相对于子层 $\operatorname{im} u \hookrightarrow E$ 的渐近 Z-稳定性矛盾。因此 $\ker u = 0$。于是 u 是从 E 到 E 的单射态射，因此诱导出一个单射态射 $u\colon \det E \to \det E$，而这必为同构（因为这是秩相同的线丛之间的非零映射，且 c_1）。因此 u也是同构。

因此， $H^0(X, \operatorname{End} E) = \mathbb{C}$ 是一个标准结果。事实上，这个向量空间是 $\mathbb{C}$ 上的有限维除代数，因此必与 $\mathbb{C}$ 同构。 □

4.1.1 示例

这里给出几个我们感兴趣的重要中心荷例子。为了以文献中出现过的相同形式陈述这些中心荷，我们暂且忽略稳定性向量上的归一化条件 $\operatorname{Im}(\rho_n) > 0$ 。

例 4.1.20（dHYM中心荷）。固定一个类 $B \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$（即“B场”的类）。设 (X, ω) 是一个维数为 n 的紧致 Kähler 流形。定义数据

$$\rho_d = -\frac{(-i)^d}{d!}, \quad U = e^{-B}.$$

然后，将给定的 Kähler 形式 ω 在 X 上作为 Kähler 类，便可得到一个中心荷

$$Z_{\mathrm{dHYM}}(E) = -\int_X e^{-i[\omega]-B}\,\mathrm{Ch}(E),$$

我们称之为变形 *Hermitian–Yang–Mills* 中心荷。

例 4.1.21（弦理论中心荷）。固定如上例中的 ρ_d，但现在令 $U = e^{-B}\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$。由此得到的中心荷

$$Z_{\mathrm{Td}}(E) = -\int_X e^{-i[\omega]-B}\,\mathrm{Ch}(E)\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$$

这是弦理论研究中最相关的中心荷。我们也会关注带有 $U = e^{-B}\sqrt{\hat{A}(X)}$ 的变体，记作 $Z_{\hat{A}}(E)$。

现在我们来讨论一个详细例子，其中可以轻松理解上述中心荷的渐近Z-稳定性。要使这个例子具有意义，它应由一个严格斜率半稳定但非斜率多稳定的向量丛构成；Maruyama 曾研究过这样一个例子。

例 4.1.22。我们考虑一个定义在 $\mathbb{CP}^2$ 上的简单三阶丛，这是 Maruyama 在 Gieseker 稳定性的背景下研究的例子；我们沿用[OSS11，第96]页中的表述。因此，令 F 为定义在 $\mathbb{CP}^2$ 上的秩为 2 的斜率稳定向量丛，满足$c_1(F) = 0$且 $H^1(\mathbb{CP}^2, F) \neq 0$。给定 $\tau \in H^1(\mathbb{CP}^2, F) \setminus \{0\}$，定义一个扩张

$$0 \to F \to E \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2} \to 0$$

利用 τ.， E 的陈特征为

$$c_1(E) = 0 \qquad c_2(E) = c_2(F).$$

由 Bogomolov 不等式可知，$c_2(F) \geq 0$，因为 F 是一个第一陈类为零的斜率稳定丛。因此，丛 E 不是斜率稳定的，因为 $\mu(F) = \mu(E)$，因而使 E不稳定；但事实上，E 是 Gieseker 稳定的。由此可知，E 是单纯且斜率半稳定的，且

$$0 \subset F \subset E$$

从而得到 E 的 Jordan–H¨older 滤过，这意味着 E 具有伴随分次对象

$$\mathrm{Gr}(E) = F \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}.$$

由于该分次对象是局部自由的，定理 1.3 的假设得以满足。首先，考虑带有 B场的 dHYM中心荷，其定义为

$$Z_{\mathrm{dHYM}}(E) = -\int_{\mathbb{CP}^2} e^{-ik[\omega]} \mathrm{ch}(E) e^{-B},$$

其中 B场为 $B \in H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R})$。于是，由于 $c_1(E) = 0$，我们有 $\mathrm{ch}(E) = 秩(E) - c_2(E)$。记

$$\sigma := \int_{\mathbb{CP}^2} c_2(E) = \int_{\mathbb{CP}^2} c_2(F) \geq 0.$$

记 $h = c_1(\mathcal{O}(1)) = [\omega]$，可计算得

$$Z_{\mathrm{dHYM}}(E) = \sigma + \frac{\mathrm{rk}(E)}{2} k^2 - ik\,\mathrm{rk}(E) B.h - \frac{\mathrm{rk}\,E}{2} B^2,$$

因此，$Z(F)/Z(E)$ 的虚部是下式的正的常数倍

$$\begin{aligned}&(\sigma + \frac{\mathrm{rk}(E)}{2}(k^2 - B^2)) \cdot (-k\,\mathrm{rk}(F) B.h) - (\sigma + \frac{\mathrm{rk}(E)}{2}(k^2 - B^2)) \cdot (-k\,\mathrm{rk}(E) B.h) \\ &= k\sigma B.h(\mathrm{rk}(E) - \mathrm{rk}(F)).\end{aligned}$$

当 $\sigma > 0$ 为正时，由于 $\mathrm{rk}(E) - \mathrm{rk}(F) > 0$，我们有 $\varphi_k(F) < \varphi_k(E)$，只要选择 B 场使得 $B.h < 0$。因此，采用适当的

B B场后，定理 1.3 意味着 E 对所有 $k \gg 0$ 都存在变形厄米杨-米尔斯联络；请注意，这要求 B 场非平凡。在剩余情形 $B.h \geq 0$ 或 $\sigma = 0$ 中（包括 B 场平凡的情形），我们有$\varphi_k(F) \geq \varphi_k(E)$，这意味着 E 不是渐近 Z_{dHYM}-稳定的，因此根据定理 1.3 E ，对于$k \gg 0$，它不能存在变形厄米杨–米尔斯联络。请注意，在这项计算中，我们只用到了 $c_2(E) = c_2(F)$ 这一事实。考虑对偶 E^*的同一问题，我们有 $c_2(E) = c_2(E^*)$，但子丛 $F \subset E$ 导出一个商 $E^* \to F^*$，因此对 E^* 将得到相反的结论。也就是说，当 $\sigma B.h \leq 0$ 时， E^* 不是渐近 Z_{dHYM}-稳定的；否则它是稳定的。

事实上，实际上可以计算得出：若 E 具有某个 B 的$Z_{\mathrm{dHYM},B}$-临界度量，且满足 $B.h < 0$，那么由其诱导的 E^* 上的厄米结构所对应的陈联络满足$Z_{\mathrm{dHYM},-B}$-临界方程。结合定理 1.3，这便重新得到上述代数几何观察。值得注意的是，可以将上述对偶性理解为：若不严格计较有界 t-结构的心是否包含丛 E，那么$Z_{\mathrm{dHYM},-B}$便是 Bayer [Bay09, §3.3] 意义下$Z_{\mathrm{dHYM},B}$ 的“对偶多项式稳定性条件”。文中证明，若 E 是$Z_{\mathrm{dHYM},B}$-稳定的，则 E^* 是$Z_{\mathrm{dHYM},-B}$-稳定的。[3]

接下来，我们考虑与弦理论相关的另一个中心荷

$$Z_{\mathrm{Td}}(E) = -\int_{\mathbb{CP}^2} e^{-ik[\omega]} \operatorname{ch}(E) \sqrt{\operatorname{Td}(\mathbb{CP}^2)} e^{-B};$$

也就是说，其中幺幂算子 $U = \sqrt{\operatorname{Td}(\mathbb{CP}^2)} e^{-B}$ 同时包含B场和Todd 类的平方根。$\mathbb{CP}^2$ 的Todd 类为

$$\operatorname{Td}(\mathbb{CP}^2) = 1 + \frac{3}{2}h + h^2,$$

因此

$$\sqrt{\operatorname{Td}(\mathbb{CP}^2)} = 1 + \frac{3}{4}h + \frac{7}{32}h^2.$$

[3]严格来说，Bayer 考虑的是对偶对象 $\mathbb{D}(E)$，在我们的情形下即为 $E^* \otimes \omega_{\mathbb{P}^2}$；对偶稳定性条件涉及将 e^{-B} 变换为 $\operatorname{Ch}(\omega_{\mathbb{P}^2})^{-1} \cdot e^B$，因此数值结果与我们示例中的上述计算完全一致。

通过上述相同的计算，我们得到 $Z_{\mathrm{Td}(F)}\ Z_{\mathrm{Td}(E)}$ 的虚部是.....的正的常数倍——

$$\frac{3k}{4}\sigma(\mathrm{rk}\,E-\mathrm{rk}\,F)\left(B.h-\frac{3}{4}\right).$$

因此，当 $B.h<\frac{3}{4}$ 时，$\varphi_k(F)<\varphi_k(E)$ 成立,- 从而产生 Z_{Td}-临界联络；而在 $B.h\geq\frac{3}{4}$ 的情形下，渐近 Z_{Td}-稳定性遭到破坏，因此此类联络不存在。和之前一样，若取 E^* 而非 E，则结论相反。

如上所述，由 定理 1.3 的证明可知，只需检验相对于 Z-稳定性的渐近性质，且仅需考虑 F。由于 $c_2(E)\geq 0$ 总是由 F的斜率稳定性所保证，因此我们可以将所得结论概括如下:

(i) 若 $c_2(E)>0$，则只要我们选取满足 $B.h<0$ 的 B场，E 就是渐近 Z_{dHYM}-稳定的；若 $B.h\geq 0$，则它渐近 Z_{dHYM}-不稳定。因此，E 对于 $B.h<0$ 存在带 B场的变形厄米杨-米尔斯度量，但当 $B.h\geq 0$ 时，在大体积区域内不存在变形厄米杨-米尔斯联络。特别地，E 不存在 B场为零的变形厄米杨-米尔斯联络。

(ii) 当 E 替换为 E^*时，上述结论反之。也就是说，只要选择 B场使得 $B.h>0$, E^* 就存在变形厄米杨–米尔斯联络；而当 $B.h\leq 0$时则不存在变形厄米杨–米尔斯联络。特别地，E 和 E^* 在 B场为零时均不存在 dHYM 度量。

(iii) 若 $c_2(E)>0$，则只要 $B.h<\frac{3}{4}$，E 便渐近 Z_{Td}-稳定，否则不稳定。因此，只要$B.h<\frac{3}{4}$，E 就存在 Z_{Td}-临界联络。特别地，这包括 B场为零的情形。

(iv) 对于 E^*，结论与上述相反。也就是说，只要满足 $B.h>\frac{3}{4}$，E^* 就存在一个 Z_{Td} 临界度量。特别是，与 E 相比，这不 包括 B场消失的情形。

(v) 如果 $c_2(E) = 0$，那么 E 关于任一中心荷渐近半稳定。

注释 4.1.23。 上面的例子展示了一个关于 Z-稳定性的简单墙穿越现象，以及 Z-临界联络的存在。特别地，当稳定性条件 Z_{dHYM} 和 Z_{Td} 通过将 B 替换为tB 并令 $t \in \mathbb{R}$ 变化时，我们看到稳定性会在临界阈值（分别为 $t = 0$ 和 $t = \frac{3}{4}$）处跃迁为不稳定性。

如果选择改变稳定性条件的稳定性向量，也可以观察到类似的墙穿越现象。我们只考虑 Z_{dHYM}。若将稳定性向量改为 $\rho = (\rho_0, \rho_1, -1)$，从而得到新的稳定性条件 Z，并为方便起见将 $\rho_2 = -1$ 归一化，那么无论选择何种 B场，当 Im $\rho_0 < 0$时，以及当 Im $\rho_0 = 0$ 且 $B.h < 0$时，都会得到Z-稳定性。当 Im $\rho_0 > 0$ 或 Im $\rho_0 = 0$ 且 $B.h \geq 0$时，则会出现不稳定性。对 Z_{Td}也会得到类似结论，并且还可以将 E 替换为 E^*，同时将不等式 $B.h < 0$ 翻转为$B.h > 0$。

注记 4.1.24. 这些例子是高秩情形下 dHYM 方程和 Z-临界方程的首批非平凡解。这里，非平凡是指$E \to X$ 本身并非斜率稳定，而所有这类丛都能在大体积极限下存在解，这由定理 5.2.3给出，不过此前甚至未曾注意到这种情况下解的存在性。

4.2 Z-临界联络

设 Z 为一个多项式中心荷。本节将定义一个微分方程，其解的存在性在形式上与 Z- 稳定性相对应。为此，我们必须如下指定该多项式中心荷的一些微分几何代表数据:

- 设 $\omega \in [\omega]$ 为多项式中心荷 Z的 K¨ahler 类中的一个固定 K¨ahler 形式。˜
- 设 $U \in \Omega^*(X, \mathbb{R})$ 是表示幂零类 U 的任意微分形式。

- 设 h 是 E 上的厄米度量。

给定 E 上的厄米度量 h，可由下式得到 E 的特征类的 ***Chern–Weil*** 代表元

$$\tilde{\mathrm{Ch}}(h) = \exp\left(\frac{i}{2\pi}F(h)\right) \in \Omega^*(X, \mathrm{End}(E))$$

其中 $F(h)$ 是 h 的陈曲率。例如，可得到

$$\tilde{\mathrm{Ch}}_0(h) = \mathbf{1}_E, \quad \tilde{\mathrm{Ch}}_1(h) = \frac{i}{2\pi}F(h), \quad \tilde{\mathrm{Ch}}_2(h) = -\frac{1}{8\pi^2}F(h)^2$$

依此类推。这些定义了陈类的代表元，具体而言

$$\left[\mathrm{tr}\,\tilde{\mathrm{Ch}}_i(h)\right] = \mathrm{Ch}_i(E).$$

˜利用上述数据，我们定义多项式中心荷 $[Z_k(E)]$ 的密度的微分几何代表 $Z_k(h)$，如下所示

$$\tilde{Z}_k(h) := \left(\sum_{d=0}^{n} \rho_d k^d \omega^d\right) \wedge \tilde{\mathrm{Ch}}(h) \wedge \tilde{U}.$$

现在定义 Z-临界度量。给定一个端omorphism $T \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$，则相对于厄米度量 h，可得到一个分解

$$T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T)$$

其中 $\mathrm{Re}(T)$，$\mathrm{Im}(T)$ 是厄米自同态，因此 $i\,\mathrm{Im}(T)$ 是反厄米的。事实上，$\mathrm{Re}(T) = (T + T^*)/2$，且 $\mathrm{Im}(T) = (T - T^*)/2i$。注意，相对于度量 h，陈曲率 $F(h)$ 是取值于虚自同态的形式，因此 $iF(h)$ 是实的。[4]

定义 4.2.1（Z-临界度量与联络）。设 h 是紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$ 的厄米度量。设

[4]确实，回想一下，陈联络是酉的，因此其曲率 $F(h)$ 的值落在一个 $\mathfrak{u}(n)$-丛中，该丛由反厄米（即“虚”的）端omorphism组成。

Z 是一个多项式中心荷，其数据为 $[\omega], U, \rho$ ，并具有固定的代表数据 ω, U。假设 $Z(E) \neq 0$。那么，如果满足以下条件，我们称 h 是一个 Z-临界度量

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(h)) = 0.$$

如果 A 是 h 的陈联络，我们就称 A 为 Z-临界联络。我们将上述方程称为 Z-临界方程。

在下文中，我们将根据当时哪种表述最方便，在 Z-临界度量与联络这两种视角之间自由切换。正如第 2.2.2.2 节中已经讨论过的，采用任一视角都不会失去一般性。

注4.2.2. 在假设 $Z(E) \neq 0$ 的情况下，我们也可以将Z-临界度量定义为满足下列方程的度量

$$\arg \tilde{Z}(h) = e^{i\theta}\mathbf{1}_E \qquad \text{(Eq. 4.5)}$$

~ ~其中辐角 $Z(h)$是相对于由 h 诱导的极分解而言的 $Z(h)$的酉部分，且 θ 是一个常数。[5] 这更符合Z用相位来定义的-稳定性定义4.1.6。Kontsevich此前受King稳定性和矩映射判据启发，曾为箭图表示上的度量提出过这种形式的方程 [Kon15] [Kin94]。作者感谢Pranav Pandit指出这一参考文献。

在线丛上，这两个方程是等价的，而一般而言，（方程4.5）蕴含 Z-临界方程。理解一般情况下这些不同表述之间的关系将会很有趣。人们预期， Z-几乎校准条件定义4.2.8可能会发挥一定作用，正如其在线丛情形中所起的作用一样。[6]

[5]注意，除非极分解的半正定部分实际上是严格正定的，否则其中的酉部分并非唯一确定。这正是Z-几乎校准的假设。[6]一般而言，这些方程不应当等价，因为在过渡到高秩情形后，取实部和虚部与极分解的相互作用方式不再像线丛情形那样。

注意　此方程在上同调层面是有意义的。也就是说，我们有 e

$$\int_X \operatorname{tr}\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(h)) = 0. \tag{Eq. 4.6}$$

我们来陈述 Z-临界方程，适用于 例4.1.20和 4.1.21。

例4.2.3 (变形厄米杨–米尔斯方程)。 考虑 例 4.1.20 中的 dHYM中心荷

$$Z_{\mathrm{dHYM}}(E) = -\int_X e^{-i[\omega]-B}\operatorname{Ch}(E).$$

选取代表元 $\omega \in [\omega]$ 和 $\beta \in B$，并设 h 是向量丛 $E \to X$上的厄米度量。我们计算

$$\begin{aligned}
-e^{-i\omega-\beta}\tilde{\mathrm{Ch}}(E) &= -\sum_{j=0}^{n}(-i)^j\frac{(\omega-i\beta)^j}{j!}\wedge\tilde{\mathrm{ch}}_{n-j}(E)\\
&= -\sum_{j=0}^{n}(-i)^j\frac{(\omega-i\beta)^j}{j!(n-j)!}\wedge\left(\frac{i}{2\pi}F(h)\right)^{n-j}\\
&= -\frac{1}{i^n n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\omega-i\beta)^j\wedge i^{n-j}\left(\frac{i}{2\pi}F(h)\right)^{n-j}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}i^n}{n!}\left(\omega\otimes\mathbf{1}_E - i\beta\otimes\mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n.
\end{aligned}$$

相位由下式给出

$$\begin{aligned}
e^{-i\varphi(E)} &= \frac{r(E)}{Z(E)}\\
&= r(E)\left(\frac{(-1)^{n+1}i^n}{n!}\int_X \operatorname{tr}\left(\omega\otimes\mathbf{1}_E - i\beta\otimes\mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

如果我们定义

$$\hat{z} = \int_X \operatorname{tr}\left(\omega\otimes\mathbf{1}_E - i\beta\otimes\mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n$$

并且 $z = re^{i\phi}$，那么由于 $x/r = \frac{1}{n}!$ 可得

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi}\tilde{Z}(E)) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\phi}\left(\omega\otimes\mathbf{1}_E - i\beta\otimes\mathbf{1}_E - \frac{F(h)}{2\pi}\right)^n\right).$$

这是高秩情形下带 B场的变形 Hermitian–Yang–Mills 方程，详见第 3.3 节。

在关于 dHYM 方程的文献中，当 E 是线丛时，通常写作 $\alpha = \frac{i}{2\pi}F(h) - \beta$，其中它是一个实 (1，1)-形式，而 α 的 dHYM 方程写作

$$\mathrm{Im}(e^{-i\phi}(\omega + i\alpha)^n) = 0.$$

例 4.2.4（弦理论中心荷方程）。考虑中心荷Z_{Td} 或 $Z_{\hat{A}}$，它属于 例 4.1.21。再次选取代表元 $\omega \in [\omega]$，$\beta \in B$，现在再选取代表元 $\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$，它属于 $\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$，或 $\sqrt{\hat{A}(X)}$，即可得到方程

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}_{\mathrm{Td}}(h)) = 0$$

and

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}_{\hat{A}}(h)) = 0.$$

前一个方程由 Enger–L¨utken[EL04], 在物理学文献中提出，他们在第 5 章 证明了 Calabi–Yau 三维流形上的一种对应。

$\hat{}$ 我们注意到，Td(X) 或 $A(X)$ 的代表形式，最自然的选择是相对于 K¨ahler 度量 ω的 Levi-Civita 联络所产生的 TX 陈–韦伊代表元¨。事实上，在研究耦合变形厄米特–杨–米尔斯度量的文献中，例如 [SS21] ，选择这些特定的代表元可能非常重要（尽管他们研究的是标准 dHYM 方程，而非涉及 $\sqrt{\mathrm{Td}(X)}$ 或 $\sqrt{\hat{A}(X)}$ 的方程）。然而，具体选择哪种代表元似乎与我们的工作无关。

考虑线丛上的 Z-临界方程很有意思，这可以指出它与文献中此前出现过的 dHYM 方程的各种形式之间的类比。

˜**例 4.2.5**。若 $L \to X$ 是一个线丛，则 $Z(h)$ 是 X 上的一个复 (n,n)-形式。Z-临界方程可表述为

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i\varphi(L)}\exp(i\tilde{\varphi}(h))\right) = 0$$

其中我们定义

$$\tilde{\varphi}(h) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\tilde{Z}(h)}{\operatorname{Re}\tilde{Z}(h)}\right)$$

为相位函数

$$\tilde{\varphi}(h) = \arg\frac{\tilde{Z}(h)}{\omega^n} : X \to (-\pi,\pi).$$

因此，Z-临界方程等价于以下条件

$$\tilde{\varphi}(h) = \varphi(L) \mod 2\pi\ell. \qquad \text{(Eq. 4.7)}$$

这个 Z-临界方程的标量形式与先前出现在 dHYM 方程中的情形类似 [JY17, §2]。一般而言，若将 $F(h$相对于 ω的特征值定义为 λ_1，...，λ_n，则存在一个函数 f_Z 使得

$$\tilde{\varphi}(h) = f_Z(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

形如 (式 4.7) 的方程曾出现在 Sz´ekelyhidi 关于全非线性方程的研究中 [Sz´e18], ，而这类方程的性质取决于函数 f_Z的性质。特别地，对于 J-方程，有

$$f_Z(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}$$

而对于 dHYM 方程，有

$$f_Z(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_i \arctan(\lambda_i).$$

该对称 这些例子中函数 f_Z 的对称性对于分析 f

这些方程，我们将在第 4.3 节中对此进行解释。

与代数陈述 引理 4.1.19 所表明的渐近 Z-稳定性趋近于斜率稳定性相对应，大体积极限下 Z-临界方程也具有相应性质。

引理 4.2.6。 在大体积区域 $k \gg 0$ 中，要使 h 成为多项式稳定性条件下的 Z-临界度量，其首阶条件由弱 *Hermite–Einstein* 方程给出。更准确地说，关于 k 存在如下形式的展开

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\left(e^{-i\varphi_k(E)}\tilde{Z}_k(h)\right) = \\ &\quad ck^{2n-1}\left([\omega]^n \operatorname{rk}(E)\omega^{n-1} \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F(h) + \tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right) - \deg_U(E)\omega^n \otimes \mathbf{1}_E\right) + O(k^{2n-2}),\end{aligned}$$

其中 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 是依赖于 ρ 的正常数， U_2 是微分形式 U的二次部分，且次数$_U(E)$ 是方程 (Eq. 4.4)所定义的次数。因此，在首阶上， Z-临界方程等价于

$$F(h) \wedge \omega^{n-1} = -2\pi i\left(\frac{\deg_U(E)}{[\omega]^n \operatorname{rk}(E)} - \frac{1}{n}\Lambda_\omega \tilde{U}_2\right)\mathbf{1}_E \otimes \omega^n,$$

这就是弱 *Hermite–Einstein* 方程（定义 *2.2.17*），其函数为

$$f = -2\pi i\left(\frac{\deg_U(E)}{(n-1)![\omega]^n \operatorname{rk}(E)} - \frac{1}{n}\Lambda_\omega \tilde{U}_2\right).$$

证明。 直接计算首阶项即可得出这一结论。令 $Z_k(E) = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$，则计算得

$$\begin{aligned}r_k\cos\varphi_k &= \operatorname{Re}\rho_n k^n[\omega]^n \operatorname{rk} E + \operatorname{Re}\rho_{n-1}k^{n-1}[\omega]^{n-1}.(c_1(E) + \operatorname{rk}(E)U_2) + O(k^{n-2}),\\ r_k\sin\varphi_k &= \operatorname{Im}\rho_n k^n[\omega]^n \operatorname{rk} E + \operatorname{Im}\rho_{n-1}k^{n-1}[\omega]^{n-1}.(c_1(E) + \operatorname{rk}(E)U_2) + O(k^{n-2}).\end{aligned}$$

我们还有

$$\operatorname{Re}\tilde{Z}_k(h) = \operatorname{Re}\rho_n k^n\omega^n \otimes \mathbf{1}_E + \operatorname{Re}\rho_{n-1}k^{n-1}\omega^{n-1} \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F(h) + \tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right) + O(k^{n-2}),$$

$$\operatorname{Im}\tilde{Z}_k(h) = \operatorname{Im}\rho_n k^n\omega^n\otimes\mathbf{1}_E + \operatorname{Im}\rho_{n-1}k^{n-1}\omega^{n-1}\wedge\left(\frac{i}{2\pi}F(h)+\tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right)+O(k^{n-2}).$$

h 为 Z_k-临界的条件因此是

$$r_k\cos\varphi_k\operatorname{Im}\tilde{Z}_k(h) - r_k\sin\varphi_k\operatorname{Re}\tilde{Z}_k(h) = 0$$

计算 k 中诱导的展开可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(e^{-i\varphi_k(E)}\tilde{Z}_k(E)\right)\\
&= k^{2n-1}\Bigg((\operatorname{Re}\rho_n[\omega]^n\operatorname{rk}E)\left(\operatorname{Im}\rho_{n-1}\omega^{n-1}\wedge\left(\frac{i}{2\pi}F(h)+\tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right)\right)\\
&\quad+(\operatorname{Re}\rho_{n-1}\deg_U(E))(\operatorname{Im}\rho_n\omega^n\otimes\mathbf{1}_E)\\
&\quad-(\operatorname{Im}\rho_n[\omega]^n\operatorname{rk}E)\operatorname{Re}\rho_{n-1}k^{n-1}\omega^{n-1}\wedge\left(\frac{i}{2\pi}F(h)+\tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right)\\
&\quad-(\operatorname{Im}\rho_{n-1}\deg_U(E))(\operatorname{Re}\rho_n\omega^n\otimes\mathbf{1}_E)\Bigg)+O(k^{2n-2}).
\end{aligned}$$

我们通过除以因子进行化简

$$c = \operatorname{Re}\rho_n\operatorname{Im}\rho_{n-1} - \operatorname{Im}\rho_n\operatorname{Re}\rho_{n-1},$$

根据稳定性向量假设 $\operatorname{Im}(\rho_{n-1}/\rho_n) > 0.$，该因子非零，事实上为正。因此，$k^{2n-1}$-系数变为

$$[\omega]^n\operatorname{rk}(E)\omega^{n-1}\wedge\left(\frac{i}{2\pi}F(h)+\tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right)-\deg_U(E)\omega^n\otimes\mathbf{1}_E,$$

如所需。 □

注 4.2.7. 为了证明大体积极限下渐近Z-稳定性与 Z-临界度量存在之间的对应关系，上述条件以及引理 4.1.19 只用到条件

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right) > 0$$

而稳定性向量 ρ 上的低阶条件并非必要。因此，可以将某些退化的多项式中心荷实例作为 Z-临界方程的例子，而不影响主要结果的力度。其中应包括所谓“弱”稳定性条件的例子；对于这类条件，$Z(E) = 0$ 并不意味着 E 在数值上平凡。特别地，斜率稳定性满足我们的理论适用所需的全部条件。

为完整起见，我们来定义 Z-临界方程的近似校准条件，该条件由 Collins–Yau [CY21,§81]提出。

定义4.2.8。 设 $E \to (X, \omega)$ 是一个向量丛， Z 是一个多项式稳定性条件。定义 Z-近似校准度量构成的空间为

$$\mathcal{H}_Z := \left\{ h \mid \mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}(h) \right) \right) > 0 \right\}.$$

近似校准条件的重要性部分在于，它蕴含了在 E 的自同态 ϕ, ψ 上一个自然 L^2 内积的正性，该内积定义为

$$(\phi, \psi) \mapsto \int_X \phi\psi \, \mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}(h) \right) \right).$$

这在空间 $\mathcal{H}_Z$ 上定义了一个正的黎曼度量。Collins–Yau 利用关于此度量的测地线，得到了 dHYM 方程的强解析结果。未来，这可能对 Z-临界方程也很重要。根据以下引理，我们将在大体积极限附近看到近似校准条件。

引理 4.2.9。 厄米度量 h 在 $E \to (X, \omega)$ 上对所有$k \gg 0$都是 Z-近似校准的。

证明。只需验证

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}(h) \right) \right) = k^{2n} (\mathrm{rk}\, E[\omega]^n (|\rho_n|^2) \omega^n + O(k^{2n-1})$$

由于 $\rho_n \neq 0$，因此其为正。 □

我们注意到， Z-近似校准条件应与厄米度量的某些相位假设相关，这与研究拉格朗日子流形或 dHYM 方程时所采用的类似近似校准条件相同。事实上，采用 arg 的主值分支进行研究时，我们观察到：[7]

命题 4.2.10。 设 h 是 $E \to (X, \omega)$ 上的 Z-近似校准度量。那么

$$\left|\arg \operatorname{tr}\left(\tilde{Z}(h)\right) - \arg Z(E)\right| < \frac{\pi}{2}.$$

注意到下述事实，即可直接得到上述不等式：

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(h)\right)\right) = r\cos\left(\operatorname{tr}\left(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(h)\right)\right)$$

其中 $r: X \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个正函数；当 $|x| < \frac{\pi}{2}$. 时，在 arg $x \in (-\pi, \pi)$ 的主值分支内，cos(x) 为正。 –

4.3 次解

为了开始研究次解，我们先绕道考察 Z-临界方程的线性化。

4.3.1 线性化与椭圆性

首先 我们将定义一组自同态的对称化乘积 .

定义 **n 4.3.1.** 设 $B_1, \ldots, B_j$ 是这样一组自同态。我们定义

$$[B_1 \cdots B_j]_{\text{sym}} := \frac{1}{j!}\sum_{\sigma \in S_j} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(j)}.$$

当 B_i 是内自同态值微分形式时，我们必须取分次对称化。如下定义置换 σ 的分次符号 grsgn。若 σ 是一个相邻

[7]一般而言，预期 Z-几乎校准度量空间可分解为若干部分，其中各部分由辐角界的平移构成，这与 Collins–Yau 在命题 4.2.10 中针对线丛上的 dHYM 方程观察到的情形类似。 [CY21] 对于这一重要考量，我们不再作进一步评论。

对换（$i\ i+1$），则

$$\operatorname{grsgn}\sigma = \deg B_i \deg B_{i+1} \mod 2.$$

一般而言，任意置换 $\sigma \in S_j$ 都可以写成相邻对换 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$的乘积，我们记

$$\operatorname{grsgn}\sigma = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{grsgn}\sigma_i \mod 2.$$

于是，对称化定义为

$$[B_1 \wedge \cdots \wedge B_j]_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{j!}\sum_{\sigma\in S_j}(-1)^{\operatorname{grsgn}\sigma} B_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge B_{\sigma(j)}.$$

分次对称化的构造方式使得，例如，偶数次内自同态值微分形式的分次对称化就是通常的对称化，而内自同态值 1-形式的分次对称化则是标准的分次对称化，其符号由 $\operatorname{sgn}\sigma$改变。下文中，我们会遇到涉及二形式和一形式对称化的表达式。注意，$B_1 \wedge \cdots \wedge B_j$的置换的分次符号不依赖于相邻对换分解的选取。

注 4.3.2. 必须指出，考虑 $[B_1B_2B_3]_{\mathrm{sym}}$ 与$[(B_1B_2)B_3]_{\mathrm{sym}}$并不相同。一般而言，只有当所有的 B_i 都可交换时，这类表达式才相等。例如，当 E 是线丛时，曲率只是一个虚二形式，因此上述形式体系在这种情形下并非必要。下文中，我们总是将 Z-临界方程中每个因子里出现的曲率项 F_A 都视为 E上的一个独立内自同态。

现在我们采用固定厄米度量 h 并改变陈联络 A的约定。为了计算 Z-临界方程的线性化，我们回顾一下 引理 2.2.23，其中计算了曲率的线性化：

$$F_{A_t} = F_A + (\overline{\partial}\partial - \partial\overline{\partial})Vt + O(t^2)$$

对于 $A_t = \exp(tV) \cdot A$，其中 V是（E, h）的厄米自同态。

令 D_Z 表示 Z-临界算子

$$D_Z : A \mapsto \mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A)).$$

D_Z 中出现的每一项都是某个形式乘以实常数所得

$$\omega^d \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F_A\right)^j \wedge \tilde{U}_\ell \tag{Eq. 4.8}$$

使得 $d+j+\ell = n$。将 A 扰动为 $A_t = \exp(tV)$, $\cdot A$我们将 (方程 4.8) 线性化为

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega^d \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F_{A_t}\right)^j \wedge \tilde{U}_\ell \\
&= \omega^d \wedge j \left[\underbrace{\left(\frac{i}{2\pi}F_A\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F_A\right)}_{j-1 \text{ times}} \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}\partial - \partial\overline{\partial})V\right]_{\mathrm{sym}} \wedge \tilde{U}_\ell.
\end{aligned} \tag{Eq. 4.9}$$

定义 4.3.3。定义导数 $Z'(A)$ 为一个取值于 End E 的（$n-1$, $n-1$）形式，它通过对 $\frac{i}{2\pi}F_A$ 取形式导数得到，其中 $d(\frac{i}{2\pi}F_A) = \mathbf{1}_E$。— —

命题 4.3.4。 D_Z 在 A 处的线性化 P_Z 为

$$P_Z(A)(V) = \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}Z'(A)) \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}\partial - \partial\overline{\partial})V\right]_{\mathrm{sym}}.$$

证明。这可由将 (方程 4.9) 中的计算应用于 Z-临界方程中的每一项得到。

□

为了理解我们方程的椭圆性以及由此产生的次解概念，我们先来定义 End 值形式的正性概念。

定义 4.3.5。一个实的 End E 值 $(n-1, n-1)$-形式

$$T = \sum B_1 \wedge \cdots \wedge B_j$$

若对于每个 $p \in X$ 以及每个带有 $u \neq 0$ 的 $u \in T^*_{0,1}X_p \otimes \mathrm{End}\ E_p$，都有

$$\operatorname{tr} i \sum \left[B_{1_p} \wedge \cdots \wedge B_{j_p} \wedge u^* \wedge u \right]_{\mathrm{sym}} > 0.$$

这种正性的定义恢复了常规的正性概念，例如[SW08] 或 [Dem97，第 III 章 § 1] 中所述的情形，T 仅仅是一个（$n-1$，$n-1$）形式。它通过次解的定义进入我们的讨论。

定义 4.3.6（次解）。在 $E \to (X, \omega)$ 上的陈联络 A 是 Z-临界方程的次解，如果

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) > 0$$

按照 End E值（$n-1$，$n-1$）形式的意义，见 定义 4.3.5。

这个定义与上文计算的线性化之间的关联如下。

命题 4.3.7。假设 A 是 Z-临界方程的一个次解。那么，Z-临界算子 D_Z 在 A 处是椭圆的。

证明。根据定义，非线性微分算子 D_Z 在 A 处是椭圆的，当且仅当其线性化 $P_Z(A)$ 是一个线性椭圆微分算子。考虑将命题 4.3.4 视为一个算子

$$P_Z(A) : \Gamma(\mathrm{End}_H(E,h)) \to \Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))$$

定义在 E 的厄米自同态空间上，由以下公式给出

$$P_Z(A) : V \mapsto \frac{\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}\partial - \partial\overline{\partial})V \right]_{\mathrm{sym}}}{\omega^n}.$$

正如记号所示，我们可以忽略 ∂ 和 $\overline{\partial}$ 对陈联络 A 的任何依赖，因为这些项在 $\partial\overline{\partial}$ 中至多是一阶的（因此，与证明椭圆性无关）。

为计算符号，注意若有一个检验微分形式 $\eta = a_i dx^i + b_j dy^j$ ，那么

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \frac{1}{2}(a_i - ib_i), \quad \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{1}{2}(a_j + ib_j).$$

In p特别是，如果我们定义 $\xi := \xi_i d\bar{z}^i = (a_i + ib_i) d\bar{z}^i \in T^*_{0,\ 1}X_p$ ，那么在算子中 or

$$V \mapsto \overline{\partial}\partial V = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\frac{\partial}{\partial z^j}(V) d\bar{z}^k \wedge dz^j$$

我们通过形式上替换来计算符号

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \mapsto \xi_k, \quad \frac{\partial}{\partial z^j} \mapsto \bar{\xi}_j.$$

因此，主符号 $\sigma_\xi(P_Z(A)) : \text{End } E \to \text{End } E$ 定义为

$$\sigma_\xi(P_Z(A))(V) = \frac{\left[\text{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) \wedge \frac{i}{2\pi} 2\xi \wedge \bar{\xi} \otimes V\right]_{\text{sym}}}{\omega^n}.$$

当对任意 $\xi \neq 0$， $\sigma_\xi(P_Z(A))$ 都可逆时，椭圆性成立。由于 A 是一个次解，我们有

$$\text{tr}\, i\left[\text{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) \wedge u^* \wedge u\right]_{\text{sym}} > 0.$$

若我们选取某个非零端omorphism V 对应的 $u = \xi \otimes V$ ，那么利用迹的循环性质，可以将上式每一项中的一个 V 循环移至末尾，从而得到

$$\text{tr}(\sigma_\xi(P_Z(A))(V)V) = \frac{1}{2}\,\text{tr}\, i\left[\text{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) \wedge u^* \wedge u\right]_{\text{sym}} \neq 0.$$

由此可知，对任意 $V \neq 0$， $\sigma_\xi(P_Z(A))(V) \neq 0$，因此 $\sigma_\xi(P_Z(A))$ 的核为零，且 D_Z 是椭圆的。 □

注 4.3.8。 次解条件并未出现在 第5章 中所关注的大体积极限中，因为作为 k 的首项，其系数为$[\omega]^{n-1}$ ，因此在 $k \gg 0$时支配其他项命题 4.3.7 在大体积极限中并非必要，因为椭圆性很容易从

厄米杨-米尔斯方程在 $k = \infty$处继承，这利用了符号的可逆性是一个开条件这一性质。我们将其记录为下面的命题。

命题 4.3.9. 在大体积极限下，每个陈联络 A 都是 Z-临界方程的次解，特别是， Z-临界方程在大体积极限下是椭圆的。此外，线性化可展开为

$$P_{Z_k}(A) = C(\operatorname{rk} E)[\omega]^n k^{2n-1}\Delta_{A^{\operatorname{End} E}} + O(k^{2n-2})$$

其中 $C \neq 0$ 为某个常数。

证明。 关于次解的断言可由展开式 引理 4.2.6以及计算导数 $\tilde{Z}'(A)$ 立即得到。事实上，最高阶项 k^{2n-1} 次解条件由一个形式构成

$$ci \operatorname{tr} u^* \wedge u \wedge \omega^{n-1}$$

其中常数 $c > 0$ 取决于稳定性向量 ρ，并且在大体积极限下支配所有其他项。

线性化的展开可直接通过以下计算得到：引理 2.2.23 将 Hermite–Einstein 方程的线性化展开应用于 引理 4.2.6 中的 Z-临界方程。

□

为后人参考，我们还记录了 Z-临界方程的线性化的一项与次解条件无关的性质。

命题 4.3.10. $P_Z(A)$ 是 Z-临界算子的线性化，它作为厄米特自同态丛的光滑截面空间上的算子是自伴的。特别地， $P_Z(A)$ 可扩张为一个从厄米特自同态丛的 L^2 截面到其自身的对称无界算子。

证明。 这直接由分部积分得出。事实上，我们考虑

$$P_Z(A) : V \mapsto \frac{\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)) \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}\partial - \partial\overline{\partial})V\right]_{\mathrm{sym}}}{\omega^n}$$

对于一个厄米自同态 V。然后我们希望证明

$$\langle U, P_Z(A)(V)\rangle = \langle V, P_Z(A)(U)\rangle$$

其中，内积由光滑厄米自同态U, V 上的配对给出，其定义为

$$\langle U, V\rangle = \int_X \mathrm{tr}(UV)\omega^n.$$

对 ∂_A 和 ∂_A 进行分部积分，并利用分次对称化和迹性质，即可得到该结果。事实上，对于任何形如下式的项，该结果都单独成立：

$$T \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}_A\partial_A - \partial_A\overline{\partial}_A)V$$

其中， T是任意一个 d_A-闭的、取值于自同态的$(n-1, n-1)$-形式。 □

4.3.2 关于子簇的稳定性

现在我们来揭示次解条件对于丛 E的代数几何的重要性。

首先，我们强调 Z-临界方程的以下一个颇为引人注目的性质；从根本上说，这一性质源于陈示性类的陈–外尔理论。

引理 4.3.11. 设 $D \subset X$ 为不可约除子， $E \to X$ 为向量丛。则

$$Z_D(E) = \int_D \mathrm{tr}\ \tilde{Z}'(A)\Big|_D$$

其中 A 是 E上的陈联络。

证明。 回顾子簇的 Z-斜率的定义 (式 4.1)，我们有

$$Z_D(E) = \int_D [Z(E)]$$

其中 $[Z(\ E)]$ 是中心荷 Z 的密度。要验证这一断言，只需

检查

$$[Z(E)]^{(n-1,n-1)} = [\operatorname{tr} Z'(A)].$$

确实

$$[Z(E)] = \left(\sum_{d=0}^{n} \rho_d \omega^d\right) . \operatorname{Ch}(E).U$$

因此，次数为 $(n-1, n-1)$ 的分量是

$$\begin{aligned}[Z(E)]^{(n-1,n-1)} &= \sum_{d+j+\ell=n-1} \rho_d \omega^d . \operatorname{Ch}_j(E).U_j \\ &= \sum_{d+j+\ell=n} \rho_d \omega^d . \operatorname{Ch}_{j-1}(E).U_j\end{aligned}$$

