arXiv:2302.04979v2 [math.NA] 2 Mar 2023

基于样条的高阶几何方法：采用显式时间步进快速求解麦克斯韦方程

Bernard Kapidani* Rafael Vázquez*†

* 数学研究所，洛桑联邦理工学院，Station 8，1015 洛桑，瑞士

† 意大利国家研究委员会“E. Magenes”应用数学与信息技术研究所，via Ferrata 5，27100 帕维亚，意大利

(bernard.kapidani@epfl.ch, rafael.vazquez@epfl.ch)

2023年3月3日

摘要

我们提出一种用于麦克斯韦方程组初边值问题的高阶样条几何方法。该方法之所以具有几何性质，是因为它以保结构的方式离散了连续系统表述中涉及的两个微分形式德拉姆序列。安培–麦克斯韦方程和法拉第方程均须严格成立；与此同时，为使系统可解，我们采用两个离散霍奇星算子。通过利用所选样条空间的性质以及外微积分中的概念，我们提出了一种非标准的时间显式表述，其求解依据是具有克罗内克积结构的矩阵所构成的线性方程组，而非标准文献中使用的质量矩阵。这些矩阵源于离散情形下外积（楔积）的应用，并且无论区域几何形状或材料参数如何，均具有克罗内克积结构。所得格式保留了已有方法所具备的理想能量守恒性质。我们通过复杂度分析和三维数值实验，研究了这一新格式在计算方面的优势。

1 引言

我们关注有界时空区域 $\Omega \times [0,T]$ 上麦克斯韦方程初边值问题的数值求解，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$。与向量微积分相比，使用外微积分语言表达麦克斯韦方程，可以清晰地区分方程的拓扑性质与几何性质，同时也能更加简洁明了地表达数值格式的关键性质。因此，我们使用微分形式来表示麦克斯韦方程组，其形式为

$$\partial_t \mathrm{D} = d\mathrm{H} - \mathrm{J}, \tag{1.1}$$
$$\partial_t \mathrm{B} = -d\mathrm{E}, \tag{1.2}$$
$$d\mathrm{D} = 0, \tag{1.3}$$
$$d\mathrm{B} = 0, \tag{1.4}$$

其中，为简便起见，我们假设不存在自由电荷。微分形式 E 和 H 分别表示电场和磁场，均为微分 1-形式。D 和 B 分别表示电位移和磁感应强度，均为微分 2-形式；J 是表示电流的 2-形式，也是方程组的源项； d 是外微分，其更精确的定义将在第 2 节给出。方程 (1.1)–(1.4) 还需结合本构关系，其形式如下：

$$\mathrm{B} = \star_\mu^1 \mathrm{H}, \quad \mathrm{D} = \star_\epsilon^1 \mathrm{E}, \tag{1.5}$$

其中， μ 是磁导率， ϵ 是电容率，而符号 $\star^1$ 表示霍奇星算子，它将 1-形式映射为 2-形式。更精确的定义同样将在第 2 节给出。

在数值时间积分电动力学方程 (1.1)–(1.2) 时，实际应用中仍采用的标准算法是时域有限差分法（FDTD），或其积分形式的变体，例如有限积分技术（FIT） [15, 14], 或单元法 [40, 37, 16, 17]。对于Delaunay三角剖分，离散外微分演算也提供了另一种框架 [30, 29]。这些几何方法在空间和时间上均为一阶，并且在离散层面保留了连续麦克斯韦系统的守恒性质。尽管通过恰当离散微分形式的 de Rham复形 [28, 1, 2], ，已发展出适用于求解麦克斯韦方程的任意阶有限元方法（FEM），但就计算效率而言，这些方法通常缺乏竞争力。这是因为FDTD结构化网格易于大规模并行化，且实现简单；而高阶有限元法则需要在每个时间步求解一个与质量矩阵相关的线性系统。为了在非结构化网格上重现几何方法的成功，间断Galerkin方法（DG）逐渐受到欢迎。这类方法使用任意阶多项式离散每个有限元中的电场和磁场，并通过数值通量仅在弱意义下强制满足单元边界上的切向连续性，从而得到具有分块对角矩阵的线性方程组，每个单元对应一个矩阵块。通量的构造方式存在一些细微差别 [24], ，但通常采用的要么是耗散通量，这会牺牲电磁能量守恒性质；要么是守恒通量，这会引入伪数值解，而用户通常既无法消除这些解，甚至也无法识别它们。已有研究分析了几何方法在结构化网格上的高阶扩展 [13] ；其中一位作者也通过将其重构为交错网格上的DG方法，分析了它们在非结构化网格上的高阶扩展 [33, 34], 。

外微积分的语言也可以扩展到新兴的等几何分析（IGA）框架中。 [7, 9]首次针对张量积B样条构造并分析了离散 de Rham 复形，并将其应用于 Galerkin框架中的麦克斯韦方程组离散化 [38, 19]、等离子体物理领域 [36, 31], ，以及不可压缩流动的逐点无散方法开发 [8, 20, 21, 22, 41]。在 [3]中，借助对偶交错网格，首次尝试充分利用外微积分和微分形式在B样条中的概念；在 [25]中，则根据Bochev和Hyman所述，将B样条的 de Rham 复形适配到拟态离散化框架 [5]。最近，等几何de Rham复形与协调分片之间的DG方法相结合，用于复杂多分片区域中的近似 [23]。

基于上述研究，本文作者近期发表的一篇论文提出了一种新方法，该方法基于等几何微分形式，并构造了两个对偶 de Rham 复形 [32]。与其他几何方法相比，该方法无需显式构造对偶网格，而是通过改变多项式次数来定义对偶复形；这一构造方式最初见于 [26]，并应用于 [11, 35]，实现非协调网格之间稳定的 Mortar 耦合。得益于样条的高连续性，两个序列中的外微分均有严格定义，且由笛卡尔网格的关联矩阵给出 [38, 10], ，两个序列的配对空间维数始终相等。与 [25]和 [23]的方法不同，我们没有引入余微分（即外微分的伴随算子）的离散版本，而是对霍奇星算子进行离散化 [27] ，以关联原复形与对偶复形的空间。 [32]已证明，该方法应用于椭圆问题时可达到高阶收敛；我们还给出了数值证据，表明该方法应用于麦克斯韦特征值问题时不会产生伪解。

前一篇文章是探索基于样条的高阶几何方法一般框架的起点，因此研究了支撑这一方法的一般性质。本文则将重点转向针对双曲方程组求解来调整该方法。下文的主要创新在于展示如何将 [32]中的结构与克罗内克积矩阵方法相结合（类似于 [39], 中用于预条件子的那些方法），从而实现对麦克斯韦系统的高阶、几何且时间显式的近似。特别是，每个时间步都需要求解线性系统的最终矩阵将具有克罗内克积结构，且不受材料参数或空间区域 Ω 的几何形状影响。为求解相关系统，我们将计算单变量样条空间之间格拉姆矩阵的 LU 分解；这些分解随后可以快速计算、低成本存储并应用。重要的是，这使本文工作有别于类似研究：后者基于依赖度量的质量矩阵来求解线性方程组，而这正是

inst在 [38, 4], 中的做法，或 [23] 中的非协调方法（采用基于质量矩阵的块） .

本文的结构如下。第 2 节介绍充分理解所提出数值格式所需的数学工具，主要围绕微分形式样条复形展开。第 3 节讨论不同离散霍奇星算子的选择如何导出具有等效守恒性质、但代数结构显著不同的离散化方案。我们以矩阵形式为重点介绍这些格式，并对其等效弱形式进行说明。第 4 节重点讨论如何利用离散空间的结构，高效求解显式时间步进中涉及的线性方程组。第 5 节通过数值实验验证高阶逼近性质以及该格式的效率。最后，第 6 节对全文进行总结。

2 预备知识

本节介绍用微分形式表述麦克斯韦方程所需的记号，包括霍奇星算子的定义，这与作者此前在 [32] 中发表的介绍性论文保持一致。我们还介绍原始样条复形和对偶样条复形的定义，它们将用于该问题的离散化。

2.1 麦克斯韦方程与微分形式

从此处开始，令空间维数为 $n = 3$ ，区域为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$。对于非负整数$k$，我们用 $\Lambda^k(\Omega)$ 表示光滑微分 k–形式构成的空间。一般而言，考虑光滑函数的限制过于严格。因此，我们需要希尔伯特空间 $L^2\Lambda^k(\Omega)$，它是 $\Lambda^k(\Omega)$ 关于 L^2–内积的完备化，见 [1]。

外微分 d^k 将 k–形式映射为 $(k+1)$–形式。此后，若微分形式的阶数明确，我们将直接用 d 表示外微分（如 (1.1)–(1.4) 中所示）。外微分的一个重要性质是，对于任意微分 k–形式 ω， $d \circ d\omega = 0$ 。按照 [1], ，我们定义 Sobolev空间：对于 $k = 0, \ldots, 3$,

$$H\Lambda^k(\Omega) = \left\{\omega \in L^2\Lambda^k(\Omega) : d^k\omega \in L^2\Lambda^{k+1}(\Omega)\right\},$$

由此我们可以构造微分形式的 L^2 de Rham 复形

$$H\Lambda^0(\Omega) \xrightarrow{d^0} H\Lambda^1(\Omega) \xrightarrow{d^1} H\Lambda^2(\Omega) \xrightarrow{d^2} H\Lambda^3(\Omega). \tag{2.1}$$

此外，我们还需要定义边界迹为零的微分形式 de Rham 复形，它们由紧支集微分 k–形式空间构成。我们用下标 0 将其与式 (2.1) 中的复形区分开来，并构造如下序列

$$H_0\Lambda^0(\Omega) \xrightarrow{d^0} H_0\Lambda^1(\Omega) \xrightarrow{d^1} H_0\Lambda^2(\Omega) \xrightarrow{d^2} H_0\Lambda^3(\Omega). \tag{2.2}$$

为简单起见，假设区域 Ω 的边界是理想电导体，则电场的切向分量在 $\partial\Omega$ 上为零。因此，我们必须求解微分 1–形式 $\mathrm{E} \in H_0\Lambda^1(\Omega)$ 和 $\mathrm{H} \in H\Lambda^1(\Omega)$，以及微分 2–形式 $\mathrm{B} \in H_0\Lambda^2(\Omega)$、$\mathrm{D} \in H\Lambda^2(\Omega)$ 对应的方程 (1.1)–(1.4)。因此，我们将用属于序列 (2.2) 子空间的离散微分形式来近似微分形式 E，B，并用序列 (2.1) 的离散子空间来近似 H，D。方程组还需给定初始条件 $\mathrm{D}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathrm{D}_0(\boldsymbol{x})$，以及 $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathrm{B}_0(\boldsymbol{x})$。

2.2 霍奇星算子

为了对离散麦克斯韦系统进行离散时间积分，必须用本构方程补充两列中的未知量。这些方程应将 1-形式映射为 2-形式，或反之，并考虑材料属性。其表达形式涉及霍奇星算子，如式 (1.5) 所示。下面我们对其作出精确定义。

设 γ 是定义在 Ω 上的有界且一致正的标量值场。霍奇星算子 $\star_\gamma^k$: $L^2\Lambda^k(\Omega) \to L^2\Lambda^{3-k}(\Omega)$ 是一个从 k-形式映射到 $(3-k)$-形式的线性算子。只需一个性质，即可针对任意 $\omega \in L^2\Lambda^k(\Omega)$ 完全定义该算子，具体如下：

$$(\eta,\omega)_{L^2_\gamma\Lambda^k(\Omega)} = \int_\Omega \eta \wedge \star_\gamma^k(\omega), \quad \forall \eta \in L^2\Lambda^k(\Omega), \tag{2.3}$$