其中我们将 $\operatorname{Ch}_{-1}(E) = 0$ 解释为.....现在我们利用这样一个事实：相对于联络 A，$\operatorname{Ch}(E)$ 的陈–外代表为

$$\exp\left(\frac{i}{2\pi} F_A\right)$$

并且 $\tilde{\operatorname{Ch}}_j(A)$ 关于 $\frac{i}{2\pi} F_A$ 的形式导数为 $\tilde{\operatorname{Ch}}_{j-1}(A)$，因为 $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$。

因此我们有

$$[\operatorname{tr} Z'(A)] = [Z(A)]^{(n-1,n-1)}.$$

□

注 4.3.12. 我们不妨认为，其他规范理论方程，例如 Hermite–Einstein 方程、J-方程（以及高秩 J-方程）和 dHYM 方程，都可以写成 Z-临界方程，而稳定性条件的选择可能是退化的。此时引理 4.3.11 适用于上述每个方程，并表明，如果方程可以用陈特征表示，那么（由于 exp 形式下的陈–外表示），方程连续线性化的正性便可与关于子簇的代数几何稳定性联系起来。

设我们 现在利用 引理 4.3.11 推导出由以下条件所蕴含的稳定性判据：

次解条件。

定理 4.3.13。 假设 $E \to (X, \omega)$ 存在 Z-临界方程的次解。那么，对于 $D \subset X$ 的不可约解析除子， E 关于商对象 $E \twoheadrightarrow E \otimes \mathcal{O}_D$ 是 Z-稳定的。

证明。 设 $D \subset X$ 是 X 的不可约余维一解析子簇，且 A 是 E 上 Z-临界方程的次解。设 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 是开子集 $U \subset X$ 上的全纯函数，使得 $D|_U = \{f = 0\}$. 在光滑点 $p \in D \cap U$ 处令 $u = df \otimes \mathbf{1}_E$。次解条件推出

$$\operatorname{tr} i \left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} Z'(A)), df \otimes \mathbf{1}, d\bar{f} \otimes \mathbf{1}_E\right]_{\text{sym}} > 0$$

在 p 处。由于 $df \otimes \mathbf{1}_E$ 与其他自同态可交换，这等价于条件

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}'(A))\right) \wedge idf \wedge d\bar{f} > 0.$$

这意味着 $(n-1,\ n-1)$-形式

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}'(A))\right)$$

是 $T_p D$ 在 $p \in D$处的正体积形式。事实上，选择 U上的子流形坐标（z^1，……，z^n），使得 $z^1 = f$，然后展开

$$\alpha = \operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}'(A))\right)\Big|_U$$

在 $D \cap U$上的局部坐标（z^2，……， z^n）中，我们注意到

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}'(A))\right) \wedge idf \wedge d\bar{f} = \alpha \wedge idf \wedge d\bar{f}$$

在 U上。由于 $idf \wedge d\bar{f}$的核由坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial z^i}$（其中 $i = 2$，……， n）生成,—而 $\alpha \wedge idf \wedge df > 0$，因此我们必须有 α在这些方向上为正。该结果也可通过应用 [Dem97，第 III 章 §1（1.6）], 得到，我们在此处的情形中已经直接观察到了这一点。

利用 对 D的光滑轨迹中所有点 p ，次解条件表明我们

得到最高次形式

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\right)\Big|_D$$

在 D 的光滑轨迹上为正，并得出

$$\int_D \operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\right)\Big|_D > 0,$$

其中，积分只取决于光滑轨迹，因为该形式可以延拓，它是从 X 上全局定义的光滑形式的限制。根据引理 4.3.11，这等于

$$\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}Z_D(E)) > 0$$

当且仅当以下条件成立时才会出现

$$\operatorname{Im}\left(\frac{Z_D(E)}{Z_X(E)}\right) > 0.$$

因此， E 关于 D 是 Z-稳定的，其意义见定义 4.1.13。 □

注记 4.3.14。在 $Z = -\deg + i\,\mathrm{rk}$ 是复现 Hermite–Einstein 方程的退化中心荷的情形下，上述条件——即 $\operatorname{tr}\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\right)$ 在任意除子上限制为一个体积形式——是一个简单事实：

$$\int_D \omega^{n-1} > 0$$

对任意除子 $D \subset X$，结合 $\mathrm{rk}\, E > 0$ 这一事实。特别地，换用广义斜率来表述，这等价于以下事实：

$$\mu_Z(E) < \mu_Z(E \otimes \mathcal{O}_D) = +\infty,$$

也就是说， E 绝不会被支集位于余维一处的挠层斜率 destabilised。稍后定理 4.3.17在这种情形下将是空洞的（因为中心荷 Z 的更高阶导数将会消失），这体现为商 $E \twoheadrightarrow E \otimes \mathcal{O}_D$ 具有余维 $D \geq 2$ 的核 $F \hookrightarrow E$ 是一个秩为 $\mathrm{rk}\ F = \mathrm{rk}\, E$ 且斜率相等的相干子层，而根据

斜率稳定性的定义。

对于变形厄米杨–米尔斯方程和 J-方程，关于子簇的稳定性与次解条件之间的关系已经得到了充分理解。我们仅考虑 J-方程这一例子

$$\omega \wedge \alpha^{n-1} = c\alpha^n$$

对于一个 K¨ahler 度量 α，给定输入 ω。此时，Song–Weinkove [SW08]所确定的次解条件为

$$nc\alpha^{n-1} - (n-1)\omega \wedge \alpha^{n-2} > 0 \qquad \text{(Eq. 4.10)}$$

就（$n-1$, $n-1$）-形式而言。将 α 相对于 ω 的特征值写作λ_1，……，λ_n，则 J-方程的形式为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = nc$$

而次解条件变为

$$\sum_{i=1 i\neq j}^{n} \frac{1}{\lambda_i} < nc, \quad j = 1, \ldots, k. \qquad \text{(Eq. 4.10)}$$

可以利用 J-方程关于特征 λ_i 值的内在对称性，从次解条件 （方程 4.10）推出以下界

$$\frac{1}{\lambda_i} < \frac{nc}{n-1}$$

对所有 $i = 1$, …, n。特别是，正如 Lejmi–Sz´ekelyhidi [LS15], 这很快就推出了稳定性条件

$$\int_V c\alpha^p - p\alpha^{p-1} \wedge \omega > 0$$

对于所有 p 维子簇 $V \subset X$。[8]

对 dHYM 方程也可以进行类似的分析，其具有对称表达式

$$\sum_{i=1}^{n} \arctan(\lambda_i) = \hat{\theta},$$

前提是在超临界相位范围附近进行研究。

总之，J-方程和 dHYM 方程内在的对称性，使我们能够将仅针对某个（$n-1$, $n-1$）-形式的次解条件（如 定义 4.3.6 所述），推广为类似于定理 4.3.13 中针对所有更高余维解析子簇的稳定性判据。因而，一般而言，我们预期以下次解概念是必要的，并且比定义 4.3.6更强。

定义 4.3.15（强次解）。厄米度量 h 在 $E \to (X, \omega)$ 上是 Z-临界方程的强次解，如果

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}^{(p)}(h)) > 0$$

就所有 $p = 1, \ldots, n$ 而言，它是取值于 End E 的（$n-p$, $n-p$）-形式。这里，$\tilde{Z}^{(p)}(h)$˜表示 $Z(h)$ 关于 $iF(h)/2\pi$ 的第 p 阶形式矩阵导数。

这里称一个取值于 End E 的 $(n-p, n-p)$-形式 T 为正的，如果对于所有 $x \in X$ 以及所有非零且线性无关的 $u_1, \ldots, u_p \in T^*_{0,1}X_x \otimes$ End E_x，都有

$$\mathrm{tr}\, i^p \left[T|_x \wedge u_1^* \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_p^* \wedge u_p\right]_{\mathrm{sym}} > 0.$$

这是将$n-p, n-p$-形式的正性推广到丛的情形，见[Dem97，第 III 章 §1]。

基于上述讨论，高秩情形下的 dHYM 方程仍应具有线丛情形中的某些对称性，尽管曲率 F_A 为矩阵值会带来额外困难。尽管如此，我们还是提出一个可能

[8] Lejmi–Sz´ekelyhidi 猜想了逆命题，即这个稳定性条件蕴含次解的存在。Chen 对任意紧致 K¨ahler 流形证明了一个一致版本 [Che19]。Datar–Pingali 在射影情形下将其加强为完整猜想 [DP21]，Song 则在一般情形下证明了完整猜想 [Son20]。

非常强的猜想；我们并不认为它在逐点意义下成立，除非 Z 具有上述描述的特定对称性。

猜想 4.3.16. 高秩变形厄米杨–米尔斯方程的次解 h是强次解。

我们注意到，与 dHYM 方程的情形类似，我们或许只能期待上述猜想在某个“临界相位范围”内成立（高秩 Z-临界方程中的相位究竟意味着什么，目前尚不清楚）。

无论如何，在假设强次解条件成立后，我们可以为任意余维子簇给出定理 4.3.13的一个类似结果。

定理 4.3.17. 假设 $E \to (X, \omega)$ 存在一个 Z-临界方程的强次解。那么， E 关于所有不可约解析子簇$V \subset X$都是 Z-稳定的。

证明. 证明只需对定理 4.3.13和引理 4.3.11作直接推广，将情形扩展到高阶导数。具体而言，将引理 4.3.11~中的完全相同论证应用于 $Z(A)$ 的逐阶导数，即可推出

$$Z_V(E) = \int_V \operatorname{tr} \tilde{Z}^{(p)}(A)\Big|_V$$

其中 codim $V = p$。现在假设 A 是一个强次解，并令 f_1、……、 $f_p \in \mathcal{O}_X(U)$ 是某个开子集 $U \subset X$ 上的一组全纯函数，使得

$$D|_U = \{f_1 = \cdots = f_p = 0\}.$$

~我们对 $u_1 = df_1 \otimes \mathbf{1}_E$、……、 $u_p = df \otimes \mathbf{1}_E$应用次解条件。然后，正如在 定理 4.3.13 中那样，我们看到（$n-p$， $n-p$）-形式

$$\operatorname{tr} \operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}^{(p)}(A))$$

限制在 V 上时是正体积形式，因此

$$\int_V \operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)} \tilde{Z}^{(p)}(A)) > 0.$$

Bu根据引理 4.3.11 的类似结果，如上所述，这等价于

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}Z_V(E)) > 0$$

这等价于

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_V(E)}{Z_X(E)}\right) > 0$$

因此 E 关于 V是 Z-稳定的。 □

注记 4.3.18. 正如 Jacob–Sheu 的工作 [JS20]以及 [Che21，注记 1.10], 所指出的，在远离大体积极限且满足“较低相位”假设时，代数几何不变量所需的符号

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_V(E)}{Z_X(E)}\right)$$

在 Z-稳定性中可能会随 $V \subset X$的余维而改变。因此，我们的定义 定义 4.3.6和结果 定理 4.3.13 及 4.3.17应视为初步结果。特别是，强次解的正确定义很可能应当采用一个取决于所考察子簇余维的符号。我们注意到，在所有情况下，都要求所得 End E-值的（$n-p$, $n-p$）-形式具有非退化性，因此任何替代定义仍将蕴含 - 临界方程的椭圆性，以及（可能为负或不定的） K¨ahler 形式 Ω_Z 在 $\mathcal{A}(h)$ 上的非退化性。

我们再次预测，用于识别这些条件的恰当形式体系是导出范畴。事实上，我们注意到，在研究多项式稳定条件时， [Bay09] 被认定为有界 t-结构之心的反常层，对于给定的稳定性向量 ρ 和反常函数 p 其排列方式恰好使得心中的商对象 $\mathcal{F}$ 若对应于支集余维为p 的层，其中心荷 $Z(\mathcal{F})$ 全都落在同一个半平面内。举例来说，若对这类反常层恰当地表述 Z-临界方程，那么 Jacob–Sheu 所识别的代数不变量所需满足的符号条件应由 $(-1)^{p(d)}$确定，其中 $p(d) = -\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$是稳定性向量 ρ 对应的反常函数，适用于 Z_{dHYM}，且余维为$V = n - d$。

–

在图 4.2中，我们示意了在大体积极限之外，我们讨论过的各种解、次解和稳定性概念之间的猜想关系。图中省略了对导出范畴的提及，同时承认，要使所提出的等价关系在一般情形下成立，导出范畴不可或缺。

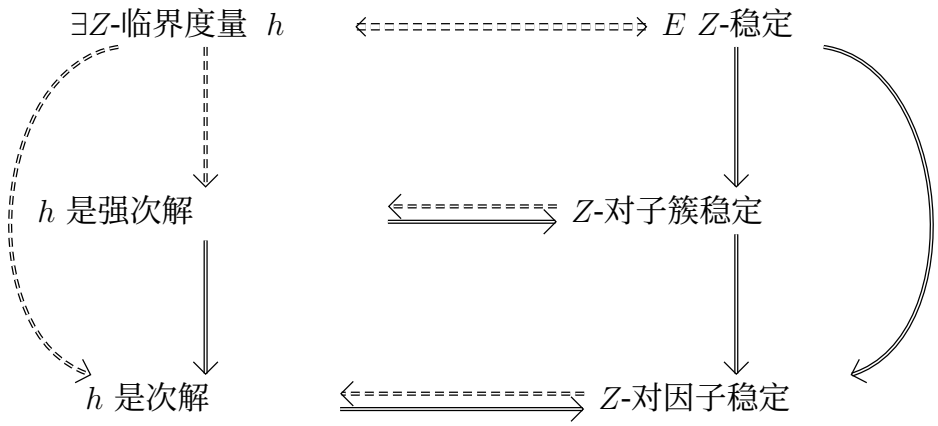


图 4.2：稳定性与解和次解之间的猜想关系。

为使后人铭记，我们特别提出与次解相关的最重要的分析猜想，见图 4.2。

猜想 4.3.19。 *Z-临界方程的一个解是强次解*.

同样，我们预期这仅在 Z-临界方程的某个临界相位范围内成立。

4.4 曲面上的存在性

远离大体积极限时，dHYM 方程或 Z-临界方程在分析上面临着显著困难。然而，对于复曲面上的线丛，该方程可以转化为 Monge–Ampère 型方程，并且利用 Yau 对 Calabi 猜想的证明，可以证明一个存在性结果。对于 dHYM 方程，这是 Jacob–Yau 的一项结果 [JY17]，我们的证明采用了类似的方法。

设 $L \to (X, \omega)$ 是紧致 K¨ahler 曲面上的全纯线丛，并记 $\alpha := \frac{i}{2\pi} F(h)$，其中 h 是 L 上的某个厄米度量。设 Z 是 (X, ω) 的多项式中心荷。其陈–韦伊代表元可写为

$$\tilde{Z}(h) = \rho_2 \omega^2 + \rho_1 \omega \wedge (\alpha + \tilde{U}_2) + \rho_0 \left(\tilde{U}_4 + 2\alpha \wedge \tilde{U}_2 + \frac{\alpha^2}{2} \right).$$

Z-临界方程针对 h 给出如下

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_1) \left([\omega]^2 \omega \wedge (\alpha + \tilde{U}_2) - (\deg L + [\omega].U_2)\omega^2 \right) \\
&\qquad + (\operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_0 - \operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_0)((U_4 + [\alpha].U_2 + \frac{[\alpha]^2}{2})\omega^2 \\
&\qquad\qquad - [\omega]^2(\tilde{U}_4 + \alpha \wedge \tilde{U}_2 + \frac{\alpha^2}{2})) \\
&\qquad + (\operatorname{Re}\rho_0 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_0 \operatorname{Re}\rho_1)((U_4 + [\alpha].U_2 + \frac{[\alpha]^2}{2})\omega \wedge (\alpha + \tilde{U}_2) \\
&\qquad\qquad - (\deg L + [\omega].U_2)(\tilde{U}_4 + \alpha \wedge \tilde{U}_2 + \frac{\alpha^2}{2})) = 0. \quad \text{(Eq. 4.11)}
\end{aligned}$$

我们将 （方程 4.11）改写为另一种形式，方法是合并 α的各次幂。将方程写成

$$a\alpha^2 + \alpha \wedge \beta + \gamma = 0 \qquad \text{(Eq. 4.12)}$$

对于某个 β 和 γ 以及常数 c。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}
a &= -(\operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_0 - \operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_0)\frac{[\omega]^2}{2} - (\operatorname{Re}\rho_0 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_0 \operatorname{Re}\rho_1)\frac{(\deg L + [\omega].U_2)}{2}. \\
\beta &= (\operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_1)[\omega]^2\omega - (\operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_0 - \operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_0)[\omega]^2\tilde{U}_2 \\
&\quad + (\operatorname{Re}\rho_0 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_0 \operatorname{Re}\rho_1) \left((U_4 + [\alpha].U_2 + \frac{[\alpha]^2}{2})\omega - (\deg L + [\omega].U_2)\tilde{U}_2 \right). \\
\gamma &= (\operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_1)([\omega]^2\omega \wedge \tilde{U}_2 - (\deg L + [\omega].U_2)\omega^2) \\
&\quad + (\operatorname{Im}\rho_2 \operatorname{Re}\rho_0 - \operatorname{Re}\rho_2 \operatorname{Im}\rho_0)((U_4 + [\alpha].U_2 + \frac{[\alpha]^2}{2})\omega^2 - [\omega]^2\tilde{U}_4) \\
&\quad + (\operatorname{Re}\rho_0 \operatorname{Im}\rho_1 - \operatorname{Im}\rho_0 \operatorname{Re}\rho_1)((U_4 + [\alpha].U_2 + \frac{[\alpha]^2}{2})\omega \wedge \tilde{U}_2 - (\deg L + [\omega].U_2)\tilde{U}_4).
\end{aligned}$$

从现在起，我们假设 $a \neq 0$。对于满足 $\rho_2 = i$、$\rho_1 = 1$、$\rho_0 = -i$ 和 $U_2 = 0$ 的 dHYM 方程，$a \neq 0$ 但 $\deg L = 0$ 的情况除外；在这种情况下，平凡度量是一个 dHYM 度量。

给定一个多项式

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

利用 $a \neq 0$，我们可以将其改写为

$$p(x) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}p'(x)\right)^2 + c - \frac{1}{4a}b^2.$$

将这一配方应用于 (方程 4.12)，我们可以将 Z-曲面上的临界方程改写为 Monge–Ampère 型方程

$$\left(a\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{1}{4}\beta^2 - a\gamma. \qquad \text{(Eq. 4.13)}$$

定义 4.4.1。 如果 $(L,\ \omega,\ U)$ 满足体积假设，则称其满足该假设，其中 $a \neq 0$ 并且

$$\frac{1}{4}\beta^2 - a\gamma > 0$$

作为 X 上的体积形式。

体积假设的重要性体现在下面的定理中。

定理 4.4.2. 设 $L \to X$ 是全纯线丛，且 Z 是一个多项式中心荷，使得(L, ω, U) 满足体积假设。则以下条件等价。

(i) L 存在一个 Z-临界度量，

(ii) L 存在一个 Z-临界方程的次解，

(iii) L 相对于解析曲线 $C \subset X$是 Z-稳定的。

证明。 Fir 首先，我们来重新表述次解条件。如果 L 存在一个解，满足

Z-临界方程，那么次解条件要求

$$2a\alpha + \beta > 0$$

以（$n-1$, $n-1$）-形式的意义而言。对于曲面上的二形式，这只要求 $a\alpha + \frac{1}{2}\beta$ 是一个 K¨ahler 形式。

现在假设 L 存在一个 Z<style id='7'}-临界度量，其曲率为 α 并满足 (方程 4.13)。定义 $\chi = a\alpha + \frac{1}{2}\beta$，则有方程

$$\chi^2 = \left(\frac{1}{4}\beta^2 - a\gamma\right)$$

根据体积假设，右侧是 X 上的正体积形式。由于 X 是复曲面，这意味着 χ 或 $-\chi$ 是 K¨ahler，因此 L 存在次解。[9] 所以 (i) 推出 (ii)。

另一方面，假设对于 L 上的某个厄米度量 h， χ 是 K¨ahler，也就是说，L 存在次解。那么根据体积假设，通过比较 X 上的体积形式，我们可以写成

$$\frac{1}{4}\beta^2 - a\gamma = e^F\chi^2$$

对于某个函数 $F\colon\ X \to \mathbb{R}$。于是 (方程 4.13) 可以改写为

$$(\chi + i\partial\overline{\partial}\phi)^2 = e^F\chi^2.$$

根据 Yau 对 Calabi 猜想的证明 [, Yau78], , 只要 e^F 的积分等于适当的常数（在此情形下，这由 Z-临界方程在上同调层面始终成立可知），该方程就有解。因此 (ii) 推出 (i)。

定理 4.3.13 表明 (ii) 蕴含 (iii)。为了推导出 Z-稳定性相对于解析曲线蕴含次解条件，我们必须应用

[9]由于多项式中心荷始终落在上半平面内， $-\chi$ 因此 ¨Kähler 的情形应由这一假设排除；不过，正如注记 4.3.18所述，对于某些中心荷的选取，应适当地反转次解条件的符号，以弥补这一差异。在这种情况下，只需将 Demailly–Păun 定理应用于 $-\chi$ 即可得出该定理成立。

Demailly–Păun 定理 [DP04], 将 Nakai–Moishezon 判别准则推广到 K¨ahler 类。在曲面的情形下，该定理指出，一个类 $[\chi]$ 在 X 上是 K¨ahler 当且仅当

$$\int_C \chi > 0$$

对所有解析曲线 $C \subset X$ 均成立。现在，若假设相对于解析曲线的 Z-稳定性，则有

$$\int_C \mathrm{Im}(e^{-i\varphi(L)}\tilde{Z}'(h)) > 0$$

对每条解析曲线 $C \subset X$ 均成立，因此 Demailly–Păun 定理断言

$$[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(L)}\tilde{Z}'(h))] = [\chi]$$

是 X 上的 K¨ahler 类。 □

注 4.4.3. 对于线丛 L 上的 dHYM 方程，体积假设自动满足，因为它等价于条件

$$(1 + (\cot(\varphi(L)))^2)\omega^2 > 0$$

如果 ω 是 K¨ahler 形式，则该条件自动成立。一般而言，体积假设是中心荷 Z 数据上的正性条件。例如，考虑在带有平凡 B场的 Calabi–Yau 曲面 X 上的情形 Z_{Td}。于是有 $\rho_2 = i, \rho_1 = 1, \rho_0 = -i$ 并且

$$U = \sqrt{\mathrm{Td}(X)} = 1 + \frac{c_2(X)}{24}.$$

条件 $a \neq 0$ 等价于

$$\deg L \neq 0.$$

该条件

$$\frac{1}{4}\beta^2 - a\gamma > 0$$

等价于一个看起来颇为繁琐的要求，即

$$\frac{1}{4}\left(\left([\omega]^2-\frac{c_2(X)}{24}+\frac{c_1(L)^2}{2}\right)^2+\frac{(\deg L)^2}{2}\right)\omega^2-\frac{(\deg L)^2}{2}\frac{\tilde{c}_2(X)}{24}>0$$

作为 X 上的一个 (2,2)-形式。事实上，对于固定的 L，我们总可以将 ω 缩放得足够大，使该形式为正。于是，定理 4.4.2 在此情形下给出了线丛上新的 Z_{Td}-临界度量实例。

4.5 矩映射

本节将展示， Z-临界方程是空间 $\mathcal{A}(h)$ 上的一个动量映射；该空间由全纯向量丛 $E\to(X,\omega)$ 上的可积酉联络构成。

回想一下，联络 A 处的 $\mathcal{A}(h)$ 的切空间由满足 $(\partial_A+a^0,1)^2=0$ 的反厄米自同态 $a\in\Omega^1(\mathrm{End}_{SH}(E,h))$ 构成。设 Z 是一个多项式中心荷，其代表数据为 ω 和 U。通过以下表达式，在 $\mathcal{A}(h)$ 上定义一个二形式

$$\Omega_Z(A)(a,b)=\int_X \mathrm{tr}\left[a,b,\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\right]_{\mathrm{sym}} \qquad \text{(Eq. 4.14)}$$

对于 $A\in\mathcal{A}(h)$， a， $b\in T_A\mathcal{A}(h)$。根据分次对称化的定义，这是一个斜双线性形式。

与 Ω_Z 相关联的是一个厄米配对。回想一下， $\mathcal{A}(h)$上定义了一个复结构J：

$$J(a)=-ia^{1,0}+ia^{0,1}$$

对于 $a\in T_A\mathcal{A}(h)=\Omega^1(\mathrm{End}_{SH}(E,h))$。二形式 Ω_Z与 J相容，具体来说， $J^*\Omega_Z=\Omega_Z$ （这可以利用 $\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}Z'(A))$ 是

[10]不过，不必一直取到大体积极限，因为[ω] 所需的大小受 L 和 X的拓扑限制。若能从曲面 X 的稳定性流形的腔室角度解释这一条件，将会很有意思。

类型 $(n-1,\ n-1)$。因此我们可以定义一个厄米配对

$$\langle a,b\rangle_A = \Omega_Z(a,J(b)) + i\Omega_Z(a,b).$$

显然可以计算得到

$$\langle a,b\rangle_A = i\int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)), a^{1,0}, b^{0,1}\right]_{\mathrm{sym}}.$$

命题 4.5.1。如果 A 是 Z-临界方程的次解，那么二形式Ω_Z 在 A处是非退化的。

证明。在 A 处的次解条件给出

$$i\operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A), u^*, u\right]_{\mathrm{sym}} > 0$$

在每个点 $p\in X$处。对其积分得到正性条件

$$i\int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A), u^*, u\right]_{\mathrm{sym}} > 0$$

对于任意非零的 $u\in\Omega^{0,1}(\mathrm{End}\,E)$。令 $u=a^{0,\ 1}$ 其中 $a\in T_A\mathcal{A}(h)$，我们得到

$$\langle a,a\rangle_A \geq 0$$

对于任意 $a\in T_A\mathcal{A}(h)$，且当且仅当 $a=0$时等号成立。因此，$\langle -,-\rangle_A$ 是 $T_A\mathcal{A}(h)$ 上的正定厄米内积，从而其虚部 Ω_Z 是一个非退化二形式。

□

我们将 $\mathcal{A}(h)^Z\subset\mathcal{A}(h)$ 记为 Z-临界方程的次解集；由于次解条件是一个开条件，该集合是开集。于是，命题 4.5.1 断言 $\mathcal{A}(h)^Z$ 是一个无限维厄米流形。注意，该集合在复规范群 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 的作用下保持不变（利用迹的存在性，根据次解的定义即可轻易验证这一点）。现在我们将证明，Ω_Z 实际上是 $\mathcal{G}(h)$-不变的闭形式，定义在 $\mathcal{A}(h)^Z$ 上，因此 $\mathcal{A}(h)^Z$ 是一个无限维 K¨ahler 流形。事实上，在接下来的推导中，

无需将讨论限制在次解集上；Ω_Z 在整个 $\mathcal{A}(h)$ 上都是闭的且具有 $\mathcal{G}(h)$-不变性。

命题 4.5.2. 二形式 Ω_Z 是闭的，并且在 $\mathcal{A}(h)$ 上具有 $\mathcal{G}(h)$-不变性。因此，它是 $\mathcal{A}(h)^Z$ 上的 *Kähler* 形式。

证明。 $\mathcal{G}(h)$-不变性 Ω_Z 显然是由 (Eq. 4.14)中的迹项保证的。事实上，若 $g \in \mathcal{G}(h)$，则

$$g^*\Omega_Z(A)(a,b) = \Omega_Z(g\cdot A)(\mathrm{Ad}(g)a, \mathrm{Ad}(g)b)$$

并且利用酉规范变换满足以下性质这一事实:

$$F_{g\cdot A} = gF_Ag^{-1}$$

and

$$\mathrm{Ad}(g)a = gag^{-1}$$

then

$$g^*\Omega_Z(A)(a,b) = \int_X \mathrm{tr}\, g\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A), a, b\right]_{\mathrm{sym}} g^{-1} = \Omega_Z(A)(a,b).$$

我们将在所有酉联络构成的空间中验证 Ω_Z 的闭性，其中 h。特别地，我们考虑向量场 a、b、$c \in \Gamma(T\mathcal{A}(h))$，它们相对于 $A \in \mathcal{A}(h)$ 是常数。因此，李括号均为零:

$$[a,b] = [a,c] = [b,c] = 0.$$

为了证明 Ω_Z 的闭性，我们将证明

$$(d\Omega_Z)(A)(a,b,c) = 0.$$

由于李括号消失，我们必须验证

$$(d\Omega_Z)(A)(a,b,c) = d(\Omega_Z(A)(b,c))(a) - d(\Omega_Z(A)(a,c))(b) + d(\Omega_Z(A)(a,b))(c) = 0.$$

为了沿着 a 的方向对 F_A 求导，我们取常值路径 $A+ta$。于是曲率变换为

$$F_{A+ta} = F_A + td_A(a) + t^2 a \wedge a$$

因此，曲率线性化为 $d_A(a)$。特别地，例如在 $d(\Omega_Z(A)(b,\ c))(a)$ 中的任意一项都具有如下形式

$$\int_X \operatorname{tr}\left[\omega^{n-j-k} \wedge \tilde{U}_k \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F_A\right)^{j-2} \wedge \frac{i}{2\pi} d_A(a) \wedge b \wedge c\right]_{\text{sym}}.$$

将此表达式按分次对称化的符号规则，对 $\{a,b,c\}$ 的所有循环置换求和，得到

$$d(\Omega_Z)(A)(a,b,c) = \frac{i}{2\pi}\int_X \operatorname{tr} d_A\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}^{(2)}(A), a, b, c\right]_{\text{sym}}$$

其中，$\tilde{Z}^{(2)}(A)$ 是 $\tilde{Z}(A)$ 关于 $iF_A/2\pi$ 的二阶形式导数。这里~我们用到了比安基恒等式 $d_A F_A = 0$，以及 ω 和 U 的闭性。

现在，由于 tr $d_A = d$tr，斯托克斯定理推出

$$d(\Omega_Z)(A)(a,b,c) = 0$$

因此 Ω 是闭的。 □

注 4.5.3. 命题 4.5.2 清楚地表明，在研究定义 4.3.1中的次解时，引入分次对称化是必要的。Leung 关于第 2.2.2.3 节中所述近似 Hermite–Einstein 方程的动量映射的工作，也清楚地展现了这种对称化的必要性。事实上，在那种情形下，也可以利用相应的辛形式是定义在 $\mathcal{A}$(h上的万有行列式线丛上的某个联络的曲率这一点，证明它的闭性；而这种对称化体现在万有联络的曲率公式中。

我们将 现在说明，Z-临界方程是作用的动量映射

该作用由 $\mathscr{G}(h)$ 作用在 $\mathcal{A}(h)^Z$ 上，并且相对于 K¨ahler 形式 Ω_Z而言。通常会通过非退化配对，形式上将李代数 $\mathscr{G}(h) \cong \mathrm{End}_{SH}(E, h)$ 的对偶空间与 $\Omega^{n,n}(\mathrm{End}_{SH}(E, h))$ 识别为同一空间

$$(\phi, \psi) \mapsto -\int_X \operatorname{tr} \phi\psi. \tag{Eq. 4.15}$$

定理 4.5.4. 映射

$$\begin{aligned} D_Z : \mathcal{A}(h)^Z &\to \Omega^{n,n}(\mathrm{End}_{SH}(E, h)) \\ A &\mapsto 2\pi i \operatorname{Im}(e^{-\varphi(E)} \tilde{Z}(A)) \end{aligned}$$

是 $\mathcal{G}(h)$ 在 $(\mathcal{A}(h)^Z, \Omega_Z)$ 上作用的动量映射。

证明。 证明是对线丛上 dHYM 方程的 Collins–Yau 动量映射 [CY21, §2] 以及 Leung 关于近似 HE 方程是动量映射的证明 [Leu98, §3]。令 $\phi \in \mathrm{Lie}\,\mathscr{G}(h)$ 是 E的一个反厄米自同态。于是，通过对 $\mathcal{G}(h)$ 在 $\mathcal{A}(h)$ 上的作用求导得到无穷小作用（见 (Eq. 2.3)），相应的诱导向量场为 $d_A\phi$。我们要验证动量映射恒等式

$$d(D_Z, \phi)(A)(b) = -\Omega_Z(A)(d_A\phi, b)$$

对任意 $b \in T_A\mathcal{A}(h)$ 均成立。右侧计算如下：

$$\begin{aligned} \Omega_Z(d_A\phi, b) &= \int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)) \wedge d_A\phi \wedge b\right]_{\mathrm{sym}} \\ &= -\int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\phi \wedge d_A b\right]_{\mathrm{sym}} \end{aligned}$$

利用分部积分。具体而言，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X d \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A) \wedge \phi b\right]_{\mathrm{sym}} \\ &= \int_X \operatorname{tr} d_A\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A) \wedge \phi b\right]_{\mathrm{sym}} \\ &= \int_X \operatorname{tr}\left[d_A\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)\right) \wedge \phi b\right]_{\mathrm{sym}} + \int_X \operatorname{tr}\left[\left(\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)\right) \wedge d_A(\phi b)\right]_{\mathrm{sym}} \end{aligned}$$

$$= \int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)) \wedge d_A\phi \wedge b\right]_{\mathrm{sym}} + \int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))\phi \wedge d_A b\right]_{\mathrm{sym}}$$

其中，第一步用到了斯托克斯定理，第二步用到了 $\operatorname{tr} d_A = d\operatorname{tr}$，第三步对 d_A 使用乘积法则，并结合比安基恒等式 $d_A F_A = 0$ 以及 ω 和 $\tilde{U}$ 的闭性（针对 $\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A))$ 中出现的每一项），最后一步用到了乘积法则 $d_A(\phi b) = d_A(\phi) \wedge b + \phi \wedge d_A(b)$。

现在回想一下，若 F_A 是曲率形式，那么沿切向量 b 方向，曲率的变换为 $F_{A+tb} = F_A + t d_A(b) + t^2 b \wedge b$。特别地，仿照 命题 4.5.2 计算左端的外微分，并使用我们的非退化配对 (式 4.15)，得到

$$\begin{aligned} d(D_Z, \phi)(A)(b) &= -2\pi i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_X \operatorname{tr} \operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A+tb))\phi \\ &= -2\pi i \int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)) \wedge \frac{i}{2\pi} d_A b\right]_{\mathrm{sym}} \phi \\ &= \int_X \operatorname{tr}\left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)) \wedge d_A b \phi\right]_{\mathrm{sym}}. \end{aligned}$$

因此我们有

$$d(D_Z, \phi)(A)(b) = -\Omega_Z(d_A\phi, b)$$

正如所需。 $\mathcal{G}(h)$-等变性显而易见，其证明与 D_Z 中关于 Ω 的 $\mathcal{G}(h)$-不变性的计算类似$_Z$，见 命题 4.5.2。 □

注记 4.5.5。 注意，定理定理 4.5.4的证明并未用到次解条件。特别是，对于可能退化的形式 Ω，动量映射条件在整个 $\mathcal{A}(h)$ 上仍形式上成立$_Z$。也就是说，形式 $\Omega_Z - D_Z$ 在$\mathcal{G}(h$上是等变闭的 $\mathcal{A}(h)$。

注记 4.5.6。 这种动量映射形式即使在具有非零 B场的线丛上的 dHYM 情形中也是新的。Collins–Yau 的动量映射形式只考虑了 $\alpha = \frac{i}{2\pi} F(h)$ 上的 dHYM 情形，不过其中的计算很容易扩展到包含非零 B场的情形。

注记 4.5.7。 Thomas 预言了向量丛上的规范理论方程 $f(F_A) = 0$ 的这种形式的矩映射判据 [HKK+03，方程 38。11]。

4.5.1 变分泛函

正如我们在第 2 章 中所观察到的，与矩映射形式相关联的是一个 Kempf–Ness 型泛函 $\mathcal{M}$，它通过一阶变分形式化地定义。让我们推导出 Z-临界方程作为动量映射时的 Kempf–Ness 泛函。

现在，我们在 $\mathcal{A}(h)$ 内一个固定的复规范轨道中进行研究，并采用固定 $E \to (X, \omega)$ 上全纯结构、改变厄米度量h的观点。首先，我们定义一个以一对厄米度量为自变量的泛函 $\mathcal{M}(h, h')$。为此，取 Z-临界算子 $D_Z(h)$，并将任意形式

$$\gamma \wedge \left(\frac{i}{2\pi} F(h)\right)^k$$

with

$$\gamma \wedge R_{k+1}(h, h')$$

其中 $R_k(h, h') \in \Omega^{k-1,\, k-1}$ 是第 k 个 Bott–Chern 形式（例如参见 [Don85, §1.2] 或 [Kob87, §6.3]）。我们将形如 $\gamma \otimes \mathbf{1}_E$的项解释为 $\gamma \wedge \left(\frac{i}{2\pi} F(h)\right)^0$。回忆一下，Bott–Chern 形式具有以下特征：

(i) $R_k(h, h) = 0$ 和 $R_k(h, h') + R_k(h', h'') = R_k(h, h'')$, (ii) $\frac{d}{dt} R_k(h_t, h') = \left[h_t^{-1} \partial_t h_t \left(\frac{i}{2\pi} F(h_t)\right)^{k-1}\right]_{\mathrm{sym}}$, (iii) $i\partial\bar{\partial} R_k(h, h') = \left(\frac{i}{2\pi} F(h)\right)^k - \left(\frac{i}{2\pi} F(h')\right)^k$。

将所得表达式记为 $\mathcal{M}_Z(h, h')$，并定义一个泛函

$$\mathcal{M}_Z(h, h') := \int_X \operatorname{tr} \tilde{\mathcal{M}}_Z(h, h').$$

定理 4.5.8。固定一个参考度量 h。那么，h 是 $\mathcal{M}_Z(h, h)$ 的临界点，当且仅当它是 Z-临界的。

证明。设 h_t 是 E 上一族满足 $h_0 = h$ 的厄米度量，并计算一阶变分

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(h_t, \tilde{h}) = \int_X \operatorname{tr}\left(h_t^{-1} \partial_t h_t \circ D_Z(h_t)\right).$$

在 $t = 0$ 附近，我们可以考虑路径 $h_t = \exp(tV) \cdot h$，此时 $h_t^{-1}\partial_t h_t = V$。利用迹配对的非退化性，我们可以看到，当且仅当 $D_Z(h) = 0$ 时，对于所有此类 V，一阶变分都为零。 □

定理 4.5.9. 泛函 $\mathcal{M}_Z$ 沿着次解到 Z-临界方程的轨迹 $\mathrm{Herm}(E)^Z \subset \mathrm{Herm}(E)$ 上的测地线是凸的。

证明. 度量路径 h_t 在 $\mathcal{A}(h)$ 中为测地线的条件是 $\partial_t(h_t^{-1}\partial_t h_t) = 0$（见 [Kob87，方程 6.1。11]）。特别注意，对于 $h_t = \exp(tV) \cdot h$，该条件成立；事实上，所有测地线在局部都具有这种形式。我们需要计算二阶变分

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{M}(h_t, \tilde{h}).$$

根据 定理 4.5.8 中的表达式，以及将测地线条件应用于 $h_t = \exp(tV) \cdot h$，可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{M}(h_t, \tilde{h}) &= \int_X \operatorname{tr} V \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(h)) \wedge \frac{i}{2\pi}\overline{\partial}\partial_h V\right]_{\mathrm{sym}} \\ &= \int_X \operatorname{tr} \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(h)) \wedge \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial}\partial_h V)V\right]_{\mathrm{sym}}.\end{aligned}$$

这里用到了度量改变时曲率的线性化，该线性化在 引理 2.2.22 中给出，并自然地产生次解表达式，正如 第 4.3 节所述。分部积分后可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{M}(h_t, \tilde{h}) &= \int_X \operatorname{tr} \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(h)) \wedge \frac{i}{2\pi}(\partial_h V) \wedge \overline{\partial}V\right]_{\mathrm{sym}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_X \operatorname{tr} \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(h)) \wedge i(\partial_h V)^* \wedge \overline{\partial}V\right]_{\mathrm{sym}} \\ &> 0\end{aligned}$$

其中我们令 $u = \partial V$，并利用了这一事实：由于 V 是厄米的，$(\partial_h V)^* = \partial V$；最后，利用假设 $h \in \mathrm{Herm}(E)^Z$ 是一个次解，得到严格正性。[11]

□

[11] 注意 这个表达式恰好是 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以厄米配对 $\langle -, - \rangle_Z$ 的范数 $\|\partial_h V\|_Z^2$

此前，dHYM 方程中曾出现过一个形式类似的泛函，由 Collins–Yau 引入 [CY21]。他们将其称为复化 ***Calabi–Yau*** 泛函$\mathrm{CY}_{\mathbb{C}}$，其定义为一阶变分

$$d\mathrm{CY}_{\mathbb{C}}(\varphi)(\psi) = \int_X \psi(\omega + i(\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi))^n$$

其中 α 是某个闭实 (1,1)-形式，且 φ, ψ 是 (X, ω) 上的光滑函数。事实上，我们注意到，对于线丛 $L \to X$ 上的一对厄米度量 h, h'，Bott–Chern 类的性质 (iii) 表明，例如，$R_1(h, h') = \varphi$，其中 $F(h') = F(h) - 2\pi\partial\partial\varphi$。事实上，将 $\alpha = F(h)$ 替换为某个参考度量 h，我们看到，当 $Z = Z_{\mathrm{dHYM}}$ 是线丛上的 dHYM 中心荷时，$\mathcal{M}_Z$ 便还原为 $\mathrm{CY}_{\mathbb{C}}$。

Jacob–Yau 早先提出了另一种变分框架 [JY17]（另见 [CY21，§2]以了解更多讨论），其中指出 dHYM 度量是泛函的绝对极小值点

$$V(\alpha) = \int_X |\tilde{Z}_{\mathrm{dHYM}}(\alpha)|.$$

˜也就是说，dHYM 度量定义了具有常相位角的形式 $Z(\alpha)$，并使相应的径向范数达到极小值。泛函 V 是“杨–米尔斯泛函”，相较之下，$\mathcal{M}_Z$ 是该问题的“Donaldson 泛函”。

一般而言，可以如下定义“Z-杨–米尔斯”泛函。

定义 4.5.10。设 Z 为多项式中心荷，并固定代表数据ω，$\tilde{U}$。设 A 为陈联络，并记 $\tilde{Z}(A) = \zeta^{\frac{\omega^n}{n}!}$ 为一个端omorphism$\zeta \in \Gamma(\mathrm{End}\, E)$。定义 Z-杨–米尔斯泛函如下：

$$Z\,\mathrm{YM}(A) = \int_X |\zeta(A)|^2 \frac{\omega^n}{n!}$$

其中我们在自同态上使用迹配对 $\langle \zeta, \xi \rangle = \mathrm{tr}(\zeta\xi^*)$。

定义于第 4.5 节，它在次解构成的轨迹上非退化。

定理 4.5.11。 复数域 A 中的 $\mathcal{A}(h)$ 陈联络是 Z杨–米尔斯 泛函的极小值，当且仅当它是 Z-临界的，并且

$$\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A)) = \lambda \mathbf{1}_E \otimes \omega^n \tag{Eq. 4.16}$$

对于某个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$。在 Z-几乎经校准的联络 $\lambda > 0$ 的轨迹上。

证明。 首先注意到，我们有

$$Z\,\mathrm{YM}(A) = \int_X |\zeta(A)|^2 \frac{\omega^n}{n!} = \int_X |e^{-i\varphi(E)}\zeta(A)|^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

现在将 $e^{-i\varphi(E)}\zeta =$实部$(e^{-i\varphi(E)}\zeta) + i$虚部$(e^{-i\varphi(E)}\zeta)$ 分解，并考虑不等式

$$0 \leq \int_X |e^{-i\varphi(E)}\zeta - \mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)|^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

那么在右侧，我们有

$$Z\,\mathrm{YM}(A) + \|\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\|^2 - \langle e^{-i\varphi(E)}\zeta, \mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\rangle - \langle \mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta), e^{-i\varphi(E)}\zeta\rangle$$

展开内积并利用半双线性性质后，可化简为

$$Z\,\mathrm{YM}(A) - \|\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\|^2$$

因此我们得到不等式

$$\|\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\|^2 \leq Z\,\mathrm{YM}(A)$$

当且仅当 A 满足 Im$(e^{-i\varphi(E)}\zeta) = 0$时等号成立，也就是说，当 A 是 Z-临界的。现在利用 Re$(e^{-i\varphi(E)}\zeta)$ 关于 h是厄米的这一事实，并应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\left|\int_X \mathrm{tr}\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\frac{\omega^n}{n!}\right|^2 = |\langle \mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta), \mathbf{1}_E\rangle|^2 \leq \mathrm{rk}(E)\,\mathrm{vol}(X)\|\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)\|^2.$$

因此我们得到拓扑界

$$\frac{\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}Z(E))^2}{\mathrm{rk}(E)\,\mathrm{vol}(X)} \leq Z\,\mathrm{YM}(A)$$

当且仅当 A 是 Z-临界的，且 $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\zeta)$ 是$\mathbf{1}_E$的常数倍时，等号成立。[12]

□

注 4.5.12. 上述定理表明， Z-临界联络的定义可以修改为在$e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A)$的实部上加入更强的爱因斯坦型条件。注意，在线丛的情形下，由于秩为一，这第二个方程自动由 dHYM 方程推出，因此，例如，Jacob–Yau 在分析 dHYM 方程的 Z杨–米尔斯泛函 [JY17]的极小值时，并未涉及这一条件。

值得探究的是，在第5章大体积极限中证明解存在时，若采用更仔细的扰动论证，能否找到满足这一更强方程组的解。我们预计，这需要更深入地理解求解 Z-临界方程时引入的误差，以及这些误差如何改变 $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A))$的表达式。例如，注意到在 k 主阶上，它是 $\mathbf{1}_E$的常数倍；在次主阶上，它是 Hermite–Einstein 方程的常数倍。因此， Z-临界方程的近似解也是(方程 4.16)的二阶近似解。如果能够改进这样的近似解（或者由于 Z-临界方程的结构，它显然就是更高阶的近似解），那么类似的扰动论证或许能够求解这个更强的方程组。

注 4.5.13。 注意，在 定理4.5.4中矩映射判据的证明里，同样可以考虑“复动量映射”

$$\mu : A \mapsto e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}(A)$$

[12]读者或许可以思考一下，当 $Z(E) =-$ 度数 $E + i$ 秩 E 时这个不等式的情形；此时， Z杨–米尔斯泛函本质上是 $1 + \mathrm{YM}(A)$，而左侧的下界本质上是 $1 +$ 度数 E^2 秩 E。因此，我们得到了杨–米尔斯泛函的传统下界 [Kob87, 定理 4.3。9] 当且仅当联络是厄米杨-米尔斯时，该下界可以取到。

其为 通常满足关于交替形式的矩条件 m

$$(a,b)\mapsto \int_X \operatorname{tr}\left[a,b,e^{-i\varphi(E)}\tilde{Z}'(A)\right]_{\mathrm{sym}}.$$

这表示杨–米尔斯泛函和 Atiyah–Bott 辛结构的“复化 K¨ahler 几何”升级，第2.2节，特别是我们注意到

$$Z\,\mathrm{YM}=\|\mu\|^2$$

而且我们本质上取了这个复矩映射的“虚部”（见定理 4.5.4）。如果能够从复化 K¨ahler 几何的角度进一步研究杨–米尔斯泛函，从而在复化背景下获得许多关于 YM 的有趣事实的类似结果，那将是很有意义的。

4.6 未来方向

本节将讨论研究Z-临界度量时的一些未来研究方向。

4.6.1 因 Freed–Kapustin–Witten反常而作的修正

本节将讨论猜想 1.2 的一个反例，该反例涉及 dHYM 方程与 Bridgeland 稳定性，由 Collins–Shi [CS19]发现。我们将探讨，物理学文献中提出的对稳定性条件所作的修正，似乎如何解决了这一反例。

回顾一下，远离大体积极限时， Z-临界方程的解的存在性会同时受到子丛和子簇的阻碍。根据 Bridgeland 稳定性的预测，这种阻碍会通过如下形式的破坏稳定性的商对象表现出来：

$$E\to E\otimes\mathcal{O}_V$$

其中 $V \subset X$ 是 X 的真子簇，或者更一般地，是商对象

$$E \to F$$

其中 F 是一个挠相干层。

相应地，回顾猜想 3.3.2及其在超临界相中的解决定理 3.3.4从子簇给出一个代数几何稳定性条件，它等价于线丛上存在 dHYM 度量。然而，Collins–Shi 给出了一个明确的反例，推翻了猜想 1.2在 $\mathrm{Bl}_p \mathbb{CP}^2$上，一个线丛 L 关于例 4.1.20中所述的 dHYM 稳定性条件是 Bridgeland 稳定的，但它不满足 dHYM 方程 [CS19] 的解。具体而言，线丛 L 不满足与 dHYM 方程等价的代数几何稳定性条件；该条件取决于不变量 $Z_C(L)$，但却是Bridgeland 稳定的，特别是满足关于商对象的稳定性 $L \to L \otimes \mathcal{O}_C$ 对于解析曲线 $C \subset \mathrm{Bl}_p \mathbb{CP}^2$。

这一差异的关键在于代数不变量

$$Z_V(L) := -\int_V e^{-i\omega} \operatorname{Ch}(L) \text{ and } Z_X(L \otimes \mathcal{O}_V) := -\int_X e^{-i\omega} \operatorname{Ch}(L \otimes \mathcal{O}_V)$$

并不相同。事实上，根据黎曼–罗赫定理，可以很容易地计算出它们的差异，如下所示。

引理 4.6.1. 设 $\iota : C \subset X$ 是曲面 X中的一条光滑曲线。那么

$$\operatorname{Ch}(\iota_* \mathcal{O}_C) = \iota_* \left(1 - \frac{c_1(K_C \otimes K_X|_C^*)}{2}\right).$$

证明。 注意，根据格洛腾迪克–黎曼–罗赫公式（该公式也适用于非射影紧复流形），由 [AH62], 对于嵌入 ι我们有

$$\operatorname{Ch}(\iota_* \mathcal{O}_C) = \iota_* (\operatorname{Td}(N_C)^{-1} \operatorname{Ch}(\mathcal{O}_C))$$

其中， N_C 是 C的法丛。回顾短正合列

$$0 \to N_C^* \to \iota^* \Omega_X \to K_C \to 0$$

对其取行列式可得

$$K_X|_C \cong N_C^* \otimes K_C$$

因此 $N_C \cong K_C \otimes K_X|_C^*$。计算 Todd 类的逆算子

$$\mathrm{Td}(N_C)^{-1} = 1 - \frac{c_1(K_C)}{2} + \frac{c_1(K_X|_C)}{2}.$$

□

根据引理，我们注意到

$$Z_X(L \otimes \mathcal{O}_C) = -\int_C e^{-i\omega}\,\mathrm{Ch}(L \otimes K_C^{-1/2} \otimes K_X|_C^{1/2})$$

因此我们看到，源自 Bridge-land 稳定性的代数不变量与 dHYM 方程之间的差异来自类 $-\frac{1}{2}(c_1(K_C) - c_1(K_X|_C))$。

物理学文献中有人提出（见 [MM97, KS02, CKS03], [Asp05, §5.4], 和 [ABC+09, §5.1.4, §5.3.3.4]），考虑 Freed–Kapustin–Witten 反常（例如见 [FW99, Kap00] 及其中的讨论），并深入理解定义相交 D-膜之间态射的 Ext 群后，位于 X 上、对应于子流形 $\iota : Y \hookrightarrow X$ 上带有 Chan–Paton丛 $E \to Y$ 的 D-膜的相干层，不应是 $\iota_* E$，而应是 $\iota_*(E \otimes K_Y^{1/2})$。

请注意，一般而言，任意$Y \subset X$ 的典范丛平方根可能并不存在。事实上，回顾自旋几何中的以下基本定理。

定理4.6.2 (例如 [Hit74])。 紧致 *Kähler* 流形 X 是自旋的，当且仅当其典范丛 K_X 存在全纯平方根。

虽然并非每个复子流形都是自旋的，但它们都是 Spin^{C}，而全纯平方根 $K_Y^{1/2}$ 作为 gerbe 存在。在这种情况下，对于存在拓扑平凡 B场时的 Freed–Witten反常，恰好断言：如果 $\mathcal{E}$ 是 X 上的一个 D-膜，其支集是子流形 Y，且在该子流形上局部自由，并且 Y 仅为 Spin^{C}，那么

存在一个扭曲丛 E'（由 gerbe 扭曲），使得

$$\iota^*\mathcal{E} = E' \otimes K_Y^{-1/2}$$

其中 $\iota^*\mathcal{E}$ 是一个正则向量丛。

这表明，为了研究 dHYM 方程或 Z-临界方程，从而获得与 Bridgeland 稳定性之间的直接对应（正如猜想 1.2 所预言的），正确的形式化方式并不是研究向量丛上的联络，而是研究由 Spin 扭曲的联络^{C} 结构，或扭曲 Dirac 算子。这些对象必须具备的关键性质是，限制到子流形上时需要进行扭曲，而该扭曲恰好引入一个 $\mathrm{Td}(N)^{-1}$ 因子，从而使由次解条件产生的自然代数几何不变量（例如 定义 4.3.6 中的不变量）与 Bridgeland 稳定性中的不变量一致。

让我们考虑流形 (X, ω) 上的局部自由层 $\mathcal{E}$ 。与 $\mathcal{E}$ 相关联的是规范“丛” $E = \mathcal{E} \otimes K_X^{-1/2}$. 。假设我们希望考虑来自商 $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_V$ 的障碍，其中某个子流形 ι 为： $V \hookrightarrow X$。那么，与 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_V$ 相对应的适当规范“丛”为 $E' = \mathcal{E} \otimes K_V^{-1/2}$ 。

因此，在对扭曲丛 $\iota^*E = E' \otimes \det N_V^{-1/2}$ 进行限制时，我们提出，这种扭曲操作是对正确的微分几何操作的首次近似，该操作能够刻画相对于商对象 $E \to E \otimes \mathcal{O}_V$ 的稳定性。为证明这一主张，请考虑以下直接的观察。

命题 4.6.3。 设 C 是 *Calabi–Yau* 曲面 X 上的一条光滑曲线， $E \to X$ 是一个向量丛。则

$$Z_C(E \otimes K_C^{-1/2}) = Z(E \otimes \mathcal{O}_C).$$

证明。 首先注意， $\mathrm{Ch}(K_C^{-1/2}) = 1 - \frac{c_1(K_C)}{2}$ 。根据前面在引理 4.6.1 中对 Todd 类的计算，可得

$$\mathrm{Ch}(K_C^{-1/2}) = \mathrm{Td}(N_C)^{-1}.$$

这意味着

$$\begin{aligned} Z(E \otimes \mathcal{O}_C) &= -\int_X e^{-i\omega} \operatorname{Ch}(E \otimes \mathcal{O}_C) \\ &= -\int_C e^{-i\omega} \operatorname{Ch}(E) \operatorname{Td}(N_C)^{-1} \\ &= -\int_C e^{-i\omega} \operatorname{Ch}(E \otimes K_C^{-1/2}) \\ &= Z_C(E \otimes K_C^{-1/2}). \end{aligned}$$

□

对卡拉比–丘三维簇进行与上述类似的计算，可得：

命题 4.6.4。 设 X 为卡拉比–丘三维簇， $C \subset X$ 为一条光滑曲线。则

$$Z_C(E \otimes K_C^{-1/2}) = Z(E \otimes \mathcal{O}_C)$$

对任意向量丛 $E \to X$，均有。

证明。 这可由对卡拉比–丘曲面上的曲线进行的相同计算得到，但此时法丛 N_C 的秩为二。不过，由于维数原因，只有行列式 $\det N_C$ 的第一陈类会参与其中，因此同样有公式 $\operatorname{Ch}(K_C^{-1/2}) = \operatorname{Td}(N_C)^{-1}$ 成立。

□

然而，在三维情形下，我们发现反常条件无法为除子导出这种匹配。这表明，要准确刻画稳定性条件，通常需要更深入地理解这些扭曲联络的限制。

命题 4.6.5。 设 X 为卡拉比–丘三维簇， $D \subset X$ 为一个除子。则

$$\operatorname{Ch}(\iota_* K_D^{1/2}) = \iota_* \left(1 + \frac{1}{24} c_1(K_S)^2\right).$$

特别是

$$Z_D(E) \neq Z(E \otimes K_D^{1/2})$$

一般而言，对于向量丛 $E \to X$。

证明。 关键在于注意到

$$\mathrm{Ch}(\iota_* K_D^{1/2}) = \iota_*(\mathrm{Td}(N_D)^{-1}\,\mathrm{Ch}(K_D^{1/2}))$$

并且可以计算出

$$\mathrm{Td}(N_D)^{-1} = 1 - \frac{c_1(K_S)}{2} + \frac{c_1(K_S)^2}{6}$$

而我们有

$$\mathrm{Ch}(K_D^{1/2}) = 1 + \frac{c_1(K_S)}{2} + \frac{c_1(K_S)^2}{8}.$$

因此我们看到

$$\iota_*(\mathrm{Td}(N_D)^{-1}\,\mathrm{Ch}(K_D^{1/2})) = \iota_*\left(1 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) c_1(K_S)^2\right).$$

□

4.6.2 范畴 K¨ahler几何

Haiden–Katzarkov–Kontsevich–Pandit 提出的一项即将发表的建议[13] （例如在 [HKKP20] 中提到）认为，可以通过导出情形下的几何不变理论类比，在导出范畴上定义 Bridgeland稳定性条件。具体而言，这一被称为“范畴 K¨ahler 几何”的方案，希望对以下内容作出解释：

- 在 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上的“丰线丛”这一范畴论概念。它应当与 Bridgeland稳定性条件这一概念本质等价。
- 在 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上的“K¨ahler 度量”这一范畴论概念。
- 对象 $\mathcal{E}$ 相对于某个条件（$Z, \mathcal{A}$）的 Bridgeland 稳定性，对应于相对于丰线丛的范畴 GIT 稳定性。

[13]作者 感谢 Pranav Pandit 向其解释了这一提案的许多方面 .

- 对于任意对象 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$，都存在一个针对范畴 K¨ahler 度量的流，它收敛到 $\mathcal{E}$ 的 Harder–Narasimhan 滤过上的一个度量。

特别是，HKKP 的设想依赖于这样一种概念：对每个对象 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$，都有一个度量空间 $\mathrm{Met}(\mathcal{E})$；最终还依赖于 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理的一种类似版本，该定理将允许几何流选出 $\mathcal{E}$ 的 Harder–Narasimhan 滤过中代数稳定的分量。

这一雄心勃勃的设想曾以初等形式在 [HKKP20]中得到研究，其中探讨了几何流如何导出半稳定对象的典范 Jordan–H¨older 滤过。具体而言，他们考察了紧黎曼曲面上的厄米杨-米尔斯流，以及箭图表示上厄米度量的流，并展示了流的渐近收敛速率如何使滤过显现出来。

U在对 HKKP 的设想作出任何合理的后续诠释时，我们不 te:

- 依赖于稳定性条件（$Z, \mathcal{A}$）的 ¨Coh(X) 上的范畴 K $\mathcal{D}^b$ähler 度量，应由 ¨在 $_Z$ 中所考虑的向量丛上的可积酉联络空间 $\mathcal{A}(h)$ 上的 K¨ähler 形式 Ω_Z 来近似 第 4.5 节。

- 范畴线丛可以按字面理解为某种 Quillen 行列式线丛 $\mathcal{L} \to \mathcal{A}(h)$，其中 Ω_Z 使得 $\Omega_Z \in c_1(\mathcal{L})$。根据稳定性条件（$Z$， $\mathcal{A}$），这种线丛通常只能是 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$-线丛，定义在 $\mathcal{A}(h)$上。

在这一背景下，对 HKKP 提出的方案进行首次验证，可以通过重复分析渐近 Z-稳定性的规范 Jordan–H¨older 滤过来完成。

4.6.3 复形上的度量与一个变分提议 l

为了建立关于导出范畴中对象的 Z-临界度量的理论，有必要为厄米度量 在对象 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 上确立一个性质良好的概念。Burgos Gil–Freixas i Montplet–Litcanu [BGFiML12]提出了这种度量的一种初步概念。[14]

[14]作者感谢 Mario Garcia-Fernandez 指引其关注这项工作 .

定义 4.6.6。一个厄米结构 h 在 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b\mathsf{Coh}(X)$ 上由 y

- 一个拟同构 $q:\ E \dashrightarrow \mathcal{E}$ 属于 $\mathcal{D}^b\mathsf{Coh}(X)$，其中 E 是一个向量丛复形，并且
- 为复形 E中的每一项 E_i 选取一个厄米度量 h_i 。

注意，当 X 是光滑射影簇时，$\mathsf{Coh}(X)$中的每个对象 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b$都允许拟同构到一个局部自由层复形，因此这类对象 X 会有许多厄米结构。

在 [BGFiML12]中，厄米结构的概念得到提升，从而为导出范畴 $\mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ 提供了一个精细化，其中包含带有厄米结构的复形，并配有良好性质的遗忘函子 $\mathfrak{F}:\ \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X) \to \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$。有必要明确这类结构的等价概念。基本上，若对象 $\mathcal{E}$ 上的两个厄米结构相差一个 微不足道的 复形，则认为它们等价；粗略来说，这种复形是一个由厄米向量丛构成的正交分裂复形。

于是可以将对象 $\mathcal{E}$ 上的厄米结构构成的“空间”识别出来。

定义 4.6.7. 定义

$$\mathrm{Met}(\mathcal{E}) := \mathfrak{F}^{-1}(\mathcal{E}) \subset \overline{\mathcal{D}^b\,\mathrm{Coh}}(X)$$

为对象 $\mathcal{E}$ 上所有厄米结构的集合。

这个空间是群 $\mathbf{KA}(X)$ 上的一个挠子，其中群的元素是模去贫复形后的厄米向量丛复形。形式上，应将其视为集合 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}(h)$ 的类似物；该集合以向量丛 E 上的厄米度量为参数。

引入 [BGFiML12] 的一个动机是定义一种博特–切恩类的概念，使其适用于向量丛复形和相干层，并可用于其他应用。

回顾一下，在第4.5.1节中，我们针对 Z-临界方程定义了一个 Kempf–Ness 型泛函，该泛函使用向量丛上陈联络的博特–切恩类，其临界点恰好是 Z-临界度量。

在 [BGFiML12] 中，可加属 φ （例如陈特征）的博特–切恩类，是针对对象 h, h' 上的一对厄米结构 $\mathcal{E}$ $\in \mathcal{D}^b\mathrm{Coh}(X)$定义的一个类

$$\tilde{\varphi}(h,h') \in \bigoplus_{n,p} \tilde{\mathcal{D}}^{n-1}(X,p)$$

在 Deligne上同调中。这样的类由一个 Bott–Chern 形式表示

$$\varphi(h,h') \in \bigoplus_{n,p} \mathcal{D}^{n-1}(X,p)$$

在微分形式的 Deligne代数中。

因此，我们利用上述形式体系，在度量空间$(\mathcal{E})$上提出一个变分泛函，其“临界点”应当是对象 $\mathcal{E}$上的 Z-临界度量。

定义4.6.8。 设$(Z,\mathcal{A})$是 $\mathcal{D}^b\,\mathrm{Coh}(X)$上的一个 Bridgeland稳定性条件，其中 X是一个射影流形，且 Z 由如下形式的多项式中心荷 Z 给出：定义4.1.3。

设 $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$，并假设 h, h'是 $\mathcal{E}$上的两个厄米结构。定义一个泛函

$$\mathcal{M}_Z(h,h') := \int_X \mathrm{tr}\,\tilde{\mathcal{M}}_Z(h,h')$$

其中，与第4.5.1节中一样，我们将 Z-临界方程中的各项替换为对应的 k复形的第 $\mathcal{E}$个陈特征的博特–切恩类。

在将这样的泛函通过复 $\mathcal{E}$的博特–切恩类解释清楚后，可以将对象 $\mathcal{E}$ 上的 Z-临界度量定义为度量空间 Met$(\mathcal{E})$ 上$\mathcal{M}_Z$ 的极小值点。

第5章

大体积极限下的对应

本章将证明我们的主要对应关系定理 1.3：大体积极限下Z-临界度量的存在等价于渐近 Z-稳定性。

本章的研究结果是与 Ruadha´ı Dervan 和 Lars Martin Sektnan [DMS21], 合作完成的；此处重现这些结果时，我们特别强调作者所作的贡献。尤其是在证明存在性蕴含稳定性时，我们将限制在半稳定向量丛的分次对象 Gr(E) 仅有两个分支的情形。相比于 $E \to X$中证明的一般结果，这是一个简化情形，[DMS21], 然而，许多技术难点已经出现在这一步中，特别是在这一情形下，渐近 Z-稳定性的重要性已经显现出来（事实上，与一般情形相比，在这个更简单的情形中，其相关性表现得更加清楚）。对于 Gr(E) 为局部自由且具有任意多个分支时完整证明的细节，请参阅我们的合作成果。本章末尾，我们将简要评论这一更一般情形中出现的困难。

5.1 存在性蕴含稳定性

本节证明，在大体积极限下，存在 Z-临界度量意味着渐近的 Z-稳定性。

定理 5.1.1. 设 $E \to (X, \omega)$ 是紧致 *Kähler* 流形上的全纯向量丛。若 E 对所有 $k \gg 0$ 都存在 Z_k-临界度量，且这些度量在 k中一致有界，则相对于全纯子丛，E 是渐近 Z-稳定的。

我们沿用规范理论中“存在性蕴含稳定性”的一般策略，利用曲率在子丛中递减这一原理。

下文将用参数$\epsilon = 1/k$ 重新表述 Z-临界方程，这样会更方便。回顾一下，我们对渐近 Z-稳定性的定义要求：对所有全纯子丛 $S \subset E$，当 $0 < \epsilon \ll 1$ 时，都有严格不等式

$$\varphi_\epsilon(S) < \varphi_\epsilon(E).$$

鉴于我们的假设 E 足够光滑，我们将范围限定为子丛而非子层是自然的；这一点也会在后续分析中自然体现。

采用新记号，以 ϵ 代替 k，我们的中心荷形式略有不同。具体而言，定义

$$\mathrm{ch}^\epsilon(E) = \sum_{j=0}^{n} \epsilon^j \,\mathrm{ch}_j(E), \quad U^\epsilon = \sum_{j=0}^{n} \epsilon^j U_j$$

这里回顾一下， U_j 指 U的 $2j$ 次分量。与输入$(\omega,\ \rho,\ U)$相关的中心荷可用 ϵ 表示为

$$Z_\epsilon(E) = \int_X \sum_{d=0}^{n} \rho_{n-d}\omega^{n-d} \cdot \mathrm{ch}^\epsilon(E) \cdot U^\epsilon,$$

并注意到我们有

$$\frac{1}{\epsilon^n} Z_\epsilon(E) = Z_k(E).$$

Z-临界方程与之前一样直接得到，并且我们看到，在 $\epsilon = 1/k$ 处，Z_k-临界方程的一个解等价于 Z_ϵ-临界方程的一个解。

注 5.1.2。 在 第 5.2 节中，我们将进行不同的代换 $\varepsilon^2 = 1/k$，这样可以避免在该论证中引入分数次幂，但在此处并非

必要。为强调参数之间的差异，我们使用记号$\epsilon = \varepsilon^2$。

本节我们将从 $E \to (X, \omega)$ 上厄米度量的角度来讨论，而非陈联络。除了假设向量丛 E 对所有 $0 < \epsilon \ll 1$ 都存在 Z_ϵ-临界度量 h_ϵ 之外，我们还在定理 5.1.1 中假设，这些度量 h_ϵ 作为张量在 C^2-范数下是一致有界的（相对于 E 上任意固定的厄米度量）。这一额外假设将在第 5.2 节中得到论证；在那里，我们将证明反向结论：渐近 Z-稳定性蕴含对所有 $0 < \epsilon \ll 1$ 都存在 Z_ϵ-临界联络。届时，度量 h_ϵ 将构造为丛 Gr(E) 上 Hermite–Einstein 度量的扰动，因此在 C^2 中，甚至在 C^∞ 中也成立一致有界性。我们采用 C^2-范数的原因如下。

引理 5.1.3。 设 h_ϵ 是全纯向量丛 E 上的一族厄米度量，相对于固定的厄米结构 h_0，其 C^2-范数一致有界，并设 $S \subset E$ 是一个全纯子丛。那么，第二基本形式 γ_ϵ 和曲率形式 F_ϵ 分别在 C^1 和 C^0 中一致有界。

证明。 这由定义直接推出。回忆一下，局部地， h_ϵ 的陈联络由下式给出

$$A_\epsilon = \partial h_\epsilon \cdot h_\epsilon^{-1},$$

而曲率由下式给出

$$F_\epsilon = dA_\epsilon + A_\epsilon \wedge A_\epsilon.$$

因此，由于 h_ε 的 C^2-范数一致有界，陈联络 A_ϵ 在 C^1 中一致有界，而曲率形式 F_ϵ 在 C^0 中一致有界。

全纯子丛 $S \subset E$ 诱导出一个短正合列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

厄米度量 h_ϵ 定义了一个依赖于 ϵ 的正交分解，将 E 分解为复向量丛的直和

$$E \cong S \oplus Q,$$

其中 $Q = E/S$。通过这个正交分解，可将联络 A_ϵ 写为

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} A_{F,\epsilon} & \gamma_\epsilon \\ -\gamma_\epsilon^* & A_{Q,\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Here

$$\gamma_\epsilon \in \Omega^{0,1}(X, \mathrm{Hom}(Q, S))$$

是子丛 F 在厄米结构 h_ϵ下的第二基本形式。因此， h_ϵ 上的一致 C^2界会导出第二基本形式 γ_ϵ的一致 C^1界。

□

现在我们可以证明本节的主要结果了。该结果运用了 Leung 在研究近似 Hermite–Einstein 度量和 Gieseker 稳定性时采用的一些技巧 [Leu97，命题 3。1]。

定理 5.1.4。假设 E 不可约且足够光滑，并且对每个$0 < \epsilon \ll 1$， E 都存在一个解 h_ϵ 满足 Z-临界方程，且度量 h_ϵ相对于某个固定的厄米度量 h_0在 C^2 中一致有界。那么E 关于全纯子丛渐近地 Z-稳定。

证明。 我们沿用 引理 5.1.3 中引入的记号。由厄米度量 ϵ所确定的依赖于参数的正交分解 $E \cong S \oplus Q$ h_ϵ 诱导出分块矩阵分解

$$A = \begin{pmatrix} A_{S,\epsilon} & \gamma_\epsilon \\ -\gamma_\epsilon^* & A_{Q,\epsilon} \end{pmatrix}, \qquad F_\epsilon = \begin{pmatrix} F_{S,\epsilon} - \gamma_\epsilon \wedge \gamma_\epsilon^* & d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon \\ -d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^* & F_{Q,\epsilon} - \gamma_\epsilon^* \wedge \gamma_\epsilon \end{pmatrix},$$

其中，如上所述， γ_ϵ 是 $F \subset E$ 的第二基本形式，而 F_ϵ 是 h_ϵ的曲率。我们固定一个参考厄米度量 h_0，用于测量所关注的各种张量的范数；根据我们关于一致有界性的假设，任意一种 h_ϵ

都足够，因为它们在取值于 End E 的张量上诱导出等价的 L^2-范数。由于我们假设 E 不可约，第二基本形式非平凡，因此

$$\|\gamma_\epsilon\| > 0.$$

根据引理 5.1.3 中得到的一致有界性，我们有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\|F_\epsilon\|_{C^0} = 0, \quad \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\|\gamma_\epsilon\|_{C^1} = 0. \tag{Eq. 5.1}$$

为了证明 E 关于 S 渐近地 Z-稳定，我们必须证明

$$\varphi_\epsilon(S) < \varphi_\epsilon(E)$$

对 所有 $0 < \epsilon \ll 1$，其中 $\varphi_\epsilon(E)$ = 辐角 $Z_\epsilon(E)$。这等价于不等式 y

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_\epsilon(S)}{Z_\epsilon(E)}\right) < 0,$$

这又等价于不等式

$$\mathrm{Im}\left(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S)\right) < 0.$$

现在，由于 h_ϵ 满足 Z_ϵ-临界方程，我们有

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}\tilde{Z}_\epsilon(h_\epsilon)) = 0$$

因此

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}\,\mathrm{tr}_S(\tilde{Z}_\epsilon(h_\epsilon))) = 0. \tag{Eq. 5.2}$$

˜这里， $Z_\epsilon(h_\epsilon)$ 是一个取值于 End(E) 的 (n,n)-形式；通过由 h_ϵ 诱导的分解 $E \cong S\oplus Q$，它限制为一个取值于 End(S) 的˜(n,n)-形式，而 $\mathrm{tr}_S(Z_\epsilon(h_\epsilon))$ 是在 X 上通过取迹得到的诱导 (n,n)-形式。特别要注意，tr_S 取决于ϵ。

我们将 我论证了，对于充分小的 ϵ，存在一个正的、依赖于 ϵ的常数

C_ϵ 使得

$$\int_X \mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}\,\mathrm{tr}_S(\tilde{Z}_\epsilon(h_\epsilon))) = \mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S)) + C_\epsilon\|\gamma_\epsilon\|^2, \qquad \text{(Eq. 5.3)}$$

由于左边根据 （方程（5.2））为零，因此这将推出结论。注意， Z_ϵ-临界方程中的首项出现在阶数 ϵ，因此常数C_ϵ 的最低阶数为 ϵ。我们先考虑阶数为 $\epsilon = \epsilon^1$ 的项。根据引理 4.2.6， Z_ϵ-临界方程的首项由弱 Hermite–Einstein 方程给出。也就是说，存在一个正常数 $c > 0$ ，使得 ϵ-展开中 Z_ϵ-临界方程的首项为

$$c\left([\omega]^n\,\mathrm{rk}(E)\omega^{n-1} \wedge \left(\frac{i}{2\pi}F_{A_\epsilon} + \tilde{U}_2\mathbf{1}_E\right) - \deg_U(E)\omega^n \otimes \mathbf{1}_E\right).$$

因此我们看到，$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_{\epsilon(E)}}\,\mathrm{tr}_S(\tilde{Z}_\epsilon(h_\epsilon)))$ 的首阶 ϵ^1 项为

$$\begin{aligned} &c\left([\omega]^n\,\mathrm{rk}(E)\cdot\left([\omega]^{n-1}.(\mathrm{ch}_1(S)+\mathrm{rk}(S)U_2) - [\omega]^{n-1}.\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}(\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*)\right)\right. \\ &\qquad\left. -\deg_U(E)\,\mathrm{rk}(S)[\omega]^n\right) \\ &= \mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S))^1 - c\frac{i}{2\pi}(\mathrm{rk}\,E)[\omega]^n\cdot[\omega]^{n-1}.[\mathrm{tr}(\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*)] \\ &= \mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S))^1 + C_1\|\gamma_\epsilon\|^2. \end{aligned}$$

这里我们用到了这样一个事实：存在正常数 C_1

$$c\omega^{n-1}\wedge\mathrm{tr}(\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*) = -2\pi i C_1|\gamma_\epsilon|^2\omega^n,$$

并且记虚部$(e^{-i\varphi_{\epsilon(E)}}Z_\epsilon(S))^1$ 表示展开中的 ϵ^1 项。这正是所需的方程(方程 5.3) 的首阶项 ϵ，其中我们注意到，$C_\epsilon = \epsilon C_1 + O(\epsilon^2)$。这里我们关键用到的是 $c > 0$，根据引理 4.2.6 可知，这源于我们的假设：虚部$(\rho_{n-1}/\rho_n) > 0$，即关于中心荷的关键稳定性向量假设 Z。有趣的是，在 ϵ 更高阶时，较低阶的不等式虚部$(\rho_{i-1}/\rho_i) > 0$ 并未参与论证，这再次印证了

这一观察：在我们的工作中，只需要这个首阶不等式 k.

现在我们将说明，在每个更高阶 ϵ^j，我们都会得到类似的展开。 Z临界方程中在阶数 ϵ^j 出现的每一项，都涉及如下形式的微分形式

$$C\epsilon^j\omega^{n-j}\wedge F_{A_\epsilon}^p\wedge\tilde{U}_{j-p} \tag{Eq. 5.4}$$

其中 p 可以介于 0 和 j 之间， C 是某个与 ϵ 无关的常数。

首先注意，如果 $p=0$，那么这一项与子丛S 无关，也不受我们在$_S$ 中取迹的影响（方程（5.2））， 因此积分后可并入Im($e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S))^j$ ， 即（方程（5.3））右端的项。

现在，若 $p>0$，我们需要理解曲率项乘积的分块矩阵分解

$$\begin{aligned}&\underbrace{F_{A_\epsilon}\wedge\cdots\wedge F_{A_\epsilon}}_{p\text{ times}}\\&=\begin{pmatrix}F_{S,\epsilon}-\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^* & d_A\gamma_\epsilon\\ -d_A\gamma_\epsilon^* & F_{Q,\epsilon}-\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon\end{pmatrix}\underbrace{\wedge\cdots\wedge}_{p\text{ times}}\begin{pmatrix}F_{S,\epsilon}-\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^* & d_A\gamma_\epsilon\\ -d_A\gamma_\epsilon^* & F_{Q,\epsilon}-\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{Eq. 5.5}$$

我们将关注这一矩阵分解中左上方块内各项的 tr_S。一般而言，这将涉及如下形式的一项

$$F_{S_\epsilon}\underbrace{\wedge\cdots\wedge}_{p\text{ times}}F_{S,\epsilon},$$

在取迹$_S$ 并如（方程（5.4））所示与微分形式作楔积后再积分，即可得到Im($e^{-i\varphi_\epsilon}Z_\epsilon(S))^j$ 在（方程（5.3））中所需的因子，即

$$\int_X C\epsilon^j\omega^{n-j}\wedge\mathrm{tr}_S\,F_{S_\epsilon}^p\wedge\tilde{U}_{j-p}.$$

除了这个所需项之外，我们还会得到其他项，它们都至少包含以下各项之一

$$\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon,\quad \gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*,\quad d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon,\quad d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^*,\quad F_{Q,\epsilon} \tag{Eq. 5.6}$$

以及 $F_{S,\epsilon}$ 的某些可能因子。我们希望证明，无论得到什么包含这些项的乘积，相应的形式都可以吸收到 $C_\epsilon\|\gamma\|^2\omega^n$ 中的（式 5.3），再取迹并积分。

在阶数 ϵ^j 且微分形式形如(式 5.4)时，我们的曲率分量由下列清单中的 p 项(式 5.6) 的乘积构成，其中 p 至多为 j。沿用 Leung 的记号，我们将这样的乘积记为 $\mathcal{T}_p$，因此我们关心的形式为

$$\omega^{n-d}\wedge\mathcal{T}_p\wedge\tilde{U}_{j-p}.$$

我们将证明，只要 ϵ 足够小，任何这样的形式的范数都远小于 $C_1\epsilon\|\gamma_\epsilon\|^2$ 中出现的(式 5.3)，因此可以将其吸收到这一项中，同时保持 $C_\epsilon\|\gamma\|^2$的正性。需要考虑三种情形。

(i) $\mathcal{T}_p$ 包含 $\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon$ 或 $\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*$:

首先注意，由一致估计(式 5.1)可知，ϵ 乘以清单(式 5.6)中的任意一项，或形如 $F_{S,\epsilon}$，$F_{Q,\epsilon}$ 的项，当 $\epsilon\to 0$时都趋于零。因此，如果乘积 $\mathcal{T}_p$中有形如 $\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon$ 或 $\gamma_\epsilon\wedge\gamma_\epsilon^*$的项，我们就得到如下表达式

$$\pm\epsilon^j\omega^{n-j}\wedge\mathcal{T}'_{p-1}\wedge\tilde{U}_{j-p}\wedge\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon$$

其中，$\mathcal{T}'_{p-1}$ 由 $\mathcal{T}_p$中的其余 $p-1$ 因子构成，而符号取决于楔积项中 γ_ϵ 或 γ_ϵ^* 的排列顺序。但我们可以将其改写为

$$\pm\omega^{n-j}\wedge\epsilon^{p-1}\mathcal{T}'_{p-1}\wedge\epsilon^{j-p}\tilde{U}_{j-p}\wedge\epsilon\gamma_\epsilon^*\wedge\gamma_\epsilon.$$

根据我们最初的观察，当 $\epsilon\to 0$时，$\epsilon^{p-1}\mathcal{T}'_{p-1}$ 趋于零，因此对于足够小的 ϵ，我们可以估计（对 X取迹并积分后），

$$\|\omega^{n-j}\wedge\mathcal{T}_p\wedge\tilde{U}_{j-p}\|\le c_\epsilon\epsilon\|\gamma_\epsilon\|^2$$

其中，常数 c_ϵ 取决于我们的因子 $\epsilon^{p-1}\mathcal{T}'_{p-1}$；只要令 ϵ 足够小，它就可以任意小。因此，当 ϵ 足够小时，这样一项相对于 $C_1\epsilon\|\gamma_\epsilon\|^2$ 而言在范数意义下足够小，正如所需。

(ii) $\mathcal{T}_p$ 包含 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon$ 或 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^*$:

如果乘积 $\mathcal{T}_p$中没有 $\gamma_\epsilon^* \wedge \gamma_\epsilon$或 $\gamma_\epsilon \wedge \gamma_\epsilon^*$项，但存在形如 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon$ 或 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^*$的项，那么在计算 (公式 5.3)时，我们可以分部积分。这会将 d_{A_ϵ} 转移到微分形式中出现的其他项上。

$$\omega^{n-j} \wedge \mathcal{T}_p \wedge \tilde{U}_{j-p}.$$

利用外协变导数 d_{A_ϵ} 的莱布尼茨法则，我们可以分情况处理各种可能性。如果将 d_{A_ϵ} 作用于一个形如 F_S 或 F_Q 的项（分部积分之后），或作用于形式 $\tilde{U}_{j-p}$ 或 ω^{n-j}，那么根据 Bianchi˜恒等映射 $d_{A_\epsilon}F_\epsilon = 0$ 或 ω 和 U 的闭性，这些项都会消失。

因此，唯一不会消失的可能情形是：分部积分后，d_{A_ϵ} 作用于一个形如 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon$ 或 $d_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^*$ 的项。现在我们回想，事实上 $d_{A_\epsilon}\gamma = \partial_{A_\epsilon}\gamma$，类似地 $d_{A_\epsilon}\gamma^* = \partial_{A_\epsilon}\gamma^*$。因此，例如，如果我们从 $\partial_{A_\epsilon}\gamma$ 开始，并且我们的乘积 $\mathcal{T}_p$ 还包含另一项 $\partial_{A_\epsilon}\gamma$，那么分部积分后会得到 $\gamma \wedge \partial_{A_\epsilon}^2\gamma = 0$；当我们有 $\partial_{A_\epsilon}\gamma^*$ 时，情况也类似。因此，我们只需考虑这样一种情形：分部积分后，我们的乘积中有一个因子 $\gamma \wedge \partial_{A_\epsilon}\partial_{A_\epsilon}\gamma^*$ 或 $\gamma^* \wedge \partial_{A_\epsilon}\partial_{A_\epsilon}\gamma$。

利用 $\partial_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon = \partial_{A_\epsilon}\gamma_\epsilon^* = 0$ 这一事实，以及 $F_{A_\epsilon} \wedge \gamma_\epsilon = d_A^2\gamma_\epsilon = (\partial_{A_\epsilon}\partial_{A_\epsilon} + \partial_{A_\epsilon}\partial_{A_\epsilon})\gamma_\epsilon$，因此我们会得到更多涉及 $\gamma_\epsilon^* \wedge \gamma_\epsilon$ 或 $\gamma_\epsilon \wedge \gamma_\epsilon^*$ 的曲率楔积项。这使我们回到上面已经处理过的情形，因此这种情况下的证明就完成了。

(iii) $\mathcal{T}_p$ 不含带有 γ_ϵ 的项:

当没有出现 γ_ϵ 项时，由分块矩阵分解可知，可能出现的非零项只有 $F_{S,\epsilon}$ 或 $F_{Q,\epsilon}$ 的 p 重乘积。后者的 tr_S 为零，而前者已计入，贡献于 $\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon}Z_\epsilon(S))^j$.