其中，$(\cdot,\cdot)^{L^2_\gamma\Lambda^k}$ 是 L^2 上的内积，以材料参数 γ 为权重；我们还引入了外积（或称楔积，记作 $\wedge$），它是微分 k–形式与微分 l–形式之间的一种交替双线性乘积，结果为微分$(k+l)$–形式。因此，在式 (2.3) 的右端项中，我们总是在三维流形 Ω 上对一个 3–形式积分。霍奇星算子的一个重要性质是其可逆性；事实上，当维数为 $n=3$ 时，有 $\star_\gamma^k \circ \star_{1/\gamma}^{3-k} = \mathrm{Id}$。或者，利用该算子的可逆性，也可以将本构方程写为

$$\star_{1/\mu}^2 \mathrm{B} = \mathrm{H}, \quad \star_{1/\epsilon}^2 \mathrm{D} = \mathrm{E}. \tag{2.4}$$

最后，结合 (1.1)、(1.2) 和 (1.5) 以及性质 (2.3)，可以直接推导出麦克斯韦系统守恒能量的外微积分记号表示为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \mathrm{E}\wedge\mathrm{D} + \int_\Omega \mathrm{H}\wedge\mathrm{B}\right). \tag{2.5}$$

2.3 微分形式的样条复形

我们将采用等几何分析中常见的样条离散化，并假设区域由单参数块描述，即通过如下形式的参数化定义物理域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$：$\mathbf{F}$： $\widehat{\ }\Omega \to \Omega$，其中 $\widehat{\ }\Omega = (0,1)^3$ 称为参数域。因此，我们使用一组拉回算子 ι^k： $H\Lambda^k(\Omega) \to H\Lambda^k(\widehat{\ }\Omega)$，将参数域中的微分 k–形式与物理域中的微分 k–形式联系起来；其在三维情况下的表达式可参见 [9],，其中以向量代理的形式给出。拉回算子的一个重要性质是，它与外微分和楔积均可交换。这些工具使我们能够定义样条的原始与对偶复形，相关内容首次见于 [11]。更多详情请参阅该文献； [32] 则以微分形式的方式进行了介绍。本文仍将讨论范围限定在三维情形。

令 $p>1$ 表示单变量B样条的多项式次数，我们引入 p-开节点向量$\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_{m+p+1}\}$，其中 m 是基函数的数量。我们用 $S_p(\Xi)$表示由这些基函数张成的空间，它是次数为 p 的分段多项式空间，并且在每个节点ξ_i处具有 $p-r_i$ 阶连续导数，其中 r_i 是该节点的重数。假设每个内部节点的重数均为 $r_i < p-1$，则 $S_p(\Xi)$中的函数至少是 C^1 连续的。它们的导数属于空间 $S_{p-1}(\Xi')$，其中$\Xi' = \{\xi_2,\ldots,\xi_{m+p}\}$ 由 Ξ 去掉首尾重复节点后得到。类似地， $S_{p-1}(\Xi')$中的函数至少是 C^0 连续的，其（弱）导数属于空间 $S_{p-2}(\Xi'')$，其中$\Xi'' = \{\xi_3,\ldots,\xi_{m+p-1}\}$。

多元 B 样条由张量积定义。为简单起见，假设空间的三个方向使用相同的次数p 和节点向量 Ξ 。于是，可以构造如下形式的 B 样条离散 de Rham 复形

$$\widehat{X}_h^0 \xrightarrow{d^0} \widehat{X}_h^1 \xrightarrow{d^1} \widehat{X}_h^2 \xrightarrow{d^2} \widehat{X}_h^3,$$

其中，各空间由单变量空间 $S_p(\Xi)$和 $S_{p-1}(\Xi')$的适当张量积定义。对于具有齐次边界条件的空间，也可以类似地构造离散复形，记作$\widehat{X}_{h,\ 0}^k$：去掉单变量空间 $S_p(\Xi)$的第一个和最后一个基函数，并保持 $S_{p-1}(\Xi')$不变。

定义对偶复形的空间时，我们采用完全类似的方法，分别用次数为 $p-1$ 和 $p-2$的样条替换次数为 p 和 $p-1$ 的样条，从而在参数域上构造对偶复形，其单元相应地标记为 X_h^k。最后，只需应用其单元拉回算子，即可在物理域中得到离散序列，具体如下：

$$X_{h,0}^k := \left\{\omega : \iota^k(\omega) \in \widehat{X}_{h,0}^k\right\}, \quad \widetilde{X}_h^k := \left\{\omega : \iota^k(\omega) \in \widehat{\widetilde{X}_h^k}\right\}.$$

为确保物理域中的所有空间都具有预期的逼近性质，参数化映射$\mathbf{F}$ 的正则性至少必须与参数域中相应空间的正则性相同。由于正则性最高的空间是 $\widehat{X}_h^0$，只需将映射$\mathbf{F}$ 的每个分量定义为属于该空间的（有理）样条，即可轻松满足这一要求。更多技术细节请参见 [9] 。

根据这些定义，我们得到了一个由混合次数 p 和 $p-1$ 的样条构成的原复形，用于满足齐次边界条件 $X_{h,0}^k \subset H_0\Lambda^k(\Omega)$ 的空间，

$$X_{h,0}^0 \xrightarrow{d^0} X_{h,0}^1 \xrightarrow{d^1} X_{h,0}^2 \xrightarrow{d^2} X_h^3, \tag{2.6}$$

以及一个由混合次数 $p-1$ 和 $p-2$ 的样条空间构成的对偶复形，其定义为

$$\widetilde{X}_h^0 \xrightarrow{d^0} \widetilde{X}_h^1 \xrightarrow{d^1} \widetilde{X}_h^2 \xrightarrow{d^2} \widetilde{X}_h^3, \tag{2.7}$$

其中 这一次为 $\widetilde{X}_h^k \subset H\Lambda^k(\Omega)$，并且已在 [26, 11] 中证明，$\dim X_{h,0}^k = \dim \widetilde{X}^{3-k}_h$.

鉴于上述定义，并回顾我们假设理想电导体的边界条件，将电场离散为原复形的 1-形式 $\mathsf{E}_h \in X_{h,0}^1$，将磁场离散为对偶复形的 1-形式 $\mathsf{H}_h \in \widetilde{X}_h^1$；相应地，将电位移离散为对偶复形的 2-形式 $\mathsf{D}_h \in \widetilde{X}_h^2$，并将磁感应强度离散为原复形的 2-形式 $\mathsf{B}_h \in X_{h,0}^2$。

2.4 配对矩阵

在离散情形下，给定离散空间的基，我们可以定义原始微分 k–形式$X_{h,0}^k$空间与对偶微分$(3-k)$–形式 $\widetilde{X}_h^{3-k}$ 空间之间的配对矩阵。设$\omega_h \in X_{h,0}^k$和 $\widetilde{\eta}_h \in \widetilde{X}_h^{3-k}$ 分别由自由度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$表示。方形配对矩阵$\mathbf{K}$

~ $_k$ 和$\mathbf{K}_{3-k}$分别定义为

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{K}_k \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \widetilde{\eta}_h \wedge \omega_h, \quad \text{for all } \omega_h \in X_{h,0}^k, \widetilde{\eta}_h \in \widetilde{X}_h^{3-k},$$
$$\boldsymbol{\omega}^\top \widetilde{\mathbf{K}}_{3-k} \widetilde{\boldsymbol{\eta}} = \int_\Omega \omega_h \wedge \widetilde{\eta}_h, \quad \text{for all } \omega_h \in X_{h,0}^k, \widetilde{\eta}_h \in \widetilde{X}_h^{3-k},$$

也就是说，矩阵元素是两个微分形式空间的基元素之间楔积的积分。根据楔积的性质，立即可得，在三维情形下

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{3-k} = (-1)^{k(3-k)} (\mathbf{K}_k)^\top = (\mathbf{K}_k)^\top. \tag{2.8}$$

由于配对($X_{h,0}^k$， $\widetilde{X}_h^{3-k}$)是稳定的，正如 [11], 中在砂浆方法框架下所证明的，所有配对矩阵都是可逆的。楔积的性质保证配对矩阵与度量无关，因此可以在参数域$\widehat{\Omega}$中利用样条的张量积结构计算其逆矩阵或其 LU 分解。第 4 节将进一步详述。

最后，我们指出，只要恰当选择单变量样条空间的基函数，离散样条的外微分便可用与笛卡尔网格相关联的关联矩阵表示，更多详情见 [38] 和 [10] 。我们分别将原复形和对偶复形对应的这些矩阵记为 $\mathbf{D}^k$ 和 $\widetilde{\mathbf{D}}^k$，其中 $k = 0,1,2$。配对矩阵与外微分的关联矩阵之间有着密切联系。事实上，根据它们各自的定义，并注意到原复形中的函数满足齐次边界条件，对于任意 $k > 0$ ，均有

$$(\mathbf{D}^{k-1})^\top \widetilde{\mathbf{K}}_{3-k} = (-1)^k \widetilde{\mathbf{K}}_{3-k+1} \widetilde{\mathbf{D}}^{3-k}, \tag{2.9}$$

反过来，利用 (2.8) 可得

$$(\widetilde{\mathbf{D}}^{3-k})^\top \mathbf{K}_{k-1} = (-1)^{3-k+1} \mathbf{K}_k \mathbf{D}^{k-1}, \tag{2.10}$$

二者都表示分部积分公式的离散对应形式

$$\int_\Omega d\omega \wedge \eta = (-1)^k \int_\Omega \omega \wedge d\eta, \quad \text{for } \omega \in H_0\Lambda^{k-1}(\Omega), \eta \in H\Lambda^{3-k}(\Omega),$$

对于 $0 < k \leq 3$。需要特别指出的是，度量在配对矩阵和关联矩阵的定义中均不起作用，因此也不会影响上述任何性质。

3 采用能量守恒霍奇星算子的空间离散化

本节介绍如何利用上述原始与对偶复形上的样条对麦克斯韦方程组进行空间离散化，并给出离散霍奇星算子的两种可选形式，由此得到两种不同的离散格式。我们介绍的第一种格式需要求解质量矩阵对应的线性方程组，等价于标准的 Galerkin 技术。第二种格式是本文的主要贡献：它需要求解配对矩阵对应的线性方程组，我们证明这种格式等价于 Petrov-Galerkin 方案。我们将证明，两种霍奇算子的选取都能构造出一种半离散方法，该方法既能保持电磁能随时间守恒，也满足关于电荷守恒的两条高斯定律。从现在起，我们假设麦克斯韦方程组中的所有材料参数均不随时间变化，这意味着霍奇算子与时间导数可交换。

3.1 安培-麦克斯韦方程与法拉第方程的空间离散化

我们首先回顾半离散系统的四个未知量：$\mathrm{E}^h \in X^1_{h,0}$、$\mathrm{H}_h \in \widetilde{X}^1_h$、$\mathrm{D}_h \in \widetilde{X}^2_h$ 和 $\mathrm{B}^h \in X^2_{h,0}$。我们将它们对应的自由度向量分别记为 $\mathbf{e}$、$\mathbf{h}$、$\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{b}$。我们还假设已知源是一个离散场 $\mathrm{J}_h \in \widetilde{X}^2_h$，满足 $d\mathrm{J}_h = 0$，并将其对应的系数向量记为 $\mathbf{j}$。根据上文对离散微分形式的选取，并回顾样条空间的外微分可用关联矩阵 $\mathbf{D}^k$ 和 $\widetilde{\mathbf{D}}^k$表示，麦克斯韦方程组 (1.1)–(1.2) 的离散形式可写为

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{d} &= \widetilde{\mathbf{D}}^1 \mathbf{h} - \mathbf{j}, \\ \partial_t \mathbf{b} &= -\mathbf{D}^1 \mathbf{e}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

需要指出的是，只有 (1.1)–(1.4) 中的前两个方程需要离散化。事实上，后两个方程自动成立，这是因为外微分连续作用两次恒为零，离散情形下亦然；此外，由于两个高斯定律均被精确满足，因此电荷守恒也得以精确保证。

Th电磁能 (2.5) 在离散情形下近似为

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \mathrm{E}_h \wedge \mathrm{D}_h + \int_\Omega \mathrm{H}_h \wedge \mathrm{B}_h \right),$$

借助配对矩阵，我们可以将其表示为矩阵形式：

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^\top \widetilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{d} + \mathbf{h}^\top \mathbf{K}_2 \mathbf{b} \right). \tag{3.2}$$

为了完成空间　　离散化，我们只需近似霍奇星算子　　.

3.2 离散霍奇星算子

现在，我们介绍离散霍奇星算子的两种不同方案，它们将 [27] 中的一般构造具体化到我们的情形中。这两种选择取决于我们对 (1.5) 还是 (2.4) 进行离散化，并将导出两种不同的数值格式。首先，我们引入 (1.5) 中霍奇星算子的离散版本，为此需要定义两个如下形式的算子

$$\star^1_{h,\epsilon} : X^1_{h,0} \longrightarrow \widetilde{X}^2_h, \qquad \widetilde{\star}^1_{h,\mu} : \widetilde{X}^1_h \longrightarrow X^2_{h,0},$$

即，一个算子将原始1-形式映射到对偶2-形式，另一个算子将对偶1-形式映射到原始2-形式；其中我们在离散霍奇星算子中使用 $\widetilde{\cdot}$ 记号，以强调其定义域是对偶序列的离散空间。

令 $\mathrm{E}^h \in X^1_{h,0}$，则离散霍奇星算子 $\star^1_{h,\epsilon}$ 在 E_h 上的作用仿照了式 (2.3) 中连续霍奇星算子的定义。令 $\mathrm{D}_h = \star^1_{h,\epsilon}\mathrm{E}_h$，则它由下式唯一确定

$$\int_\Omega \eta_h \wedge \mathrm{D}_h = (\eta_h, \mathrm{E}_h)_{L^2_\epsilon \Lambda^1(\Omega)}, \quad \forall \eta_h \in X^1_{h,0}, \tag{3.3}$$

而第二霍奇星算子 $\widetilde{\star}^1_{h,\mu}$（对于 $\mathrm{B}^h = \widetilde{\star}^1_{h,\mu}\mathrm{H}_h$）的定义完全类似，只需将 X^1_h 替换为 $\widetilde{X}^1_h$。

或者，我们可以引入霍奇星算子 (2.4) 的离散版本，即定义两个如下形式的算子

$$\widetilde{\star}^2_{h,1/\epsilon} : \widetilde{X}^2_h \longrightarrow X^1_{h,0}, \qquad \star^2_{h,1/\mu} : X^2_{h,0} \longrightarrow \widetilde{X}^1_h,$$

也就是说，这些算子现在将 2-形式映射为 1-形式。再次仿照连续霍奇星算子的定义，给定 $\mathrm{D}_h \in \widetilde{X}^2_h$，并令 $\mathrm{E}^h = \widetilde{\star}^2_{h,1/\epsilon}\mathrm{D}_h$，离散霍奇星算子 $\widetilde{\star}^2_{h,1/\epsilon}$ 便由下式唯一确定

$$\int_\Omega \eta_h \wedge \mathrm{E}_h = (\eta_h, \mathrm{D}_h)_{L^2_{1/\epsilon}\Lambda^2(\Omega)}, \quad \forall \eta_h \in \widetilde{X}^2_h, \tag{3.4}$$

类似地，第二个离散算子 $\star^2_{h,1/\mu}$（对于 $\mathrm{H}^h = \star^2_{h,1/\mu}\mathrm{B}_h$）通过将 $\widetilde{X}^2_h$ 替换为 $X^2_{h,0}$ 来定义。

注 3.1. 此处定义的两类算子受到 *Hiptmair [27]*, 的工作启发，对应于文献 *[32]* 中分析的从原复形到对偶复形的两个全局算子。遗憾的是，同一论文研究的第三个局部算子，在从对偶复形映射到原复形时，似乎无法保持相同的逼近性质，也无法保证电磁能守恒。因此，我们决定在本文中不采用该算子。

3.3 第一种离散化格式

第一种格式考虑离散算子 $\star^1_{h,\epsilon}$ 和 $\widetilde{\star}^1_{h,\mu}$。将 (3.3) 写成矩阵形式，并用粗体符号表示自由度向量，算子 $\star^1_{h,\epsilon}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\eta}^\top \widetilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{d} = \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{M}^1_\epsilon \mathbf{e},$$

其中，$\mathbf{M}^1_\epsilon$ 是 $X^1_{h,0}$ 的标准质量矩阵，而 $\widetilde{\mathbf{K}}_2$ 是 $X^1_{h,0}$ 与 $\widetilde{X}^2_h$ 之间的配对矩阵。由于向量 $\boldsymbol{\eta}$ 是任意的，该方程可简写为

$$\mathbf{M}^1_\epsilon \mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{d}.$$

类似地，令 $\mathrm{B}^h = \widetilde{\star}^1_{h,\mu}\mathrm{H}_h$，按照相同的推理，离散霍奇算子 $\widetilde{\star}^1_{h,\mu}$ 的作用可写成如下矩阵形式

$$\widetilde{\mathbf{M}}^1_\mu \mathbf{h} = \mathbf{K}_2 \mathbf{b},$$

其中，$\widetilde{\mathbf{M}}^1_\mu$ 是对应于 X^1_h 的质量矩阵。最后，将 (3.1) 与两个离散霍奇星算子的定义结合起来，空间离散化后的半离散格式为

$$\partial_t \mathbf{d} = \widetilde{\mathbf{D}}^1 \mathbf{h} - \mathbf{j}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{M}^1_\epsilon \mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{d}, \tag{3.6}$$

$$\partial_t \mathbf{b} = -\mathbf{D}^1 \mathbf{e}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}^1_\mu \mathbf{h} = \mathbf{K}_2 \mathbf{b}, \tag{3.8}$$

其中，在处理时间积分之前，第一和第三个方程只需应用关联矩阵。第二和第四个方程表示离散霍奇星算子的应用，因此需要通过配对矩阵进行矩阵-向量乘法，并求解质量矩阵对应的线性系统。

3.3.1 能量守恒

为了研究能量守恒，我们假设源电流 J 等于零。接着，为证明格式 (3.5)–(3.8) 保持离散能量守恒，将方程 (3.5) 乘以$\mathbf{e}^\top \widetilde{\ }\mathbf{K}_2$，再将方程 (3.7) 乘以$\mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2,$，并将两式相加，得到

$$\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\partial_t\mathbf{d}+\mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2\partial_t\mathbf{b}=\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h}-\mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2\mathbf{D}^1\mathbf{e}.$$

然后，将 $k=2$ 代入式 (2.10) 中的分部积分性质，并利用配对矩阵的性质 (2.8)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\partial_t\mathbf{d}+\mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2\partial_t\mathbf{b}&=\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h}-\mathbf{h}^\top(\widetilde{\mathbf{D}}^1)^\top\mathbf{K}_1\mathbf{e}\\&=\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h}-\mathbf{h}^\top(\widetilde{\mathbf{D}}^1)^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2^\top\mathbf{e}=0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

此时，我们使用离散霍奇星算子的定义。注意到配对矩阵 $\widetilde{\ }\mathbf{K}_2$ 和 $\mathbf{K}_2$ 可逆，因此可以分别用式 (3.6) 和 (3.8) 中的表达式替换 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{b}$，由此可得

$$\mathbf{e}^\top\partial_t(\mathbf{M}_\epsilon^1\mathbf{e})+\mathbf{h}^\top\partial_t\widetilde{\mathbf{M}}_\mu^1\mathbf{h}=0.$$

由于我们假设 ϵ 和 μ 均与时间无关，因此可以将质量矩阵从偏导数中提出，由此通过标准论证即可得出能量守恒。

值得注意的是，我们也可以在式 (3.2) 中用离散霍奇星算子的表达式替换 $\mathbf{d}$ 和$\mathbf{b}$，从而得到能量的一个等价表达式:

$$\mathcal{E}_h=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^\top\mathbf{M}_\epsilon^1\mathbf{e}+\mathbf{h}^\top\widetilde{\mathbf{M}}_\mu^1\mathbf{h}\right),$$

也就是说，这是基于质量矩阵的标准二次型，常用于需要求解具有相同对称正定质量矩阵的线性系统的有限元格式中。

3.3.2 关于E 和H的弱形式

我们介绍了使用四个未知量和四个方程的方法，其中涉及时间导数和外微分的方程以强形式求解，而霍奇星算子则以弱形式施加。这类似于 FIT 公式中的通常过程，参见例如 [16] 中的公式。或者，也可以仅用 E 和 H 写出问题的弱形式，这通常用于有限元中。我们首先将方程（3.5）和（3.7）乘以用于证明能量守恒的相同项，并通过应用霍奇星算子替换$\mathbf{d}$ 和$\mathbf{b}$ 的表达式。由于我们假设材料属性与时间无关，因此得到

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\epsilon^1\partial_t\mathbf{e}&=\widetilde{\mathbf{K}}_2\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h}-\widetilde{\mathbf{K}}_2\mathbf{j},\\\widetilde{\mathbf{M}}_\mu^1\partial_t\mathbf{h}&=-\mathbf{K}_2\mathbf{D}^1\mathbf{e}.\end{aligned}$$

根据质量矩阵和配对矩阵的定义，并利用关联矩阵编码外微分作用这一事实，上式等价于弱形式

$$\begin{aligned}(\partial_t\mathrm{E}_h,\eta_h)_{L^2_\epsilon\Lambda^1(\Omega)}&=\int_\Omega\eta_h\wedge(d\mathrm{H}_h-\mathrm{J}_h)\qquad\text{for all }\eta_h\in X^1_{h,0},\\(\partial_t\mathrm{H}_h,\xi_h)_{L^2_\mu\Lambda^1(\Omega)}&=-\int_\Omega\xi_h\wedge d\mathrm{E}_h\qquad\qquad\text{for all }\xi_h\in\widetilde{X}^1_h.\end{aligned}$$

因此，我们的第一种离散格式等价地可写为一种混合形式的伽辽金方法，例如与 [38]，类似，不同之处在于 E_h 在原复形中离散化，而 H_h 在对偶复形中离散化。

3.4 第二种离散格式

与上一小节的做法不同，我们也可以通过考虑将 2-形式映射为 1-形式的霍奇算子$\widetilde{\star}^2_{h,1/\epsilon}$ 和 $\star^2_{h,1/\mu}$ 来得到另一种离散格式，例如由 (3.4) 定义的算子。与上述类似的论证表明，第一个算子等价地可写成如下矩阵形式：

$$\mathbf{K}_1\mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{d},$$

$\widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}$ 是对偶2-形式空间的质量矩阵 X^2_h，而$\mathbf{K}_1$ 是 X^2_h与$X^1_{h,0}$之间的配对矩阵。类似地，给定 $\mathrm{B}^h \in X^1_{h,0}$ ，我们根据其自由度计算 $\mathrm{H}^h = \star^2_{h,1/\mu}\mathrm{B}_h$ ，得到

$$\widetilde{\mathbf{K}}_1\mathbf{h} = \mathbf{M}^2_{1/\mu}\mathbf{b},$$

其中$\mathbf{M}^2_{1/\mu}$ 是 2-形式空间的质量矩阵$X^2_{h,0}$。与第一种格式一样，我们将离散霍奇星算子的定义与（3.1）结合，得到空间半离散

$$\partial_t\mathbf{d} = \widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h} - \mathbf{j}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{K}_1\mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{d}, \tag{3.11}$$

$$\partial_t\mathbf{b} = -\mathbf{D}^1\mathbf{e}, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_1\mathbf{h} = \mathbf{M}^2_{1/\mu}\mathbf{b}, \tag{3.13}$$

其中的方程与第一种格式中的（3.5）–（3.8）非常相似。不过，由于霍奇星算子的选择不同，存在一个非常重要的区别：第二个和第四个方程要求求解与配对矩阵相关的线性方程组，而不是质量矩阵。乍看之下，这似乎是一个缺点，因为这些矩阵通常不是对称正定的。不过，B样条的张量积结构以及配对矩阵与度量无关这一事实带来了重要优势，我们将在第4节中看到这一点。