这表明，对于曲率部分由乘积 $\mathcal{T}_p$ 给出的每个形式，只要我们将 $\epsilon > 0$ 取得足够小，它相对于 $C_1\epsilon\|\gamma_\epsilon\|^2$ 的范数就非常小。因此

(Eq. 5.3)成立，并且由于左边为零，对于如此小的 ϵ 我们有

$$\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\epsilon(E)}Z_\epsilon(S)) < 0$$

因此， E 相对于子丛 S渐近地 Z-稳定。 □

注 5.1.5。 在 Leung 关于 Gieseker 稳定性和近似 Hermite–Einstein 度量的上述结果的证明中（见 第 2.2.2.3 节），他们证明了近似 Hermite–Einstein 度量的存在性蕴含相对于子丛的 Gieseker 稳定性 [Leu97，命题 3。1], Leung 指出，近似 Hermite–Einstein 度量的存在性实际上一般蕴含 Gieseker 稳定性，不仅相对于子丛，也相对于子层。Leung 对这一结论的证明依赖于以下断言：若

$$f : S \to Q_0$$

是相干层之间的一个态射，且 S 是 Gieseker 稳定的， Q_0 是斜率稳定的，并且 S、 Q_0 具有相同的斜率，那么 f 必为零或同构 [Leu97，第 530]页。由一般理论可知，这样的一个 f 必为零或满射，因为 S 是斜率半稳定的，但这样的一个 f 可能不是单射。因此，我们只能得到相对于子丛的稳定性。类似的问题也出现在 定理 5.1.1 中，在那里我们采用了相同的假设。由于稳定性蕴含存在性的扰动结果同样限于分次对象 Gr(E) 是局部自由的情形，因此仅要求相对于子丛的稳定性并没有增加限制，因为无论如何，存在性结果只需要这一条件。

5.2 稳定性蕴含存在性

本节证明大体积极限下 Z-临界联络存在性的以下结果。

定理 5.2.1。 设 $E \to (X, \omega)$ 是紧致 *Kähler* 流形上的单纯半稳定全纯向量丛，且 $\mathrm{Gr}(E)$ 局部自由且有两个分支。若 E 关于多项式中心荷 Z渐近 Z-稳定，则对所有 $k \gg 0$， E 都存在一个Z_k-临界度量。

正如本章引言中提到的，这是对 [DMS21] 的主要结果的简化，该结果涵盖了 Gr(E) 局部自由且具有任意多个分支的情形。我们将在本节末讨论该情形中显现的困难，并请参阅相关合作成果以了解详情。特别是，将该一般情形下的存在性结果与 定理 5.1.1结合起来，即完成了主定理 定理 1.3的证明。我们重述如下：

推论 5.2.2 (定理 1.3)**.** 一个单纯、半稳定的向量丛 $E \to (X, \omega)$若其 $\mathrm{Gr}(E)$ 局部自由，则它渐近 Z-稳定，当且仅当它存在 Z_k-临界度量，且 $k \gg 0$。

证明技巧基于 Sektnan–Tipler 的扰动结果；他们研究了在全纯下沉 [ST20] 下，如何在斜率稳定向量丛的拉回上构造 Hermite–Einstein 度量。策略如下：

步骤 1：构造任意阶的近似解，使其定义在一个斜率 稳定向量丛上 e.

步骤 2：在渐近 Z-稳定丛 E 的分次对象 Gr(E) $= E_1 \oplus E_2$ 上，取每个稳定因子 E_i 上近似解的直和。利用线性化的一般性质，将复结构从 Gr(E) 扰动至 E 后，可以修正所有误差，直至阶数 ε^{2q-1} ；其中 q 是 的偏差阶，即系数 $\varphi_\varepsilon(E_1)$ 首次严格小于 $\varphi_\varepsilon(E)$ 的阶数。

步骤 3：在临界阶 ε^{2q}， E 关于全纯子丛 E_1 的稳定性使我们能够消去那些不与线性化的核正交的项，并得到一个达到 ε^{2q} 阶的近似解。

步骤 4：在修正了 ε^{2q} 阶的误差后，与步骤 2 类似，可以消去所有更高阶的误差，从而得到任意阶的近似解。

步骤 5：利用庞加莱不等式，建立近似解的线性化逆算子的界。当近似解足够好（准确地说，至少达到 ε^{4q+1} 阶）时，可以应用定量隐函数定理，从而得到所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 对应的解。

接下来，我们将作如下变量变换 $\varepsilon^2 = \frac{1}{k}$ 与第 5.1 节类似，但注意平方项 $\varepsilon^2 = \epsilon$。这里取平方，是为了避免在后续论证构造近似解时出现分数次幂。

我们将把 Z-临界算子记为

$$\begin{aligned} D_\varepsilon : \quad \mathcal{A}(h) &\to \Gamma(X, \mathrm{End}_H(E,h)) \\ A &\mapsto \frac{\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}\tilde{Z}_\varepsilon(A))}{\omega^n} \end{aligned}$$

并将该算子乘以因子 $\varepsilon^{4q-2} = k^{1-2n}$ 进行缩放，使得其最高阶项（根据引理 4.2.6，即弱 Hermite–Einstein 算子）的阶数为 $O(\varepsilon^0)$。

有时我们会考虑算子 D_ε 在某个特定陈联络 A附近的情形，也就是在 $\mathcal{A}(h)$中 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 的某个给定轨道上，并可能使用以下记号

$$D_{\varepsilon,A} : \Gamma(X, \mathrm{End}_H(E,h)) \to \Gamma(X, \mathrm{End}_H(E,h))$$

其中我们将算子解释为 $D_{\varepsilon,\,A}(s) = D_\varepsilon(\exp(s)\cdot A)$，这里 $s \in \Gamma(X,\ \mathrm{End}_H(E,\ h))$ 是一个厄米自同态。在这种情况下 $D_{\varepsilon,\,A}(0) = D_\varepsilon(A)$。当陈联络已明确时，我们将省略下标$A$ 。

D_ε 在某个陈联络 A 处的线性化记为 $P_{\varepsilon,\,A}$；类似地，如果特定的陈联络已明确，我们也将省略 A 。线性化的逆算子（在其存在的情形和位置）记为 Q_ε。

以下所有估计均在 L^2 中相对于 E上的参考厄米度量 h_0 进行。相对于任意此类选择的 L^2-范数，在取值于 $\mathrm{End}\,E$ 的张量上都是等价范数，因此使用哪种范数进行估计并无妨碍；不过，自然的选择是将 $\mathrm{Gr}(E)$ 上的 Hermite–Einstein 度量选作此参考度量。该度量在 E 上光滑地定义了一个度量（假设 $\mathrm{Gr}(E)$ 是局部自由的，因此它与 E光滑同构，但并非全纯同构）。

5.2.1 第一步：斜率稳定情形

在继续证明定理 5.2.1 的两个分支情形之前，E我们先证明 Gr(E) 仅有一个分支时的存在性结果，也就是说，E 本身是斜率稳定的（因此根据推论 4.1.17，渐近 Z 稳定）。

事实上，我们给出两种证明：首先，通过应用反函数定理，证明在 E 上存在真正的 Z-临界度量。其次，我们显式构造任意阶的近似解；在论证的后续步骤中，当分次对象 Gr(E) 有两个分量时，要控制近似解处线性化算子的展开，这一点是必要的。

首先，我们来证明斜率稳定情形下的真正存在性结果。根据 引理 4.2.6，Z-临界方程的首项是弱 Hermite–Einstein 条件。正如第 2.2.2.1 节中所述，通过共形度量变换，可以在 Hermite–Einstein 度量与弱 Hermite–Einstein 度量之间相互转换，因此我们可以直接应用 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理定理 2.2.21，从而在 E 上得到一个弱 Hermite–Einstein 度量，其函数 $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$定义如下：

$$f = -2\pi \left(\frac{\deg_U(E)}{(n-1)![\omega]^n \operatorname{rk}(E)} - \Lambda_\omega \tilde{U}_2 \right),$$

由引理 4.2.6得出。函数 f 在全文中固定不变，因此我们将满足此方程的联络简称为弱厄米–爱因斯坦联络。

定理 5.2.3。假设 $E \to (X, \omega)$ 是斜率稳定的。那么对于所有 $k \gg 0$, E 均存在Z_k-临界联络。

证明。由于 E 是斜率稳定的，根据 h_0 定理 2.2.21，它具有一个弱 Hermite–Einstein 度量。由引理 4.2.6可知，Z-临界方程的首项是弱 Hermite–Einstein 方程，因此我们立即得到

$$D_0(h_0) = 0, \qquad \|D_\varepsilon(h_0)\| \leq C\varepsilon^2$$

对某个常数 C，其中 D_0 表示弱 Hermite–Einstein 算子。正如引理 2.2.22中所观察到的，当从改变厄米

度量的视角出发，通过规范群在 E 上的作用，弱 Hermite–Einstein 算子 D_0 在 h_0 处的线性化（相差一个常数因子）为

$$P_0 = \Delta_{\overline{\partial}_{h_0}},$$

关于 h_0 的 $\operatorname{End} E$ 上的丛拉普拉斯算子。由于 E 稳定，它是单纯的，因此 P_0 的核仅由常值自同态组成，而 P_0 在该核的正交补上可逆。

我们转到巴拿赫空间，并将线性化视为一个可逆算子

$$P_\varepsilon : L^2_{d+2,0}(\operatorname{End} E) \to L^2_d(\operatorname{End} E)$$

其中 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是某个非负整数，$L^2_{d,0}$ 表示 E 上迹积分为零的自同态的 Sobolev 空间。我们先前的讨论给出了如下估计

$$\|P_\varepsilon - P_0\| \leq C\varepsilon^2$$

其中 C 与 ε 无关；由于 $P_0 = \Delta_{\partial_{h_0}}$ 模去常值自同态后可逆，且可逆性是一个开条件，当 ε 充分小时，P_ε 在该空间 $L^2_{d+2,0}$ 上也可逆。若 G 表示 P_0 的逆算子，Q_ε 表示 P_ε 的逆算子，则我们还可以得到一个界

$$\frac{1}{C'}\|G\| \leq \|Q_\varepsilon\| \leq C'\|G\|$$

其中常数 C' 与 ε 无关，前提是 ε 充分小。将巴拿赫空间上的反函数定理应用于点 h_0，可知在 $L^2_d(\operatorname{End} E)$ 中存在 $D_\varepsilon(h_0)$ 的一个邻域，其大小与 ε 无关，且该邻域包含在算子 D_ε 从 $L^2_{d+2,0}$ 的像中。特别地，由于当 $\varepsilon \to 0$ 时 $D_\varepsilon(h_0) \to 0$，存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，都有一个解

$$D_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$$

对于 $h_\varepsilon = \exp(V_\varepsilon)h_0$ 对于某个 V_ε 属于索伯列夫空间 $L^2_{d+2,\ 0}(\operatorname{End} E)$。但正如命题 4.3.9所证明的，$Z$-临界方程对所有 ε 充分小的情况都是椭圆的，因此

根据椭圆正则性，这个 h_ε 实际上是光滑的，因此是Z_ε-临界方程的真正解。

□

注记5.2.4。 这一结果给出了目前已知的首批高秩变形 Hermitian–Yang–Mills 方程的解的例子。在证明 定理 5.2.1 适用于 Gr(E) 有两个分量的情形之后，我们还将得到在 Z-稳定丛上的解；这些丛在 例 4.1.22中已被识别出来，尤其是它们不满足 Hermite–Einstein 方程。

在证明斜率稳定向量丛确实存在解之后，我们现在回过头来证明某种特定形式的近似解存在。这既将展示构造近似解的一般技巧——在接下来的步骤中我们会大量运用这一技巧，也为理解 Gr(E) 有两个分量时的近似解奠定基础。

命题 5.2.5。 设 $E \to (X, \omega)$ 是一个斜率稳定向量丛，其 *Dolbeault* 算子为 ∂_E，弱 *Hermite–Einstein* 度量为 h，对应的陈联络为A。设 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为任意非负整数。那么存在厄米自同态 $f_2, f_4, \ldots, f_{2r}$，使得

$$A_r := \exp\left(\sum_{j=1}^{r} f_{2j}\varepsilon^{2j}\right) \cdot A$$

满足

$$D_\varepsilon(A_r) = O(\varepsilon^{2r+1}).$$

证明。 由于 E 是稳定的，因此它是单纯的。由 命题 4.3.9 可知， D_ε 在 h处的线性化，其首项由作用在 Δ_0 上的拉普拉斯算子 E给出。回忆一下，推论 2.2.26指出， Δ_0 的核由下式给出

$$\ker \Delta_0 = H^0(X, \operatorname{End} E) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_E.$$

当 g 与拉普拉斯算子的核正交时，方程 $\Delta_0(f) = g$ 有解；当 g 光滑时， f 是光滑端omorphism。这种正交性在

$\Gamma(\mathrm{End}_H(E,\ h))$ 出现在

$$\int_X \operatorname{tr} g\,\omega^n = 0.$$

展开(方程 4.6)关于 ε 的幂级数后，我们看到，对于每个 j，ε^{2j} 项D_ε 在取迹积分后为零，因此与 Δ_0的核正交。

现在设 f_2 是 E的某个厄米自同态。由命题 4.3.9和引理 2.2.23可知 $A_2 := \exp(\varepsilon^2 f_2)\cdot A$ 满足

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(A_2) &= D_\varepsilon(A) + \varepsilon^2 P_\varepsilon(f_2) + O(\varepsilon^4) \\ &= D_\varepsilon(A) + \varepsilon^2 \Delta_0(f_2) + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

其中 P_ε 是 D_ε 在 A 处的线性化；在第二行中，$O(\varepsilon^4)$项可能依赖于 f_2 自身。此外，再次将(方程 4.6)应用于 A_2 并按 ε展开，我们看到，这些在 ε^4 阶及更高阶、依赖于 f_2的额外误差项取迹积分后为零。

现在注意到 $D_\varepsilon(A) = O(\varepsilon^2)$，因为 A 是弱厄米–爱因斯坦联络；并且如前所述，ε^2 项（记作 $\sigma_2\varepsilon^2$ ）与 $\ker\Delta_0$正交。因此存在某个 f_2 使得

$$\Delta_0(f_2) + \sigma_2 = 0$$

并得到 A_2，其中 $D_\varepsilon(A_2) = O(\varepsilon^4)$。这就完成了命题的 $r = 1$ 情形。通过考虑修正项$A_4 := \exp(f_4\varepsilon^4)\cdot A_2$，在阶数 ε^4 处重复同样的论证，我们得到 A_4，依此类推，逐步消去直至阶数 ε^{2r} 的误差，从而得到一个近似解 A_r。

□

注 5.2.6. 在上述概念中，求和记号

$$g_r = \exp\left(\sum_{j=1}^{r} f_{2j}\varepsilon^{2j}\right)$$

被滥用来表示自同构

$$g_r = \exp(f_{2j}\varepsilon^{2j})\exp(f_{2j-2}\varepsilon^{2j-2})\cdots\exp(f_2\varepsilon^2)$$

一般而言， f_ℓ 并不对易，因此这些表达式不能直接互换。这只是一种记号约定；在构造近似解时，我们始终指自同构乘积的后一种排列方式。不会产生混淆，因为构造近似解的论证中已经隐含了这种排列方式。

注 5.2.7. 现在，借助阶数为 A_r 的近似解，我们可以再次应用反函数定理来得到真实解。不过，定理 5.2.3 的论证已经表明 $A = A_0$ 是足够好的近似解。事实上，仔细检查定理 5.2.1 在第 5.2.6 节证明中的定量扰动论证，可以看到所需的近似解阶数为 $4q+1$，其中 q 是偏差阶，在稳定情形下为 $q = 0$，因此 A_0已经足够好。

5.2.2 复结构变形

我们现在开始证明定理 5.1.1 的适当性。为此，我们固定一个全纯向量丛 $E \to (X, \omega)$，它是渐近 Z-稳定的。于是 引理 4.1.14推出 E 是斜率半稳定的，因此，如第 2.2.1 节。2 E 所述，它具有一个 Jordan–H¨older 滤过，我们假设该滤过有两步：

$$0 \subset E_1 \subset E.$$

那么 E 具有分次对象

$$\mathrm{Gr}(E) = E_1 \oplus E_2$$

其中 $E_2 = E/E_1$。我们假设 $\mathbf{Gr}(E)$ 是局部自由的，因此 E_1 和 E_2 是向量丛；在这种情况下，$\mathbf{Gr}(E)$ 是与 E相关联的唯一无挠分次对象。回想一下， E_1 和 E_2 具有相同的斜率。在此情形下，渐近 Z-稳定性的第一个推论如下：

Lemma 5.2.8. 若 E 渐近稳定于 Z，则 E_1 与 E_2不同构 .

证明。这由渐近引理 4.1.18 的跷跷板性质推出 Z-

稳定性。特别地，我们有

$$\varphi_k(E_1) < \varphi_k(E) < \varphi_k(E_2)$$

对于所有 $k \gg 0$，因此我们不能有 $E_1 \cong E_2$。 □

作为上述引理的推论，我们可以非常容易地描述分次对象的自同构群。

引理 5.2.9。 $\mathrm{Gr}(E)$ 的端*omorphism*由下式给出

$$H^0(X, \operatorname{End}\mathrm{Gr}(E)) = H^0(X, \operatorname{End} E_1) \oplus H^0(X, \operatorname{End} E_2) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{E_1} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{E_2}.$$

证明。 由 E_1 的斜率稳定性， E_2 任意态射 $u\colon E_1 \to E_2$ 要么为零，要么是同构。根据引理 5.2.8 由于 E 渐近地是 Z-稳定的，我们必有 $u = 0$。因此，关于全纯分解 Gr(E)，Gr(E) $= E_1 \oplus E_2$的任意自同构都只有对角分量。然后我们回顾命题 2.2.4 可知 E_1 和 E_2 都是单纯的，因此所有全纯端同态都是恒等映射的常数倍。

□

如注 2.2.11中所述，我们可以将短正合列视为

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

作为使 E 退化为 Gr(E) 的过程，即通过关闭扩张。回顾第 2.2.2.2 节，我们可以用微分几何的方式将这一过程描述如下。

分次对象 Gr(E) E 是斜率多稳定的，因此根据 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理 h 定理 2.2.21，存在一个厄米–爱因斯坦度量。将 h 视为 E 自身上的厄米度量（通过光滑识别 $E \cong$Gr(E)），这便定义了一个光滑分解

$$E \cong E_1 \oplus E_2.$$

固定一个 Dolbeault 算子∂_E 于$\overline{\ }E$ 上，从而产生其全纯结构。关于此分解， ∂_E 分解为

$$\overline{\partial}_E = \begin{pmatrix} \overline{\partial}_1 & \gamma \\ 0 & \overline{\partial}_2 \end{pmatrix}$$

其中，$\overline{\partial}_1$ 和 $\overline{\partial}_2$ 分别是定义于E_1和 E_2上的全纯结构的 Dolbeault 算子，而 $\gamma \in \Omega^{0,1}(X,\mathrm{Hom}(E_2, E_1))$ 是 $E_1 \subset E$的第二基本形式。记作

$$\overline{\partial}_0 := \begin{pmatrix} \overline{\partial}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\partial}_2 \end{pmatrix}$$

对于 Gr(E) 上的 Dolbeault 算子，其陈联络 $A(h, \partial_0)$ 是 Hermite–Einstein 的。于是

$$\overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \gamma$$

并且 ∂_E 的可积性条件 $\partial_0\gamma = 0$蕴含 $[\gamma]$。回想一下，正如注 2.2.28中所述，这个条件意味着 $[\gamma]$定义了 Dolbeault 上同调中的一个类。如果 γ与∂_0上同调等价于零，那么 E 全纯地分裂为直和 $E \cong \mathrm{Gr}(E)$，并且是斜率多稳定的。在这种情况下， Z 上的E_i 由定理 5.2.3 给出的 Z-临界联络在 E上是-临界的。因此，从现在起我们假设$[\gamma] \neq 0$ 并且 E 是严格斜率半稳定的。

在这种情况下，我们通过关闭扩张，构造从 Gr(E) 到 E 的复结构变形。定义

$$\overline{\partial}_t := \overline{\partial}_0 + t\gamma.$$

这类 Dolbeault 算子可由 ∂_E 通过一个自同构得到

$$g_t = \begin{pmatrix} t\mathbf{1}_{E_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{E_2} \end{pmatrix}$$

by

$$\overline{\partial}_t = g_t \circ \overline{\partial}_E \circ g_t^{-1}.$$

特别是，对于每个 $t \neq 0$，算子 ∂_t 定义了同构的复结构，等价于 ∂_E；而在 $t = 0$，该结构分解为 Gr(E)。

∂_t 关于 h 的陈联络为 $\quad -$

$$\nabla_t = \nabla_0 + ta$$

其中

$$a := \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^* & 0 \end{pmatrix}$$

且 ∇_0 是 ∂_0的陈联络。 ∇_t 的曲率为

$$F_t = F_0 + td_{\nabla_0}a + t^2 a \wedge a \qquad \text{(Eq. 5.7)}$$

这里注意到

$$a \wedge a = -\begin{pmatrix} \gamma \wedge \gamma^* & 0 \\ 0 & \gamma^* \wedge \gamma \end{pmatrix}.$$

注意，项 $td_{\nabla_0}a$ 在F_t的分块矩阵表示中是非对角的，其中自同态丛上的诱导联络定义为

$$\nabla_t^{\operatorname{End} E} = \nabla_0^{\operatorname{End} E} + t[a, -].$$

接下来，我们将通过施加库仑条件，在陈联络 A 的 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$轨道内固定规范

$$\overline{\partial}_0^* \gamma = 0. \qquad \text{(Eq. 5.8)}$$

众所周知（例如，参见 [Kob87，§7.2] 或 [BS20，引理 2。5]），第二基本形式总可以通过对 E 施加酉规范变换，使其具有这种形式。

在渐近区域中进行研究时，我们需要的关键概念是偏差阶。

定义 5.2.10 （偏差阶）。 将 Z-相位 $\varphi_k(E)$ 归一化，使其在 k 中的首项为 $O(k^0)$。令 $\varphi_k(E)(j)$ 表示 $k \gg 0$ 时 $\varphi_k(E)$ 展开中的第 k^{-j} 阶项。定义子丛的偏差阶

$S \subset E$ 为满足以下条件的最小 q

$$\varphi_k(S)(q) < \varphi_k(E)(q).$$

注意，当 E 渐近地 Z-稳定时，对于所有 $j = 0, \dots, q-1$，都有 $\varphi_k(S)(j) = \varphi_k(E)(j)$。在 E 斜率稳定的情况下，由于 $q = 0$ 且 $\varphi_k(E)(0) = \mu(E)$，因此不等式立即成立。

备注 5.2.11. 按照我们关于 $\varepsilon^2 = 1/k$ 的约定，偏差阶 q 等于 $\varphi_\varepsilon(E_1)$ 严格小于 $\varphi_\varepsilon(E)$ 时的最小阶的一半。因此，在以下论证中，临界阶将是 ε^{2q}。

我们明确记录偏差阶的以下关键特征，它或多或少是对 引理 4.1.11 的重新表述。

引理 5.2.12. 若 q 是 $E_1 \subset E$ 的偏差阶，则展开中 ε^{2q} 项

$$\operatorname{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)} Z_\varepsilon(E_1))$$

严格为负，而 ε 中的低阶项均消失。

证明。 写作 $Z_\varepsilon(E_1) = r_\varepsilon(E_1) e^{\varphi_\varepsilon(E_1)}$。那么

$$\operatorname{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)} Z_\varepsilon(E_1)) = r_\varepsilon(E_1) \operatorname{Im}(e^{i\varphi_\varepsilon(E_1) - i\varphi_\varepsilon(E)}).$$

我们有 $\operatorname{Im}(\exp(i(\varphi_\varepsilon(E_1) - \varphi_\varepsilon(E)))) = \sin(\varphi_\varepsilon(E_1) - \varphi_\varepsilon(E))$，其中项 $\varphi_\varepsilon(E_1) - \varphi_\varepsilon(E)$ 等于某个 $C < 0$ 的 $C\varepsilon^{2q} + O(\varepsilon^{2q+1})$。在首阶，$\sin x = x + O(x^3)$，且对于某个 $C' > 0$，$r_\varepsilon(E_1) = C' \operatorname{rk}(E_1)[\omega]^n + O(\varepsilon)$，因此我们得到一个展开

$$\operatorname{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)} Z_\varepsilon(E_1)) = CC' \operatorname{rk}(E_1)[\omega]^n \varepsilon^{2q} + O(\varepsilon^{2q+1})$$

当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，并且由于 $C < 0$，我们便得到结论。[1] □

[1] 我们本可以通过将偏差阶定义为 $\operatorname{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)} Z_\varepsilon(E_1))$ 首次变为负值的阶，从而避免这种对相位和斜率的直接比较。不过，给出的定义在风格上更接近多项式 Bridgeland 稳定性的研究。

5.2.3 第 2 步：偏差阶以下的近似解

在构造近似解之前，我们需要了解 ε 中线性化算子的展开；其中的陈联络 $g \cdot A_t$ 将在构造近似解的各个阶段依次出现。关键在于，只要我们的扰动的阶至少为 ε，P_ε 中的首项就仍然是 Gr(E) 上的丛拉普拉斯算子 Δ_0。

引理 5.2.13。 A_t 的丛拉普拉斯算子展开为

$$\Delta_t = \Delta_0 + tL_1 + t^2 L_2$$

其中

$$\begin{aligned} L_1(u) &= i\Lambda_\omega(\partial_0([\gamma, u]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(u)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, u]) - [\gamma, \partial_0(u)]) \\ L_2(u) &= i\Lambda_\omega([\gamma, [\gamma^*, u]] - [\gamma^*, [\gamma, u]]). \end{aligned}$$

证明。回顾一下，在自同态丛上有

$$\nabla_t = \nabla_0 + t[\gamma - \gamma^*, -]$$

其中 γ 的类型为 (0，1)。于是

$$\begin{aligned} \Delta_t(u) &= i\Lambda_\omega(\partial_t\overline{\partial}_t - \overline{\partial}_t\partial_t)(u) \\ &= i\Lambda_\omega\left((\partial_0 - t[\gamma^*, -])(\overline{\partial}_0 + t[\gamma, -]) - (\overline{\partial}_0 + t[\gamma, -])(\partial_0 - t[\gamma^*, -])\right)(u) \\ &= \Delta_0(u) + ti\Lambda_\omega\left(\partial_0([\gamma, u]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(u)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, u]) - [\gamma, \partial_0(u)]\right) \\ &\quad + t^2 i\Lambda_\omega\left([\gamma, [\gamma^*, u]] - [\gamma^*, [\gamma, u]]\right), \end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

推论 5.2.14. 令 P_ε 为 $g \cdot A_t$ 处的 Z-临界算子 D_ε 的线性化，其中联络 $g \cdot A_t$ 适用于 $g = \exp(s)$ 和 $t = \lambda\varepsilon^q$。那么，若 $s = O(\varepsilon)$，我们有

展开

$$P_\varepsilon = C(\operatorname{rk} E)[\omega]^n \Delta_0 + O(\varepsilon).$$

*Pr*因此。 由 命题 4.3.9 在 $g \cdot A$ 应用相同的论证，我们得到 n

$$P_\varepsilon = C(\operatorname{rk} E)[\omega]^n \Delta_t + O(\varepsilon)$$

然后我们应用 引理 5.2.13。 □

注释 5.2.15。 这从解析角度阐明了稳定情形与半稳定情形之间的主要区别：在稳定情形中， ε 处 Z-临界算子的线性化的首项模去常数后可逆；而在半稳定情形中，Δ_0 有非平凡的核，该核由 E_1的恒等自同态生成， E_2。

现在让我们 开始构造 Z-临界方程的近似解。

命题 5.2.16。 假设 E 渐近地 Z-稳定，其分次对象为$\operatorname{Gr}(E) = E_1 \oplus E_2$，且 E_1 的偏差阶为 q。取 $t = \lambda\varepsilon^q$。那么存在 E 的厄米自同态 f_0、……、 f_{2q-1}，使得若

$$g := \exp\left(\sum_{j=0}^{2q-1} f_j \varepsilon^j\right)$$

˜并设定 $A_t :\, = g \cdot A_t$ 则

$$D_\varepsilon(\tilde{A}_t) = O(\varepsilon^{2q}).$$

证明。 令 h 表示 Gr(*E*) 上带有其复结构 ∂_0 和陈联络 A_0的弱 Hermite–Einstein 度量。由命题 5.2.5，存在分块˜ ˜对角厄米自同态 f_2、……、 f_{2q-2}，使得分别作用于两个因子时，我们有

$$\tilde{A}_0 = \exp\left(\sum_{j=1}^{q-1} \tilde{f}_{2j} \varepsilon^{2j}\right) \cdot A_0$$

满足 $D_\varepsilon(\tilde{A}_0) = O(\varepsilon^{2q})$。

为了在 E 上获得陈联络，我们必须将复结构从 ∂_0 扰动到 ∂_t，从而得到陈联络 A_t。现在考虑

$$\tilde{A}_t^1 = \exp\left(\sum_{j=1}^{q-1} \tilde{f}_{2j}\varepsilon^{2j}\right) \cdot A_t.$$

于是，我们得到两类新的贡献，分别来自公式 5.7 中的非对角项 $td_{A_0}a$和对角项 $t^2a \wedge a$。它们以项 $\lambda\varepsilon^q d_{A_0}a$ 的形式对 $D_\varepsilon(\tilde{A}_t^1)$ 作出贡献，阶数为 ε^q；此外，该项经分块对角自同构 $\exp(\tilde{f}_{2j}\varepsilon^{2j})$ 共轭后，也会在 $j, \ell > 0$ 时产生阶数为 $\varepsilon^{q+2j+2\ell}$ 的非对角误差。我们还得到一个阶数为 ε^{2q} 的贡献 $t^2a \wedge a$，在这一步可以忽略；它经 $\exp(f_{2j}\varepsilon^{2j})$ 共轭后，也会在 $j, \ell > 0$ 时产生阶数为 $\varepsilon^{2q+2j+2\ell}$ 的误差。通过对曲率项的楔积进行类似公式 5.5 的展开，我们还得到由 $td_{A_0}a$ 项与$t^2a \wedge a$ 项的楔积产生的新项，这些项的阶数均为 ε^{2q} 或更高。

现在，我们来修正上面那些阶数低于 ε^{2q}的误差项。根据我们的工作假设，E 是严格斜率半稳定的，因此我们知道 E_1，$q \geq 1$的偏差阶。根据 推论 5.2.14 在 $\tilde{A}_t^1$ 处，线性化的首阶项（相差一个常数因子）由丛拉普拉斯算子 Δ_0给出。第一个误差项出现在 ε^q 所给出的阶数$\lambda i\Lambda_\omega d_{A_0}a$。由于 $d_{A_0}a$ 相对于 $\mathrm{Gr}(E) = E_1 \oplus E_2$ 的分块矩阵分解是非对角的，因此它与 Δ_0 的核正交，且其缩并属于 Δ_0的像。特别地，我们可以找到一个非对角厄米自同态 f_q 使得

$$\Delta_0(f_q) + \lambda i\Lambda_\omega d_{A_0}a = 0.$$

令

$$\tilde{A}_t^2 = \exp(\varepsilon^q f_q) \cdot \tilde{A}_t^1$$

我们有 $D_\varepsilon(\tilde{A}_t^2) = O(\varepsilon^{q+1})$。

现在，ε^q 阶的修正引入了关于 ε的更高阶新误差项。不过，f_q 是非对角的，因此，扰动到 $\tilde{A}_t^2$ 时引入的最低阶对角误差来自 $\varepsilon^q\Delta(f_q)$，以及 $\varepsilon^q\lambda i\Lambda_\omega d_{A_0}a$ 经 $\exp(f_q\varepsilon^q)$ 共轭后的项。

这些误差从 ε^{2q} 阶开始出现，因此这一步可以忽略它们（但我们会在命题 5.2.17 中考虑它们）。因此，我们仍然只有一个处于 ε^{q+2} 阶的非对角误差，它属于 Δ_0 的像，因此可以从 $\tilde{A}_t^2$ 扰动到 $\tilde{A}_t^3$ 以修正此误差。同样会出现更高阶误差，但它们至少到 ε^{2q+2}阶仍是非对角的。通过归纳继续进行，我们得到一个满足以下条件的 $\tilde{A}_t = \tilde{A}_t^{q-1}$ 近似解

$$D_\varepsilon(\tilde{A}_t) = O(\varepsilon^{2q}).$$

□

5.2.4 步骤 3：偏差阶上的稳定性

下一步是修正临界阶上的误差 ε^{2q}，这些误差源于 Z的斜率之间的偏差 E_1 与 E。而在前一步中命题 5.2.16我们只需处理将 A_0 扰动至 A_t所产生的非对角误差项，或后续修正引入的非对角误差项；而在 ε^{2q} 阶上，我们还会遇到新的对角贡献，主要来自 $\lambda^2\varepsilon^{2q}a \wedge a$在（公式 5.7）中对 A_t曲率的展开。

这里我们将其与 E 的渐近 Z-稳定性这一代数条件联系起来。这使我们能够通过在 $t = \lambda e^q$ 中恰当选择变形率 $\lambda > 0$，消去不属于 Δ_0 像空间的项。

首先引入投影算子

$$\pi : \Gamma(\mathrm{End}_H(E,h)) \to \ker \Delta_0 = H^0(X, \mathrm{End}\,\mathrm{Gr}(E))$$

定义如下

$$\pi(u) := \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\mathrm{rk}\, E_i} \left(\int_X \mathrm{tr}_{E_i}(u)\omega^n \right) \mathbf{1}_{E_i}$$

其中，tr_{E_i} 的定义是：按照光滑分解 $E = E_1 \oplus E_2$ 对 u 进行分块分解，并取 u的第 i个对角块的迹。这在相差一个常数因子 $n!\,\mathrm{vol}(X)^{-1}$ 的意义下，等于到 $\ker\ \Delta_0$ 的 L^2-正交投影

关于内积

$$(u,v)_{L^2}=\int_X \mathrm{tr}(uv)\omega^n.$$

此外，定义一个特殊的自同态 $\mathbf{1}_\pm$，其作用于 E，如下所示

$$\mathbf{1}_\pm := \frac{1}{\mathrm{rk}\,E_1}\mathbf{1}_{E_1}-\frac{1}{\mathrm{rk}\,E_2}\mathbf{1}_{E_2}.$$

那么， $\mathbf{1}_\pm$ 属于 Δ_0 的核，并且确实是 $\mathbf{Gr}(E)$ 的全纯端同态。它与子空间 $\mathbb{C}\cdot\langle \mathbf{1}_{E_1}+\mathbf{1}_{E_2}\rangle \subset \ker \Delta_0$ 正交，特别是与 $\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}_E$ 正交，因此也与 $\ker\ \Delta_t = H^0(X,\mathrm{End}\,E)$ 正交。

命题 5.2.17。假设 E 渐近地 Z-稳定，其分次对象为 $\mathrm{Gr}(E)\ =E_1\oplus E_2$，且 E_1 的偏差阶为 q。那么，存在一个 $\lambda>0$，使得若$t=\lambda\varepsilon^q$，则存在厄米自同态 f_1，……，f_{2q}，使得

$$g:=\exp\left(\sum_{j=1}^{2q} f_j\varepsilon^j\right)$$

then

$$D_\varepsilon(\tilde{A}_t)=O(\varepsilon^{2q+1}).$$

证明。根据命题 5.2.16，存在厄米自同态 f_1，……，f_{2q-1}，因此，按照上文的记号，若令 $f_{2q}=0$，则有

$$D_\varepsilon(g\cdot A_t)=O(\varepsilon^{2q}).$$

现在，我们需要分析出现在这个临界阶的误差项。第一个分量是一个误差项，记作 σ_1，它是由 g 对下列项取共轭所得： $\varepsilon^{2q}\lambda^2 i\Lambda_\omega a\wedge a$该项来自 (公式 5.7)。我们将此项拆分如下：

$$\sigma_1=\hat{\sigma}_1+\pi(\sigma_1)$$

其中 $\hat{}\sigma_1$ 与 $\ker\Delta_0$ 正交。

第二个误差项，记作 σ_2，是 命题 5.2.16 中近似解的乘积所引入的总误差项。如低阶近似解的构造中所述，在阶数 ε^{2q} 中，唯一非对角贡献出现在处理阶数 ε^q 误差时构造联络 $\tilde{A}_t^2$ 的过程中。所有其他对角贡献都出现在 ε的更高阶项中。考察推论 5.2.14证明中的展开可知，该贡献由拉普拉斯算子 Δ_t 作用于厄米自同态 f_q 所得展开中的 t 系数给出。该展开见引理 5.2.13 ，所选厄米自同态满足

$$\Delta_0(f_q) + \lambda i \Lambda_\omega d_{A_0} a = 0.$$

因此，利用拉普拉斯算子的展开，我们有

$$\pi(\sigma_2) = \lambda\pi(i\Lambda_\omega(\partial_0([\gamma, f_q]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(f_q)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, f_q]) - [\gamma, \partial_0(f_q)])). \quad \text{(Eq. 5.9)}$$

现在首先注意到 $f_q = \lambda\,(\beta - \beta^*)$ 对于某个 $\beta \in \Gamma\,(\mathrm{Hom}(E_2,\ E_1)$ 而言成立，因为 $a = \gamma - \gamma^*$具有这种形式。于是我们得到 （式 5.9）等于

$$\lambda^2\pi\left(i\Lambda_\omega\left(-\partial_0([\gamma, \beta^*]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(\beta)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, \beta]) + [\gamma, \partial_0(\beta^*)]\right)\right).$$

然后利用以下事实： $\partial_0\beta^* = (\partial_0\beta)^*$ 以及 $[\alpha, \beta]^* = -[\alpha^*, \beta^*]$，我们有

$$\begin{aligned} -\partial_0([\gamma, \beta^*]) + [\gamma, \partial_0(\beta^*)] &= \partial_0([\gamma^*, \beta]^*) + [\gamma, (\overline{\partial}_0(\beta))^*] \\ &= \left(\overline{\partial}_0([\gamma^*, \beta] - [\gamma^*, (\overline{\partial}_0(\beta))]\right)^*. \end{aligned}$$

现在，由于 $\partial_0([\gamma^*, \beta] - [\overline{\gamma}^*, (\partial_0(\beta))]$ 是纯虚数，

$$\mathrm{tr}_{E_i}\left(\overline{\partial}_0([\gamma^*, \beta] - [\gamma^*, (\overline{\partial}_0(\beta))]\right)^* = -\,\mathrm{tr}_{E_i}\left(\overline{\partial}_0([\gamma^*, \beta] - [\gamma^*, (\overline{\partial}_0(\beta))]\right).$$

Thus

$$\mathrm{tr}_{E_i}\left(-\partial_0([\gamma, \beta^*]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(\beta)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, \beta]) + [\gamma, \partial_0(\beta^*)]\right) = 0,$$

因此，事实上

$$\pi(\sigma_2) = 0.$$

因此，我们将能够消除由 σ_2 使用 Δ_0所造成的误差。

阶数为 ε^{2q} 的第三项误差项，记为 σ_3，源自 Z-临界方程在阶数 ε^{2q} 处的展开。我们将此项拆分为

$$\sigma_3 = \hat{\sigma}_3 + \pi(\sigma_3)$$

其中 $\hat{\sigma}_3$ 与 Δ_0 的核正交。因此，我们有如下展开

$$D_\varepsilon(g \cdot A_t) = \varepsilon^{2q}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + O(\varepsilon^{2q+1})$$

其中，唯一不与 $\ker \Delta_0$ 正交的因子是

$$\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_3)$$

其中 σ_1 是 $\lambda^2 i\Lambda_\omega a \wedge a$ 的共轭，取决于我们的变形率 $\lambda > 0$。现在我们将证明，假设渐近 Z-稳定性成立，就可以选择 λ，使此和为零。

现在，投影 $\pi(\sigma_1)$ 是以下表达式的正倍数

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\operatorname{rk} E_i} \int_X \operatorname{tr}_{E_i}(\lambda^2 i\Lambda_\omega a \wedge a)\omega^n \cdot \mathbf{1}_{E_i}$$

这里我们利用迹消去了由 g 引起的共轭。再利用 $\operatorname{tr}\ \gamma \wedge \gamma^* = -\operatorname{tr}\ \gamma^* \wedge \gamma$ 这一事实，可知 $\operatorname{tr}_{E_1}(a \wedge a) = -\operatorname{tr}_{E_2}(a \wedge a)$，因此上述投影等于

$$C\lambda^2 \left(\frac{1}{\operatorname{rk} E_1} \mathbf{1}_{E_1} - \frac{1}{\operatorname{rk} E_2} \mathbf{1}_{E_2} \right)$$

其中某个正常数 C 取决于 γ。另一方面，$\pi(\sigma_3)$ 是该总和的正倍数

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\operatorname{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)} Z_\varepsilon(E_i)) \right]^{2q} \cdot \frac{\mathbf{1}_{E_i}}{\operatorname{rk} E_i}$$

其中 $[-]^{2q}$ 表示阶数为 ε^{2q} 的系数。因此，我们需要求出满足以下条件的 $\lambda > 0$

方程

$$\begin{cases} \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_1)\right]^{2q} + C\lambda^2 = 0 \\ \left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_2)\right]^{2q} - C\lambda^2 = 0. \end{cases} \tag{Eq. 5.10}$$

这意味着

$$\lambda^2 = \frac{1}{C}\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_2)\right]^{2q} = -\frac{1}{C}\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_1)\right]^{2q}$$

因此我们需要满足以下两个条件

$$\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_2)\right]^{2q} = -\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_1)\right]^{2q}$$

and

$$\left[\mathrm{Im}(e^{-i\varphi_\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E_2)\right]^{2q} > 0.$$