3.4.1 能量守恒

关于能量守恒，我们指出，方程 (3.9) 的推导并未用到离散霍奇星算子。因此，该方程在此情形下仍然成立，得到

$$\mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2\partial_t\mathbf{b} = \mathbf{e}^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h} - \mathbf{h}^\top\mathbf{K}_2\mathbf{D}^1\mathbf{e} = 0.$$

现在，我们使用离散霍奇星算子，并将 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 分别替换为 (3.11) 和 (3.13) 中的表达式。利用质量矩阵的对称性以及配对矩阵的性质 (2.8)，可得

$$((\mathbf{K}_1)^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{d})^\top\widetilde{\mathbf{K}}_2\partial_t\mathbf{d} + (\widetilde{\mathbf{K}}_1^{-1}\mathbf{M}^2_{1/\mu}\mathbf{b})^\top\mathbf{K}_2\partial_t\mathbf{b} = \mathbf{d}^\top\widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{b}^\top\mathbf{M}^2_{1/\mu}\partial_t\mathbf{b} = 0,$$

由于质量矩阵是对称正定的，因此能量守恒成立。与第一种格式的情形类似，将 (3.2) 中的离散霍奇星算子替换后，可得到一个用质量矩阵表示能量的等价表达式，即

$$\mathcal{E}_h = \mathbf{d}^\top\widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{d} + \mathbf{b}^\top\mathbf{M}^2_{1/\mu}\mathbf{b},$$

这再次得到一个基于质量矩阵的二次型，此处对应的是离散 2–形式空间。

3.4.2 关于 E 和 H的弱形式

与第一种格式类似，可以将离散问题写成等价的弱形式。$\widetilde{}$ $\widetilde{}$分别将方程（3.10）和（3.12）乘以$\mathbf{M}^2_{1/\epsilon}$ 和$\mathbf{M}^2_{1/\mu}$，并将$\mathbf{d}$ 和$\mathbf{b}$ 替换为霍奇星算子定义中的相应表达式，可得

$$\mathbf{K}_1\partial_t\mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\widetilde{\mathbf{D}}^1\mathbf{h} - \widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{j},$$
$$\widetilde{\mathbf{K}}_1\partial_t\mathbf{h} = -\mathbf{M}^2_{1/\mu}\mathbf{D}^1\mathbf{h},$$

通过与上文相同的论证，这等价于弱形式

$$\int_\Omega \eta_h \wedge \partial_t \mathrm{E}_h = (d\mathrm{H}_h - \mathrm{J}_h, \eta_h)_{L^2_{1/\epsilon}\Lambda^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \eta_h \in \widetilde{X}^2_h,$$
$$\int_\Omega \xi_h \wedge \partial_t \mathrm{H}_h = -(d\mathrm{E}_h, \xi_h)_{L^2_{1/\mu}\Lambda^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \xi_h \in X^2_{h,0},$$

由此可以得出，我们的第二种离散格式等价于连续问题的一种 Petrov-Galerkin 形式，其中未知量 E_h 和 H_h 分别为定义在原复形和对偶复形上的 1-形式。它们相应的测试函数空间是另一个复形上的 2-形式空间。

注 3.2。 在文献中大多数基于对偶网格 *[14, 29],* 的方法里，应用霍奇算子被等同于求解（集中）质量矩阵对应的线性系统。正如 ***Hiptmair****[27],* 所指出的，这仅在配对矩阵恰好与单位矩阵重合这一特殊情形下成立，而这一条件只有在选择特定的对偶网格时才能满足。据我们所知，基于对角系统矩阵的方法从未扩展到用于麦克斯韦方程的高阶基函数。

3.5 非齐次边界条件的推广

正如我们所见，这两种方法可以理解为 Galerkin 或 Petrov-Galerkin 格式。因此，要对电场施加非齐次边界条件，其过程与标准 Galerkin 技术相同。我们将电场写成两个分量的线性组合 $\mathrm{E}_h = \mathrm{E}_{h,\,0} + \mathrm{E}_{h,\,b}$，其中 $\mathrm{E}_{h,\,0} \in X^1_{h,\,0}$ 在 $\partial\Omega$ 上的切向迹为零，而 $\mathrm{E}_{h,\,b} \in X^1_h$ 是一个适当的提升，可以通过将边界条件局部投影到其迹空间上来计算。该计算仅涉及 X^1_h 的基函数，即边界迹非零的基函数；例如参见[42]。

提升 $\mathrm{E}_{h,\,b}$ 计算完成后，会将其代入方程的右端项。具体而言，将 E_h 在 (3.3) 中的表达式代入并重新整理各项，可得

$$(\eta_h, \mathrm{E}_{h,0})_{L^2_\epsilon\Lambda^1(\Omega)} = \int_\Omega \eta_h \wedge \mathrm{D}_h - (\eta_h, \mathrm{E}_{h,b})_{L^2_\epsilon\Lambda^1(\Omega)}, \quad \forall \eta_h \in X^1_{h,0}.$$

稍微滥用一下记号，我们现在用 $\mathbf{M}^1_\epsilon$ 表示与空间 X^1_h 对应的质量矩阵（而非 $X^1_{h,\,0}$）。对对应于 $\mathrm{E}_{h,\,0}$ 和 $\mathrm{E}_{h,\,b}$的分块使用相同的 0 和 b 下标，质量矩阵具有如下分块结构

$$\mathbf{M}^1_\epsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1_{\epsilon,00} & \mathbf{M}^1_{\epsilon,0b} \\ \mathbf{M}^1_{\epsilon,b0} & \mathbf{M}^1_{\epsilon,bb} \end{pmatrix},$$

对于自由度向量采用相同的下标记法，第一种格式中离散霍奇星算子的应用可写为

$$\mathbf{M}^1_{\epsilon,00}\mathbf{e}_0 = \widetilde{\mathbf{K}}_2\mathbf{d} - \mathbf{M}^1_{\epsilon,0b}\mathbf{e}_b.$$

第二种格式中边界条件的施加方式类似。提升 $\mathrm{E}_{h,\,b}$ 计算完成后，第二个离散霍奇星算子定义为

$$\int_\Omega \eta_h \wedge \mathrm{E}_{h,0} = (\eta_h, \mathrm{D}_h)_{L^2_{1/\epsilon}\Lambda^2(\Omega)} - \int_\Omega \eta_h \wedge \mathrm{E}_{h,b}, \quad \forall \eta_h \in \widetilde{X}^2_h.$$

与上文类似，稍微滥用一下记号，我们现在用$\mathbf{K}_1$ 表示空间 $X^{1\sim}_h$与 X^2_h之间的配对矩阵。显然，该矩阵不是方阵，但若将其拆分为对应于内部基函数和边界基函数的分块，如下所示

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{K}_1)_0 & (\mathbf{K}_1)_b \end{pmatrix},$$

与 $X^1_{h,0}$ 的基函数对应的块 $(\mathbf{K}_1)_0$ 是方阵且可逆。因此，离散霍奇星算子的应用可以通过再次求解

$$(\mathbf{K}_1)_0\mathbf{e}_0 = \widetilde{\mathbf{M}}^2_{1/\epsilon}\mathbf{d} - (\mathbf{K}_1)_b\mathbf{e}_b,$$

方阵来计算。

在这两种格式中，其他方程也必须考虑 E_h 的边界条件。特别是，磁感应强度 B_h 属于 X_h^2（而不是 $X_{h,\,0}^2$），因此关联矩阵$\mathbf{D}^1$ 必须关联空间 X_h^1 和 X_h^2，并加入边界函数对应的行和列。同样，式 (3.8) 中的矩阵 $\mathbf{K}_2$ 和式 (3.13) 中的矩阵 $\mathbf{M}_{1/\mu}^2$，其列必须包含整个空间 X_h^2 的基函数，而不是 $X_{h,\,0}^2$。尽管这些矩阵不再是方阵，但这并不会造成问题，因为它们只用于作用运算，从不求逆。

4 利用克罗内克积结构快速求逆配对矩阵

正如上一节所述，由于配对矩阵仅涉及楔积的积分，因此它们不依赖于问题的度量性质，也不受材料或区域 Ω 的几何形状影响。因此，可以在参数域 $(0,\,1)^3$ 中计算这些矩阵。本节介绍如何利用样条空间的张量积结构求解涉及配对矩阵的线性系统，并分析由式 (3.10)–(3.13) 给出的第二种离散格式的计算复杂度，从而定量说明，与式 (3.5)–(3.8) 中对质量矩阵求逆的格式相比（该格式更接近文献中的经典方法），能够获得何种程度的性能提升。

略微滥用一下记号，从此处开始，我们用 $S_p(\Xi)$ 表示去除两个边界函数后的单变量空间。相同的记号也将用于张量积空间。

4.1 配对矩阵的结构

让我们进一步探讨上述张量积结构所意味着的内容。为简化记号，首先假设空间 $X_{h,0}^0$ 的单变量样条空间所对应的节点向量均相同，并沿用前文记号记为 Ξ。由于楔积与拉回可交换，配对矩阵可在参数三维区域中计算；~不同笛卡尔方向之间的正交性意味着 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_1$ 均为分块对角矩阵，其形式为

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{C}}_3 \end{bmatrix},$$

~其中各分块 $\mathbf{C}_i$ 和 $\mathbf{C}_i$尚待定义。例如，在矩阵 $\mathbf{K}_1$, 中，它给出了 $X_{h,0}^1$ 与 $\widetilde{X}_h^2$之间的配对，三个分块 $\mathbf{C}_i$ 分别是以下离散样条空间对之间的配对矩阵：

$$\begin{aligned} &S_{p-1,p,p}(\Xi',\Xi,\Xi) \text{ and } S_{p-1,p-2,p-2}(\Xi',\Xi'',\Xi''),\\ &S_{p,p-1,p}(\Xi,\Xi',\Xi) \text{ and } S_{p-2,p-1,p-2}(\Xi'',\Xi',\Xi''),\\ &S_{p,p,p-1}(\Xi,\Xi,\Xi') \text{ and } S_{p-2,p-2,p-1}(\Xi'',\Xi'',\Xi'). \end{aligned}$$

~因此，在求逆$\mathbf{K}_1$ （或$\mathbf{K}_1$）时，三个块可以分别并行求逆。本节余下部分将相应地讨论以下类型系统的求解方法

$$\mathbf{C}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, \quad \text{for } i \in \{1,2,3\}, \tag{4.1}$$

其中向量$\mathbf{x}_i$ 和$\mathbf{b}_i$ 再次来自对离散微分形式未知量的笛卡尔分量进行分离这一简单过程。聚焦于每个单独的分块，还有一个更重要的优势：每个分块都可以通过克罗内克张量积计算。为了说明这一点，我们继续详细分析矩阵$\mathbf{C}_1$。根据参数域中空间的定义，这不过是张量积空间的基函数之间的格拉姆矩阵：其元素可以通过单变量空间的配对矩阵的克罗内克张量积计算，

因为在参数域上，单变量基样条乘积的积分可以分离。$\widehat{}$事实上，设$\mathbf{G}$ 为对偶复形空间 $S_{p-2}(\Xi'')$（行）与原复形空间$\widehat{}$ $S_p(\Xi)$（列）之间的配对矩阵，并设$\mathbf{M}$ 为对偶复形空间 $S_{p-1}(\Xi')$（行）与原复形空间 $S_{p-1}(\Xi')$（列）之间的配对矩阵。那么，我们有

$$\mathbf{C}_1 = \widehat{\mathbf{G}} \otimes \widehat{\mathbf{G}} \otimes \widehat{\mathbf{M}}.$$