第一个条件由中心荷 Z 对短正合列的可加性得出

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

以及以下事实：对所有 $e^{-i\varphi_{\varepsilon(E)}Z_\varepsilon(E))} = 0$，其虚部 ε。第二个条件由 引理 5.2.12 和跷跷板性质 引理 4.1.18得出，利用以下事实： q 是子丛 $E_1 \subset E$ 的偏差阶（或等价地，是商 $E \twoheadrightarrow E_2$的偏差阶）。

因此，我们总能选取某个 $\lambda > 0$ 来解 (方程 5.10)。其余各项 $\hat{}\sigma_1 + \sigma_2 + \hat{}\sigma_3$ 都与 Δ_0 的核正交，因此可以像之前一样，利用厄米自同态 f_{2q} 将其消去。

□

5.2.5 步骤 4：任意阶的近似解 r

确定变形率 $\lambda > 0$ 并构造出偏差阶为 E_1 的临界近似解后，我们将继续构造任意阶的近似解。

引理 5.2.18。

$$\pi(\Delta_t(\mathbf{1}_\pm)) = t^2 C\mathbf{1}_\pm$$

其中某个非零常数 C 与 t 无关。

证明。 利用 $\mathbf{1}_\pm \in \ker \Delta_0$，我们来计算

$$\begin{aligned}\Delta_t(\mathbf{1}_\pm) = ti\Lambda_\omega \left(\partial_0([\gamma, \mathbf{1}_\pm]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(\mathbf{1}_\pm)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, \mathbf{1}_\pm]) - [\gamma, \partial_0(\mathbf{1}_\pm)]\right) \\ + t^2 i\Lambda_\omega \left([\gamma, [\gamma^*, \mathbf{1}_\pm]] - [\gamma^*, [\gamma, \mathbf{1}_\pm]]\right).\end{aligned}$$

注意，由于 $\nabla_0 = \partial_0 + \partial_0$ 是乘积联络，且 $\mathbf{1}_\pm$ 在 $\overline{E} = E_1 \oplus E_2$ 的因子上由两个常数分量组成，因此我们有 $\partial_0 \mathbf{1}_\pm = \partial_0 \mathbf{1}_\pm = 0$ as。这使得 t 项化简为

$$ti\Lambda_\omega \left([\partial_0\gamma, \mathbf{1}_\pm] + [\overline{\partial}_0\gamma^*, \mathbf{1}_\pm]\right).$$

回顾一下，规范 $\partial_0^*\gamma = 0$ 来自 (公式 5.8) 推出 $\Lambda_\omega(\partial_0\gamma) = \Lambda_\omega(\partial_0\gamma^*) \equiv 0$，因此这一项实际上为零。 t^2 项可以通过计算化简

$$[\gamma, [\gamma^*, \mathbf{1}_\pm]] - [\gamma^*, [\gamma, \mathbf{1}_\pm]] = \frac{2}{\operatorname{rk} E}(\gamma \wedge \gamma^* + \gamma^* \wedge \gamma).$$

计算正交投影后，我们得到

$$\pi(\Delta_t(\mathbf{1}_\pm)) = \frac{2it^2}{\operatorname{rk} E} \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\operatorname{rk} E_i} \left(\int_X \operatorname{tr}_{E_i}(\Lambda_\omega(\gamma \wedge \gamma^* + \gamma^* \wedge \gamma))\omega^n \right) \mathbf{1}_{E_i}.$$

现在利用 $\operatorname{tr}(\gamma \wedge \gamma^* + \gamma^* \wedge \gamma) = \operatorname{tr}_{E_1}(\gamma \wedge \gamma^*) + \operatorname{tr}_{E_2}(\gamma^* \wedge \gamma) = 0$ 这一事实，得出

$$\pi(\Delta_t(\mathbf{1}_\pm)) = t^2 \frac{2i \int_X \operatorname{tr}_{E_1}(\Lambda_\omega(\gamma \wedge \gamma^*))\omega^n}{\operatorname{rk} E} \mathbf{1}_\pm.$$

□

命题 5.2.19。 令 P_ε 表示A_t 处 D_ε 的 Z-临界算子线性化，其中 $t = \lambda\varepsilon^q$，适用于 $\lambda > 0$ 和 $q \geq 2$。则 $P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm)$ 的阶为 $O(\varepsilon^q)$，此外

$$\pi(P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm)) = C\lambda^2\varepsilon^{2q}\mathbf{1}_\pm + O(\varepsilon^{2q+1})$$

对于某个非零常数 C。这一展开在复结构$g \cdot \partial_t$ 处也成立，条件是对于某个 s，它是用于构造近似解的形式的 $O(\varepsilon)$ $g = \exp(s)$。

证明。 根据推论 5.2.14 我们知道

$$P_\varepsilon = C(\operatorname{rk} E)[\omega]^n \Delta_t + O(\varepsilon).$$

回忆第 第 4.3 节 节中的结果：在陈联络 Z_ε-临界方程处的线性化 A 由如下形式的若干项之和组成

$$f \mapsto C\varepsilon^{2\kappa}\omega^i \wedge F_A^{j-1} \wedge (\partial_A \overline{\partial}_A - \overline{\partial}_A \partial_A)s \wedge \tilde{U}_\ell \qquad \text{(Eq. 5.11)}$$

其中 C 为常数， $\kappa \geq 0$，且 $i + j + \ell = n$ （以及这类项的分次对称化）。我们希望考虑 $A = A_t$ 也依赖于 ε 的情形。根据引理 5.2.18，对 $\mathbf{1}_\pm$应用线性化后，我们看到，$C\lambda^2\varepsilon^{2q}\mathbf{1}_\pm$ 中来自拉普拉斯算子 Δ_t 的贡献来自上面的项，其中 $j = 1$ 且 $\kappa = 0$，因此可以假设 $j > 1$， $\kappa > 0$。引理引理 5.2.13 的计算表明，这个差

$$(\partial_{A_t}\overline{\partial}_{A_t} - \overline{\partial}_{A_t}\partial_{A_t}) - (\partial_{A_0}\overline{\partial}_{A_0} - \overline{\partial}_{A_0}\partial_{A_0})$$

等于

$$s \mapsto \lambda\varepsilon^q \left(\partial_0([\gamma, s]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(s)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, s]) - [\gamma, \partial_0(s)]\right) + \lambda^2\varepsilon^{2q}\left([\gamma, [\gamma^*, s]] - [\gamma^*, [\gamma, s]]\right).$$

线性化中相应的 （公式 5.11） 形式的项乘以$\varepsilon^{2\kappa}$ ，其中某个 $\kappa > 0$，而我们只希望理解阶数为 ε^{2q} 的项。因此，我们只需考虑 ε^q 项的贡献

$$s \mapsto \lambda\varepsilon^q \left(\partial_0([\gamma, s]) - [\gamma^*, \overline{\partial}_0(s)] + \overline{\partial}_0([\gamma^*, s]) - [\gamma, \partial_0(s)]\right). \qquad \text{(Eq. 5.12)}$$

当 $s = \mathbf{1}_\pm$ 时，这由 $\partial_0\gamma$ 和 $\partial_0\gamma^*$ 的常数倍组成，其中它们特别是非对角的。此外，由于联络 A_t 是弱 Hermite–Einstein 联络 E_1， E_2 的乘积，且精确到 ε^{q-1} 阶，因此曲率 F_{A_t} 精确到 ε^{q-1} 阶是对角的。进一步利用

$$\Delta_0 \mathbf{1}_\pm = 0$$

我们看到 （公式 5.11）中的项是以下各项的乘积:

- $C\varepsilon^{2\kappa}$ 的一个系数，用于 $\kappa > 0$,
- 一个阶数为 ε^q 的非对角项，来自（方程 5.12），其中 $s = \mathbf{1}_\pm$，并且
- 曲率项的一个乘积 $F_{A_t}^{j-1}$，这些曲率项截至ε^{q-1}阶均为对角的。

因此，方程（5.11）中的项至少到 $2\kappa + q + q - 1 = 2q - 1 + 2\kappa > 2q$阶都是非对角的。因此，每个这样的项都属于 π 的核，直到并包括 ε^{2q}阶，这表明

$$\pi(P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm)) = C\lambda^2\varepsilon^{2q}\mathbf{1}_\pm + O(\varepsilon^{2q+1}).$$

现在假设我们进行扰动 $g \cdot A_t$，其中 g 是构造近似解时产生的一个自同构。由于该扰动 g 是截至 ε^{q-1}阶的对角自同构，我们仍有$F_{g\cdot A_t}^{j-1}$ 截至并包括 ε^{q-1}阶都是对角的，因此只需分析

$$\partial_{g\cdot A_t}\overline{\partial}_{g\cdot A_t} - \overline{\partial}_{g\cdot A_t}\partial_{g\cdot A_t} - (\partial_{A_0}\overline{\partial}_{A_0} - \overline{\partial}_{A_0}\partial_{A_0}).$$

例如，我们有

$$\partial_{g\cdot A_t}\overline{\partial}_{g\cdot A_t} = g \circ \partial_{A_t} \circ g^{-2} \circ \overline{\partial}_{A_t} \circ g.$$

因此我们看到，只要 $g = \exp(s)$ 具有 $s = O(\varepsilon)$，那么对于扰动后的联络$g \cdot A_t$，我们在 (公式 5.12) 的 ε^q阶项中便有完全相同的贡献。因此，当 (公式 5.11) 中的所有项满足上述假设时 $A = g \cdot A_t$，我们便得到 $\pi(P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm))$ 的相同展开；在 $g \cdot A_t$ 处进行线性化时也同样如此。 □

命题 5.2.20. 假设 E 渐近地 Z-稳定，且其分次对象为 $\mathrm{Gr}(E) = E_1 \oplus E_2$，并且 E_1 的偏差阶为 q。令 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$。那么存在一个 $\lambda > 0$，使得若 $t = \lambda\varepsilon^q$，则存在厄米自同态 f_1，……，f_r，使得若

$$g := \exp\left(\sum_{j=1}^{r} f_j\varepsilon^j\right)$$

then

$$D_\varepsilon(\tilde{A}_t) = O(\varepsilon^{2r+1}).$$

证明。 证明采用归纳法。由 命题 5.2.17 可假设 $r > 2q$ ，这就确定了我们对 $\lambda > 0$的选择。记 $A_{r-1} = g_{r-1} \cdot A_t$ 为具有 $D_\varepsilon(A_{r-1}) = O(\varepsilon^r)$ 的近似解。那么，由于 $D_\varepsilon(A_{r-1}$的展开中的每一项都与 $\mathbf{1}_E$正交，因此可将其写为

$$D_\varepsilon(A_{r-1}) = (c_r \mathbf{1}_\pm + \sigma_r)\varepsilon^r + O(\varepsilon^{r+1})$$

其中， c_r 是一个常数，且 σ_r 与 Δ_0正交。

由于 $r > 2q$，在展开中 ε 变化的最低阶项

$$D_\varepsilon(\exp(\tau_r \varepsilon^{r-2q} \mathbf{1}_\pm) \cdot A_{r-1})$$

由在 A_{r-1} 处对 $s = \tau_r \varepsilon^{r-2q} \mathbf{1}_\pm$进行线性化给出。特别地，根据命题5.2.19 我们有

$$\pi(D_\varepsilon(\exp(s) \cdot A_{r-1})) = (c_r + \tau_r C)\varepsilon^{2q} \mathbf{1}_\pm + O(\varepsilon^{r+1})$$

对于某个取决于 λ的非零常数 C 。因此可以选择 τ_r 使得

$$c_r + \tau_r C = 0.$$

对于此 τ_r的选择，令 $\tilde{A}_r := \exp(\tau_r \varepsilon^{r-2q} \mathbf{1}_\pm) \cdot A_{r-1}$ 。那么， $D_\varepsilon(\tilde{A}_r)$与$\ker \Delta_0$ 正交，直到 ε^{r+1}阶。然而，我们只控制了到$\ker \Delta_0$上的投影，并且可能在 ε 的较低阶项中引入了误差，而这些误差与$\ker \Delta_0$正交。也就是说，我们有如下展开

$$D_\varepsilon(\tilde{A}_r) = \sum_{j=0}^{2q-2} \tilde{\sigma}_j \varepsilon^{r-2q+2+j} + O(\varepsilon^{r+1})$$

对于某些与 $\tilde{\sigma}_j$ 正交于核 Δ_0 的项， $\tilde{\sigma}_j$ 对于 $j \leq q-1$ 是对角的，因为$\mathbf{1}_\pm$ 是，而近似解 A_{r-1} 是一个直到 ε^{q-1}阶的乘积结构。

现在我们可以使用线性化˜，重复构造近似解的标准过程，以逐步消去这些从 ε^{r-2q+2} 阶开始的误差。特别地，存在某个 f_0 使得

$$\Delta_0(\tilde{f}_0) + \tilde{\sigma}_0 = 0$$

因此取 $\tilde{A}_r^1 = \exp(\tilde{f}_0\varepsilon^{r-2q+2}) \cdot \tilde{A}_r$，我们消除了 $\tilde{\sigma}_0$ 误差。这会在更高阶 ε^{r-2q+3} 及以上引入新的误差，但这些误差至少在阶数 ε^{r+2}以内仍与 $\mathbf{1}_{\pm}$正交，因为首阶修正项 $P_\varepsilon(\tilde{\sigma}_j)$ 在阶数 q以内与 $\mathbf{1}_{\pm}$正交，这是因为联络 A_{r-1} 在阶数 q以内是乘积。此外，高阶修正项作用的阶数至少为 $r-2q+2+j+2q > r+2$，因此不会影响低阶的修正（类似的修正见 [ST20，命题 5.16]）。这样，我们便得到上述形式的新展开，其求和从$j = 1$开始，其中的 $\tilde{\sigma}_j$ 仍与 $\ker\Delta_0$正交。以同样的方式依次消除所有这些误差，我们得到一个近似解 $\tilde{A}_r^{2q-2} = A_r$，满足

$$D_\varepsilon(A_r) = O(\varepsilon^{r+1})$$

正如所需。 □

5.2.6 步骤 5：扰动至解

构造出任意阶数的近似解后，我们现在希望应用反函数定理，以获得所有充分小的 $\varepsilon > 0$ 对应的邻近解。为此，我们应用反函数定理的一个定量版本（它可直接由标准证明推出；在应用巴拿赫不动点定理之前，需注意构造缩并时 Lipschitz 常数的用法）。要应用该定理，必须在近似解 A_r 处，为满足 $r > q$ 的线性化算子 Q_ε 的逆算子取得一个界；对于充分小的 $\varepsilon > 0$，该界关于 ε 是一致的。这样一来，我们就能找到大小确定的 A_r 邻域，只要 r 取得足够大，D_ε 在这些邻域上便是满射，从而获得所有充分小的 ε 对应的解。

The r 所需的界如下。这里，索伯列夫空间 $L^2_{d,\ 0}$ 表示

关于 h 和 ω 的 $\mathrm{End}\, E$ 的迹平均为零截面的 L^2_d 子空间。这些正是与 $\mathbf{1}_E \in L^2_d$ 正交的截面。

命题 5.2.21。假设 E_1 的偏差阶为 q。对任意 $d, r \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $P_\varepsilon : L^2_{d+2,0} \to L^2_{d,0}$ 为 Z-临界算子 D_ε 在联络 A_r 处的线性化，该联络由命题 5.2.20构造。则对所有充分小的 ε，P_ε 都可逆。若 $Q_\varepsilon : L^2_{d,0} \to L^2_{d+2,0}$ 表示其逆算子，则存在依赖于 d、r 的 $C > 0$，使得

$$\|Q_\varepsilon\|_{L^2_{d,0} \to L^2_{d+2,0}} \leq C\varepsilon^{-2q}.$$

证明。令 $s \in \Gamma_0(\mathrm{End}\ E)$，并写作 $s = \hat{s} + c_s \mathbf{1}_\pm$，其中 $\hat{s}$ 与 $\ker \Delta_0$ 正交。考虑算子

$$\tilde{P}_\varepsilon : L^2_{d+2,0} \to L^2_{d,0}$$

定义为

$$\tilde{P}_\varepsilon(s) = \mathrm{rk}(E)[\omega]^n \Delta_0(\hat{s}) + c_s C\lambda^2 \varepsilon^{2q} \mathbf{1}_\pm$$

其中 $C \neq 0$ 是命题 命题 5.2.19中给出的常数。该算子可逆，因为 $\Delta_0(\hat{s})$ 在 $\hat{s}$ 与 Δ_0 正交时仍与 $\ker \Delta_0$ s 正交，并且 Δ_0 在其核的正交补上可逆。

由丛拉普拉斯算子 Δ_0 的庞加莱不等式可知，对于正交于 $\ker \Delta_0$ 的 s，有 $\|P_\varepsilon(\hat{s})\| \geq C\|\hat{s}\|$。

另一方面，对于某个 C，我们有 $\|\tilde{P}_\varepsilon(c\mathbf{1}_\pm)\| \geq C\varepsilon^{2q}\|c\mathbf{1}_\pm\|$，因此结合这些不等式可得一个界

$$\|\tilde{P}_\varepsilon(s)\| \geq C\varepsilon^{2q}\|s\|$$

对于某个 $C > 0$ 以及任意与 $\mathbf{1}_E$ 正交的 s。

请回想，在构造近似解时，扰动解是一个乘积，直到并包括 ε^{q-1} 阶。

现在，对于$s \in$ 核 $\Delta_0^\perp$，我们有 $\tilde{P}_\varepsilon(s)$ 是线性化 $P_\varepsilon(s)$ 中的首阶项，这是由推论 5.2.14得出的。因此，我们得到类似的界

$$\|P_\varepsilon(\hat{s})\| \geq C\|\hat{s}\|$$

对于这样的 s，只要 $\varepsilon > 0$ 取得足够小。类似地，由命题 5.2.19~可知，$P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm)$ 在 $P_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm)$ 上的投影的首阶项为。因此，我们得到一个界

$$\|\pi P_\varepsilon(c\mathbf{1}_\pm)\| \geq C\varepsilon^{2q}\|c\mathbf{1}_\pm\|$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时。现在我们来考察差值

$$R_\varepsilon = P_\varepsilon - \tilde{P}_\varepsilon.$$

于是我们得到展开式

$$R_\varepsilon(\hat{s}) = \sum_{j=1}^{2q} \varepsilon^j T_j(\hat{s}) + O(\varepsilon^{2q+1})$$

对于 $\hat{s} \in \ker \Delta_0^\perp$ 和

$$R_\varepsilon(\mathbf{1}_\pm) = \sum_{j=0}^{2q} \varepsilon^j \sigma_j + O(\varepsilon^{2q+1})$$

其中 $\pi\sigma_j = 0$ 对所有这样的 j 由 命题 5.2.19。

现在我们注意到，$R_\varepsilon(\hat{s})$ 的像属于 $\ker \Delta_0^\perp$，直到并包括 ε^q 阶。事实上，唯一相关的对角贡献出现在 ε^q 阶，且恰好就是误差项 σ_2，它出现在 命题 5.2.17 中；我们已观察到它满足 $\pi\sigma_2 = 0$。此项对线性化的贡献是算子

$$\hat{s} \mapsto \varepsilon^{2q} i\Lambda_\omega d_0([[\gamma - \gamma^*, \sigma - \sigma^*], \hat{s}])$$

因此，对于任意 $\hat{s}$，它都属于 $\ker\Delta_0^\perp$，因为 $\sigma \circ \gamma^* - \gamma \circ \sigma^*$ 是无迹的。

为得到所需的界，由自伴性可知，只需证明该界

$$\langle P_\varepsilon(s), s\rangle \geq C\varepsilon^{2q}\|s\|^2.$$

根据以上讨论，$s = \hat{s}$ 与 $\ker \Delta_0$ 和 $s = \mathbf{1}_\pm$ 正交的情形已经得出结论，因此只需验证任意 $s = \hat{s} + c_s\mathbf{1}_\pm$ 的界限。于是我们

需要验证

$$\langle P_\varepsilon(\hat{s}), c_s\mathbf{1}_\pm\rangle + \langle \hat{s}, P_\varepsilon(c_s\mathbf{1}_\pm)\rangle \geq C\varepsilon^{2q}\|s\|^2.$$

根据上述关于 $R_\varepsilon(\hat{s})$ 的讨论，我们知道 $P_\varepsilon(\hat{s})$ 与 $\mathbf{1}_\pm$ 正交，直至 ε^q 阶，因此 $|\langle P_\varepsilon(\hat{s})\ c_s\mathbf{1}_\pm\rangle| \geq C'\varepsilon^{q+1}|c_s|\|s\|$。现在我们还希望证明

$$\langle P_\varepsilon(c_s\mathbf{1}_\pm), \hat{s}\rangle \geq C\varepsilon^{q+1}|c_s|\|s\|.$$

根据 引理 5.2.13 和推论 5.2.14 的展开，以及近似解 A_r 在 ε^q 阶以内为对角的这一事实，我们看到关键贡献来自与曲率的线性化中 ε^q 阶项的内积，该项具有如下形式

$$i\Lambda_\omega(\partial_0([\gamma_\varepsilon, c_s\mathbf{1}_\pm]) + \overline{\partial}_0([\gamma_\varepsilon^*, c_s\mathbf{1}_\pm])).$$

由于 $\hat{s}$ 是厄米自同态，与上述形式取内积所产生的对角贡献的和是无迹的，因此 ε^q 阶的内积为零。于是我们得到所需的界，并且存在某个 $C' > 0$ 使得

$$\langle P_\varepsilon(\hat{s}), c_s\mathbf{1}_\pm\rangle + \langle \hat{s}, P_\varepsilon(c_s\mathbf{1}_\pm)\rangle \geq C'\varepsilon^{q+1}|c_s|\|\hat{s}\|$$

现在写成 $\varepsilon^{q+1}|c_s|\|\hat{s}\| = \varepsilon\|s\||\varepsilon^q c_s|$ 并配方，可得

$$\begin{aligned} C'\varepsilon^{q+1}|c_s|\|\hat{s}\| &= \frac{1}{2}C'\varepsilon\left((|\varepsilon^q c_s| + \|\hat{s}\|)^2 - (\varepsilon^{2q}|c_s|^2 + \|\hat{s}\|^2)\right) \\ &\geq -\frac{1}{2}C'\varepsilon\left((\varepsilon^{2q}|c_s|^2 + \|\hat{s}\|^2)\right) \end{aligned}$$

现在这是一个负的下界，但由于当 ε 足够小时存在因子 ε，该项可以吸收到界 $\langle P_\varepsilon(\hat{s}),\ \hat{s}\rangle \geq C\|\hat{s}\|^2$ 和 $\langle P_\varepsilon(c_s\mathbf{1}_\pm)\ c_s\mathbf{1}_\pm\rangle \geq C\varepsilon^{2q}|c_s|^2$. 中。因此总的界为

$$\langle P_\varepsilon(s), s\rangle \geq C\varepsilon^{2q}\|s\|^2$$

对于某个 $C > 0$。由 P_ε 的自伴性，我们得到了

算子本身的所需下界，对任意$s \in L^2_{d+2,0}$均成立。这便得到了所需的逆算子 Q_ε 的相应上界。 □

为了应用反函数定理，我们还需要更仔细地了解 Z-临界算子 D_ε 的非线性部分何时是Lipschitz连续的。我们将利用巴拿赫空间的中值定理来证明这一点，具体如下。

引理 5.2.22. 令 $\mathcal{M}_{\varepsilon,r}$ 表示非线性部分 $D_{\varepsilon,r} - P_{\varepsilon,r}$，它是 Z-临界算子在联络 A_r 处的非线性部分，该联络由 命题 *5.2.20*构造。则存在常数$c, C > 0$，使得对所有充分小的 $\varepsilon > 0$，对于 $s_0, s_1 \in L^2_{d+2,0}$且满足 $\|s_i\| \leq c$,

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_0) - \mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_1)\|_{L^2_d} \leq C(\|s_0\|_{L^2_{d+2}} + \|s_1\|_{L^2_{d+2}})\|s_0 - s_1\|_{L^2_{d+2}}.$$

证明。 我们应用中值定理。令 $s_0, s_1 \in B_0(c) \subset L^2_{d+2,0}$。考虑路径 $s(t) = (1-t)s_0 + ts_1$。那么，根据巴拿赫空间的中值定理，存在某个 $s^* = s(t^*)$ 使得

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_0) - \mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_1) = (D\mathcal{M}_{\varepsilon,r})_{s^*}(s_0 - s_1).$$

Now

$$(D\mathcal{M}_{\varepsilon,r})_{s^*} = (P_{\varepsilon,r})_{s^*} - (P_{\varepsilon,r})_0$$

其中 $(P_{\varepsilon,r})_s$ 是 Z-临界算子 D_ε 在 $\exp(s) \cdot A_r$处的线性化。因此我们需要估计

$$\|(P_{\varepsilon,r})_{s^*} - (P_{\varepsilon,r})_0\|_{L^2_{d+2}}.$$

令 $g = \exp(s^*)$，并回顾 引理 2.2.23 及 $t = 1$，我们看到线性化 $(P_{\varepsilon,r})_{s^*} - (P_{\varepsilon,r})_0$ 中的阶数为$O(\varepsilon^0)$的项将由以下形式的项组成

$$V \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\partial_{A_r}, \overline{\partial}_{A_r}, s^*, V)$$

其中，f_i 是一个多项式表达式，其每一项恰好包含s^*的 i 个因子、一个∂_{A_r}、 ∂_{A_r} 和 V。设我们选择 $\bar{c} \leq 1/2$ 使得 $\|s^*\| \leq 1/2$，则有

$\|s^*\|^i \leq \|s^*\|$ 因此，按 ε^0的阶排列后，我们可以迅速得到界

$$\|(P_{\varepsilon,r})_{s^*} - (P_{\varepsilon,r})_0\|^0 \leq C\|s^*\|$$

对于某个取决于 A_r 的 C。选择足够小的 ε，我们可以对展开中 ε 的更高阶项重复这一过程，从而得到一个界

$$\|(P_{\varepsilon,r})_{s^*} - (P_{\varepsilon,r})_0\| \leq C\|s^*\|.$$

现在，由于 s^* 是 s_0 和 s_1 的凸线性组合，

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_0) - \mathcal{M}_{\varepsilon,r}(s_1)\| \leq C(\|s_0\| + \|s_1\|)\|s_0 - s_1\|$$

对于某个 C，$c > 0$，以及所有足够小且满足 $\|s_0\|$，$\|s_1\| \leq c$ 的 ε。 □

上述引理给出了算子 D_ε 的非线性部分在以 $\rho < c$ 为中心的递减半径 $0 \in L^2_{d+2,\ 0}$的球上的 Lipschitz 常数的刻画。利用这一刻画，我们将应用定量反函数定理，求得 Z-临界方程的一个解。例如，参见 [Fin04，定理 4。1]。

定理 5.2.23 (定量反函数定理)。 设 $\Phi : V \to W$ 是巴拿赫空间 V、W 之间的可微映射，其在0处的线性化 $P = D\Phi$ 可逆，逆算子为 Q。令

- δ' 是 V中闭球的半径，使得 $\Phi - P$是 *Lipschitz*连续的，常数为$\frac{1}{2\|Q\|}$.;
——

- $\delta = \frac{\delta'}{2\|Q\|}$.

那么，对于所有满足 $\|w - \Phi(0)\| < \delta$的 $w \in W$，都存在一个 $v \in V$，满足 $\Phi(v) = w$。

最后，我们可以完成存在性结果的证明。

定理 *5.2.1* 的证明。 现在我们可以证明存在一个 Z-临界方程的解。我们希望找到 D_ε 的一个根，使其接近某个近似解 A_r，该近似解由命题 5.2.20 构造得到，适用于所有 $\varepsilon > 0$ 充分小的情形。根据引理 5.2.22

我们看到，存在某个常数 $C > 0$ ，使得对于所有 $\rho > 0$ 充分小的情形，非线性部分$\mathcal{M}_{\varepsilon,\, r}$ 在 D_ε 处 A_r 是 Lipschitz连续的，其 Lipschitz 常数为 $2C\rho$，定义在半径为 ρ的球上。此外，根据命题 5.2.21 我们有如下界

$$C_r\varepsilon^{2q} \leq \frac{1}{2\|Q_{\varepsilon,r}\|}$$

对某个常数 $C_r > 0$成立。因此，存在一个常数 $C'_r > 0$ ，使得在半径为δ' 的球上，$\mathcal{M}_{\varepsilon,\, r}$ 是 Lipschitz连续的，其 Lipschitz 常数为 $\frac{1}{2\|Q_{\varepsilon,\, r}\|}$ 的下界为——

$$C'_r\varepsilon^{2q} \leq \delta'$$

对某个常数 $C'_r = C_r/2C > 0$成立。

因此，根据 δ 的定义，并再次应用下界 *Proposition* 5.2.21，我们得到下界

$$C''_r\varepsilon^{4q} \leq \delta$$

对某个常数 $C''_r = C_r^2/2C > 0$成立。现在令 $r = 4q$。那么 $\|D_\varepsilon(A_r)\| \leq C'''_r\varepsilon^{4q+1}$ ，其中某个常数为 C'''_r。因此，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时， $D_\varepsilon(A_r)$包含在半径为 $C''_r\varepsilon^{4q}$的球内，进而包含在半径为 δ的球内。

根据反函数定理 定理 5.2.23，对于 $\Phi = D_\varepsilon$ ，因此我们可以在 D_ε 中找到一个根$L^2_{d+2,\, 0}$ 当 ε 充分小时。根据命题 4.3.9 ，Z-临界算子在如此小的 ε下是椭圆的，因此根据椭圆正则性，此解是光滑的。

□

5.2.7 一般情形的注记

在定理 5.2.1 的证明中，我们只考虑了 Gr(E) 有一个或两个分支的情形。事实上，当 Gr(E) 有两个分支时， 命题 5.2.17 清楚地展示了渐近 Z-稳定性假设如何影响近似解构造的分析。

在 [DMS21，§4]所讨论的一般情形中，会出现相当大的技术困难，原因如下：当 Gr(E) $= E_1 \oplus \cdots \oplus E_\ell$时，渐近$Z$-稳定性这一假设不再保证局部自由因子 E_i 两两非同

构。事实上，Gr(E) 可能存在置换因子的自同构，因此核 $\ker \Delta_0 = H^0(X,$ End Gr(E)) 会变得更加复杂。这使得上述论证在两方面都更加困难：

- 从 Gr(E) 到 E 的复结构变形由第二基本形式 γ 指定，其非对角形状更为复杂，这意味着在每个阶段构造近似解时都必须格外谨慎。

- 证明线性化算子 Q_ε 逆算子命题 5.2.21的界时必须格外谨慎，因为其核并非仅由对角自同态之和构成。

为了控制这些额外因子，在 [DMS21的§4.2] 中构造了一种依赖于稳定性条件¨的 Jordan–H Z older 滤过的细化，使得利用该滤过诱导的复结构变形具有特别良好的形式。沿此滤过进行归纳，可构造任意阶的近似解，并证明逆算子 Q_ε 的界。

一旦建立了相同的近似解和界，定理 5.2.1 的证明便可原样重复，从而得到 Z-临界度量。

注 5.2.24. Dervan 已为簇发展出一套 Z-临界联络与渐近Z-稳定性理论，其中所谓的“Z-临界 K¨ahler 度量”是常标量曲率 Kähler 度量的扰动，而渐近 Z-稳定性收敛到 K-稳定性 [Der21]。Dervan 在该问题中运用矩映射形式，将扰动结果归结为有限维的几何不变理论型问题；这一技术似乎相当普遍。鉴于第 4.5 节对 -临界方程的动量映射描述，如果能将此类技术用于研究丛上的 Z-临界度量，将会很有意思。 Z

第二部分

K¨ahler 纤维化

第6章

背景

本章将回顾 Dervan–Sektnan 引入的 K¨ahler 纤维化上的最优辛联络 [DS21b]，，并根据原理1.1，介绍相应的纤维化稳定性概念 [DS21a]。

就本文而言，我们还将介绍全纯主丛上的稳定性理论与 Hermite–Einstein 联络理论。这一理论是全纯向量丛相关理论的一种变体，但与之密切相关；后者已在第2.2节中介绍。

6.1 最优辛联络

首先，我们将回顾 Dervan–Sektnan 提出最优辛联络（OSCs）的研究动机。我们所考虑的空间是某些 Kähler 纤维化。

6.1.1 K¨ahler 纤维化

定义 6.1.1 （K¨ahler 纤维化）。一个 *K¨ahler* 纤维化由一个满射全纯浸没构成

$$\pi : (X, \omega_X) \to (B, \omega_B)$$

其中（B,ω_B）是 K¨ahler 的，且 ω_X 是复流形 X上的闭 (1,1)-形式，其在纤维方向上的限制非退化。也就是说， ω_X 是垂直方向上的 K¨ahler 形式。我们称这样的形式为相对 ***K¨ahler***。将 $\omega_X|_{X_b}$ 在任意纤维上的限制记为 ω_b。

在接下来的理论中，我们始终作出以下进一步假设：

- 我们始终记 $B = n$ 的维数为 dim，并记 $X/B = m$的相对维数为 reldim，从而任意纤维的维数为 dim $X_b = m$。
- 空间 X 和 B 始终是紧致的。在这种情况下，Ehresmann引理表明 $X \to B$ 具有光滑纤维丛的结构，但纤维的复结构可能发生变化。
- 我们始终假设纤维（X_b,ω_b）是cscK流形，因此对每个 b，S（ω_b）都是常数。我们将满足这一假设的相对K¨ahler度量称为相对***cscK***度量。
- 我们始终考虑极化情形，即对于某个丰线丛 $L \to B$ ， $\omega_B \in c_1$（L），并且对于某个相对丰线丛$H \to X$， $\omega_X \in c_1$（H）。
- 我们假设维数 dimAut(X_b,ω_b) 与 b无关。由此，根据下面第 第 6.1.2 节 的讨论，空间 $\mathfrak{h}_0(X_b,\omega_B)^{\mathbb{R}}$上实值零均值全纯势的维数 X_b 与$b \in B$无关。

由于形式 ω_X 是相对辛的，K¨ahler 纤维化的研究是更一般的辛纤维化理论的复数域类比（例如参见 [MS17]）。我们来强调辛结构在纤维化（X,ω_X） $\to$（B,ω_B）中带来的一些关键特征。由于 ω_X 在垂直子丛 $\mathcal{V} \subset TX$方向上非退化，因此相对于 ω_X存在一个正交补 $\mathcal{H} \subset TX$ ，即水平子丛，使得 $TX = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$。这在 X 作为纤维丛的结构上定义了一个 Ehresmann 联络，其曲率 $F_{\mathcal{H}} \in \Omega^2$（$X$，$\mathcal{V}$）定义为

$$F_{\mathcal{H}}(u,v) = [u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{V}} = [u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}}] - [u,v]_{\mathcal{H}}.$$

D定义 6.1.2（辛曲率）。给定两个向量 $u,\ v \in T_bB$,

$$F_{\mathcal{H}}(u^{\#}, v^{\#}) \in \mathrm{Symp}(X_b, \omega_b)$$

是一个辛向量场，其中 $u^{\#}$ 和 $v^{\#}$ 是 u, v的水平提升。记（不严谨地）

$$F_{\mathcal{H}} \in \Omega^2(B, \mathrm{Symp}(\mathcal{V}, \omega_X))$$

这是定义在 B 上的、取值于 (X, ω_X) 上纤维方向辛向量场的二形式。这就是 $(X, \omega_X) \to B$的辛曲率 。

在这一辛几何背景下，我们有如下重要定理。

定理 6.1.3（最小耦合，参见 [GLS96, §1], [DS21b，引理 3.2]）。辛曲率 $F_{\mathcal{H}}$ 的取值总是垂直哈密顿向量场。此外，若 $\mu^* : \mathrm{Ham}(\mathcal{V}) \to C_0^\infty(X)$ 表示将垂直哈密顿向量场映射到其在 X上的相对（均值为零）哈密顿函数的映射，并且我们滥用记号，将 $\mu^* F_{\mathcal{H}}$ 与其在 X的全空间上的拉回相识别，则

$$\mu^* F_{\mathcal{H}} = (\omega_X)_{\mathcal{H}} + \pi^* \beta$$

where $(\omega_X)_{\mathcal{H}}$ 是 ω_X 的水平分量，而 β 是 B上的某个二形式 .

6.1.2 全纯势与自同构

正如上一节所述，我们始终假设 K¨ahler 纤维化的纤维（$X_b,\ \omega_b$）是常标量曲率 Kähler 流形。现在我们来讨论这对辛曲率和纤维化自同构的影响。为此，我们必须回顾 K¨ahler 流形上的一类特殊哈密顿型函数，即全纯势。

定义 6.1.4。设（$Y,\ \omega$）为一个紧致 K¨ahler 流形。f 上的全纯势是指满足下式的函数 $f : Y \to \mathbb{C}$

$$\overline{\partial} \nabla^{1,0} f = 0$$

其中 $\nabla^{1,0}$ 是 f的黎曼梯度的（1，0）-分量。任意这样的函数 f 都定义了一个全纯向量场

$$\xi_f = \nabla^{1,0} f,$$

f的辛梯度的 $(1,0)$ 部分。将全纯势空间记为

$$\mathfrak{h} := \ker \overline{\partial} \nabla^{1,0} : C^\infty(Y, \mathbb{C}) \to \Omega^{0,1}(T^{1,0}Y).$$

全纯势生成全纯向量场，这些向量场属于 K¨ahler 流形 Y 的全纯自同构群 Aut(Y) 的李代数 $H^0(Y, TY)$。相差一个常数的两个全纯势定义同一个向量场，因此我们通过限制为均值为零的全纯势来消除这一不确定性，并将其记为 $\mathfrak{h}_0$。

我们还假设该纤维化是极化的，因此有一对 $(X, H) \to (B, L)$，其中 H 是相对丰沛的，L 是丰沛的。对于极化紧致 K¨ahler 流形 (Y, ω, H_Y)，我们可以考虑约化自同构群

$$\mathrm{Aut}(Y, H_Y) \subset \mathrm{Aut}(Y)$$

Y到 H_Y 的提升自同构群。李代数

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(Y, H_Y)$$

可以与 X 上处处有零点的非零全纯向量场等同。这类向量场恰好可以写成 $\nabla^{1,0} f$ 的形式，其中 f 是某个均值为零的全纯势，因此我们有如下等同

$$\mathfrak{h}_0 \cong \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(Y, H_Y).$$

参见 [Gau10，§3。5]了解更多详情。

若 $\omega \in c_1(H_Y)$ 是 K¨ahler 形式，则我们得到一群全纯等距变换 Isom(Y，ω) $\subset$ Aut(Y)，以及约化等距群 Isom(Y，ω，H_Y) $\subset$ Aut(Y，H_Y)，其元素是可提升到 H_Y 的全纯等距变换。李代数 Isom(Y，ω，H_Y) 由

在 Y 上某处消失的全纯 Killing 向量场所构成的空间给出。以下定理表明，当 (Y, ω) 是常标量曲率 Kähler 时，这类自同构可以用全纯势来描述。

命题 6.1.5 (松岛–利希纳罗维奇定理（参见 [Gau10, §3.5,3.6]）)。若 (Y, ω, H_Y) 是一个极化流形，且 ω 是常标量曲率 *Kähler* 度量，则约化自同构群 $\mathrm{Aut}(Y, H_Y)$ 是约化群，而约化全纯等距变换群$\mathrm{Isom}(Y, \omega, H_Y)$ 是一个极大紧子群。在以下识别下

$$\mathfrak{h} \cong \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(Y, H_Y)$$

这对应于如下分解

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}}$$

（均值为零的）全纯势，其中 $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}}$ 表示实的、均值为零的全纯势 $f\colon\ Y \to \mathbb{R}$。在全纯势与全纯向量场之间的同构下，纯虚全纯势$f \in i\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}}$生成一个 *Killing* 向量场 $\nabla^{1,0} f \in \mathrm{LieIsom}(Y, \omega_Y, H_Y)$。

注 6.1.6。我们还可以进一步描述类 $c_1(H_Y)$ 中所有常标量曲率 Kähler 度量所成的空间：通过构造该空间与齐性空间 $\mathrm{Aut}(Y, H_Y)/\mathrm{Isom}(Y, \omega_Y, H_Y)$ 之间的一个识别，其中 ω_Y 是一个固定的常标量曲率 Kähler 度量。进一步利用黎曼指数映射是该空间上的一个微分同胚，可以推导出一个同构

$$\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Aut}(Y, H_Y)/\,\mathrm{Isom}(Y, \omega_Y, H_Y)$$

的实均值为零的全纯势（相对于 ω_Y 与该类中的常标量曲率 Kähler 度量集合 $c_1(H_Y)$）。例如，参见 [Hal22，§2。2] 其中对这一描述有更详细的讨论。

6.1.3 方程

现在我们转向 [DS21b]所研究的问题。我们将简要回顾其在绝热极限中的起源；当我们考虑德拉姆上同调类时，就会出现这一极限

$$[\omega_X + k\pi^*\omega_B] = c_1(H) + kc_1(L)$$

在 X 上，对于 $k \gg 0$ 而言，它是一个 K¨ahler 类（下文提及 ω_B 在 X 上的情形时，将省略 π^* ）。在此背景下，关于典范度量的自然问题如下：

问题 6.1.7。一个绝热 K¨ahler 类 $[\omega_X + k\omega_B]$ 何时会存在具有常数标量曲率的 K¨ahler 度量?