其中，带帽符号强调各项是作为参数域上的积分计算得出的。$\widehat{}$ $\widehat{}$矩阵 $\mathbf{M}$ 显然可逆，而 $\mathbf{G}$ 由于次数为 p和 $p-2$的单变量样条空间之间满足 inf-sup 条件，因此可逆，参见 [6, 11]。

$\widehat{}$我们注意到，尽管将单变量空间 $S_{p-1}(\Xi)$与自身配对，矩阵 $\mathbf{M}$ 也不一定是对称的，因为我们使用了两种不同的基。具体而言，我们采用一种常见的选择：在原复形中，对导数的单变量空间使用缩放后的 Curry–Schoenberg 样条，即空间$S_{p-1}(\Xi')$。对于对偶复形中所需的相同单变量空间，我们则使用标准 B 样条基，而空间 $S_{p-2}(\Xi'')$则用 Curry–Schoenberg 基 [38]展开。因此，每个一维配对矩阵都同时涉及 Curry–Schoenberg 基和标准 B 样条基。当然，也可以选择对所有涉及的单变量空间都使用标准 B 样条以恢复对称性，但此时必须对外微分 $\mathbf{D}^k$ 的矩阵进行适当缩放；这样它们将不再是关联矩阵，不过仍保持相同的稀疏模式。

如果现在放宽起始多项式次数 p 和节点向量 Ξ 在各个方向上均相同这一假设，改为采用不同的次数 p_i和节点向量 Ξ_i，那么对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，不会发生重大变化。矩阵 $\mathbf{K}_1$ 的三个块将具有如下形式

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 &= \widehat{\mathbf{G}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^2 \otimes \widehat{\mathbf{M}}^1, \\
\mathbf{C}_2 &= \widehat{\mathbf{G}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{M}}^2 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^1, \\
\mathbf{C}_3 &= \widehat{\mathbf{M}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^2 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^1,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\widehat{}\mathbf{G}^i$ 是 $S_{p_i-2}(\Xi_i'')$ 与 $S_{p_i}(\Xi_i)$ 之间的配对，而 $\widehat{}\mathbf{M}^i$ 是对偶复形中的 $S_{p_i-1}(\Xi_i')$ 与原复形中的 $S_{p_i-1}(\Xi_i')$ 之间的配对。

对于矩阵$\widetilde{\mathbf{K}}_2$，可得各块的相应的推导。注意，这是离散空间 $X^2_{h,\ 0}$与 $\widetilde{X}^1_h$之间的配对矩阵；例如，这些空间的第一个分量分别为 $S_{p,\ p-1,\ p-1}(\Xi,\ \Xi',\ \Xi')$ 和 $S_{p-2,\ p-1,\ p-1}(\Xi'',\ \Xi',\ \Xi')$，因此各块为

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{C}}_1 &= (\widehat{\mathbf{M}}^3)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{M}}^2)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{G}}^1)^\top, \\
\widetilde{\mathbf{C}}_2 &= (\widehat{\mathbf{M}}^3)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{G}}^2)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{M}}^1)^\top, \\
\widetilde{\mathbf{C}}_3 &= (\widehat{\mathbf{G}}^3)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{M}}^2)^\top \otimes (\widehat{\mathbf{M}}^1)^\top,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

之所以出现转置，是因为对于 $\widetilde{}\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2^\top$，其行和列分别对应原始与对偶复形的空间，而这与$\mathbf{K}_1$的情况相反。

4.2 线性系统的求解

如果采用单步时间积分格式，例如此应用中常用的辛蛙跳积分器，就需要求解总共六个线性方程组（每次应用霍奇星算子时求解三个），其中系统矩阵是（4.2）或（4.3）的一个分块。一般性不失，下面首先再次考察矩阵$\mathbf{C}_1$,，其逆矩阵可利用克罗内克积的一个著名性质求得：

$$(\widehat{\mathbf{G}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^2 \otimes \widehat{\mathbf{M}}^1)^{-1} = (\widehat{\mathbf{G}}^3)^{-1} \otimes (\widehat{\mathbf{G}}^2)^{-1} \otimes (\widehat{\mathbf{M}}^1)^{-1}. \tag{4.4}$$

对于任意矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$，我们用 vec(**X**) $\in \mathbb{R}^{n_1 n_2}$ 表示将 $\mathbf{X}$ 的各列依次展开并合并为一个列向量 $\mathbf{x}$。那么，若 $\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2$ 是维度适当的矩阵，且 $\mathbf{x}$ =vec(**X**)，则有如下性质：

$$(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1)\mathbf{x} = \mathrm{vec}(\mathbf{A}_1 \mathbf{X} \mathbf{A}_2^\top),$$

该性质源自张量代数，可用于在矩阵具有克罗内克积结构时高效计算矩阵-向量乘积。事实上，它表明，计算 $(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1)\mathbf{x}$ 等价于使用 $\mathbf{A}_2$ 计算 n_1 次矩阵-向量乘积，并使用 $\mathbf{A}_1$，计算 n_2 次矩阵-向量乘积；尤其是，无需显式计算和存储 $(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1)$。此外，若 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$ 均为非奇异矩阵，则其逆矩阵也具有类似性质

$$(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{x} = \mathrm{vec}(\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}_2^{-\top}),$$

这表明，求解矩阵（$\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1$）对应的线性系统，等价于求解涉及$\mathbf{A}_2$ 的n_1 个线性系统，以及涉及$\mathbf{A}_1$的 n_2 个线性系统。

上述性质可用于高效求解涉及矩阵$\mathbf{C}_i$ 或 $\widetilde{\mathbf{C}}_i$的线性方程组。再次关注矩阵$\mathbf{C}_1$，，并利用其逆矩阵的结构（4.4），线性系统的求解可计算为

$$\mathbf{x}_1 = (\widehat{\mathbf{G}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^2 \otimes \widehat{\mathbf{M}}^1)^{-1}\mathbf{b}_1 = \mathrm{vec}\left((\widehat{\mathbf{M}}^1)^{-1}\mathbf{B}_1(\widehat{\mathbf{G}}^3 \otimes \widehat{\mathbf{G}}^2)^{-\top}\right). \tag{4.5}$$

由于最右侧的系统要求右端项的数量与$\mathbf{B}_1$的行数（即 $S_p(\Xi_1)$的维数）相同，因此无法进一步利用张量积结构来避免计算（$\widehat{\ }\mathbf{G}^3 \otimes \widehat{\ }\mathbf{G}^2$）$^{-\top}$。

注释 4.1。 如果每个参数方向上的网格不同，则适当地重新排列各方向，使第一个方向采用最细的网格。这样可以使（(4.5)）中待求解的线性系统具有更为相近的规模。

4.3 计算复杂度

对计算复杂度的研究必须分为两部分。事实上，有一组代数运算只需在时间步进模拟开始时执行一次，例如组装离散霍奇星算子和外微分中涉及的矩阵。完成系统设置后，还需要在显式时间步进过程中计算应用外微分和离散霍奇算子的开销。

为简单起见，我们再次假设每个方向上的次数和节点向量都相同，并将单变量空间 $S_p(\Xi)$ 的维数记为 n 。由于我们讨论的是渐近复杂度记号，因此可以直接得出，构造 1-形式和 2-形式离散空间时所涉及的所有单变量样条空间的维数均为 $\mathcal{O}(n)$。我们将重点讨论一个简单但在实际中非常重要的情形：所有节点处都具有最大光滑性；这意味着每个方向上的单元数量也为$\mathcal{O}(n)$。我们用 N 表示一次模拟中的时间步数量，并作出合理假设：$N \gg n$ 且 $N \gg p$。这显然将重点转移到了时间步进计算的复杂度，而非系统设置。最后，所报告的所有复杂度均基于浮点运算次数（FLOPs）计算，并假设所有涉及简单标量的乘法和加法都需要恒定时间。

由于样条具有局部支撑，克罗内克积中出现的所有单变量配对矩阵的带宽均为$\mathcal{O}(p)$，而三维空间的配对矩阵和质量矩阵的维数为$\mathcal{O}(n^3)$，带宽为$\mathcal{O}(p^3)$。[1] 此外，外微分的关联矩阵带宽为$\mathcal{O}(1)$。如果不利用张量积结构，则离散格式 (3.5)–(3.8) 和 (3.10)–(3.13) 各自每个时间步的复杂度由其相应系统矩阵的因式分解决定。该因式分解的复杂度等同于矩阵乘法的复杂度，因此其上界为$\widetilde{\mathcal{O}}(n^6p^3)$；即使考虑到第二种格式中，配对矩阵的三个块 $\mathbf{K}_1$ 和$\mathbf{K}_1$ 可以并行求解，结论仍然成立。另一方面，在应用离散霍奇星算子时，计算右端项涉及一次矩阵-向量乘法运算，其复杂度至多为$\mathcal{O}(n^3p^3)$。

为了利用第二种格式的克罗内克积结构，必须考察式 (4.5) 中系统的解。首先注意，LU 分解得到的上三角矩阵和下三角矩阵保留了带状结构；对于单变量配对矩阵，其带宽为 $\mathcal{O}(p)$，而对于矩阵 $\widehat{\ }\mathbf{G}^3 \otimes \widehat{\ }\mathbf{G}^2$，其带宽为 $\mathcal{O}(p^2)$。

[1] 严格来说，这并不是带宽，而是每行和每列中的非零元素数量。

n(3.10)–(3.13) **显式张量化解的复杂度**， p， N		
过程	操作说明	复杂度
组装$\mathbf{M}^2$ $_{\mu^{-1}}$, $\widetilde{\mathbf{M}}^2_{\epsilon^{-1}}$	数值积分，带状矩阵	$\mathcal{O}(p^9n^3)$
组装$\mathbf{D}^1$, $\widetilde{\mathbf{D}}^1$	缩放关联矩阵	$\mathcal{O}(n^3)$
组装 $\widehat{\mathbf{G}}^k, \widehat{\mathbf{M}^k}$, $k=1,\ 2,\ 3$	数值积分，单变量空间	$\mathcal{O}(p^3n)$
因式分解 $\widehat{\mathbf{G}}^k, \widehat{\mathbf{M}}^k$, $k=1,2,3$	单变量空间，带状矩阵	$\mathcal{O}(p^2n)$
–	整个系统的组装	$\mathcal{O}(p^9n^3)$
应用 $\mathbf{D}^1$， $\widetilde{\mathbf{D}}^1$	带状矩阵-向量乘积	$\mathcal{O}(Nn^3)$
应用 $\mathbf{M}^2$ $_{\mu^{-1}}$, $\widetilde{\mathbf{M}}^2_{\epsilon^{-1}}$	带状矩阵-向量乘积	$\mathcal{O}(Nn^3p^3)$
求解这组系统，$\mathbf{K}_1$, $\widetilde{\mathbf{K}}_1$	带状矩阵-矩阵乘积	$\mathcal{O}(Nn^3p^2)$
–	时间步进	$\mathcal{O}(Nn^3p^3)$

表 1：时变模拟中涉及的所有主要线性代数计算及其相应的计算复杂度，其中 n 是单变量 B 样条空间的维数， p 是多项式次数， N 是时间步数。

从右向左进行时，首先需要求解 n 个线性方程组，每个方程组对应一个大小为 $n^2 \times n^2$ 的矩阵。考虑带宽后，该操作的复杂度为 $\mathcal{O}(n^3p^2)$。随后，需要求解 n^2 个线性方程组，每个方程组对应一个大小为 $n \times n$、带宽为 $\mathcal{O}(p)$ 的矩阵；该操作的复杂度为 $\mathcal{O}(n^3p)$。总之，每个时间步求解该线性系统的渐近成本为 $\mathcal{O}(n^3p^2)$。

所提出的利用克罗内克积结构的算法中涉及的其他所有任务的计算复杂度汇总于表 4.3。显然，就浮点运算次数而言，应用质量矩阵是最耗时的任务，甚至超过求解线性方程组；不过，其计算量仍与未知量的数量呈线性关系，而三维问题中的未知量数量随 n^3 增长。因此，第二种格式的计算复杂度估计为 $\mathcal{O}(Nn^3p^3)$。与需要求解质量矩阵对应的线性系统的格式相比，这有了显著提升；后者的计算复杂度为 $\mathcal{O}(Nn^6p^3)$。

注 4.2. 第一种格式也可以利用配对矩阵的克罗内克积结构，高效计算应用霍奇算子时所需的矩阵-向量乘积。不过，主要开销仍将是求解质量矩阵对应的线性系统。

注 4.3. 关联矩阵$\mathbf{D}^k$ 也与区域的度量性质无关，并且可以通过一元关联矩阵和单位矩阵的克罗内克积计算得到，参见例如 *[31]*。由于它们的应用远非计算瓶颈，因此不再赘述其优化细节。

5 数值结果

本节将通过若干数值测试，讨论所提方法在精度、能量守恒和计算成本方面的表现。下文中，我们将以原离散复形中 0-形式的起始多项式次数 p 为所有测试命名，因为其他次数均可由序列性质推得。此外，样条正则性始终取可用的最高值，即次数为 p 的单变量样条的正则性为 $p-1$。时间积分采用低阶蛙跳法。所有测试均通过在开源库 GeoPDEs [42], 中实现相应的空间和时间积分数值格式来完成。GeoPDEs 是一个面向基础研究的等几何分析软件库。

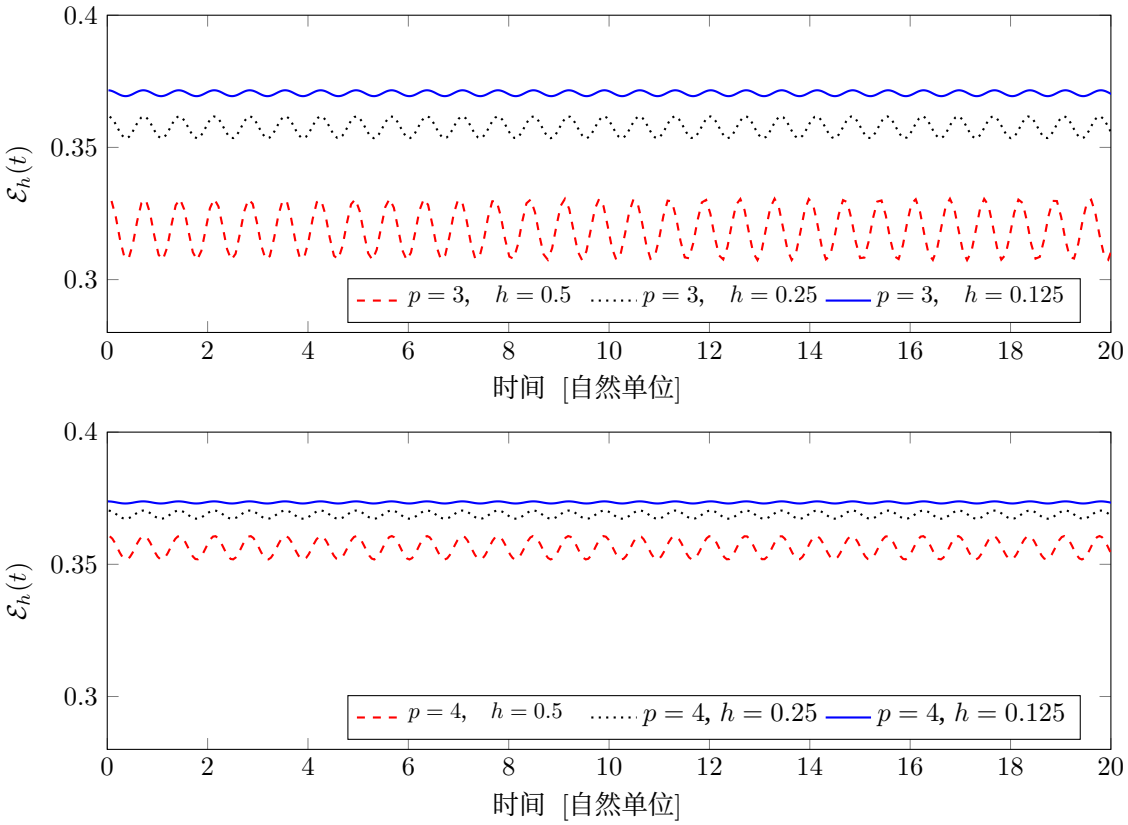

图1：方法 (3.10)–(3.13) 在次数 $p=3$，4 时，不同网格尺寸下的离散能量随时间的变化。

5.1 Ac空间离散化的精度与能量守恒

首先展示方法关于网格尺寸的收敛性以及能量守恒方面的结果。

5.1.1 单位立方体中的腔体问题

作为测试示例的第一个几何体是单位立方体（即 $\Omega = \hat{\Omega} = [0,1]^3$），电场 1-形式满足齐次边界条件，因此研究的是麦克斯韦腔体问题，其时间谐波解已知（立方体双旋度算子的第一特征函数），时间周期为 $\sqrt{2}\pi$。所有物理参数均经过归一化，使真空的介电常数和磁导率为 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$。B 和 D 的初始条件通过将其在 $t=0$ 时的值投影到离散 2-形式空间中来设定。

腔体问题用于测试所提出方法在 p 和 h 细化下已证明的能量守恒性质（其中 h 为空间网格尺寸）。具体而言，我们在不断细化的网格上求解次数为 $p=3$，4的问题，时间步由库朗–弗里德里希–列维（CFL）条件给定。图 1 所示结果对应于第 3.4 节的第二种离散格式，证实了关于能量守恒的理论结果；其中出现的振荡源于蛙跳格式的典型行为。随着次数提高和网格变细，振荡幅度会减小；相对于精确能量的误差也会随着网格细化和次数增加而减小。

为测试网格加密时两种方法的收敛阶，我们在时间区间 $[0,T]$ 内求解该问题，其中 $T=2.0$。现在考虑次数 $p=2$、3、4，以及不同的二分加密网格，每个笛卡尔方向上的单元数从 2 到 16。为观察空间

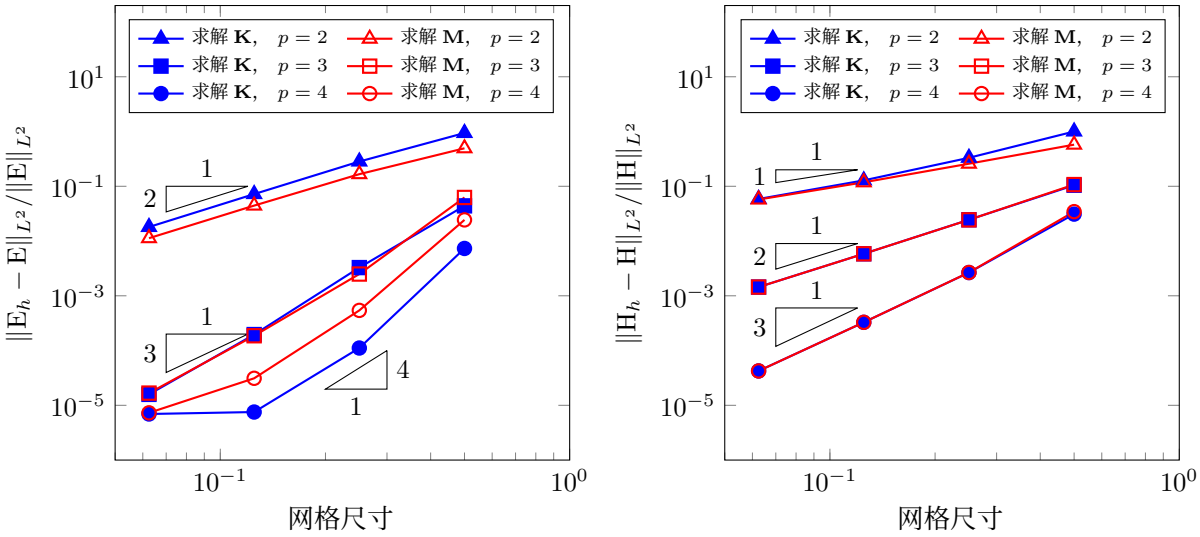

图 2：单位立方体中，电场（左）和磁场（右）的 $L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ 范数下的相对误差收敛率，多项式次数为 $p = 2,\ 3,\ 4$。我们用标签 **M** 标记第一种离散格式，用 **K** 标记第二种离散格式。

离散误差，所有次数和网格均采用以自然单位计量、数值为 $\Delta t_{\mathrm{ref}} = 8.0548 \times 10^{-4}$ 的极小时间步。该数值由所有数值测试（包括下文的同轴电缆测试）中最精细网格所对应的 CFL 条件确定，然后再除以 10。由于我们分别用两个不同的序列逼近电场 E 和磁场 H，因此使用 $L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ 范数计算二者的相对误差，即 L^2 空间和时间范数。虽然未报告，但时间方向上采用 L^∞ 范数也会得到类似结果。收敛图见图 2。可以看到，对于两种格式，电场的误差均收敛至零，其逼近空间的混合次数为 p 和 $p-1$，且误差按 h^p 收敛；而磁场的逼近空间混合次数为 $p-1$ 和 $p-2$，其误差按 h^{p-1} 收敛。这一误差与采用相同次数的有限元方法逼近时所得的误差一致。此外，两种格式的误差幅度非常接近。值得注意的是，在最精细层级上，电场采用 $p = 4$ 时出现了误差平台，这是由时间离散误差造成的。采用更高阶的时间离散格式或更小的时间步即可消除这一现象。

5.1.2 同轴电缆

对于第二次数值测试，我们考虑同轴电缆的几何结构，并模拟横电磁（TEM）模的稳态传播；其极坐标下的解可见于 [18, 第 3]章。我们仅对完整同轴电缆 $\Omega = \{(x,\ y,\ z)\colon\ 1 < x^2 + y^2 < 2,\ 0 < z < 1\}$的四分之一进行建模，该几何结构由次数为 2 的 NURBS 几何描述。我们利用解中的对称性；对于 $t = 0.5$，其结果如图 3 所示，该结果采用原序列中的起始次数 $p = 3$ 和最大正则性、每个参数方向上包含八个单元的网格，以及上文所述的相同参考时间步长计算得到。与上文一样，我们对 ϵ_0 和 μ_0的值进行归一化，并通过将精确初始条件投影到 2-形式的离散空间中，设置 B 和 D 的初始条件。此外，在每个时间步，我们都施加非齐次狄利克雷边界条件（针对 $y = 0$ 和 $x = 0$），具体如第 3 节所述。由于该边界条件由空间和时间的可分离函数给出，因此其对右端项的贡献仅在数值时间积分开始时计算一次，随后在每个时间步，将以自由度表示的结果乘以一个已知的时间函数。

在这次数值测试中，我们评估霍奇星算子的度量依赖性。对于两种方法，我们采用与单位立方体相同的次数、单元数量和时间步进行收敛测试，并像之前一样计算电场和磁场的相对误差，结果如图4所示。我们观察到，误差以与单位立方体情形相同的收敛率趋于零；在单位立方体情形中，度量



图3：四分之一　　同轴电缆及其电场（左）和磁场（右）的 TEM 模　ode.