为了回答这一问题，计算标量曲率 $S(\omega_X + k\omega_B)$ 关于 k的幂展开很有用。我们有（参见 [DS21b，推论 4。7]）

$$S(\omega_X + k\omega_B) = S(\omega_b) + k^{-1}(S(\omega_B) + \Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}} + \Delta_{\mathcal{V}}(\Lambda_{\omega_B}(\omega_X)_{\mathcal{H}})) + O(k^{-2}). \tag{Eq. 6.1}$$

这里，$S(\omega_b)$ 是 X 上的函数，其在纤维 X_b 上的限制是 ω_b的标量曲率。由于它是展开式 （方程 6.1）中的首项，因此，为了以一阶近似回答 问题 6.1.7，我们应要求 $S(\omega_b)$ 是 X_b 上的常数函数，对于每个 b，正如我们在 第 6.1.1 节中所假设的那样。

展开式中的其他项（式 6.1）定义如下：

- 对于 X上的微分形式 β ，水平分量 $\beta_{\mathcal{H}}$ 表示限制在由 ω_X定义的水平分布上的部分。
- 缩并 Λ_{ω_B} 为

$$\Lambda_{\omega_B}\beta = n\frac{\beta_{\mathcal{H}} \wedge \omega_B^{n-1}}{\omega_B^n}$$

其中商是在 $\det \mathcal{H}^*$ 中取的。当 β 是从 B 拉回的时，这就是 β 与 ω_B 在 B 上的通常缩并的拉回。

- 形式 ρ 表示 ω_X 的相对里奇曲率，定义如下。形式 ω_X 在垂直方向上是 K¨ahler，因此在 $\mathcal{V} \to X$ 上诱导出一个正定厄米度量。全纯线丛 $\det \mathcal{V} \to X$ 上诱导的厄米度量的曲率形式为 ρ。在局部坐标中，可以写成

$$\rho = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det(\omega_X)_{\mathcal{V}}$$

其中行列式取在 $\mathcal{V}^*$中，因此 $\rho_{\mathcal{V}}$ 等于（X_b， ω_b）的里奇曲率。注意，由于 $\partial\overline{\partial}$ 取在 X的全空间上， ρ 可能具有非平凡的水平分量 $\rho_{\mathcal{H}}$。

- 作用于 X 上的函数 f 的竖直拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{V}}$ 定义为

$$\Delta_{\mathcal{V}} = \Lambda_{\mathcal{V}}(i\partial\overline{\partial}f)$$

其中， $\Lambda_{\mathcal{V}}$ 是关于 ω_X的竖直收缩，定义为

$$\Lambda_{\mathcal{V}}\beta = m\frac{\beta_{\mathcal{V}} \wedge \omega_X^{m-1}}{\omega_X^m}$$

其中商取在 $\det \mathcal{V}^*$ 中。

为了写出最优辛联络，我们还需要另一个要素，即某个投影算子

$$p : C^\infty(X, \mathbb{C}) \to C^\infty_E(X).$$

这里 $C^\infty_E(X)$是 $C^\infty(X,\ \mathbb{C})$中的光滑函数子空间，它们在每个纤维（X_b， ω_b）上的限制都是均值为零的实 全纯势：

$$C^\infty_E(X) := \left\{ f \in C^\infty(X, \mathbb{C}) \mid f|_{X_b} \in \mathfrak{h}_0(X_b, \omega_b)^{\mathbb{R}} \text{ and } \int_{X_b} f|_{X_b}\,\omega_b^m = 0 \text{ for all } b \in B \right\}.$$

实值零均值全纯势的向量空间 $E_b := \mathfrak{h}_0(X_b,\ \omega_b)^{\mathbb{R}}$ 在 $(X_b,\ \omega_b)$ 上的维数与 b 无关，这是由我们的最后一个假设得出的，见 第 6.1.1 节 ，以及约化自同构群的李代数与全纯势相同这一事实

势，如第 6.1.2 节所述。事实上，这些向量空间 E_b 构成 B 上的一个实向量丛，而 $E \to B$ 的光滑截面恰好可与 $C^\infty_E(X)$ 中的一个光滑函数相对应（[DS21b，第 13] 页）。此外，Hallam [Hal22] 解释了，在同一个相对 K¨ahler 类 $[\omega_X]$中的相对 cscK 度量 ω_X 可与 E 的光滑截面相对应（在每个纤维上，这对应于 注 6.1.6中的讨论）。

投影 p 是相对于内积定义在 $C^\infty_E(X)$ 上的 L^2 投影

$$(f, g) \mapsto \int_X fg\omega_B^n \wedge \omega_X^m$$

定义在 $(X, \omega_X) \to (B, \omega_B)$ 上。

注记 6.1.8。 请注意，如果 $f \in C^\infty(B)$ 是底空间上的光滑函数，那么$p(\pi^* f) = 0$。特别地，如果 φ是 B 上的光滑函数，那么根据以下观察， $p(\Lambda_{\omega_B}\pi^*(i\partial\bar{\partial}\varphi)) = 0$: 对于拉回形式， X 上的水平缩并就是底空间上的缩并。

定义 6.1.9。 **</style紧致 Kähler 纤维化 :(,ω_B)** 上的相对常数标量曲率 Kähler 度量 ω_X 是最优辛联络，如果

$$p(\Delta_\nu \Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}} + \Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}}) = 0. \qquad \text{(Eq. 6.2)}$$

注意，根据 注记 6.1.8 和定理 6.1.3，我们也可以等价地写成 $(\omega_X)_{\mathcal{H}}$，而不是 $\mu^* F_{\mathcal{H}}$，因此投影内的项与方程 (6.1)次主阶上的各项一致。

注 6.1.10。 正如 [DS21b 中 §3.5]所指出的，全纯向量丛 $\mathbb{P}(E)$ 的射影化上的最优辛联络，恰好源自其上的 Hermite–Einstein 度量 E。此外，由相对常标量曲率 Kähler 假设可直接推出，在纤维化$X \to \{p\}$ 以一点为底空间时，最优辛联络实际上就是 X上的常数标量曲率 Kähler 度量。从这个意义上说，最优辛联络的概念在簇上的常标量曲率 Kähler 度量与向量丛上的 Hermite–Einstein 度量之间起到了衔接作用。

现在让我们回顾 Dervan–Sektnan 关于绝热 K¨ahler 类中常标量曲率 Kähler 度量的存在性结果。

定理 6.1.11 ([DS21b])。 一个紧致极化纤维化 $\pi : (X, H) \to$在类 $H + k(B, L)$ 中当 $k \gg 0$ 充分大时均承认常标量曲率 *Kähler* 度量，只要

- X 承认一个最优辛联络 $\omega_X \in c_1(H)$，[1] 并且
- 底空间 (B, L) 承认一个扭曲常标量曲率 *Kähler* 度量 $\omega_B \in c_1(L)$ 使得

$$S(\omega_B) - \Lambda_{\omega_B}\alpha = const$$

其中 $\alpha = q^*\Omega_{WP}$ 是从 *cscK* 流形模空间拉回的 *Weil–Peterson* 度量。[2]

形式 α 可以利用 Dervan–Naumann [DN18], 关于带自同构的 cscK 流形模空间存在性的结果，通过拉回定义，尽管该形式可以识别为纤维积分

$$\alpha = -\int_{X/B} \rho_{\mathcal{H}} \wedge \omega_X^m$$

无需借助模空间。条件 X 承认一个最优辛联络，在 (X, H) 的纤维具有离散自同构时是平凡的；此时上述定理由 Fine [Fin04]的工作推出，前提是 X 是一个曲面，而 B 是一条曲线。

我们还有以下由 Dervan–Sektnan 和 Hallam 得出的唯一性结果。

定理 6.1.12 ([DS21b, Hal20])。设 ω_X, ω'_X 是 *K¨ahler* 纤维化上的两个上同调最优辛联络 $\pi : X \to (B, \omega_B)$。那么存在一个

[1]将投影纳入其中 p，与展开(式 6.1)进行比较后便一目了然。事实上，空间 $C^\infty_E(X) \oplus \pi * C^\infty(B)$ 是绝热标量曲率线性化的核，因此，假设 ω_X 是最优辛联络（OSC），便可确保对(式 6.1) 的高阶修正不存在障碍，并可利用线性化构造任意精度的近似解。[2]出现这一项，是因为函数 $\Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}}$ 在 $\pi^*C^\infty(B)$ 上的投影非零，且其值恰好由底空间上 Weil–Peterson 度量的缩并给出。

纤维化 $X \to B$ 的全纯自同构 g（一个双全纯 $g\colon X \to X$使得 $\pi \circ g = \pi$），以及定义在 B 上的函数 φ，使得

$$\omega_X = g^*\omega'_X + \pi^*(i\partial\overline{\partial}\varphi).$$

由于这些形式上同调， 自同构 g 总可以取为纤维化自同构群 自同构群$_0(\pi)$ 的单位连通分支中的元素 自同构群(π) 。

对这一唯一性结果的一种解释是，最优辛联络在紧致 K¨ahler 纤维化上给出了典范的 相对 K¨ahler 度量。

注 6.1.13。 Ortu 已将前述最优辛联络的概念推广到相对常标量曲率 Kähler 纤维化 ([Ortu22] 的光滑变形 $Y \to (B, \omega_B)$ 上，其中该纤维化为 $(X, \omega_X) \to (B, \omega_B)$。在这种情况下，(方程 6.2) 中会出现一个与纤维的复结构变形相关的额外项，并且定理 6.1.11 的一个版本在变形后的纤维化 Y上得到了证明。从代数角度看，这类变形应对应于仅具有 K-半稳定纤维的纤维化（而非相对常标量曲率 Kähler 纤维化；根据猜想2.3.7 ，后者应对应于具有 K多重稳定纤维的纤维化）。由于 K半稳定性是一个开条件，这类纤维化应更适合构造模空间。

注 6.1.14。 鉴于第2.1节中的 Kempf–Ness 图景，我们注意到，Hallam [Hal20] 提出了 K 稳定性 Mabuchi 泛函的相对版本（见第2.3.2节），该泛函可作为最优辛联络方程的 Kempf–Ness 泛函。然而，如何从动量映射的角度解释该方程仍是一个未解决的问题。

6.2 纤维化的稳定性

现在，如原理 1.1所提示的，我们来阐述与前文所述纤维化上的典范度量概念相对应的代数几何理论。正如 OSC 方程在射影丛的情形下推广了 Hermite–Einstein 方程，这一理论将与第 2.2.1 节中针对向量丛所描述的斜率稳定性密切相关。

我们从一个极化纤维化 π：（X， H）$\to$（B， L）开始，其中 L 是丰沛的，且H 是相对丰沛的。我们将在 X 和 B 均光滑，且X_b、 H_b的纤维是 K-多项式稳定的情形下进行研究。这与最优辛联络的讨论中所采用的纤维为常标量曲率 Kähler 的假设一致（假定 Yau–Tian–Donaldson 猜想猜想2.3.7成立）。为了刻画稳定性，我们首先定义纤维化的测试构型，其定义类似于定义 2.3.1。

定义 6.2.1（纤维化退化）。对于 $k \gg 0$， $\pi : (X, H) \to (B, L)$ 的 k 次指数纤维化退化是指一个概形 p：$\mathcal{X} \to B \times \mathbb{C}$，定义在 $\mathbb{C}$ 上，以及 $\mathcal{H}$ 上的相对丰线丛 $\mathcal{X}$，使得

- 态射 p：$\mathcal{X} \to B \times \mathbb{C}$ 是平坦的，
- 对于 $t \neq 0$，$(\mathcal{X}_t, \mathcal{H}_t) \cong (X, H^k)$，
- 存在一个在 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用，它提升到 $\mathcal{H}$，且覆盖 $B \times \mathbb{C}$ 上的标准作用（该作用在 B 上是平凡的）。

如果存在一个 $\mathbb{C}^*$-等变同构 $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$，使得 X 上的作用由群 Aut(π) 的一个单参数子群给出，其中 Aut(π) 是纤维化 $(X, H) \to (B, L)$ 的相对自同构群，那么我们称该纤维化退化为乘积 型。此外，如果这个单参数子群是平凡的，使得 $\mathbb{C}^*$ 仅作用于 $X \times \mathbb{C}$ 的第二个因子上，那么我们称该纤维化退化是平凡的。

如果存在一个 $\mathbb{C}^*$-等变同构 $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$，使其成为 $B \times \mathbb{C}$ 上的纤维化，我们就称该纤维化退化为乘积 退化。若进一步有 $\mathcal{H} \cong H$，则称其为平凡的

注 6.2.2。任意此类纤维化退化都等价于一般线性群 GL($N_{j,k} + 1$) 的一个单参数子群在希尔伯特概形 Hilb($\mathbb{P}(\mathcal{U}_{j,k})$) 上的作用，其中 $\mathcal{U}_{j,k}$ 是某个适当 Quot 概形的普适族；对于该 Quot 概形，Hilb($\mathbb{P}(\mathcal{U}_{j,k})$) 参数化了以$B$为底的纤维化。参见 [DS21a，引理 3。2]。

注意，对于每个 $j \gg 0$，我们都有一个真正的测试构型（$\mathcal{X}$， $jL + \mathcal{H}$），它对应指数为一的极化簇（X， $jL + H^k$，其含义见定义 2.3.1。

根据 Donaldson–Futaki 不变量的标准定义定义 2.3.2 ，我们可以展开

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X}, jL+\mathcal{H}) = j^n W_0(\mathcal{X},\mathcal{H}) + j^{n-1} W_1(\mathcal{X},\mathcal{H}) + O(j^{n-2}) \qquad \text{(Eq. 6.3)}$$

以 j 的幂表示。

定义 6.2.3 （纤维化的稳定性）。 我们称纤维化 π : $(X,\ H) \to (B,\ L)$ 为

- 半稳定的 ，如果对于所有纤维化退化 $(\mathcal{X},\ \mathcal{H})$，当 $W_0(\mathcal{X},\ \mathcal{H}) = 0$ 时， $W_0(\mathcal{X},\ \mathcal{H}) \geq 0$ ，且 $W_1(\mathcal{X},\ \mathcal{H}) \geq 0$。

- 多稳定的 ，如果它是半稳定的，并且对于每个 $W_0 = W_1 = 0$，存在一个补集余维至少为 2 的开子集 $U \subset B$，使得 $\mathcal{X},\ \mathcal{H}|_U$正规化为在 U 上的乘积纤维化退化，[3]

- 稳定的 ，如果它是半稳定的，并且对于每个 $W_0 = W_1 = 0$，存在一个补集余维至少为 2 的开子集 $U \subset B$，使得 $\mathcal{X},\ \mathcal{H}|_U$是平凡退化。

注记 6.2.4。 最近，Hattori 引入了一种称为 ϱ-稳定性的另一种稳定性概念 [Hat22], ，它是上述纤维化稳定性概念的“渐近 Chow 稳定性”版本。该稳定性要求：只要W_i（$\mathcal{X},\ \mathcal{H}$） $= 0$ 对于 $i = 0,\ \ldots\ldots,\ i_0$ 则 W_{i_0+1}（$\mathcal{X},\ \mathcal{H}$） ≥ 0。特别地，很快可以推出，上述意义下的稳定性蕴含 ϱ-稳定性，而后者又蕴含纤维化的半稳定性。

现在我们将描述如何为给定的极化纤维化构造纤维化退化的标准方法 π : （$X,\ H$） $\to$ （$B,\ L$），这确实就是 [DS21a] 中对纤维化退化的定义。

[3]Hallam 指出了这一条件的必要性， [Hal22] 以解决 Hattori 所确定的某些纤维化退化的存在性问题， [Hat22]这些退化会使任何纤维化都变得不稳定。这一条件类似于在向量丛的斜率稳定性理论中仅考虑无挠相干子层，或在 K-稳定性中考虑“几乎平凡的”测试构型。

根据 H 的相对丰性，对于 $k \gg 0$，$H^0(X_b, H_b^k)$ 的维数在 $b \in B$ 上是常数。事实上，对于这样的 $k \gg 0$，由 π 的平坦性可得到向量丛

$$V_k := \pi_* H^k$$

在 B 上，纤维为 $V_k|_b = H^0(X_b, H_b^k)$。为了构造 X的退化，我们将把 V_k 视为向量丛来进行退化。正如注 2.2.11中所讨论的，这是理解向量丛稳定性的一种视角，即用 K-稳定性的语言来理解。

定义 6.2.5. 给定一个向量丛 $E \to B$，向量丛退化 是一个无挠相干层 $\mathcal{E} \to B \times \mathbb{C}$，它在 $\mathbb{C}$ 上平坦，并满足

- $\mathcal{E}$ 是关于 $B \times \mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}^*$ 的标准作用的等变层，
- 对所有 $t \neq 0$，一般纤维 $\mathcal{E}_t$ 都与 $E \to B$ 同构。

设 $\mathcal{E}$ 是 V_k 的某个向量丛退化。于是我们可以对层 $\mathcal{E}$ 取相对 Proj，从而得到一个射影簇

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \underline{\mathrm{Proj}}(\mathrm{Sym}\,\mathcal{E})$$

并带有一个态射 $p: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to B$ 以及一个相对丰线丛 $\mathcal{O}(1)$。$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 在 $b \in B$上的纤维是商 $\mathbb{P}(\mathcal{E}(b)$的向量空间$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_B} k(b)$的射影空间。在第 7.2 节 中，我们将考虑一种更简单的情形，其中 $\mathcal{E}$ 是局部自由的向量丛退化；此时 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 就是通常的商射影丛。

由相对丰线丛 $H \to X$ 的相对 Kodaira 嵌入，自然可得到一个嵌入

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}(V_k)$$

对于足够大的 $k \gg 0$，使得 H^k 是相对非常丰的。因此我们得到一个子概形

$$X \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

并定义

$$\mathcal{X} = \overline{X \times \mathbb{C}^*}$$

是 $X \times \mathbb{C}^*$ 在向量丛退化 $\mathcal{E}$的射影化 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中的闭包。作为 $X \times \mathbb{C}^*$的射影闭包，$\mathcal{X}$ 具有等维纤维，因此在一维基底 $\mathbb{C}$上平坦。 $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathcal{E}$上的作用在 $\mathcal{X}$上诱导出一个 $\mathbb{C}^*$ 作用，从而得到一个 $\mathbb{C}^*$-等变态射

$$p : \mathcal{X} \to B$$

以及一个相对丰线丛 $\mathcal{H} := \iota^*\mathcal{O}(1)$，其中 $\iota : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ 是包含映射。那么 $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ 是 (X, H) 的指数为 k 的纤维化退化。

如注 2.2.11 所述，最简单的向量丛退化是从一个子层 $\mathcal{F} \subset V_k$ 开始，并“关闭扩张类”$e \in \mathrm{Ext}^1(V_k/\mathcal{F}, \mathcal{F})$，该扩张由此定义

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow V_k \longrightarrow V_k/\mathcal{F} \longrightarrow 0 \ .$$

这产生一个向量丛退化 $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$，其一般纤维 $\mathcal{E}_t$由 $V_k \to B$ 给出，其中 $t \neq 0$，而中心纤维为 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{F} \oplus V_k/\mathcal{F} \to B$. 例如，在 $\mathcal{F}$ 是全纯子丛的情况下，每个纤维上的诱导测试构型（X_b, H_b）对应于由线性子空间的正规锥变形所产生的测试构型，这是斜率 K-稳定性中出现的一种特殊形式（见注 2.3.4）。

现在进一步讨论展开 W_0 中出现的 W_1 系数(式6.3)。首先回顾一下 $W_0(\mathcal{X}, \mathcal{H})$。

命题6.2.6 ([DS21a，引理2。33] 或 [Hat22，引理4。8])。设$(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ 是(X, H)的纤维化退化。则对一般的 $b \in B$，有

$$W_0(\mathcal{X}, \mathcal{H}) = \binom{m+n}{n} L^n \cdot \mathrm{DF}(\mathcal{X}_b, \mathcal{H}_b).$$

根据（X, H）$\to$（B, L）的纤维是 K-多项式稳定的假设，我们自动有：对于（X, H）的任意纤维化退化，W_0（$\mathcal{X}$, $\mathcal{H}$）≥ 0。此外，根据

纤维化稳定性的定义 定义 6.2.3最受关注的纤维化退化，是那些诱导的一般纤维（$\mathcal{X}_b$，$\mathcal{H}_b$）的测试构型（X_b，H_b）正规化为乘积测试构型的情形（因此 DF（$\mathcal{X}_b$，$\mathcal{H}_b$）$=0$）。

注 6.2.7。事实上，如果 $(X,\ H)\ \to (B,\ L)$ 的纤维的自同构群 Aut(X_b，H_b) $=0$ 是平凡的，从而它们是 K-稳定的（而不仅仅是 K-多项式稳定的），那么对于任意在一般纤维上无法规范化为平凡测试构型的纤维化退化，由上述命题可得 $W_0(\mathcal{X},\ \mathcal{H})>0$，因此该纤维化是稳定的。这与以下观察一致：任何纤维自同构群平凡的此类纤维化都存在最优辛联络（在这种情况下，该条件自动满足）。

次领先阶系数 W_1（$\mathcal{X}$，$\mathcal{H}$）有一个由 Dervan–Sektnan 确定的交理论展开式，它通过将 Donaldson–Futaki 不变量 （公式 2.9）的交公式按该情形下的 j 的幂展开得到。我们只回顾 Fano 纤维化这一简化情形下的公式，此时我们有一个极化（X，$-K_{X/B}$）$\to$（B，L）。此处我们将测试构型（$\mathcal{X}$，$jL+\mathcal{H}$）在无穷远处平凡地紧化，并得到 $\mathbb{P}^1$。

$$\binom{n+m}{n-1}^{-1} W_1(\mathcal{X},\mathcal{H}) = \frac{m}{m+2}L^{n-1}.\mathcal{H}^{m+2} + \frac{1}{m+1}\gamma L^n.\mathcal{H}^{m+1} + L^{n-1}.\mathcal{H}^{m+1}.K_{\mathcal{X}/B\times\mathbb{P}^1} \tag{Eq. 6.4}$$

其中

$$\gamma = \frac{L^{n-1}.(-K_{X/B})^{m+1}}{L^n.(-K_{X/B})^m}.$$

例如，正如 [CP21，§1.2]，$-\gamma$ 是由簇族 (B，X) $-K_{X/B}\to(B,\ L)$ 所诱导的底空间上的 CM 线丛的次数，其中各簇均为 Fano 簇。特别地，由于 CM 线丛的正性，$\gamma\le 0$ 并且若 $X\to B$ 是等变的，则实际上 $\gamma=0$。例如，射影丛便属于这种情况，正如我们将在第 7.2.1 节中看到的。

最后，我们来陈述一个核心猜想，它将纤维化的稳定性与最优辛联络联系起来，内容如下。

猜想 6.2.8 ([DS21a])。一个极化纤维化 $(X,\ H)\ \to(B,\ L)$ 是多稳定的，当且仅当它存在一个最优辛联络。

Dervan–Sektnan 在这一猜想方面取得了进展，他们证明了最优辛联络的存在意味着该纤维化的半稳定性 [DS21a]。随后，Hallam 运用测地线分析，将这一结果改进为相对于某些乘积型纤维化退化的多稳定性 [Hal20]。

6.3 主丛

现在我们将回顾紧致 Kähler 流形上主丛稳定性理论，以及与之相关的 Hermite–Einstein 联络概念。该理论与¨第2.2节中讨论的全纯向量丛理论十分相似，尤其依赖于主丛上陈联络的类比。

6.3.1 Hermite–Einstein联络

现在考虑紧致 Kähler 流形上的全纯主 G 丛 $P \to (B, \omega_B)$，其中 G 是一个约化复李群。

定义 6.3.1。P 上的一个厄米结构是指选择一个结构群约化

$$\sigma : B \to P/K$$

将 P 约化为主 K 丛 $P_\sigma \to (B, \omega_B)$，其中 K 是 G 的一个极大紧子群，且 $K^{\mathbb{C}} = G$。

厄米结构的一个关键例子是，当 $G = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 且 $K = \mathrm{U}(r)$ 时。此时，商 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})/\mathrm{U}(r)$ 可识别为 $\mathbb{C}^r$ 上厄米内积的空间，而结构群约化 $\sigma : B \to P/K$ 则是在标准伴随全纯向量丛 $E := P \times_G \mathbb{C}^r$ 的每个纤维上光滑地选取厄米内积。也就是说，σ 就是 E 上厄米度量的数据。

一般而言，我们注意到，当 G 为约化时，商空间 G/K 是可缩的，并且商丛 P/K有许多截面 σ 。因此，结构群为约化群的全纯主丛总是存在厄米结构。

定义 6.3.2. P 上的主丛联络 $A \in \Omega^1(P,\ \mathfrak{g})$称为:

- 复 当 $A \in \Omega^{1,0}(P,\ \mathfrak{g})$ 是 $(1,\ 0)$ 型时。
- 关于厄米结构的酉性 σ 当存在一个主丛联络 A_σ 定义在结构群约化 P_σ 上，使得在诱导的伴随丛构造下

$$P = P_\sigma \times_K G,$$

A_σ 映射为 A。

向量丛上的陈联络的存在性与唯一性对应的结论如下。

命题 6.3.3 ([KN69，定理 IX.10。1])。 给定一个厄米结构 σ： $B \to P/K$ 在全纯主 G丛 P 上，其结构群为约化群，则存在唯一的复联络 A 在 P 上关于 σ是酉的。称其为陈联络 在 P上的联络。

当 $G = \mathrm{GL}(r,\ \mathbb{C})$ 且 $K = \mathrm{U}(r)$ 时， P上的陈联络恰好诱导出 $E = P \times_G \mathbb{C}^r$ 上的标准陈联络，其对应的厄米度量由 σ诱导。

定义 6.3.4. 若厄米全纯主G丛 $P \to B$ 配备厄米结构 σ，则其复酉度量 A 称为 *Hermite–Einstein* 度量，当且仅当

$$\Lambda_{\omega_B} F_A = \tau$$

其中 $F_A \in \Omega^{1,1}(B,\ \mathrm{ad}\ P)$ 是 A 的曲率，而 τ是一个协变常值的中心截面 $\tau \in \Gamma(\mathrm{ad}\ P)$。

为阐明这个定义，我们指出，李代数丛 $\mathrm{ad}\, P \to B$的纤维为 $\mathfrak{g}$，即 G的李代数。虽然 $\mathrm{ad}\, P$一般是 B 上的非平凡向量丛，其联络由 A诱导而来，但它包含一个平凡中心子丛 $Z \subset \mathrm{ad}\ P$，并且截面 $\tau \in \Gamma(Z)$相对于诱导联络是协变常值的

当且仅当它相对于标准平凡化（π下 $P \times Zz(\mathfrak{g})$的平凡化的直推）是常数时。这样的截面拉回后，成为一个从 P的全空间映入李代数中心的常值函数 $P \to Z(\mathfrak{g})$。

在 $G = \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 和 $K = \mathrm{U}(r)$ 的情形下， G的李代数 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$ 的中心 $Z(\mathfrak{g})$ 就是 $\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{C}^r}$，而 $\mathrm{ad}\ P = \mathrm{End}\ E$，其中 E是标准伴随丛 $E = P \times_G \mathbb{C}^r$。在此情形下， $Z \subset \mathrm{ad}\, P$ 是由$\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}_E$生成的平凡丛；若 $\tau = \lambda\mathbf{1}_E$对某个由 P的拓扑决定的 $\lambda \in \mathbb{C}$成立，则 τ为常数。因此， P 上的 Hermite–Einstein 联络 A 会在前文第2.2节所述的意义下，在 E 上诱导出一个 Hermite–Einstein 联络。

注6.3.5。 设 $G = \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(r',\mathbb{C})$。那么，李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心元素具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_{\mathbb{C}^r} & 0 \\ 0 & \mu\mathbf{1}_{\mathbb{C}^{r'}} \end{pmatrix}$$

若考虑乘积标准表示，则有

$$P \times_G (\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^{r'}) = E \oplus F$$

其中 E 和 F 是对应于 G的两个因子的标准伴随丛。于是， P 上的 Hermite–Einstein 度量等价于一个 极值 杨–米尔斯度量，定义在$E \oplus F$ 上，其意义见注2.2.20。

6.3.2 稳定性

根据 原理 1.1，对于主丛上与上述极值概念相关联的概念，我们预期会有一种与向量丛的斜率稳定性密切类似的稳定性理论。Ramanathan 首先在紧黎曼曲面上发展了这一理论[Ram75、Ram96a、Ram96b] ，随后又针对射影流形和紧 K¨ahler 流形发展出了一般理论（例如参见 [RS88、AB01]）。

设 (B,ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形， $P \to B$ 是一个全纯主 G丛。设 $Q \subset G$ 为一个抛物子群。我们希望考虑结构群 σ 的约化： $U \to P/Q$ 其中 $U \subset B$ 是一个开子集，且 $\mathrm{codim}(X\backslash U) \geq 2$。

定义 6.3.6. </style}主丛 P 相对于将结构群 σ 约化到一个极大</style}抛物子群 Q 而言是（半）稳定</style}的，当且仅当

$$\deg \sigma^*\mathcal{V}(P/Q) > 0 \quad (\text{resp. } \geq)$$

其中， $\mathcal{V}(P/Q)$ 是 P/Q 的垂直切丛。若丛 P 相对于所有定义在余集余维大于一的 Zariski 开子集上的极大抛物子群约化均为（半）稳定，则称其为（半）稳定。

我们将省略主丛多重稳定性的精确定义；该定义必须精确表达以下思想： P 分解为斜率相同的稳定主丛的直和。参见 [AB01，定义 3。5]。

注 6.3.7。注意， $\sigma^*\mathcal{V}(P/Q) \to U$ 是定义在 $U \subset X$ 上的向量丛，因此定义次数时必须谨慎。并不一定 $\sigma^*\mathcal{V}(P/Q)$（事实上，此处所需的甚至只是该丛的行列式）能够延拓到整个 X上。不过可以证明，当 $\mathcal{V}(P/Q)$ 是由结构群约化到抛物子群 $Q \subset G$而来时，行列式线丛总能唯一延拓，且次数是良定义的 [RS88，§1]。

注 6.3.8。 仅考虑极大抛物子群，类似于测试向量丛稳定性时只考察单个子层，而不考察由此得到的滤过。事实上，抛物子群 $Q \subset G$ 恰好定义为某个旗的稳定子

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_\ell = V$$

该旗位于向量空间 V 中，其中 $\rho\colon\ G \to \mathrm{GL}(V)$ 是某个忠实表示。极大抛物子群对应于一步滤子

$$0 \subset V_1 \subset V.$$

只需考虑约化到这类抛物子群的情形，即可建立主丛稳定性的良好理论。

注 6.3.9. 在 $G = \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 的情形下，$P \to (B,\omega_B)$ 的稳定性恰好等价于 $E = P \times_G \mathbb{C}^r$ 标准伴随丛的斜率稳定性。一般而言，P 的稳定性意味着其伴随向量丛 $\mathrm{ad}\ P$（纤维为 $\mathfrak{g}$）具有多重稳定性 。事实上，P半稳定当且仅当 $\mathrm{ad}\,P$半稳定；在此情形下，Hitchin–Kobayashi 对应的一个推论表明，P 多稳定当且仅当 $\mathrm{ad}\,P$ 多稳定。因此，从这个意义上说，可以将主丛稳定性理论纳入相应的向量丛理论之中。

此情形下 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理的对应结果如下（其证明借助于向量丛的正则性定理 定理 2.2.21，并先识别出 P 所对应的正确向量丛）。

定理 6.3.10 ([RS88,AB01])。紧致 *Kähler* 流形 G 上的全纯主 ¨-丛 (B,ω_B) 存在 *Hermite–Einstein* 联络，当且仅当它是$[\omega_B]$-多稳定的。

6.4 乘积纤维化

作为背景介绍的最后一部分，我们简要讨论上述构造在乘积纤维化情形下的情况。以下结论适用于任意紧致 K¨ahler 纤维化的乘积。

命题 6.4.1。若 ω_X 和 $\omega_{X'}$ 是两个纤维化 (X,H)、$(X',H') \to (B,L)$ 上的最优辛联络，则纤维积 $Z = X \times_B X'$ 上的乘积度量是最优辛联络。

证明。这只需验证最优辛联络方程中出现的各项按照预期的方式相对于纤维积分解。首先注意，乘积度量 $\omega = \omega_X + \omega_{X'}$的曲率 $F_{\mathcal{H}}$ 是直和 $F_{\mathcal{H}} = F_X + F_{X'}$，其中 F_X，$F_{X'}$分别表示ω_X，$\omega_{X'}$在 X和 X'上的曲率。还可以观察到

$$d\mu^* F_{\mathcal{H}} = \iota_{F_{\mathcal{H}}}\omega = \iota_{F_{\mathcal{H}}}(\omega_X + \omega_{X'}) = \iota_{F_X}\omega_X + \iota_{F_{X'}}\omega_{X'}$$

由此得出 $\mu^* F_{\mathcal{H}} = \mu_X^* F_X + \mu_{X'}^* F_{X'}$。类似地，不难看出 $\Delta_{\mathcal{V}} = \Delta_X + \Delta_{X'}$，其中 Δ_X 和 $\Delta_{X'}$ 分别表示 X 和X'上的垂直拉普拉斯算子。.

若 X和 X'的纤维维数分别为 $m_X, m_{X'}$对于作用于和函数 $\varphi = \varphi_X + \varphi_{X'}$的投影算子 p，其中 $\varphi_X, \varphi_{X'}$分别仅依赖于 X 和 X' 的纤维坐标，则有

$$\begin{aligned} p(\varphi|_b) &= \varphi|_b - \frac{\int_{X_b \times {X'}_b} \varphi|_b \, (\omega_X + \omega_{X'})^{m_X + m_{X'}}}{\int_{X_b \times {X'}_b} (\omega_X + \omega_{X'})^{m_X + m_{X'}}} \\ &= \varphi|_b - \frac{\int_{X_b \times {X'}_b} \varphi|_b \, \omega_X^{m_X} \wedge \omega_{X'}^{m_{X'}}}{\int_{X_b \times {X'}_b} \omega_X^{m_X} \wedge \omega_{X'}^{m_{X'}}} \\ &= \left(\varphi_X|_b - \frac{\operatorname{vol} {X'}_b}{\operatorname{vol} X'_b} \frac{\int_{X_b} \varphi_X|_b \, \omega_X^{m_X}}{\int_{X_b} \omega_X^{m_X}} \right) + \left(\varphi_{X'}|_b - \frac{\operatorname{vol} X_b}{\operatorname{vol} X_b} \frac{\int_{{X'}_b} \varphi_{X'}|_b \, \omega_{X'}^{m_{X'}}}{\int_{{X'}_b} \omega_{X'}^{m_{X'}}} \right) \\ &= p_X(\varphi_X|_b) + p_{X'}(\varphi_{X'}|_b), \end{aligned}$$

在倒数第二步中，我们用到了富比尼定理。

最后，注意若 ρ_X 和 $\rho_{X'}$ 分别表示 ω_X 和 $\omega_{X'}$的相对里奇形式，则有

$$\begin{aligned} \rho &= i\partial\overline{\partial} \log \det(\omega_X + \omega_{X'}) \\ &= i\partial\overline{\partial} \log \det \omega_X \det \omega_{X'} \\ &= i\partial\overline{\partial} \log \det \omega_X + i\partial\overline{\partial} \log \det \omega_{X'} \\ &= \rho_X + \rho_{X'}. \end{aligned}$$

这里我们用到了乘积度量 $\omega_X + \omega_{X'}$ 的行列式等于各行列式之积；这一点可通过在局部乘积坐标下对度量作分块矩阵分解看出。还要注意，沿 X 纤维方向对 $\partial\partial$ 求导时，作用于 $\log \det \omega_{X'}$的结果为零，因为它仅依赖于 X' 的纤维坐标，反之亦然。

总之，由于 $\Delta_X \mu_{X'}^* F_{X'} = 0$和 $\Delta_{X'} \mu_X^* F_X = 0$，我们可以看到

$$p(\Delta_{\mathcal{V}}\Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}} + \Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}}) \\ = p(\Delta_{\mathcal{V},X}\Lambda_{\omega_B}\mu_X^* F_X + \Lambda_{\omega_B}\rho_{H,X}) + p(\Delta_{\mathcal{V},X'}\Lambda_{\omega_B}\mu_{X'}^* F_{X'} + \Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H},X'})$$

因此得出结论。 □

上述命题与定理 7.1.1相结合，产生了大量最优辛联络的例子。也就是说，所有多稳定向量丛的射影化的纤维积都承认最优辛联络；事实上，这已经由上述命题以及先前关于射影丛上最优辛联络存在性的工作 [DS21b、§3.5].

从向量丛的角度来看，这有些令人费解，因为多稳定向量丛的直和不一定是多稳定的（因而不一定承认 Hermite–Einstein 度量），除非这些向量丛具有相同的斜率。事实上，就最优辛联络的存在性而言，先取直和再进行射影化，与先进行射影化再取纤维积这一过程并不相容。

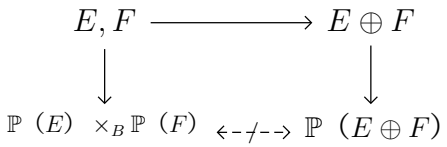


图 6.1：纤维积上的射影丛存在最优辛联络，并不等价于向量丛直和的射影化存在最优辛联络。

另一方面，cscK流形的乘积总是 cscK 的，无须考虑任何拓扑匹配准则，因此从这个意义上说，最优辛联络的研究更接近于常标量曲率 Kähler 度量的研究。

让我们从主丛的角度阐明这种不交换性。若 $\mathcal{F}(E)$ 表示向量丛 E 的标架丛，它是一个一般线性群（秩 $E, \mathbb{C}$）-主丛，那么，根据我们的主要结果 定理 7.1.1，当 $\mathbb{P}(E) \times_B \mathbb{P}(F)$ 存在最优辛联络且 E和 F均为多稳定时，这对应于 $\mathcal{F}(E) \times_B \mathcal{F}(F$是一个多稳定主丛这一事实。根据主丛的 Hitchin–Kobayashi 对应，这已知等价于斜率

斜率为零的向量丛的多重稳定性

$$\operatorname{ad}(\mathcal{F}(E)\times_B\mathcal{F}(F))=\operatorname{ad}\mathcal{F}(E)\oplus\operatorname{ad}\mathcal{F}(F)=\operatorname{End}(E)\oplus\operatorname{End}(F).$$

另一方面，如果 E 和 F 的斜率不同，不妨设 $\mu(E)<\mu(F)$，那么主丛 $\mathcal{F}(E\oplus F)$ 的伴随丛 $\operatorname{End}(E\oplus F)=\operatorname{End}(E)\oplus\operatorname{Hom}(E,F)\oplus\operatorname{End}(F)$ 并非多稳定，因此 $\mathcal{F}(E\oplus F)$ 也不是多稳定，这与 $\mathbb{P}(E\oplus F)$ 不存在最优辛联络这一事实相符。

众所周知（见 [RR84]），如果 P 是一个多稳定的主 G 丛，且 $\rho: G\to H$ 是一个表示，它将中心 $Z_0(G)$ 的单位元连通分支映到相应的分量 $Z_0(H)$，那么相伴的主 H 丛 $P\times_\rho H$ 也是多稳定的。现在，$E\oplus F$ 的直和结构给出了从 $\mathcal{F}(E\oplus F)$ 到 $\mathcal{F}(E)\times_B\mathcal{F}(F)$ 的结构群约化；然而，相应的同态 $\operatorname{GL}(\operatorname{rk}E,\mathbb{C})\times\operatorname{GL}(\operatorname{rk}F,\mathbb{C})\to\operatorname{GL}(\operatorname{rk}E+\operatorname{rk}F,\mathbb{C})$ 不会将中心映到中心，因为一个中心元素

$$\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{1}_E & 0\\ 0 & \mu\mathbf{1}_F\end{pmatrix}$$

在更大的群 $\operatorname{GL}(\text{秩 }E+\text{秩 }F,\mathbb{C})$ 内不交换，除非 $\lambda=\mu$。这解释了 图 6.1 中缺乏交换性。

注 6.4.2。根据上述讨论，如果 $\mathbb{P}(E)\times_B\mathbb{P}(F)$ admits an OSC then $E\oplus F$ admits an extremal Yang–Mills metric. 因此，我们预期射影化$\mathbb{P}(E\oplus F)$ admits an 极值辛联络 in the sense of [DS21b，定义 3。15]。特别地，我们应当预期，如果不再考虑最优辛联络，而只考虑极值辛联络，则图图 6.1交换。

最后注意，根据最优辛联络的唯一性定理 6.1.12，如果全纯纤维化 (Z,H_Z) 可分解为因子 (X,H_X) 和 (X',H'_X) 的纤维积，且这两个因子都存在最优辛联络，那么 Z上的 $c_1(H_Z)=c_1(H_X\boxtimes H'_X)$ 上的任意最优辛联络都必须具有

经某个相对自同构作用并从底空间拉回一个二形式后，呈现纤维积形式。因此，我们可以引入以下概念。

定义 6.4.3。$(Z,\ H_Z)$ 是一种可约极化全纯纤维化，即允许存在上述形式的纤维积分解的纤维化。若极化全纯纤维化不可约，则称其为不可约。

为了使可约性的概念具有实用价值，应当满足这样的条件：若 ω_Z 是 Z上的最优辛联络，那么它可以变换为乘积形式，其中 ω_X 和 $\omega_{X'}$ 分别是 X 和 X'上的最优辛联络。相应的代数几何预测是，(Z, H_Z)的（半／多重）稳定性蕴含$(X,\ H_X)$和$(X', H_{X'})$的（半／多重）稳定性。[4]

[4]对于 K-稳定性，这可由对测试构形的纤维积（在 $\mathbb{C}$上取）之 Donaldson–Futaki 不变量进行直接计算得出。类似的计算应能证明这一关于纤维化退化的代数几何事实，前提是在按照纤维积分解对截面空间进行分解时更加谨慎 $H^0(\mathcal{Z}_0,\ jL+\mathcal{H}_Z)\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times_B \mathcal{X}'_0$。鉴于猜想 6.2.8，这将为可约性的概念提供依据。注意对应的度量性质：乘积上的常数标量曲率 Kähler 度量必然是常数标量曲率 Kähler 度量的乘积；这并非显而易见。

第7章

等变纤维化

本章将研究等变纤维化情形下最优辛联络的概念。我们的主要结果将此类联络的存在性与全纯主丛上 Hermite–Einstein联络的存在性联系起来。利用定理 6.3.10，这便从纯粹代数几何稳定性条件的角度刻画了等变情形下最优辛联络的存在性，从而证明了原理 1.1。

主要章节 第 7.1 节 是论文 [McC22]的内容。

我们还将讨论若干有趣的未来方向，包括探讨等变纤维化的稳定性，以及在非等变情形下以主丛为基础的形式体系。

7.1 最优辛联络的存在性

回忆一下，K¨ahler 纤维化（X，ω_X）$\to$（B，ω_B）称为等变的，如果它是一个全纯纤维丛。根据 Fischer–Grauert 定理，这等价于要求 $X \to B$ 的所有纤维都双全纯同构 [FG65]。本节将证明以下结论。