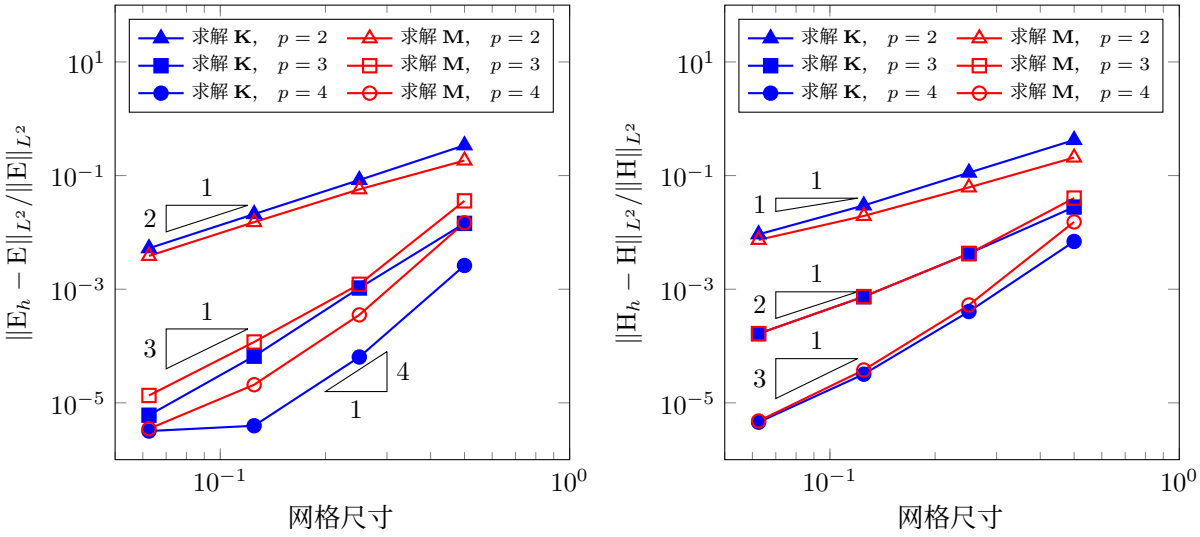

图 4：同轴电缆中，电场（左）和磁场（右）在多项式次数为 $p = 2$，3，4 时，$L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ 范数下的相对误差收敛率。我们使用标签 **M** 表示第一种离散格式，使用 **K** 表示第二种离散格式。

并未参与其中，即电场的误差为 h^p，磁场的误差为 h^{p-1}。此外，两种方法的误差幅值非常相近，没有哪一种方法明显优于另一种。

5.2 计算成本研究

在计算效率方面，我们旨在验证第 4.3 节中的计算复杂度估计，并采用与精度研究相同的数值算例。由于这些估计取决于时间步数，我们还分析了 CFL 条件随网格尺寸和样条次数变化的情况。

为了解 CFL 条件（它给出了允许的最大时间步）的行为，我们针对两种方法，计算了次数从 2 到 6 时以及单位立方体经过不同网格细化时的 CFL 条件。图 5 左图中，我们改变次数，并将单元数固定为 h–加密中最精细层级的单元数。结果表明，对于第二种离散格式（需要求解与配对矩阵相关的线性方程组），CFL 条件按$\mathcal{O}(1/p^2)$ 缩放，这是有限元法和间断 Galerkin 有限元法的标准行为。相比之下，对于基于求解与质量矩阵相关的线性方程组的格式，CFL 条件按$\mathcal{O}(1/p^{3/2})$ 缩放，优于有限元法。文献 [12] 在波动方程中也观察到了等几何分析相较于有限元法的这一优势。图 5 右图

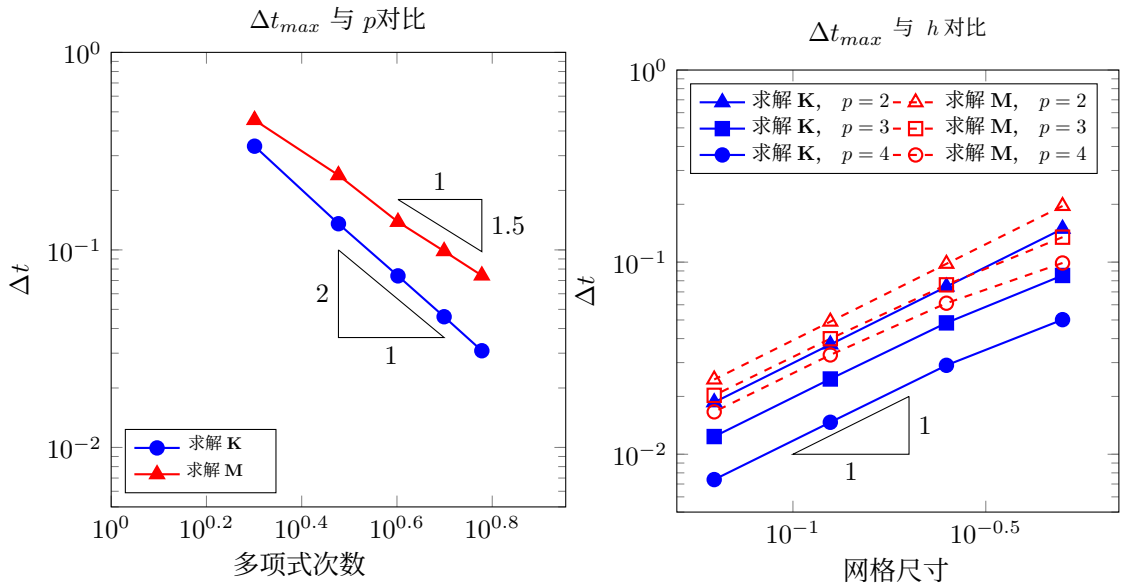

图 5：CFL 条件给出的最大时间步长与多项式次数（左）及网格尺寸（右）的关系。

展示了不同网格尺寸以及次数为 $p=2$，3，4 时的时间步最大值。对于两种方法，时间步都随网格尺寸呈线性变化，这符合所采用的蛙跳积分器的预期行为，其中第一种格式略占优势。

为了分析计算复杂度，我们针对不同的次数和网格尺寸，计算了两种方法每个时间步的平均运行时间。线性系统求解器的选择不会影响方法的精度，但对性能至关重要。因此，对于与配对矩阵相关的线性系统的求解，我们给出了使用 MATLAB 直接求解器（通过左除运算符计算）以及利用克罗内克积结构（如第 4 节所述）所得的结果。我们在与前文相同的区域中进行了测试，即单位立方体和同轴电缆。在单位立方体中，质量矩阵也可以利用张量化，但在同轴电缆中则无法做到。此外，为了进一步减少正交方向，我们对 NURBS 参数化中一个内部控制点的坐标进行了轻微扰动。通常，我们采用终止时间为 $T=2$ 的模拟；但对于必须直接对配对矩阵进行 LU 分解的情形，针对 $p=4$ 和最精细网格的情况，由于模拟时间过长，我们使用了小得多的 $T=0.2$ （见注释 5.1）。

对于次数为二、三和四的情形，求解器的运行时间分别如图 6、7 和 8 所示。我们观察到，对于新提出的方法，时间步进成本随自由度数量（自由度）线性增长。这与上一节的估计一致，因为在三维情况下，自由度数量按$O(n^3)$ 的比例缩放。相比之下，使用 MATLAB 的直接求解器所得到的计算成本通常优于我们的估计：无论是像第一种格式（3.5）–（3.8）中那样求解质量矩阵，还是像第二种格式（3.10）–（3.13）中那样求解配对矩阵，我们都预期其计算成本会随自由度数量呈二次增长。这可能是因为几何形状较为简单，MATLAB 左除运算符内部的因式分解算法能够利用正交方向的可分离性。尽管如此，利用张量化的新方法仍然快约两个数量级，这在很大程度上抵消了由于 CFL 条件较差而导致的较大时间步。除此之外，对于更细的网格，性能提升还会更为显著，因为两种方法的 CFL 条件之比保持不变，而每个时间步的计算时间之比会随着网格细化而增加。

注释 5.1. 例如，对于 $p=4$，同轴电缆中的结果以及最精细的网格表明，与标准方法相比，新方法每个时间步的计算时间约缩短至原来的八十分之一

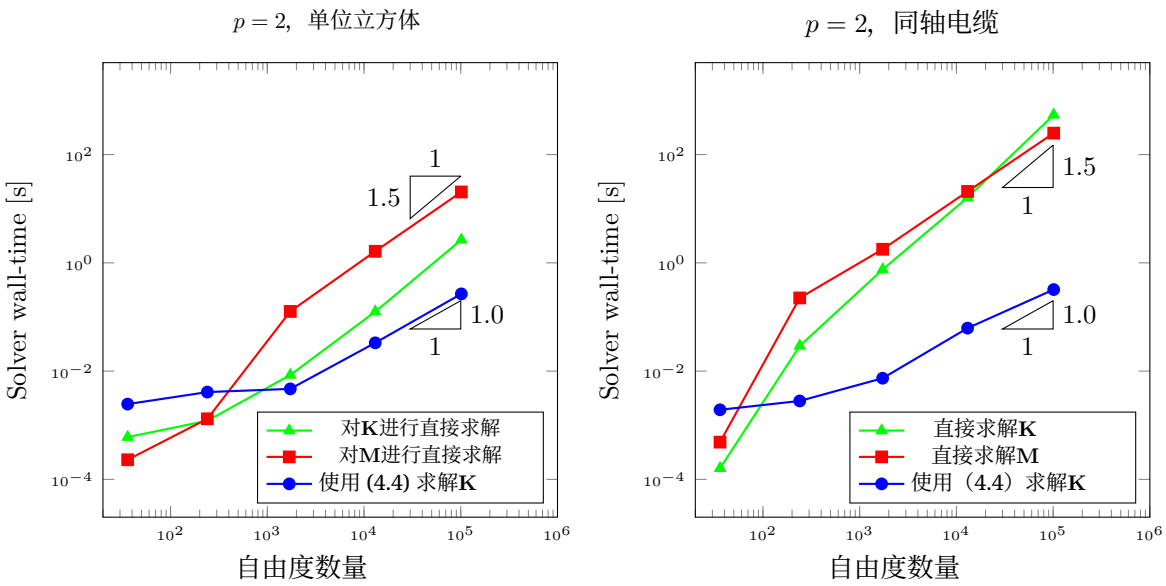

图 6：在 $p = 2$ 的情况下，执行单个时间步所需的平均运行时间。

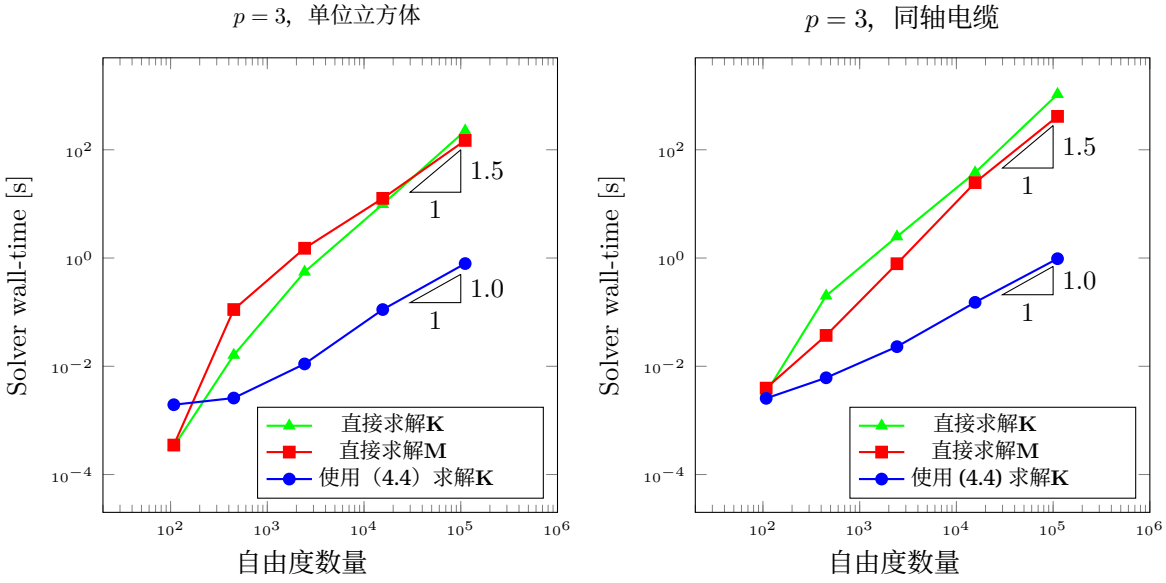

图 7：在 $p = 3$ 情况下执行单个时间步所需的平均运行时间。

这一估算基于质量矩阵。结合图 *5* 中关于 *CFL* 条件的结果，粗略估计新方法的计算时间约缩短至原来的四十分之一。通过比较实际耗时，可以更直观地理解这一优势：新方法运行一小时即可完成的任务，标准方法几乎需要两天；又或者，新方法用一周即可完成的任务，标准方法则需要九个月。虽然这些估算非常粗略，完全忽略了实际模拟中的许多因素（内存访问、并行化等），但它们展示了新方法的潜在优势。