定理 7.1.1 (定理 1.7)。 设 $P \to (B,\ \omega_B)$ 是一个全纯主 G-丛，其极大紧子群为 $K \subset G$，并假设 G 通过双全纯映射作用于一个常标量曲率 *Kähler* 流形 $(Y,\ \omega_Y)$，且 K 通过全纯等距变换作用。那么，该

伴随丛上的辛联络 ω_X

$$X = P \times_G Y = P_\sigma \times_K Y \to (B, \omega_B)$$

由复酉联络 A 在 P 上诱导的联络，只要 A是 ***Hermite–Einstein***联络，便是最优辛联络。

此外，若 P 源自某个给定的紧致等变 ***Kähler*** 纤维化(X, ω_X) 的相对自同构群丛，且该纤维化具有常标量曲率 ***Kähler*** 纤维，那么诱导的主丛联络 A 在 P 上是 ***Hermite–Einstein***联络，当且仅当 ω_X 是最优辛联络。

我们将关注光滑等变相对常数标量曲率 Kähler 纤维化（X, ω_X） $\to$（B, ω_B）。设 H 是 X 上的相对丰沛线丛，并假设 $\omega_X \in c_1$（H）。那么，对于 X的模型纤维（Y, ω_Y, H_Y），其中 ω_Y具有常标量曲率 Kähler 度量，（Y, H_Y）的自同构群是约化的 [Gau10，第 2.4、8.1] 节。

总而言之，令 $G_0 = \mathrm{Aut}_0$（Y, H_Y）表示 Y 的全纯自同构群中可提升到 H_Y的单位元连通分支，并令$K_0 = \mathrm{Isom}_0$（Y, ω_Y, H_Y）表示 Aut_0（Y, H_Y）中 ω_Y的全纯等距变换子集。那么 $K_0 \subset G_0$ 是一个极大紧子群。李代数 $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}$（$G_0$）由 Y的复全纯势构成，可识别为 Y 上至少有一个零点的全纯向量场。李代数 $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}$（$K_0$） $\subset \mathfrak{h}$ 可识别为实全纯势，并且 $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus J\mathfrak{k}$，其中 J是 Y上的复结构。将其积分到李群，得到 $G_0 = K_0^{\mathbb{C}}$，因此 G_0 是约化的。

对于纤维化的情形，上述对自同构群的描述有如下推论。

引理 7.1.2。 一个光滑极化等变相对常数标量曲率 ***Kähler*** 纤维化

$$\pi : (X, \omega_X, H) \to (B, \omega_B, L)$$

以模型纤维 (Y, ω_Y, H_Y) 为纤维的全纯主 $G_0 =$ 自同构群$_0(Y, H_Y)$-丛 P，其结构群可约化为 $\sigma\colon B \to P/K_0$，从而得到主 $K_0 = \mathrm{Isom}_0(Y, \omega_Y, H_Y)$-丛 P_σ，使得

$$X = P \times_{G_0} Y = P_\sigma \times_{K_0} Y.$$

证明。由于 $X \to B$ 是一个全纯纤维丛，它存在一组全纯局部平凡化，记作 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. 任取 $b_0 \in B$ 以及满足 $b_0 \in U_\beta$的 β 。定义模型常数标量曲率 Kähler 度量 $\omega_Y := \varphi_{\beta *}\big|_b \omega_X$ 和极化 $H_Y := \varphi_{\beta *}\big|_b H$。令$G_0 = \mathrm{Aut}_0(Y, H_Y)$，并令 $K_0 = \mathrm{Isom}_0(Y, \omega_Y, H_Y)$。

根据常标量曲率 Kähler 度量在自同构作用下的唯一性，对于任意关于 X 的局部平凡化 ψ （位于 V 上）以及任意 $b \in V$，都存在一个全纯自同构 g_b，它将 $\psi_* \omega_X|_b$ 映到 ω_Y，且作用于 Y。由于 $\psi_* \omega_X$ 和 ω_Y 上同调，这个自同构可以取为属于约化自同构群的双全纯映射，并且可提升到线丛 H_Y，其中 $\omega_Y \in c_1(H_Y)$。对由 U_α 构成的覆盖进行上述操作，便定义了 B 上一个主 G_0 丛的局部截面系。该截面系满足余循环条件，这是由此覆盖的平凡化函数 φ_α 所满足的余循环条件推出的。

此外，若 $b \in U_\alpha$ ，那么在关于双全纯映射 φ_α 将 X_b 与 Y 相认后， Y 的自同构群 K_0 可识别为 $\mathrm{Isom}_0(X_b,\ \omega_X|_b,\ H_b)$ 在 $\mathrm{Aut}_0(X_b,\ H_b)$ 中的一个共轭。该局部平凡化系的余循环条件保证，在 U_α 的交叠处， $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ 的等距变换群都映到同一个共轭群。这定义了一个光滑截面 $\sigma : B \to P/K_0$ ，指定了所需的结构群约化至 K_0。

□

7.1.1 诱导的最优辛联络

现在假设我们有一个等变纤维化，它是某个具有约化结构群的全纯主丛所关联的全纯纤维丛，而该主丛可约化为结构群的极大紧子群的主丛。正如我们所观察到的，每个等相对常标量曲率 Kähler 丛都以这种方式得到；不过在下文中，我们不假设关联主丛的结构群是模型纤维自同构群的单位连通分支。

具体而言，固定一个具有常数标量曲率 K¨ahler 度量 $\omega_Y \in c_1(H_Y)$ 的光滑极化簇 (Y, H_Y)。假设约化群 G 在线性地作用于 (Y, H_Y)，并且存在一个极大紧子群 $K \subset G$，使得 G 作用在 K 上的限制保留 K¨ahler 度量 ω_Y；也就是说，假设 K 通过全纯等距变换作用于 Y。这样的 K 作用于

(Y, ω_Y) 总是哈密顿的，其中任一诱导向量场的哈密顿函数，均由相对于 ω_Y (参见第 6.1.2 节) 的实值零均值全纯势给出。我们将相应的动量映射记为 μ : $Y \to \mathfrak{k}^*$ 。最后，假设 P 存在一个结构群约化 σ 至 K，并令 P_σ 表示诱导出 P 的主 K丛。与这些数据相关联的是一个全纯纤维丛

$$\pi : X = P \times_G Y = P_\sigma \times_K Y \to B,$$

与 P相关联。给定这样的伴随丛，在 X 上可由 Y 上的常数标量曲率 Kähler 度量以及 P上的复酉联络诱导出一个辛联络。这基本上是通过对光滑主 K丛 P_σ进行研究并应用 Weinstein 的一个定理得出的（例如参见 [MS17，定理 6.3。3]）。我们在此重述细节，以强调在我们的情形下 P_σ 与 P 之间的关系，并说明由此得到的形式 ω_X 是 、 上的 (1,1)-形式 X。

命题 7.1.3。 在上述设定下，任取一个定义在 P 上的复酉联络 A ，都会在 X上诱导出一个相对 ***K¨ahler*** 度量 $\omega_X \in c_1(H)$ 。

证明。 设 v_ξ 表示在 Y上 K 的作用下，由某个 $\xi \in \mathfrak{k}$ 在 Y 上诱导的向量场。则 v_ξ 保持 Y的 K¨ahler 结构。

令 $y \in Y$，$\hat{} y \in T_y Y$，$\eta \in \mathfrak{k}$。于是我们得到以下两个恒等式

$$\langle d\mu(y)\hat{y}, \xi\rangle = \omega_Y(v_\xi(y), \hat{y}),$$

$$\langle \mu(y), [\xi, \eta]\rangle = \omega_Y(v_\xi(y), v_\eta(y)).$$

第一个恒等式由动量映射的定义得出，第二个则源于动量映射满足的无穷小等变性条件。

我们姑且滥用记号，用 $A = A_\sigma$ 表示 P上结构群约化为 P_σ 的联络，并用 $F \in \Omega^2(P_\sigma; \mathfrak{k})$ 表示A_σ的曲率形式。那么，对于 $p \in P_\sigma$， $\xi \in \mathfrak{k}$， v_1， $v_2 \in T_p P_\sigma$，我们也有标准表达式

$$A_p(p\xi) = \xi,$$

$$F_p(v_1, v_2) = (dA)_p(v_1, v_2) + [A_p(v_1), A_p(v_2)].$$

定义投影算子 $\pi_A\colon TP_\sigma \times TY \to TY$，使其满足 $\pi_A(v, \hat{y}) = \hat{y} + v_{A_p(v)}(y)$。定义二形式 $\hat{\omega}_X \in \Omega^2(P_\sigma \times Y)$ 为

$$\hat{\omega}_X := \omega_Y - d\langle \mu, A\rangle.$$

然后注意到，$\hat{\omega}_X$ 在 $P_\sigma \times Y$ 上是闭的。

可以写成

$$\hat{\omega}_X = \pi_A^* \omega_Y - \langle \mu, F\rangle. \tag{Eq. 7.1}$$

事实上，利用上述恒等式以及 π_A 的定义，我们计算得

$$\begin{aligned}
&(\pi_A^*\omega_Y - \langle \mu, F\rangle)_{(p,y)}((v_1, \hat{y}_1), (v_2, \hat{y}_2)) \\
&= \omega_Y(\hat{y}_1 + v_{A_p(v_1)}(y), \hat{y}_2 + v_{A_p(v_2)}(y)) - \langle \mu(y), F_p(v_1, v_2)\rangle \\
&= \omega_Y(\hat{y}_1, \hat{y}_2) + \omega_Y(v_{A_p(v_1)}(y), \hat{y}_2) - \omega_Y(v_{A_p(v_2)}(y), \hat{y}_1) \\
&\qquad + \omega_Y(v_{A_p(v_1)}(y), v_{A_p(v_2)}(y)) \\
&\qquad - \langle \mu(y), (dA)_p(v_1, v_2)\rangle - \langle \mu(y), [A_p(v_1), A_p(v_2)]\rangle \\
&= \omega_Y(\hat{y}_1, \hat{y}_2) + \langle d\mu(y)\hat{y}_2, A_p(v_1)\rangle - \langle d\mu(y)\hat{y}_1, A_p(v_2)\rangle \\
&\qquad + \langle \mu(y), [A_p(v_1), A_p(v_2)]\rangle \\
&\qquad - \langle \mu(y), (dA)_p(v_1, v_2)\rangle - \langle \mu(y), [A_p(v_1), A_p(v_2)]\rangle \\
&= \omega_Y(\hat{y}_1, \hat{y}_2) - d\langle \mu, A\rangle_p((v_1, \hat{y}_1), (v_2, \hat{y}_2)).
\end{aligned}$$

由（公式 7.1）可知，二形式 $\hat{\omega}_X$ 具有 K-不变性，并且关于商映射 $P_\sigma \times Y \to P_\sigma \times_K Y = X$ 是水平的。特别地，一个向量（v，$\hat{y}$）关于此投影是垂直的，当且仅当 v 是 P 的垂直切向量，并且 π_A（v，$\hat{y}$）$= 0$。由此立即可得 $\iota_{(v,\hat{y})}\hat{\omega}_X = 0$。由于 $\hat{\omega}_X$ 也是闭的，这在无穷小层面上同样成立，因此 $\hat{\omega}_X$ 是基本的。

此外，μ 和 ω_Y 的动量映射条件蕴含了 $\omega - \mu$ 的 K-等变闭性，结合比安基恒等式，这又蕴含了 $\tilde{\omega}_X$ 的等变闭性。

那里 因为 K-不变且等变闭合的二形式 $\tilde{\omega}_X$ 下降为一个

商 $X = P_\sigma \times_K Y$上的闭二形式 ω_X。其显式表达式

$$\omega_X((v_1, \hat{y}_1), (v_2, \hat{y}_2)) = \omega_Y(\hat{y}_1 + v_{A_p(v_1)}(y), \hat{y}_2 + v_{A_p(v_2)}(y)) - \langle \mu(y), F_p(v_1, v_2)\rangle$$

这表明 $\omega_X|_b = \omega_Y$，因为 X的垂直向量具有 (0，$\hat{}y$) 的形式，而 $(\omega_X)_{\mathcal{H}} = \mu^* F_{\mathcal{H}}$，因为水平向量由 ($v$，0) 给出，其中 v在 P上是水平的。由于我们假设初始联络 A 是复的，曲率 F 具有 (1，1) 型，因此 ω_X是 X上的闭 (1，1) 形式。

□

为了考察诱导在 X 上的辛联络 ω_X 何时是最优的，我们将使用以下关于紧致 K¨ahler 流形的事实，它将简化等变情形下的最优辛联络方程。

引理 7.1.4 (例如参见 [Sz´e12，引理 28])。若 h 是紧致 *K¨ahler* 流形上的 *Kähler* 度量 ω 上的一个哈密顿函数，且该流形为紧致 *K¨ahler* 流形，其哈密顿向量场为v，则 Δh 形式上是与同一向量场对应的（不一定是辛）二形式 Ric $\omega = \rho$ 的哈密顿函数。

证明。

$$\begin{aligned} 2\iota_v\rho &= \iota_v(dJd\log\det\omega) \\ &= \mathcal{L}_v(Jd\log\det\omega) - d\iota_v(Jd\log\det\omega) \\ &= -d(\mathcal{L}_{Jv}\log\det\omega) \\ &= d\Lambda\mathcal{L}_{Jv}\omega. \end{aligned}$$

这里我们用到了 v 保持不变的性质，其中 Λ 是相对于 ω的迹。但 $\mathcal{L}_{Jv}\omega = -2i\partial\bar{\partial}h$，所以 $\iota_v\rho = d\Delta h$。 □

以下关键论证说明了最优辛联络方程在等变纤维化的情形下如何简化。

命题 7.1.5. 给定全纯主丛 $P \to (B, \omega_B)$ 上的复酉联络，且其纤维 G 为约化纤维，并给定一个相应的 *K¨ahler* 纤维化 $X = P \times_G (Y, \omega_Y)$，其纤维为常标量曲率凯勒纤维，则所诱导的辛

联络 ω_X 的相对里奇形式与联络 A 的曲率之间满足关系

$$p(\Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}}) = p(\Delta_\nu \Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}}).$$

证明。同上，设实紧李群 $K \curvearrowright (Y, \omega_Y)$ 在 K¨ahler 流形 Y 上通过全纯等距变换作用。根据假设，该作用存在一个等变矩映射 $\mu\colon Y \to \mathfrak{k}^*$。定义余矩型映射

$$\nu^* : \mathfrak{k} \to C_0^\infty(Y)$$

为以下映射的复合

$$\nu^* = \Delta \circ \mu^*.$$

重述引理 7.1.4 可知，余动量映射 ν^* 满足关于 Ricci 形式 $\mathrm{Ric}\,\omega_Y = \rho_Y$的标准矩映射判据。也就是说，

$$d\nu^*(\xi) = i_{v_\xi}\rho_Y.$$

此外，由于 K 在 Y上通过等距变换作用，拉普拉斯算子作为态射 $C_0^\infty(Y) \to C_0^\infty(Y)$ 是 K-等变的，因此复合映射 $\nu^* = \Delta \circ \mu^*$ 是一个关于 K 在 $\mathfrak{k}$上的伴随作用，从 $\mathfrak{k}$ 到 $C_0^\infty(Y)$ 的K-等变映射。在 K 中对恒等映射处的这一条件求导，得到无穷小等变条件

$$\nu^*([\xi, \eta]) = \rho_Y(v_\xi, v_\eta)$$

对于 余动量映射 ν^*，它明确给出了有趣的几何公式 la

$$\rho_Y(v_\xi, v_\eta) = \Delta(\omega_Y(v_\xi, v_\eta))$$

对于诱导向量场 v_ξ， v_η。

尽管余动量映射 ν^* 并非真正的辛形式的余动量映射，但相对于 K 作用ρ_Y，它满足与 μ^* 相对于 ω_Y相同的形式性质。特别是，命题 7.1.3 的论证

对微分形式而言无需任何改动

$$\tilde{\tau}_A := \rho_Y - d(\nu^* A) = \pi_A^* \rho_Y - \nu^* F$$

在乘积 $P_\sigma \times Y$ 上。因此存在一个闭的 (1，1)-形式 τ_A，定义在 $X = P_\sigma \times_K Y$ 上，满足

$$(\tau_A)_{\mathcal{V}} = (\rho)_{\mathcal{V}}$$

其中 ρ 是 ω_X 本身的相对里奇形式。此外，τ_A 的显式公式表明 $(\tau_A)_{\mathcal{H}} = \nu^* F_{\mathcal{H}}$。

根据 [DS21b，引理 3。9]，，若两个闭的 (1，1)-形式在纤维化的垂直方向上的限制相同，则它们的水平分量相差一个从底空间拉回的形式。特别地，我们有

$$\rho_{\mathcal{H}} + \pi^* \beta = \nu^* F_{\mathcal{H}}$$

其中 β 是 B 上的某个二形式。

现在注意到，与 ω_B 收缩后，我们有

$$\Lambda_{\omega_B} \rho_{\mathcal{H}} + \pi^* f = \Lambda_{\omega_B} \nu^* F_{\mathcal{H}} = \Delta_{\mathcal{V}} \Lambda_{\omega_B} \mu^* F_{\mathcal{H}}$$

其中 $f = \Lambda_{\omega_B} \beta$ 是 B 上的某个函数。第二个等式源于如下观察： X 上的 $F_{\mathcal{H}}$ 实际上来自定义在 B 上的一个二形式；这正是定义联络 A 在 P_σ 上曲率的同一个 $F_A \in \Omega^2(B, \operatorname{ad} P_\sigma)$（与从 $\mathfrak{k}$ 到 $\mathrm{Ham}(\mathcal{V})$ 的李代数同态复合之后）。由于与 $\mu^* F_{\mathcal{H}}$ 收缩的二形式 ω_B 也从底空间拉回，我们可以将 $\Lambda_{\omega_B} F_{\mathcal{H}}$ 视为 B 上每个纤维的哈密顿向量场丛的一个截面，并且有 $\Lambda_{\omega_B} \mu^* F_{\mathcal{H}} = \mu^* \Lambda_{\omega_B} F_{\mathcal{H}}$，对 ν^* 也同样如此。这里我们还用到了恒等映射

$$\Delta_{\mathcal{V}} \mu^* s = \nu^* s$$

其中 $s : B \to \mathrm{Ham}(\mathcal{V})$ 是 X 在 B上的纤维的相对哈密顿向量场丛的一个截面。这个恒等式定义了 ν^*，适用于一般的 K¨ahler 纤维化；但在此情形下，它可直接由余动量映射 μ^* 和 ν^*的下降得到

关于 $P \times Y$上的对角作用到 X。

最后，我们根据注记 6.1.8 注意到，由于投影 p 在加上一个从底空间拉回的形式的收缩后保持不变，因此有

$$p(\Delta_{\mathcal{V}}\Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}}) = p(\Lambda_{\omega_B}\nu^* F_{\mathcal{H}}) = p(\Lambda_{\omega_B}\rho_{\mathcal{H}}).$$

□

定理 7.1.6. 若复酉联络 A 在 P 上相对于厄米结构 σ 是 *Hermite–Einstein* 的，其中该结构定义了到 K的结构群约化，则在 P 上诱导的辛联络 ω_X 是最优辛联络。

证明. 设（X，ω_X）$\to$（B，ω_B）是一个等变 K¨ahler 纤维化，其纤维和底空间均具有常标量曲率 Kähler 度量，且其辛联络 ω_X 由全纯主丛诱导P。由命题 7.1.5 可知，ω_X的最优辛联络方程化简为

$$p(\Delta_{\mathcal{V}}\Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}}) = 0.$$

现在假设 ω_X 是最优辛联络，并且对于某个光滑函数 $h \in C^\infty(X)$，有 $\Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}} = h$。那么 h 在 X的每个纤维上限制为均值为零的全纯势，因为等变纤维化 X 源自一个全纯主丛，且曲率取值于纤维方向全纯向量场。由于 p 是到此类相对全纯势的正交投影，因此有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, p(\Delta_{\mathcal{V}} h)\rangle \\ &= \int_X h p(\Delta_{\mathcal{V}} h)\omega_X^m \wedge \omega_B^n \\ &= \int_X h\Delta_{\mathcal{V}} h\omega_X^m \wedge \omega_B^n \\ &= \int_X |\nabla h|^2 \omega_X^m \wedge \omega_B^n. \end{aligned}$$

因此，全纯势 h 是协变常值的；事实上，由于 μ^* 属于均值为零的全纯势，故其为零点。因此，当且仅当 h时，我们有 $p(\Delta_{\mathcal{V}} h) = 0$

为零点。特别地，最优辛联络方程等价于

$$\Lambda_{\omega_B}\mu^* F_{\mathcal{H}} = 0.$$

现在，如果 ω_X 源自主丛联络 A，那么自同构李代数与全纯势之间的对应关系告诉我们，上述方程等价于要求

$$\Lambda_{\omega_B} F_A = \tau$$

存在某个 ad P的中心截面，因此，如果 A 是 Hermite–Einstein 的，那么诱导的辛联络 ω_X 就是最优辛联络。 □

主丛的 Hitchin–Kobayashi 对应定理 6.3.10 使我们能够从 P的代数几何角度解释上述定理。

推论 7.1.7。 如果主丛 $P \to (B, L)$ 在常数标量曲率 *Kähler* 底空间上是多稳定的，并且结构群 G 作用于极化簇 (Y, H_Y)，且该作用可限制为某个极大紧子群的 K 作用；该子群相对于常数标量曲率 *Kähler* 度量 $\omega_Y \in c_1(H_Y)$在Y 上通过等距变换作用，那么伴随纤维化 $(X, H) \to (B, L)$ *admits an optimal symplectic connection.*

根据定理 6.1.11 可以利用定理 7.1.6生成新的常标量曲率 Kähler 度量示例，这些度量属于全纯主¨丛全空间上的绝热 Kähler 类。

例 7.1.8。 设 $P \to (B,\ L)$ 是一个非平凡稳定的 SL(2，$\mathbb{C}$)-主丛，定义在维数至少为二的极化簇 $(B,\ L)$ 上（任何此类主丛在维数为一时都是平凡的，此时构造退化为乘积常数标量曲率 Kähler 度量）。这类主丛可以构造为 $(B,\ L)$ 上一个非平凡稳定秩二全纯向量丛的标架丛，且该向量丛具有平凡行列式。关于任意射影代数曲面上此类丛的存在性，参见例如 [Gie88]。假设 $(B,\ L)$ 存在常数标量曲率 Kähler 度量，且其自同构群离散。令 $(Y,\ -K_Y)$ 表示前文讨论的 Mukai–Umemura 三维簇

见 第2.3.3.1节，它允许 SL(2，ℂ) 的作用，并具有满足 定理 7.1。6 [Don08，§5] 中假设的 Kähler–爱因斯坦度量。则伴随丛

$$X = P \times_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} Y$$

根据定理 7.1.6 和推论 7.1.7 可知其具有最优辛联络；又由于底空间具有离散自同构，且 P 是单纯的，纤维丛的全空间具有离散自同构，并且根据定理 6.1.11 存在绝热 K¨ahler 类中的常标量曲率 Kähler 度量。

上述构造具有普遍性，能够为全纯纤维丛的全空间构造出种类繁多的常标量曲率 Kähler 度量新例子。

注7.1.9。或许值得探讨这样一个问题：极化纤维化 $(X, H) \to (B, L)$ 何时在非绝热 K¨ahler 类 $kL + H$ 中存在常标量曲率 Kähler 度量，其中 k 不一定非常大。在一种特殊情形下，$B = B_1 \times \cdots \times B_\ell$ 和 P是一个乘积主 $(\mathbb{C}^*)^n$-丛，它由每个 B_i 上的 $\mathbb{C}^*$-丛构成；Delcroix–Simon [DJ22] 已确定了伴随等变纤维化存在托里克纤维，且在全空间上的 K¨ahler 类中具有常标量曲率 Kähler 度量的判据。离开绝热极限时，除了要求 P 上存在 Hermite–Einstein 联络且底空间上存在常标量曲率 Kähler 度量外，还必须假设托里克纤维具有加权常标量曲率Kähler度量。

对于上述其他主丛构造——其不一定具有 Delcroix–Simon 所研究的特殊环面形式——是否可以根据纤维上的带权常标量曲率 Kähler 条件，来理解非绝热类中常标量曲率 Kähler 度量的存在性，这将是一个值得研究的问题。

7.1.2 诱导的 Hermite–Einstein 结构

设 $\pi : (X, \omega_X, H) \to (B, \omega_B, L)$ 是一个由主丛 $\varpi : P \to (B, L)$ 导出的等相对常标量曲率 Kähler 丛，如 引理 7.1.2 所述。本节将说明如何从 ω_X 上的辛联络 X 得到 A 上的主丛联络 P，并证明当 ω_X 为最优时，所诱导的主丛联络 A 是 Hermite–Einstein。

7.1.2.1 P的另一种描述

首先，我们将给出与等变纤维化 P 相关联的主丛 X 的另一种不变描述。这一描述受到辛纤维化 [MS17，备注 6.411] 中辛同胚的无限维主丛情形的启发。

令 (Y, ω_Y, H_Y) 表示等变纤维化的模型纤维。则 P 在点 $b \in B$ 上的纤维P_b由所有与恒等映射同伦的双全纯映射 $f\colon Y \to X_b$ 构成，这些映射还可提升到线性化 H_Y和 $H|_b$。该集合是群 $G_0 = \mathrm{Aut}_0(Y, H_Y)$ 的一个G_0挠子，该群通过前复合进行作用，从而定义了 P 上的右 G_0 作用。

某个 $f \in P_b$ 的切空间 $T_f P \subset \Gamma(f^*TX)$ 由所有满足 $d(\pi \circ f)v\colon Y \to T_bB$ 为常数，且相对于辛联络 ω_X， v 的垂直部分全纯的向量场 $v \in \Gamma(TX|_{X_b})$ 构成。保持纤维化的 K¨ahler 结构的向量场还满足相容条件，即 1-形式

$$\omega_X(v, df(-)) \in \Omega^1(Y)$$

是闭的，这意味着该向量场保持辛形式 ω_X $|_b$.

垂直向量 $V_f \subset T_f P$由所有形如 $v = df \circ u : Y \to TX|_{X_b}$的向量场组成，其中 $u \in \mathfrak{h}(Y, H_Y)$ 是 Y上的一个全纯向量场，它生成的自同构可提升到 H_Y。

为定义水平向量，注意到利用由 ω_X定义的 Ehresmann 联络，任意向量 $v_0 \in T_bB$ 都存在唯一的水平提升，它是向量场 $v_0^{\#} \in \Gamma(TX|_{X_b})$。定义水平向量 $H_f \subset T_f P$为形如$v = v_0^{\#} \circ f$ 的向量场，其中 $v_0^{\#}\colon X_b \to TX|_{X_b}$ 对应于 $v_0 \in T_bB$。

要看出这种分解，注意任意向量场 $v \in T_f P$视为 X_b上的向量场时，都可以相对于 ω_X进行分解；而$d(\pi \circ f)v$ 为常数这一条件，恰好意味着 v 的水平分量具有如下形式： $v_0^{\#}$ ，其中 $v_0 \in T_bB$。

因此， ω_X 在 X 上的联络诱导出 P上的联络。我们注意到， $H \subset TP$关于 $G_0 = \mathrm{Aut}_0(Y, H_Y)$作用的等变性可由以下事实推出

对于 $v = v_0^{\#} \circ f \in T_f P$ 和 $g \in G_0$，$dR_g(v) = v_0^{\#} \circ (f \circ g)$，因此$dR_g(H_f) \subset H_{f\cdot g}$。

再次注意，如果我们将范围限制为保持 K¨ahler 结构的全纯等距变换和向量场，那么上述构造同样会给出主 K_0-丛 P_σ 上的主丛联络，而该丛是 P 的结构群约化，如引理 7.1.2所述。此联络在 P_σ 上通过伴随丛构造诱导出 P 上的联络。容易看出这一点：包含映射 $K_0 \hookrightarrow G_0$ 所诱导的 Ehresmann 联络，只是将 $v = v_0^{\#} \circ f$ 的水平向量 $f : Y \to X_b$ 一个全纯等距变换，视为 v 的向量 $f : Y \to X_b$ 一个双全纯映射，并忽略其等距性质。这显然将 P_σ 的水平子空间映入 P的水平子空间。

7.1.2.2 P上的联络曲率

我们已经说明，X 上的辛联络 ω_X 会在 P 上诱导出一个主丛联络，记作 A。B 上的二形式 A 的取值属于 ad P，这是一个纤维为 $\mathfrak{h}$的李代数丛，其定义为

$$F_A(v_1, v_2) = [v_1^{\#}, v_2^{\#}]^{\mathrm{vert}} \in \mathfrak{h}(X_b, \omega_X|_b, H|_b))$$

其中 $v_1, v_2 \in T_b B$。

由上述构造可见，TP内部定义联络 A 的水平分布在 X上诱导出相同的水平分布，该分布由 ω_X的正交补给出。然后利用第 7.1 节的构造，1[1]我们在 X 上得到一个新的、可能不同的相对 K¨ahler 度量 ω'_X，它与 ω_X具有相同的水平分布，并且满足：$\omega'_X|_b = \omega_X|_b$ 对每个 b均成立。因此，根据 [DS21b，引理 3.9]，我们有 $\omega'_X = \omega_X + i\partial\bar{\partial}\pi^*\varphi$，其中 φ 是定义在 B上的某个函数。由于根据假设 ω_X 是 OSC，因此 ω'_X 也是 OSC。通过将第 7.1.1 节中的直接计算应用于 ω'_X，我们得到：由 ω'_X 在 P上诱导的联络的曲率满足 Hermite–Einstein 方程。由于这正是同一个

[1]这里必须在纤维上选择某个动量映射，例如固定一个模型纤维（X_b，ω_b），并通过取均值为零的全纯势，在提升到H_B 的全纯向量场的李代数上定义一个动量映射 μ^*。

由 ω_X在 P 上诱导的联络 A，故结论成立。因此我们得到：

定理 7.1.10。 最优辛联络 ω_X 在等变相对常标量曲率 *Kähler* 纤维化 $(X,\ H) \to (B,\ \omega_B,\ L)$ 在相关的相对自同构主丛上诱导出一个 *Hermite–Einstein* 度量 P，该主丛见 引理 *7.1.2*和第 *7.1.2.1* 节。

我们注意到，根据 P 的构造可知， P 的全纯自同构与 X的全纯纤维丛自同构所包含的数据相同；而 A 上的 Hermite–Einstein 联络 P 唯一性表明，诱导出的 X 上的最优辛联络在自同构作用（以及从 B拉回的二形式）下唯一。这得到了 Dervan–Sektnan 和 Hallam 的唯一性结果 定理 6.1.12的一个特例。

7.2 未来方向

7.2.1 稳定性

原理 1.1-主定理定理 7.1.1的类比结果如下。

猜想 7.2.1。 设 $P \to (B, L)$ 是一个纤维为约化群 G 的全纯主丛，且 G 在线性作用于一个 *K*-多项式稳定簇(Y, H_Y)上。设 $X = P\times_G Y$ 为伴随等变纤维化，其带有相对丰沛极化 $H = (P \times H_Y)/G$，其中 G 对角作用，并且其作用是将 Y 上的作用提升至 H_Y 所得。若$(X, H) \to (B, L)$ 是（半／多）稳定的，则 P 是（半／多）稳定的。

为了研究这一猜想，首先需要明确 $(X,\ H) \to (B,\ L)$ 的纤维化退化与 P 的稳定性之间的关系。回顾一下，要检验 P 的稳定性，需要考察结构群约化 σ：$B \to P/Q$ 到极大抛物子群 $Q \subset G$。这类子群 $Q \subset G$ 应当被视为相对于某个表示ρ：$G \to \mathrm{GL}(V)$ 稳定一个旗的子群（在极大情形下，该旗只有一级）。为了理解这一过程，我们来考察抛物子群的另一种刻画。

约化群的子群 $Q \subset G$ 是抛物子群，当且仅当存在一个单参数子群 λ : $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G$ ，使得

$$Q = \{g \in G \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{ exists}\}.$$

给定抛物子群 $Q = Q(\lambda)$ 和表示 ρ : $G \to \mathbf{GL}(V)$, λ 在 V 上的诱导作用产生了一个关于 $\mathbb{C}^*$ 作用的权空间滤过。如果 w_1，.....， w_r 是 $\mathbb{C}^*$ 作用的权，且 $w_1 > \cdots > w_r$ 那么我们得到一个滤过

$$0 = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \cdots \subset V^{(r)} = V$$

其具有如下性质: λ 在 $V^{(i)}/V_{(i-1)}$ 上的诱导作用具有权 r_i。特别地，如果 $Q(\lambda)$ 是极大抛物子群，那么它将仅以两个权 w_1， w_2 作用，并固定一个旗

$$0 \subset V^{(1)} \subset V$$

在 V内，其中 λ 以权 w_1 作用于 $V_{(1)}$，并以权 w_2作用于 $V/V_{(1)}$。

现在设 G 在线性地作用于一个极化簇 (Y, H_Y) 上。那么，对于每个 $k > 0$，在截面空间 $H^0(Y, H_Y^k)$ 上存在一个诱导作用，并且选择抛物子群 $Q(\lambda) \subset G$ 会诱导出一个滤过

$$0 \subset V_k^{(1)} \subset \cdots \subset V_k^{(r-1)} \subset H^0(Y, H_Y^k).$$

利用表示 ρ: $G \to \mathbf{GL}(H^0(Y, H_Y^k))$，我们看到，与伴随纤维化 $(X, H) \to (B, L)$ 对应的丛 $V_k = \pi_* H^k$ 可作为伴随丛得到

$$P \times_G H^0(Y, H_Y^k) \cong \pi_* H^k = V_k.$$

结构群 $\sigma : B \to P/Q$ 的抛物约化的一个选择赋予伴随丛 V_k 一个 Q-丛的结构，因此，在每个纤维上进行上述构造会产生一个滤过

$$0 \subset V_k^{(1)} \subset \cdots \subset V_k^{(r-1)} \subset V_k$$

V_k的。

工作 在结构群约化定义在整体上的简化情形下 σ :

$B \to P/Q$ 定义在整体上 B（回想第 6.3.2 节，一般而言我们必须允许 σ 仅支集于开子集 $U \subset B$ 上，其补集的余维为二），此时 $V_k^{(i)}$ 向量丛的诱导滤过中的每一项V_k 对于 $k \gg 0$ 也将是局部自由的。[2] 在这种情形下，我们可以通过关闭扩张（注 2.2.11）来平滑地分解，从而轻松定义相应的向量丛退化

$$V_k \cong \tilde{V}_k = \bigoplus_i V_k^{(i)}/V_k^{(i-1)}$$

并考虑扩张类 $\gamma \in H^1(B,\ \text{End}\ \tilde{V}_k)$，其 Hom($V_{(i)k}/V_{(i-1)k}$，$V_{(i-1)k}$)-分量由以下短正合列的扩张类给出

$$0 \longrightarrow V_k^{(i-1)} \longrightarrow V_k^{(i)} \longrightarrow V_k^{(i)}/V_k^{(i-1)} \longrightarrow 0\ .$$

缩放 $t\gamma$ 并令，我们得到一个 $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$ 的 V_k 退化，它具有第 6.2 节中描述的标准形式第 6.2 节，因此得到一个纤维化退化（$\mathcal{X}$，$\mathcal{H}$）（X，H）$\to$（B，L）。

注 7.2.2。Hallam 已用转移函数明确描述了这种形式的纤维化退化 [Hal20，例 6。15] 其中它们是乘积型退化的例子。文中证明，若（X，H）$\to$（B，L）具有最优辛联络，则相对于这类乘积型退化，它是稳定的。

猜想 7.2.1 的更精确版本猜想 7.2.1如下。

猜想 7.2.3。设 σ：$B \to P/Q$ 是到一个极大抛物子群的结构群约化。设一般纤维(X_b, H_b) 的诱导测试构型$(\mathcal{X}_b, \mathcal{H}_b) \cong (Y, H_Y)$ 正规化为一个乘积，因此 $W_0(\mathcal{X}, \mathcal{H}) = 0$。那么

$$W_1(\mathcal{X}, \mathcal{H}) = C \deg \sigma^* \mathcal{V}(P/Q)$$

对某个常数 $C > 0$，并且如果 σ使……不稳定 P，那么 $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$使……不稳定$(X, H) \to (B, L)$。

[2]一般而言，我们预期存在一个由凝聚子层构成的滤过。

我们提出以下进一步的猜想，它是我们这一设定下定理 7.1.10的对应版本。

猜想 *7.2.4*。设 $P \to (B, L)$ 是如引理 *7.1.2* 所述的极化等变 *Kähler* 纤维化 $(X, \omega_X, H) \to (B, L)$ 的相对自同构群丛。那么，当且仅当 $(X, H) \to (B, L)$ 是（不/半/多）稳定的时，P 是（不/半/多）稳定的。

7.2.1.1 射影丛的情形

在射影丛的情形下，猜想 7.2.4 的部分内容可由 Ross–Thomas 运用其斜率 K-稳定性概念 [RT06] 得出。在这一背景下，他们考虑形如 $(\mathbb{P}(E)\ \mathcal{O}(1)) \to (B, L)$ 的纤维化，并研究对于 $j \gg 0$ 而言，在绝热类 $jL+\mathcal{O}(1)$ 中相对于由子概形 $Z = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ 的正规锥变形所产生的测试构形的 K- 稳定性，其中这些子概形是由饱和相干子层 $F \subset E$ 的射影化得到的。特别地，他们在此情形下证明，若 E 不稳定，则 $(\mathbb{P}(E)\ \mathcal{O}(1))$ 是不稳定的纤维化；此外，当 B 是一条曲线时，他们证明，若 $(\mathbb{P}(E)\ \mathcal{O}(1))$ 是（半/多）稳定的纤维化，则 E 是（半/多）稳定的。在本节中，我们将使用第 6.2 节纤维化的稳定性这一语言重新表述该理论。

利用 Ross–Thomas 关于形变到正规锥的 Donaldson–Futaki 不变量的公式，可以显式计算 $\mathbb{P}（E）$的某些纤维化退化的 Donaldson–Futaki 不变量。具体来说，若 $F \subset E$ 是一个子丛，且 $Z = \mathbb{P}（F） \subset \mathbb{P}（E）$是射影子丛，那么（[RT06，§4]）（$\mathcal{X}$，$\mathcal{H}_c$）关于（$\mathbb{P}（E）$ H）的形变到正规锥的 Donaldson–Futaki 不变量为

$$a_0 \,\mathrm{DF}(\mathcal{X}, jL + \mathcal{H}_c) = a_1 \int_0^c a_0(x)\,dx - a_0 \int_0^c \left(a_1(x) + \frac{a_0'(x)}{2}\right) dx. \qquad \text{(Eq. 7.2)}$$

在这里，我们将 $H = -K_{\mathbb{P}(E)/B}$ 视为射影丛的相对反典范丛，而不是 $\mathcal{O}$Ross–Thomas 所考虑的线性化 (1)。[3]特别地，这为我们提供了一个 Fano 纤维化，正如第 6.2 节 中所讨论的

[3]请注意，H，实际上 $\mathcal{O}(1)$ 已经是相对非常丰的。

在这种设定下， W_1 的表达式会简化。回顾一下，我们有

$$K_{\mathbb{P}(E)/B} = -(\operatorname{rk} E)\mathcal{O}(1) - \pi^* \det E$$

因此

$$V_k = \pi_*(-K_{\mathbb{P}(E)/B})^k = \operatorname{Sym}^{k \operatorname{rk} E} E^* \otimes (\det E)^k.$$

我们研究这样的情形： $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(V_k)$。

注 7.2.5。 注意， $\mu(V_k) = 0$对所有 k 采用射影丛的这一线性化，它对应于 CM 线丛次数为零，正如第 6.2 节中所述。

系数 $a_i(x)$ 出现在 (式 7.2) 中，其计算方法是将其作为下式展开中的系数：

$$\chi(\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(F)} \mathbb{P}(E), L^{jk} \otimes H^k(-xk\mathcal{E})) = a_0(x,j)k^n + a_1(x,j)k^{n-1} + O(k^{n-2})$$

其中 $xk \in \mathbb{Z}$，而 $\mathcal{E}$ 是膨胀 $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(F)} \mathbb{P}(E)$ 的例外除子。系数 $a_i(x, j)$ 是关于 x 的次数至多为 $n+m-i$ 的多项式，其中 $\dim B = n$ 且 $\dim \mathbb{P}(E_b) = m$，因此 $\operatorname{rk} E = m+1$。

$\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ 的正规锥变形中心纤维上 $\mathbb{C}^*$ 作用的权，可用 $a_i(x)$ 表示为

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^c a_0(x)\,dx - ca_0, \\ b_1 &= \int_0^c \left(a_1(x) + \frac{a_0'(x)}{2}\right) dx - ca_1, \end{aligned}$$

由此，根据定义可得上述 Donaldson–Futaki 不变量的表达式

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X}, jL + \mathcal{H}_c) = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{a_0}.$$

注意，此处 $c \in (0, \varepsilon(Z)]$ 是正规锥变形中相对丰线丛 $\mathcal{H}_c$ 的参数。我们希望考虑临界情形，其中$c = \varepsilon(Z)$，从而射影丛的纤维上诱导的测试构型

归一化为一个乘积。在此情形下，相对塞什德里常数为 $c = \mathbf{rk}\, E$。这是由 Ross–Thomas 证明的：对于关于线性化 $\mathcal{O}(1)$ 的子丛射影化，相对塞什德里常数为 $\varepsilon = 1$；而在我们的情形中，纤维上的线性化化为 $\mathcal{O}(\mathbf{rk}\, E)$。作出这样的选择后，所得的纤维化退化具有 $W_0(\mathcal{X},\ \mathcal{H}_c) = 0$。

在我们的设定中，可以计算得

$$W_1(\mathcal{X}, \mathcal{H}_c) = \frac{m}{2(m+1)!(n-1)!}\frac{1}{m+2}\left(-\frac{1}{\mathcal{E}}L^{n-1}.(H - c\mathcal{E})^{m+2}\right) - \frac{1}{2m!(n-1)!}\frac{1}{m+1}\left(-\frac{1}{\mathcal{E}}L^{n-1}.(H - c\mathcal{E})^{m+1}.(H - p\mathcal{E})\right) \quad \text{(Eq. 7.3)}$$