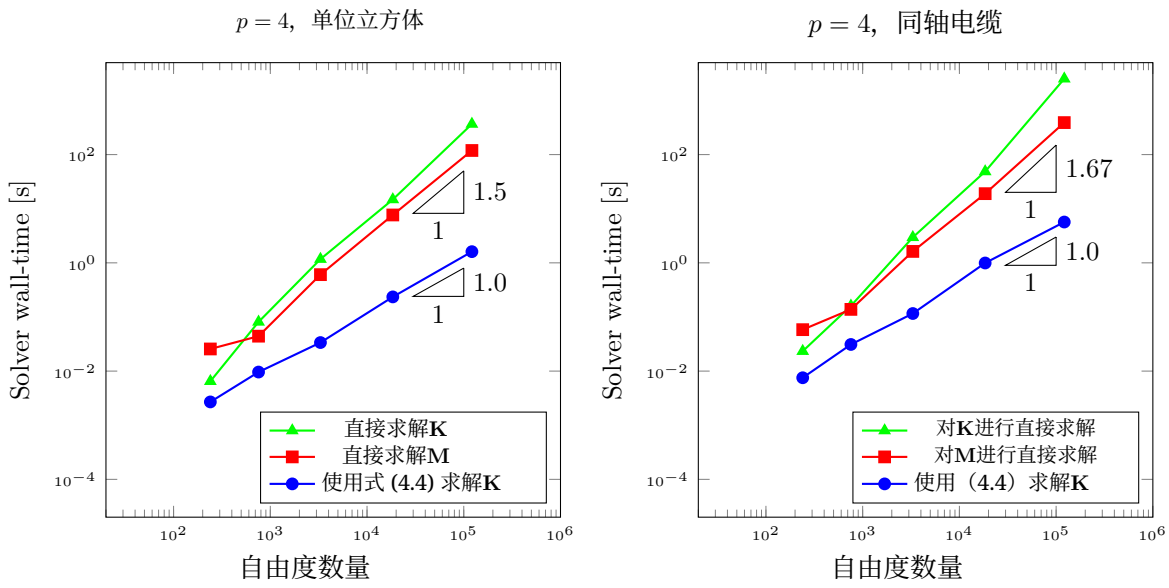

图 8：在 $p = 4$ 情况下执行单个时间步所需的平均运行时间。

6 结论

我们开发并测试了一种利用高次样条求解麦克斯韦方程的新方法。该框架基于对两个微分形式 de Rham 复形的离散化，以及在二者之间构造离散霍奇星算子的特殊方法。这些霍奇算子需要求解一个配对矩阵对应的线性系统，而该矩阵具有克罗内克张量积结构。与求解质量矩阵对应的线性系统相比，利用这一结构可将每个时间步的计算成本降低两个数量级，同时保持离散化精度。该方法还保留了麦克斯韦方程组的几何结构，尤其能够守恒电荷和能量。未来的研究将着重于将该格式与更高阶的辛时间积分器结合，并探索如何在多片区域中利用式（4.5）中克罗内克积的求逆。

致谢

作者谨此感谢 Mattia Tani 博士就克罗内克型矩阵系统的求解提供宝贵意见。作者感谢瑞士国家科学基金会通过项目 HOGAEMS n.200021_188589 提供资助。

参考文献

[1] D.N. Arnold、R.S. Falk 和 R. Winther。《有限元外微积分、同调技术及其应用》。*Acta Numer.*，15:1–155，2006年。[2] D.N. Arnold、R.S. Falk 和 R. Winther。《有限元外微积分：从霍奇理论到数值稳定性》。《美国数学会通报》（新系列），47(2):281–354，2010年。[3] Aurore Back 和 Eric Sonnendrücker。样条离散微分形式。应用于麦克斯韦方程。技术报告，2011年2月。[4] William Barham、Yaman Güçlü、Philip J. Morrison 和 Eric Sonnendrücker。哈密顿形式下宏观麦克斯韦方程的拟态离散化，2022年。arXiv:2108.07385 [物理学]。

[5] Pavel B. Bochev 和 James M. Hyman。微分算子拟合离散的原理。载于 Douglas N. Arnold、Pavel B. Bochev、Richard B. Lehoucq、Roy A. Nicolaides 和 Mikhail Shashkov 编，《相容空间离散》，第142卷，第89–119页。Springer New York，纽约州纽约市，2006年。[6] Ericka Brivadis、Annalisa Buffa、Barbara Wohlmuth 和 Linus Wunderlich。等几何砂浆方法。《计算机方法与应用力学和工程》，284:292 – 319，2015年。[7] A. Buffa、G. Sangalli 和 R. Vázquez。电磁学中的等几何分析：B样条逼近。*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*，199(17-20):1143 – 1152，2010年。[8] A. Buffa、C. de Falco 和 G. Sangalli。等几何分析：二维斯托克斯方程的稳定单元。*Internat. J. Numer. Methods Fluids*，65(11-12):1407–1422，2011年。[9] A. Buffa、J. Rivas、G. Sangalli 和 R. Vázquez。三维等几何离散微分形式。*SIAM J. Numer. Anal.*，49(2):818–844，2011年。[10] A. Buffa、G. Sangalli 和 R. Vázquez。计算电磁学的等几何方法：B样条和T样条离散化。计算物理学杂志，257，B辑：1291 – 1320，2014年。[11] Annalisa Buffa、Jacopo Corno、Carlo de Falco、Sebastian Schöps 和 Rafael Vázquez。电磁问题的等几何砂浆耦合。*SIAM*科学计算杂志，42(1):B80–B104，2020年。[12] Jesse Chan 和 John A. Evans。用于波传播的多片间断伽辽金等几何分析：显式时间步进与高效质量矩阵求逆。《计算机方法与应用力学和工程》，333:22–54，2018年。[13] Eric T. Chung、Patrick Ciarlet 和 Tang Fei Yu。笛卡尔网格上三维麦克斯韦方程组的交错间断伽辽金方法的收敛性与超收敛性。计算物理学杂志，235:14 – 31，2013年。[14] M. Clemens 和 T. Weiland。采用有限积分技术的离散电磁学。电磁研究进展，32:65–87，2001年。[15]Markus Clemens、Peter Thoma、Thomas Weiland 和 Ursula van Rienen。采用有限积分法进行计算电磁场计算。*Surveys Math. Indust.*，8(3-4):213–232，1999年。[16] L. Codecasa 和 M. Politi。通过有限积分技术将有限差分时域法显式、一致且有条件稳定地扩展至四面体网格。*IEEE*磁学汇刊，44(6):1258–1261，2008年。[17] Lorenzo Codecasa、Bernard Kapidani、Ruben Specogna 和 Francesco Trevisan。适用于导电介质的四面体网格新型有限差分时域技术。*IEEE Trans. Antennas and Propagation*，66(10):5387–5396，2018年。[18] Robert E. Collin。《微波工程基础》。电磁波理论IEEE出版社丛书。IEEE出版社，纽约，第2版，2001年。[19] J. Corno、C. de Falco、H. De Gersem 和 S. Schöps。超导加速器腔中洛伦兹失谐的等几何模拟。*Comput. Phys. Commun.*，201:1 – 7，2016年。[20] John A. Evans 和 Thomas J. R. Hughes。用于达西-斯托克斯-布林克曼方程的等几何散度协调B样条。*Math. Models Methods Appl. Sci.*，23(04):671–741，2013年。[21] John A. Evans 和 Thomas J. R. Hughes。用于稳态纳维-斯托克斯方程的等几何散度协调B样条。*Math. Models Methods Appl. Sci.*，23(08):1421–1478，2013年。[22] John A. Evans 和 Thomas J. R. Hughes。用于非稳态纳维-斯托克斯方程的等几何散度协调B样条。计算物理学杂志，241:141 – 167，2013年。

[23] Yaman Güçlü、Said Hadjout 和 Martin Campos Pinto。《映射多片区域上电磁问题的非协调有限元外微分演算框架》，2022年。arXiv:2208.05238 [物理学].[24] Jan S. Hesthaven 和 Tim Warburton。《节点间断伽辽金方法》，应用数学丛书第54卷。Springer New York，纽约州纽约市，2008年。[25] R. R. Hiemstra、D. Toshniwal、R. H. M. Huijsmans 和 M. I. Gerritsma。《具有精确守恒性质的高阶几何方法》。计算物理学杂志，257（B部分）：1444–1471，2014年。[26] René Hiemstra。《等几何拟态方法：计算流体力学中的应用几何》。理学硕士论文，代尔夫特理工大学，2011年。[27] R. Hiptmair。《离散霍奇算子》。数值数学，90：265–289，2001年。[28] R. Hiptmair。《计算电磁学中的有限元》。Acta Numer.，11：237–339，2002年。[29] A.N. Hirani。《离散外微分演算》。博士论文，加州理工学院，帕萨迪纳，加利福尼亚州，2003年。[30] A.N. Hirani、K.B. Nakshatrala 和 J.H. Chaudhry。《基于离散外微分演算推导的达西流数值方法》。国际计算方法工程科学与力学杂志，16(3)：151–169，2015年。[31] Florian Holderied、Stefan Possanner 和 Xin Wang。《基于保结构有限元和粒子网格法的磁流体力学—动理学混合代码》。计算物理学杂志，433：110143，2021年。[32] Bernard Kapidani 和 Rafael Vázquez。《基于样条的高阶几何方法：离散霍奇星算子分析》。SIAM科学计算杂志，2022年。[33] Bernard Kapidani、Lorenzo Codecasa 和 Ruben Specogna。《时域单元法是两个采用连续通量的显式间断伽辽金格式的耦合》。IEEE磁学汇刊，56(1)：1–4，2020年。[34] Bernard Kapidani、Lorenzo Codecasa 和 Joachim Schöberl。《用于时变二维麦克斯韦方程的带块对角质量矩阵的任意阶单元法》。计算物理学杂志，433：110184，2021年。[35] Bernard Kapidani、Melina Merkel、Sebastian Schöps 和 Rafael Vázquez。《多片区域上 H(curl) 中等几何砂浆空间的树—余树分解》。《计算机方法与应用力学和工程》，395：114949，2022年。[36] Michael Kraus、Katharina Kormann、Philip J. Morrison 和 Eric Sonnendrücker。《几何电磁粒子网格法》。等离子体物理学杂志，83(4)：905830401，2017年。[37] M. Marrone。《电动力学中单元法的计算方面》。电磁研究进展，32：317–356，2001年。[38] Ahmed Ratnani 和 Eric Sonnendrücker。《用于时域麦克斯韦方程的任意高阶样条有限元求解器》。科学计算杂志，51：87–106，2012年。[39] Giancarlo Sangalli 和 Mattia Tani。《基于西尔维斯特方程快速求解器的等几何预条件子》。SIAM科学计算杂志，38(6)：A3644–A3671，2016年。[40] E. Tonti。《电磁场有限形式》。电磁研究进展，32：1–44，2001年。[41]T.M. van Opstal、J. Yan、C. Coley、John A Evans、T. Kvamsdal 和 Y. Bazilevs。《不可压缩湍流的等几何散度协调变分多尺度公式》。应用力学与工程计算方法，316：859–879，2017年。[42] Rafael Vázquez。《在 Octave 和 MATLAB 中实现等几何分析的新设计：GeoPDEs 3.0》。计算数学及其应用，72(3)：523–554，2016年。