其中 $p =$余维 $\mathbb{P}(F)$ 就是秩 $E -$秩 F，而 $\mathcal{E}$表示 $\mathbf{Bl}_{\mathbb{P}(F)}\,\mathbb{P}(E)$ 中的例外除子。注意，与展开式 (式 6.4) 相比，我们可以辨认出交理论公式中出现的 $L^n.\mathcal{H}^{m+1}$ 和 $L^{n-1}.\mathcal{H}^{m+1}.K_{\mathcal{X}/B\times\mathbb{P}^1}$ 项，公式针对的是 W_1。由于这里讨论的是等平凡 Fano 纤维化，且 CM 线丛的次数 $L^{n-1}.H^{m+1}$ 为零（如前所述），因此第三项消失。

我们可以利用 Segre 类的以下刻画，将上述 W_1 的展开与 E 和 F 的拓扑联系起来。回忆一下（例如参见 [EH16，命题 9.13]）：若 $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$，则法丛 $N \to \mathbb{P}(F)$ 可表示为

$$N = N_{\mathbb{P}(F)/\mathbb{P}(E)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \pi^* E/F.$$

N 的 Segre 类出现在交公式中

$$\int_{\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(F)}\,\mathbb{P}(E)} L^{n-1}.H^i.\mathcal{E}^{m-i+1} = (-1)^{m-i}\int_{\mathbb{P}(F)} L^{n-1}.s_{m-p-i+1}(N).\ H|^i_{\mathbb{P}(F)}\,.$$

对于满足 $m - i + 1 = p$ 的临界指数，我们在等式右端得到零阶 Segre 类 $s_0(N) = 1$。更高阶的 Segre 类由关系式 $s(E)c(E) = 1$ 定义，其中 $s(E)$ 和 $c(E)$ 分别为总 Segre 类和总陈类。

特别地，有如下的一般表达式

$$s_q(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{\operatorname{rk} E - 1 + q}{\operatorname{rk} E - 1 + j} s_j(E) c_1(L)^{q-j}$$

对于向量丛 E 和线丛 L。在我们的情形中，取向量丛$\pi^* E/F$ 来计算

$$s_{m-p-i+1}(N) = \sum_{j=0}^{m-p-i+1} (-1)^{m-p-i+1-j} \binom{m-i}{p-1+j} s_j(\pi^* E/F) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{m-p-i+1-j}.$$

将上述表达式应用于 (公式 7.3) 进行繁琐的计算可得，若

$$A = -\frac{m}{m+2} \left(\frac{1}{\mathcal{E}} L^{n-1}.(H - c\mathcal{E})^{m+2} \right) + \frac{1}{\mathcal{E}} L^{n-1}.(H - c\mathcal{E})^{m+1}.(H - p\mathcal{E}),$$

它是 W_1的正的常数倍，则我们得到

$$A = B(\operatorname{rk} E)^{\operatorname{rk} E}(\operatorname{rk} E \deg F - \operatorname{rk} F \deg E)$$

其中 B 是常数

$$B = \sum_{i=0}^{\operatorname{rk} F} (-1)^{\operatorname{rk} F - i} \binom{\operatorname{rk} E + 1}{i} \binom{\operatorname{rk} E - 1 - i}{\operatorname{rk} E - 1 - \operatorname{rk} F} \cdot \frac{\operatorname{rk} E - i}{\operatorname{rk} E - \operatorname{rk} F} \left(-\operatorname{rk} E + 1 + \frac{i \operatorname{rk} E + (\operatorname{rk} E - \operatorname{rk} F)(\operatorname{rk} E + 1 - i)}{\operatorname{rk} E} \right).$$

因此，在此情形下（取 $E \to (B,\ L)$ 的标架丛作为主丛P ，并取诱导全纯子丛 F 的结构群约化猜想 7.2.3 可得到解决，条件是 $B > 0$ 对于所有 $0 < \text{秩}\, F < \text{秩}\, E$ 均成立。事实上，这可以事后 由 Ross–Thomas 的工作推出。

注记 7.2.6。 鉴于 Hattori 引入的 ϝ-稳定性（参见 注记 6.2.4），探究上述形式体系能否加以拓展，以研究向量丛的 Gieseker 稳定性与 ϝ-稳定性之间的关系，将会很有意义。

相关射影丛。特别是，Donaldson–Futaki 不变量 DF($\mathcal{X}, jL + \mathcal{H}$) 是否可以按 j 的幂展开，使其高阶系数以某种方式对应于 定义 2.2.15 中 Gieseker 斜率之差所出现的低阶多项式系数？例如，Ross–Keller [KR14] 已证明，曲面上 Gieseker 不稳定秩二向量丛的射影化并非渐近 Chow 稳定；他们还运用一些分析工具证明，Gieseker 稳定性可以推出射影化的渐近 Chow 稳定性。

7.2.2 非等变纤维化的主丛

第 7.1 节中对最优辛联络的刻画第 7.1 节是通过主丛上的联络来表述的，这在很大程度上依赖于纤维化的等变结构。然而，对于辛纤维化（例如参见 [MS17，注记 6.4。11]），可以为一个纤维化（X， ω_X） $\to B$ 关联一个由纤维的相对辛同胚构成的无限维主丛 $\mathcal{P} \to B$ 。 X纤维化上的辛联络 $\mathcal{H}$ 利用与 $X \to B$ 相同的论证，诱导出第 7.1.2 节中的主丛联络 $\mathcal{P}$。我们可以提出这样的问题：当 ω_X 是一个 K $X \to B$ ähler 纤维化时，¨上的最优辛联络条件能否用主丛上的联络来刻画 $\mathcal{P}$。

尽管先验地 这个主丛不具有任何全纯结构，但可以为某些极化的 K¨ähler 纤维化 $(X, \omega_X, H) \to (B, \omega_B, L)$ 关联一个全纯主丛。事实上，假设纤维 (X_b, ω_b) 是常标量曲率 Kähler，且对每个 b，自同构群 Aut(X_b, H_b) 都同构，则可以定义一个主丛 $P \to B$ ，其在 b 上方的纤维为

$$P_b = \{f : G \to \mathrm{Aut}(X_b, H_b) \mid f \text{ an isomorphism}\}$$

其中 $G = \mathrm{Aut}(X_{b_0}, H_{b_0})$ 是自同构群的一个固定模型。

注 7.2.7。 只需作出如下假设，正如我们在第 6.1.1 节 中所做的那样：维数 di m 自同构群(X_b, H_b) 与 b无关。至少当 B连通时，这意味着

自同构群$(X_b, H_b) \cong$自同构群$(X_{b'}, H_{b'})$对所有 $b, b' \in B$均成立，这是由约化群自同构群(X_b, H_b)的变形刚性所致。

在这个结构群为约化群的全纯主丛上，可以构造一个联络，它源自相对的 K¨ahler 度量 ω_X，如第 7.1.2 节所述。

问题 7.2.8。是否存在一种刻画方式，能通过纤维化的相对自同构群主丛 P上的联络来描述最优辛联络条件?

尤其是，预期与等变情形一样，

$$\Delta_{\mathcal{V}} \Lambda_{\omega_B} \mu^* F_{\mathcal{H}}$$

出现在 OSC 方程中的项应与 P上的联络的曲率 $\Lambda_{\omega_B} F_A$ 相关，但人们预期，Ricci 项 $\Lambda_{\omega_B} \rho_{\mathcal{H}}$（它不再必然与第一项成比例）将对主丛上的曲率方程产生非平凡贡献。例如，能否通过纤维化 $\Lambda_{\omega_B} F_A$ 的各纤维的复结构局部变形来刻画两者之差

$$T = \Lambda_{\omega_B} \rho_{\mathcal{H}} - \Delta_{\mathcal{V}} \Lambda_{\omega_B} \mu^* F_{\mathcal{H}}$$

用纤维化$X \to B$的纤维的复结构的局部变形来表示?

由于 Hallam [Hal22], 的一个观察，对于给定的相对cscK度量 ω_X，K¨ahler纤维化上与其上同调的相对cscK度量空间，可以与实的（均值为零的）相对全纯势的向量丛 $E \to B$ 的截面空间相识别。特别地， $E \to B$ 在这里作为实伴随丛 ad P_σ 出现，这对应于结构群约化 $\sigma : B \to P/K$ 对于由 ω_X的选取所定义的 $K =$Aut(X_b, ω_b, H_b)。因此，我们可以预期，对于某个相对cscK度量 ω_X 的项$\Lambda_{\omega_B} \rho_{\mathcal{H}}$，可能可以通过实伴随丛 ad P_σ的截面来解释，而 X 上的最优辛联络方程应当与一对 (A, s) 的耦合 Hermite–Einstein 型方程相关，其中 $s : B \to E =$ ad P_σ。

参考文献

[AB01] Boudjemaa Anchouche 和 Indranil Biswas。紧致 K¨ahler 流形上多稳定主丛的 Einstein–Hermitian 联络。Amer. J. Math., 123(2):207–228, 2001。206, 207, 208[ACC+21] Carolina Araujo、Ana-Maria Castravet、Ivan Cheltsov、Kento Fujita、Anne-Sophie Kaloghiros、Jesus Martinez-Garcia、Constantin Shramov、Hendrik S¨uß 和 Nivedita Viswanathan。Fano三维簇的 Calabi问题。WorkingPaper 31, 2021。53, 62[Asp05] Paul S. Aspinwall。Calabi–Yau流形上的D-膜。载于 Progress in string theory，第1–152页。World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005。65, 74, 138[ABC+09] Paul S. Aspinwall、Tom Bridgeland、Alastair Craw、Michael R. Douglas、Mark Gross、Anton Kapustin、Gregory W. Moore、Graeme Segal、Bal´azs Szendr˝oi 和 P. M. H. Wilson。狄利克雷膜与镜像对称，第4卷，Clay数学专著。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；Clay数学研究所，剑桥，MA，2009。2, 65, 67, 69, 74, 138[AD02] Paul S. Aspinwall 和 Michael R. Douglas。D膜稳定性与单值化。J. High Energy Phys., (5):no. 31, 35, 2002。2, 70, 71[Ati57] Michael Francis Atiyah。纤维丛上的复解析联络。Trans. Amer. Math. Soc., 85:181–207, 1957。37

[AB83] Michael Francis Atiyah 和 Raoul Bott. 黎曼曲面上的杨-米尔斯方程. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 308(1505):523–615, 1983年. 17, 27[AH62] Michael Francis Atiyah 和 Friedrich Hirzebruch. 解析嵌入的黎曼-罗赫定理. Topology, 1:151–166, 1962年. 137[Bal06] Werner Ballmann. K ¨ahler 流形讲义. 数学与物理学 ESI 讲座. 欧洲数学学会 (EMS), 苏黎世, 2006年. 36[BS94] Shigetoshi Bando 和 Yum-Tong Siu. 稳定层与厄米-爱因斯坦度量. 载于《复流形上的几何与分析》, 第39–50页. World Sci. Publ., 新泽西州里弗埃奇, 1994年. 24, 32[Bay09] Arend Bayer. 多项式 Bridgeland 稳定性条件与大体积极限. 几何与拓扑, 13(4):2389–2425, 2009年. 3, 76, 82, 85, 95, 119[BMS16] Arend Bayer, Emanuele Macr`ı, 和 Paolo Stellari. 阿贝尔三维簇及某些卡拉比-丘三维簇上的稳定性条件空间. 数学发明, 206(3):869–933, 2016年. 75[BMT14] Arend Bayer, Emanuele Macr`ı, 和 Yukinobu Toda. 三维簇上的 Bridgeland 稳定性条件 I: Bogomolov-Gieseker 型不等式. J. Algebraic Geom., 23(1):117–163, 2014年. 75[BBS95] Katrin Becker, Melanie Becker, 和 Andrew Strominger. 五膜、膜与非微扰弦理论. Nuclear Phys. B, 456(1-2):130–152, 1995年. 68[BBJ21] Robert J. Berman, S´ebastien Boucksom, 和 Mattias Jonsson. 丘-田-唐纳森猜想的变分方法. 美国数学会杂志, 34(3):605–652, 2021年. 45, 46, 47

[BF86a] Jean-Michel Bismut 和 Daniel S. Freed. 椭圆族的分析 I：行列式丛上的度量与联络. Comm. Math. Phys., 106(1):159–176, 1986年. 39[BF86b] Jean-Michel Bismut 和 Daniel S. Freed. 椭圆族的分析 II：狄拉克算子、eta 不变量与整体性定理. Comm. Math. Phys., 107(1):103–163, 1986年. 39[Bou18] S´ébastien Boucksom. 丘-田-唐纳森猜想的变分与非阿基米德方面. 载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》第二卷：特邀报告，第591–617页. World Sci. Publ., 新泽西州哈肯萨克, 2018年. 17[BHJ19] S´ébastien Boucksom, Tomoyuki Hisamoto, 和 Mattias Jonsson. K-稳定性的一致性与 Kähler 几何中能量泛函的渐近行为. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 21(9):2905–2944, 2019年. 47[Bri07] Tom Bridgeland. 三角范畴上的稳定性条件. Ann. of Math. (2), 166(2):317–345, 2007年. 2, 69, 71, 72, 75[Bri08] Tom Bridgeland. 曲面上的稳定性条件. Duke Math. J., 141(2):241–291, 2008年. 75[Bri09] Tom Bridgeland. 稳定性条件空间. 载于《代数几何——西雅图 2005》，第一部分，第80卷《纯粹数学研讨会论文集》，第1–21页. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯, 2009年. 75[Br¨o11] Till Andreas Br¨onnle. 极值度量的变形构造. 博士论文，伦敦帝国学院, 2011年. 51[Buc88] Nicholas Buchdahl. 紧复曲面上的厄米-爱因斯坦联络与稳定向量丛. 数学年刊, 280(4):625–648, 1988年. 31[BS20] Nicholas Buchdahl 和 Georg Schumacher. 多重稳定性与希钦-小林对应. arXiv 预印本 arXiv:2002.03548, 2020年. 62, 164

[BGFiML12] Jos´Ignacio Burgos Gil、Gerard Freixas i Montplet 和 R˘azvan Lit- canu。《相干层导出范畴上的厄米结构》。《J. Math. Pures Appl. (9)》，97(5):424–459，2012年。142，143，144[Cal82] Eugenio Calabi。《极值 K¨ahler 度量》。载于《微分几何研讨会》，第 102 卷《Ann. of Math. Stud.》，第 259–290 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982年。46[CHSW85] P. Candelas、Gary T. Horowitz、Andrew Strominger 和 Edward Witten。《超弦的真空构型》。《Nuclear Phys. B》，258(1):46–74，1985年。66[CS09] I. A. Cheltsov 和 K. A. Shramov。《德尔佩佐三维簇上的极值度量》。《Tr. Mat. Inst. Steklova》，264(Mnogomernaya Algebraicheskaya Geometriya):37–51，2009年。52[CS18] Ivan Cheltsov 和 Constantin Shramov。《次数22的 K¨ahler-爱因斯坦 Fano 三维簇》. arXiv 预印本 arXiv:1803.02774，2018年。52[Che19] Gao Chen。《关于 J-方程》. arXiv 电子预印本 arXiv:1905.10222，2019年5月。117[Che21] Gao Chen。《J-方程与超临界变形厄米-杨–米尔斯方程》。《数学发明》，225(2):529–602，2021年。79，119[CC21a] Xiuxiong Chen 和 Jingrui Cheng。《关于常标量曲率 K¨ahler 度量（ I ） —— 先验估计》。《美国数学会杂志》，34(4):909–936，2021年。47[CC21b] Xiuxiong Chen 和 Jingrui Cheng。《关于常标量曲率 K¨ahler 度量（II）——存在性结果》。《美国数学会杂志》，34(4):937–1009，2021年。47[CDS15a] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。《Fano 流形上的 K¨ahler-爱因斯坦度量。I：带锥奇点度量的逼近》。《美国数学会杂志》，28(1):183–197，2015年。46

[CDS15b] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。《Fano 流形上的 K¨ahler-爱因斯坦度量。II：锥角小于 2π 时的极限》。《美国数学会杂志》，28(1):199–234，2015年。46[CDS15c] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。《Fano 流形上的 K¨ahler-爱因斯坦度量。III：锥角趋近 2π 时的极限及主要证明的完成》。《美国数学会杂志》，28(1):235–278，2015年。46[CSW18] Xiuxiong Chen、Song Sun 和 Bing Wang。《K¨ahler-Ricci 流、K¨ahler-爱因斯坦度量与 K-稳定性》。《几何与拓扑》，22(6):3145–3173，2018年。46[CLT21] Jianchun Chu、Man-Chun Lee 和 Ryosuke Takahashi。《超临界变形厄米–杨–米尔斯方程的 Nakai–Moishezon 型判据》. arXiv 预印本 arXiv:2105.10725，2021年。79[CP21] Giulio Codogni 和 Zsolt Patakfalvi。《 K-稳定 klt Fano 簇族的 CM 线丛正性》。《数学发明》，223(3):811–894，2021年。203[CJY20] Tristan C. Collins、Adam Jacob 和 Shing-Tung Yau。《具有指定拉格朗日相位的 (1, 1) 形式：先验估计与代数障碍》。《剑桥数学杂志》，8(2):407–452，2020年。2，77，78[CS19] Tristan C Collins 和 Yun Shi。《稳定性与变形厄米–杨–米尔斯方程》。《微分几何综述》，24(1):1–38，2019年。5，77，136，137[CXY18] Tristan C. Collins、Dan Xie 和 Shing-Tung Yau。《几何与物理中的变形厄米–杨–米尔斯方程》。载于《几何与物理》第 I 卷，第 69–90 页。牛津大学出版社，牛津，2018年。77[CY21] Tristan C. Collins 和 Shing-Tung Yau。《镜像对称中的矩映射、非线性偏微分方程与稳定性，I：测地线》。《偏微分方程年刊》，7(1):论文第11号，73页，2021年。5，9，77，78，80，105，106，129，133

[CKS03] Andrei Cˇaldˇararu、Sheldon Katz 和 Eric Sharpe。D-膜、 B 场与 Ext群。Adv. Theor. Math. Phys., 7(3):381–404, 2003. 138[DS16] Ved Datar 和 G´abor Sz´ekelyhidi。沿光滑连续法的 K¨ahler–爱因斯坦度量。Geom. Funct. Anal., 26(4):975–1010, 2016. 46[DP21] Ved V. Datar 和 Vamsi Pritham Pingali。射影流形上广义 Monge-Amp`ere 方程的数值判据。Geom. Funct. Anal., 31(4):767–814, 2021. 79, 117[DJ22] Thibaut Delcroix 和 Simon Jubert。多面体与半单主托里克纤维化的有效加权K稳定性条件。arXiv 预印本 arXiv:2202.02996, 2022. 223[Dem97] Jean-Pierre Demailly。《复解析与微分几何》。格勒诺布尔第一大学，1997. 109, 114, 117[DP04] Jean-Pierre Demailly 和 Mihai Paun。紧致 K¨ahler 流形的 K¨ahler 锥的数值刻画。Ann. of Math. (2), 159(3):1247–1274, 2004. 124[Der21] Ruadha´ı Dervan。极化簇的稳定性条件。arXiv 预印本 arXiv:2103.03177, 2021. 185[DN18] Ruadha´ı Dervan 和 Philipp Naumann。通过典范 K¨ahler 度量研究极化流形的模空间。arXiv 预印本 arXiv:1810.02576, 2018. 197[DS21a] Ruadha´ı Dervan 和 Lars Martin Sektnan。模理论、纤维化的稳定性与最优辛联络。Geom. Topol., 25(5):2643–2697, 2021. 6, 189, 199, 200, 202, 203, 204[DS21b] Ruadha´ı Dervan 和 Lars Martin Sektnan。全纯下沉上的最优辛联络。纯粹与应用数学通讯,

74(10):2132–2184, 2021. 6, 189, 191, 194, 196, 197, 210, 211, 220, 225[DMS21] Ruadha´ı Dervan、John Benjamin McCarthy 和 Lars Martin Sektnan。 Z-临界联络与Bridgeland 稳定性条件。arXiv 预印本 arXiv:2012.10426, 2021. vii, ix, 1, 4, 81, 145, 155, 184, 185[Don83] Simon K. Donaldson。Narasimhan 和 Seshadri 定理的新证明。《微分几何杂志》，18(2):269–277, 1983. 17, 27, 31[Don85] Simon K. Donaldson。复代数曲面上的反自对偶杨–米尔斯联络与稳定向量丛。Proc. London Math. Soc. (3), 50(1):1–26, 1985. 28, 29, 31, 34, 131[Don87] Simon K. Donaldson。无穷行列式、稳定丛与曲率。Duke Math. J., 54(1):231–247, 1987. 31, 39[Don02] Simon K. Donaldson。环面簇的标量曲率与稳定性。《微分几何杂志》，62(2):289–349, 2002. 42[Don05] Simon K. Donaldson。Calabi泛函的下界。《微分几何杂志》，70(3):453–472, 2005. 25[Don08] Simon K. Donaldson。环面流形及其他具有大对称性的流形上的 K¨ahler 几何。7:29–75, 2008. 47, 50, 51, 58, 59, 223[Don18] Simon K. Donaldson。代数簇的稳定性与 K¨ahler 几何。载于《代数几何：盐湖城 2015》，第 97 卷《纯粹数学研讨会论文集》，第 199–221 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018. 52[Dou02] Michael R. Douglas。狄利克雷膜、同调镜像对称与稳定性。载于《国际数学家大会论文集》，第三卷（北京，2002），第 395–408 页。高等教育出版社，北京，2002. 69

[DFR05] Michael R. Douglas、Bartomeu Fiol 和 Christian R¨omelsberger。稳定性与 BPS 膜。J. High Energy Phys.，（9）：006，15，2005。2，69，70[EH16] David Eisenbud 和 Joe Harris。3264 及其他——代数几何的第二课程。剑桥大学出版社，剑桥，2016。231[EL04] H. Enger 和 C. A. L¨utken。弦产生的非线性杨-米尔斯瞬子是 π-稳定的 D-膜。Nuclear Phys. B，695(1-2)：73–83，2004。101[Fin04] Joel Fine。纤维化复曲面上的常标量曲率 K¨ahler 度量。J. Differential Geom.，68(3)：397–432，2004。183，197[FG65] Wolfgang Fischer 和 Hans Grauert。紧致复流形的局部平凡族。Nachr. Akad. Wiss. G¨ottingen Math.- Phys. Kl. II，1965：89–94，1965。213[FW99] Daniel S. Freed 和 Edward Witten。带 D-膜的弦理论中的反常。Asian J. Math.，3(4)：819–851，1999。138[Fuj92] Akira Fujiki。极化代数流形的模空间与 K¨ahler 度量 [《数学》42（1990），第 3 期，231–243 的译文；MR1073369（92b:32032）]。第 5 卷，173–191 页，1992。Sugaku Expositions。46[FH91] William Fulton 和 Joe Harris。表示论，《数学研究生教材》第 129 卷。施普林格出版社，纽约，1991。入门课程，《数学读本》。48[Gau10] Paul Gauduchon。Calabi 的极值 K¨ahler 度量：初等介绍。预印本，34：37–40，2010。192，193，214[GRS21] Valentina Georgoulas、Joel W. Robbin 和 Dietmar Arno Salamon。矩-权不等式与希尔伯特-芒福德判据——从微分几何观点看几何不变量理论，《数学讲义》第 2297 卷。施普林格，查姆，[2021] ©2021。16

[Gie77] David Gieseker。关于代数曲面上的向量丛模空间。Ann. of Math.（2），106(1)：45–60，1977。26[Gie88] David Gieseker。在代数曲面上构造稳定丛。J. Differential Geom.，27(1)：137–154，1988。222[GSTW21] Daniel Greb、Benjamin Sibley、Matei Toma 和 Richard Wentworth。射影流形上 Hermitian Yang-Mills 联络模空间的复代数紧化。Geom. Topol.，25(4)：1719–1818，2021。32[GT17] Daniel Greb 和 Matei Toma。斜率半稳定层的紧模空间。Algebraic Geometry，4：40–78，2017。21[GLS96] Victor Guillemin、Eugene Lerman 和 Shlomo Sternberg。辛纤维化与重数图。剑桥大学出版社，剑桥，1996。191[GS84] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg。动量映射的凸性性质。II。Invent. Math.，77(3)：533–546，1984。15[HKKP20] Fabian Haiden、Ludmil Katzarkov、Maxim Kontsevich 和 Pranav Pandit。半稳定性、模格与迭代对数。《微分几何杂志》，2020。2，141，142[Hal20] Michael Hallam。相对 K¨ahler 度量空间中的测地线。arXiv 预印本 arXiv:2012.04416，2020。197，198，204，228[Hal22] Michael Hallam。纤维化的几何与稳定性。博士论文，牛津大学，2022。193，196，200，234[HN75] G. Harder 和 M. S. Narasimhan。关于曲线上的向量丛模空间的上同调群。数学年刊，212：215–248，1974/75。25[Hat22] Masafumi Hattori。Dervan-Sektnan 之后的纤维化稳定性与奇异性。arXiv 预印本 arXiv:2202.09992，2022。200，202

[Hil90] David Hilbert. 关于代数形式理论。数学年刊，36(4):473–534，1890年。11[Hil93] David Hilbert. 关于完备不变量系。数学年刊，42(3):313–373，1893年。10[Hit74] Nigel Hitchin. 调和旋量。《数学进展》，14:1–55，1974年。138[Hit79] Nigel Hitchin. 《几何中的非线性问题：第六届国际研讨会论文集：1979年9月3日至8日在片田举行的会议》。Taniguchi基金会，1979年。31[HKK+03] Kentaro Hori、Sheldon Katz、Albrecht Klemm、Rahul Pandharipande、Richard Thomas、Cumrun Vafa、Ravi Vakil和Eric Zaslow。《镜像对称》，Clay数学专著第1卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；Clay数学研究所，马萨诸塞州剑桥，2003年。Vafa作序。2, 65, 130[HL10] Daniel Huybrechts和Manfred Lehn。《层的模空间几何》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2010年。19, 21, 23, 27, 92[JS20] Adam Jacob和Norman Sheu。爆破上的变形厄米–杨–米尔斯方程 $\mathbb{P}^n$。arXiv预印本arXiv:2009.00651，2020年。119[JY17] Adam Jacob和Shing-Tung Yau。全纯线丛的一个特殊拉格朗日型方程。数学年刊，369(1-2):869–898，2017年。2, 77, 78, 102, 120, 133, 135[Joy15] Dominic Joyce。关于Calabi–Yau流形的Fukaya范畴、特殊拉格朗日子流形和拉格朗日平均曲率流的Bridgeland稳定性猜想。《EMS数学科学综述》，2(1):1–62，2015年。69

[Kap00] Anton Kapustin。拓扑非平凡复场中的D-膜。《理论与数学物理进展》，4(1):127–154，2000年。138[KS02] Sheldon Katz和Eric Sharpe。D-膜、开弦顶点算符和Ext群。《理论与数学物理进展》，6(6):979–1030（2003），2002年。138[KR14] Julien Keller和Julius Ross。关于Gieseker稳定丛射影化的Chow稳定性札记。《几何分析杂志》，24(3):1526–1546，2014年。233[KN79] George Kempf和Linda Ness。表示空间中向量的长度。载于《代数几何》（哥本哈根大学暑期会议论文集，哥本哈根，1978年），《数学讲义》732卷，第233–243页。施普林格，柏林，1979年。15[Kin94] A. D. King。有限维代数的表示模空间。《牛津大学数学季刊》（第2辑），45(180):515–530，1994年。12, 99[Kir84] Frances Clare Kirwan。辛几何与代数几何中商对象的上同调，《数学札记》第31卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1984年。15, 16[Kob80] Shoshichi Kobayashi。第一陈类与全纯张量场。《名古屋数学杂志》，77:5–11，1980年。31[Kob82] Shoshichi Kobayashi。向量丛的曲率与稳定性。《日本学士院纪要A辑：数学科学》，58(4):158–162，1982年。31[Kob87] Shoshichi Kobayashi。《复向量丛微分几何》，日本数学会出版物第15卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿；普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1987年。Kanô纪念讲座，第5讲。20, 21, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 40, 131, 132, 135, 164

[KN69] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《微分几何基础》第二卷。纯粹与应用数学领域的 Interscience 专论，第 15 号，第二卷。Interscience出版社，约翰·威利父子公司，纽约–伦敦–悉尼，1969年。205[Kon95] Maxim Kontsevich。镜像对称的同调代数。载于《国际数学家大会会议录》，第 1、2 卷（苏黎世，1994年），第 120–139 页。Birkhäuser，巴塞尔，1995年。67[Kon15] Maxim Kontsevich。K¨ahler 稳定性。载于 Simons同调镜像对称合作项目，2015年。发表于 Simons同调镜像对称合作项目的首次会议。可获取于：https://schms.math.berkeley.edu/events/penn2015/。99[KS08] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。稳定性结构、动机Donaldson-Thomas不变量与簇变换。arXiv 预印本 arXiv:0811.2435，2008年。72[Kuz03] Alexander Kuznetsov。三次簇和 V_{14} 三维簇的导出范畴。arXiv 预印本 math/0303037，2003年。58[LS15] Mehdi Lejmi 和 G´abor Sz´ekelyhidi。J-流与稳定性。《Adv. Math.》，274：404–431，2015年。116[Leu97] Nai-Chung Conan Leung。向量丛上的爱因斯坦型度量与稳定性。《〈微分几何杂志〉》，45(3)：514–546，1997年。39，40，148，154[Leu98] Nai-Chung Conan Leung。规范理论中的辛结构。《Comm. Math. Phys.》，193(1)：47–67，1998年。39，40，129[LYZ00] Nai-Chung Conan Leung、Shing-Tung Yau 和 Eric Zaslow。从特殊拉格朗日到 Hermitian-Yang-Mills：经由傅里叶-穆凯变换。《Adv. Theor. Math. Phys.》，4(6)：1319–1341，2000年。2，3，69，77，79[Li20] Chi Li。常标量曲率Kähler问题中的测地线射线与稳定性。arXiv 预印本 arXiv:2001.01366，2020年。45

[Li22] Chi Li。 G-一致稳定性与 Fano 簇上的 K¨ahler–爱因斯坦度量。《数学发明》，227(2)：661–744，2022年。46[LTW21] Chi Li、Gang Tian 和 Feng Wang。奇异 Fano 簇的 Yau–Tian–Donaldson猜想的统一版本。《Peking Mathematical Journal》，第 1–44 页，2021年。46[Li19] Chunyi Li。关于五次三维簇的稳定性条件。《数学发明》，218(1)：301–340，2019年。75[LY87] Jun Li 和 Shing-Tung Yau。非 K¨ahler 流形上的 Hermitian-Yang-Mills联络。载于《弦理论的数学方面》（美国加利福尼亚州圣迭戈，1986年），《数学物理进阶丛书》第 1 卷，第 560–573 页。World Sci. Publishing，新加坡，1987年。31[Li20] Yang Li。度量SYZ猜想与非阿基米德几何。arXiv 预印本 arXiv:2007.01384，2020年。67[Li22] Yang Li。Thomas-Yau猜想与全纯曲线。2022年。3，69，80[Lic58] Andr´e Lichnerowicz。变换群的几何学。《数学研究与论著》，III。Dunod，巴黎，1958年。41[LXZ22] Yuchen Liu、Chenyang Xu 和 Ziquan Zhuang。计算稳定性阈值的赋值的有限生成及其在 K-稳定性中的应用。《Ann. of Math.》（2），196(2)：507–566，2022年。46[Lo20] Jason Lo。权函数、倾斜与稳定性条件。arXiv 预印本 arXiv:2007.06857，2020年。85[L¨ub83] Martin L¨ubke。Einstein-Hermitian向量丛的稳定性。《Manuscripta Math.》，42(2-3)：245–257，1983年。31[Mab86] Toshiki Mabuchi。积分 Futaki不变量的 K-能量映射。《东北数学杂志》（2），38(4)：575–593，1986年。42，47

[MP15] Antony Maciocia 和 Dulip Piyaratne。阿贝尔三维簇上的傅里叶-穆凯变换与 Bridgeland 稳定性条件。Algebr. Geom., 2(3):270–297, 2015年。75[MP16] Antony Maciocia 和 Dulip Piyaratne。阿贝尔三维簇上的傅里叶-穆凯变换与 Bridgeland 稳定性条件 II。Internat. J. Math., 27(1):1650007, 27, 2016年。75[MS17] Emanuele Macrì 和 Benjamin Schmidt。Bridgeland 稳定性讲义。载于《曲线模空间》，《意大利数学联盟讲义》第21卷，第139–211页。施普林格，查姆，2017年。71, 74[MnMMS00]Marcos Mariˇno、Ruben Minasian、Gregory Moore 和 Andrew Strominger。来自超对称 p-膜的非线性瞬子。J. High Energy Phys., (1):论文5, 32, 2000年。2, 3, 69, 77, 79[Mar77] Masaki Maruyama。稳定层的模空间 I。J. Math. Kyoto Univ., 17(1):91–126, 1977年。26[Mar78] Masaki Maruyama。稳定层的模空间 II。J. Math. Kyoto Univ., 18(3):557–614, 1978年。26[Mat57] Yozˆo Matsushima。关于某个凯勒流形的解析自同胚群的结构。Nagoya Math. J., 11:145– 150, 1957年。41[McC22] John Benjamin McCarthy。全纯纤维丛上的典范度量。arXiv 预印本 arXiv:2202.11630, 2022年。213[MS17] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。辛拓扑学导论。《牛津数学研究生教材》。牛津大学出版社，牛津，第三版，2017年。190, 216, 224, 233[MM97] Ruben Minasian 和 Gregory Moore。 K-理论与 Ramond-Ramond 荷。J. High Energy Phys., (11):论文2, 7, 1997年。138

[MU83] Shigeru Mukai 和 Hiroshi Umemura。极小有理三维簇。载于《代数几何》（东京/京都，1982），《数学讲义》第1016卷，第490–518页。施普林格，柏林，1983年。50[Mum63] David Mumford。射影结构的射影不变量及其应用。载于国际数学家大会论文集（斯德哥尔摩，1962），第526–530页。Mittag-Leffler 研究所，尤尔斯霍尔姆，1963年。18[Mum77] David Mumford。射影簇的稳定性，第23卷。1977年。45[MFK94] David Mumford、John Fogarty 和 Frances Kirwan。几何不变量理论，《数学及其交叉领域成果丛书》（第2辑）第34卷 *[《数学及相关领域成果丛书》（第2辑）]*。施普林格出版社，柏林，第三版，1994年。10, 13[Nag64] Masayoshi Nagata。仿射环中的群不变量。J. Math. Kyoto Univ., 3:369–377, 1963/64。11[NS65] M. S. Narasimhan 和 C. S. Seshadri。紧黎曼曲面上的稳定向量丛与酉向量丛。Ann. of Math. (2), 82:540–567, 1965年。17, 31[Oda13] Yuji Odaka。Ross-Thomas 斜率理论的推广。Osaka J. Math., 50(1):171–185, 2013年。44[OSS11] Christian Okonek、Michael Schneider 和 Heinz Spindler。复射影空间上的向量丛。《现代 Birkhäuser 经典著作》。Birkhäuser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，2011年。1988年版的修订重印本，附有 S. I. Gelfand 撰写的附录。93[Ort22] Annamaria Ortu。最优辛联络与全纯浸没的变形。arXiv 预印本 arXiv:2201.12562, 2022年。198[PR09] Dmitri Panov 和 Julius Ross。斜率稳定性与高亏格例外除子。数学年刊，343(1):79–101, 2009年。45

[PT09] Sean Timothy Paul 和 Gang Tian。CM稳定性与广义Futaki不变量 II。Ast´erisque，（328）：339–354（2010），2009。44[PRS08] Duong H. Phong、Julius Ross 和 Jacob Sturm。Deligne配对与 Knudsen-Mumford展开。《微分几何杂志》，78(3)：475–496，2008。44[PCS19] Victor V. Przhiyalkovskiĭ、Ivan A. Cheltsov 和 Constantin A. Shramov。具有无限自同构群的 Fano三维簇。《俄罗斯科学院数学系列通报》，83(4)：226–280，2019。52[Qui85] Daniel Quillen。黎曼曲面上的柯西-黎曼算子的行列式。《泛函分析及其应用》，19(1)：31–34，1985。39[RR84] S. Ramanan 和 A. Ramanathan。关于不稳定旗的若干评论。Tohoku Math. J. (2)，36(2)：269–291，1984。211[Ram75] A. Ramanathan。紧致黎曼曲面上的稳定主丛。《数学年刊》，213：129–152，1975。206[Ram96a] A. Ramanathan。代数曲线上的主丛模空间 I。《印度科学院数学科学学报》，106(3)：301–328，1996。206[Ram96b] A. Ramanathan。代数曲线上的主丛模空间 II。《印度科学院数学科学学报》，106(4)：421–449，1996。206[RS88] A. Ramanathan 和 S. Subramanian。主丛上的爱因斯坦-厄米特联络与稳定性。《纯粹与应用数学杂志》，390：21–31，1988。206，207，208[RT06] Julius Ross 和 Richard Thomas。常标量曲率 K¨ahler 度量存在性的一项障碍。《微分几何杂志》，72(3)：429–466，2006。7，25，44，45，229

[RT07] Julius Ross 和 Richard Thomas。关于射影簇稳定性的希尔伯特-芒福德判据研究。《代数几何杂志》，16(2)：201–255，2007。43，44，45[Rud97] Alexei Rudakov。阿贝尔范畴的稳定性。《代数杂志》，197(1)：231–245，1997。71，76，85[San14] Giangiacomo Sanna。有理曲线与 Fano 三维簇上的瞬子 Y_5。博士论文，SISSA，2014。52[SS21] Enrico Schlitzer 和 Jacopo Stoppa。变形 Hermitian–Yang–Mills 联络、扩展规范群与标量曲率。《伦敦数学学会杂志》（第2辑），104(2)：770–802，2021。101[ST20] Lars Martin Sektnan 和 Carl Tipler。拉回丛上的 Hermitian Yang-Mills 联络。arXiv 电子预印本 arXiv:2006.06453，2020年6月。155，178[Son20] Jian Song。复 Hessian 方程的中井-莫伊谢宗判据。arXiv 预印本 arXiv:2012.07956，2020。117[SW08] Jian Song 和 Ben Weinkove。关于 J-流的收敛性与奇异性及其在 Mabuchi 能量中的应用。《纯粹与应用数学通讯》，61(2)：210–229，2008。109，116[SSY16] Cristiano Spotti、Song Sun 和 Chengjian Yao。可平滑 ¨-Fano 簇上 K ℚähler-爱因斯坦度量的存在性与变形。《杜克数学杂志》，165(16)：3043–3083，2016。60，62[Sz´e10] G´abor Sz´ekelyhidi。K¨ähler-Ricci 流与 K-多重稳定性。《美国数学杂志》，132(4)：1077–1090，2010。51，62[Sz´e12] G´abor Sz´ekelyhidi。极值 K¨ähler 流形的爆破。《杜克数学杂志》，161(8)：1411–1453，2012。218

[Sz´e14] G´abor Sz´ekelyhidi。极值 K¨ahler 度量导论，《数学研究生教材》第 152 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014 年。15, 16[Sz´e15] G´abor Sz´ekelyhidi。滤过与测试构型。《数学年刊》，362(1-2):451–484，2015 年。附塞巴斯蒂安·布克松的附录。45[Sz´e18] G´abor Sz´ekelyhidi。紧致厄米流形上的完全非线性椭圆方程。《微分几何杂志》，109(2):337–378，2018 年。102[Tak72] Fumio Takemoto。代数曲面上的稳定向量丛。《名古屋数学杂志》，47:29–48，1972 年。18[Tho01] R. P. Thomas。矩映射、单值化与镜像流形。载于《辛几何与镜像对称》（首尔，2000 年），第 467–498 页。World Sci. Publ.，新泽西州里弗埃奇，2001 年。69[Tho06] R. P. Thomas。关于丛与簇的 GIT 和辛约化札记。10:221–273，2006 年。13, 51, 60[TY02] R. P. Thomas 和 S.-T. Yau。特殊拉格朗日子流形、稳定丛与平均曲率流。《纯粹与应用数学通讯》，10(5):1075–1113，2002 年。69[Tia87] Gang Tian。关于带有 $C_1(M) > 0$ 的某些 K¨ahler 流形上的 K¨ahler–爱因斯坦度量。《数学发明》，89(2):225–246，1987 年。50, 52[Tia97] Gang Tian。具有正标量曲率的 K¨ahler–爱因斯坦度量。《数学发明》，130(1):1–37，1997 年。42, 44[Tia15] Gang Tian。K-稳定性与 K¨ahler–爱因斯坦度量。《纯粹与应用数学通讯》，68(7):1085–1156，2015 年。46[Tod10] Yukinobu Toda。通过稳定对象进行曲线计数理论 I。DT/PT 对应。《美国数学会杂志》，23(4):1119–1157，2010 年。85[Tse97] A. A. Tseytlin。关于弦理论中 Born–Infeld 作用量的非阿贝尔推广。《核物理 B》，501(1):41–52，1997 年。79

[UY86] Karen Uhlenbeck 和 Shing-Tung Yau。关于稳定向量丛中厄米–杨–米尔斯联络的存在性。《纯粹与应用数学通讯》，39(S, 增刊):S257–S293，1986 年。数学科学前沿：1985（纽约，1985 年）。31[Wan12] Xiaowei Wang。高度与几何不变量理论权重。《数学研究快报》，19(4):909–926，2012 年。44[WN12] David Witt-Nystr¨om。测试构型与 Okounkov体。《组合数学》，148(6):1736–1756，2012 年。45[Yau78] Shing-Tung Yau。关于紧致 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp`ère 方程。I。《纯粹与应用数学通讯》，31(3):339–411，1978 年。123[Yau93] Shing-Tung Yau。几何学中的未解问题。载于《微分几何：流形上的偏微分方程》（加利福尼亚州洛杉矶，1990 年），《纯粹数学研讨会论文集》第 54 卷，第 1–28 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993 年。42