程序度量的格*

UgoDal Lago ！博洛尼亚大学 & INRIA SophiaAntipolis
Naohiko Hoshino ✉
崇城大学**Paolo**
Pistone ✉罗马第三大学

arXiv:2302.05022v1 [cs.LO] 10 Feb 2023

摘要

本文旨在理解高阶类型演算中程序度量的本质，并将其视为程序等价的自然推广。我们关注的某些度量早已为人熟知，例如基于项在度量空间中的解释而得到的度量，以及通过推广观察等价而得到的度量。我们还引入了一种新的度量，称为交互度量，它通过将广为人知的 Int 构造应用于度量完全偏序范畴而构造而成。我们的目标是理解这些度量之间的关系，即某种度量是否以及在何种情况下会细化另一种度量，这与关于程序等价的相应问题类似，而后者已得到深入研究。我们得到的结果有两方面。首先，我们证明，源于语义的度量，即指称度量和交互度量，介于观察度量与等式度量之间，而且在某些情况下，这些包含关系是严格的。随后，我们给出了指称度量与交互度量之间关系的一个结果，揭示前者的区分能力弱于后者。我们的所有结果均针对线性λ演算，其中一些结果还可推广到具有分级余单子的演算，沿用 Fuzz 的思路。

2012年 ACM主题分类 计算理论 → 程序语义

关键词与短语 度量、λ演算、线性类型

1 引言

程序等价是程序语言语义中最重要的概念之一：为程序赋予语义的每一种方式都会导出一种等价概念，而同一种语言可用的各种等价概念，即使彼此差异很大，也有助于我们理解语言本身的深层本质。事实上，并不存在一种单一且首选的方式来构造程序的等价概念。在存在高阶类型，或程序具有根本上的交互行为（例如在进程代数中）的场景下，尤其如此。例如，观察等价（在与底层观察概念相一致的同余关系中粒度最粗的一种）与指称语义之间的关系，在某些情况下导致了所谓的完全抽象结果（例如 [17, 12]）；众所周知，这些结果仅对某些指称模型以及某些程序设计语言成立。类似的论证也适用于应用双模拟：例如，在存在概率性效应时 [8, 9] 它确实是完全抽象的，但在存在非确定性效应时 [19]则并非如此。

尽管等价性是程序设计语言理论的核心，但它无法描述那些在定性上表现出不同的行为、却在定量意义上表现得相似的程序对。这促使人们研究程序之间的距离概念，这些概念通常表现为程序空间或其指称上的（伪）度量。从这个意义上说，我们至少可以区分三种典型风格：

* 第一作者和第三作者获得了 ERC CoG DIAPASoN（GA 818616）的部分资助。

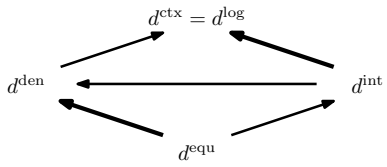


图 1 程序度量比较结果示意图：箭头 $d^{\mathbf{a}} \to d^{\mathbf{b}}$ 表示 $d^{\mathbf{b}}$ 比 $d^{\mathbf{a}}$ 更粗糙（即区分能力更弱）。粗箭头表示严格支配。

- 首先，可以将观察等价推广为度量，保留对所有上下文的内在量化，但观察的是差异而非等式 [6, 7]。另一种方法是推广等式逻辑，该方法由 Mardare 等人近期提出 [21], ,
- 并已扩展到同时具有线性 [10]和非线性 [11] 类型的高阶计算。最后，线性演算可以在度量完全偏序范畴中获得指称解释 [3], ；众所周知，这种方法在存在分级余单子时效果良好。
-

换言之，对于高阶演算，针对程序等价的各种定义风格都已被证明存在有意义的度量对应物，至少在底层类型系统基于线性类型或分级类型时是如此。然而，这幅图景中仍缺少一环，即由类似博弈语义和交互几何的交互式语义模型所提供的那一环 [14], ；它们是取得上述完全抽象结果的关键要素。此外，文献中各种距离概念之间的关系仅得到粗略研究，整体情况目前还不如程序等价领域清晰。

本研究旨在阐明高阶程序度量的整体图景。值得注意的是，本文定义了一种受 Girard 的交互几何启发的程序间新度量 [14] ，该度量通过对度量完全偏序范畴应用所谓的 Int 构造 [18, 2] 得到。由此得到一个指称模型。尽管它在根本上不同于现有的度量模型，却为衡量程序间距离提供了一种自然方式，我们将其称为**交互度量**。在交互度量中，两个程序之间的差异可以通过与底层指称解释进行交互而逐步观察；这种交互采用博弈语义和交互几何中典型的问答协议。

从技术角度而言，这项工作的主体是深入研究文献中已有的各种度量之间的关系，其中包括交互度量。总体而言，这项分析的结果如图 1 所示。观察度量仍然是区分能力最弱的度量，而等式度量则被证明是为（成对的）程序赋予最大距离的度量。两种具有语义性质的度量，即指称度量和交互度量，介于上述两种度量之间；其中，交互度量的区分能力强于指称度量。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾度量空间的一些基本事实；第 3 节介绍实数上的一种基本线性规划语言及其相关的程序度量概念；第 4 节讨论逻辑关系度量和观察度量；第 5 节讨论等式度量；第 6 节介绍两种指称度量；第 7 节和第 8 节给出主要的比较结果；第 9 节讨论分级指数的情形。

2 预备知识

本节回顾扩展伪度量空间和非扩张函数的概念。令 $\mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$ 为$\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\} \cup \{\infty\}$ 非负实数与无穷大的集合。一个扩展伪度量空间 X 由一个集合 $|X|$ 和一个函数 d_X：$|X| \times |X| \to \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$构成，满足以下条件：

- 对于所有 $x \in |X|$，我们有 $d_X(x, x) = 0$；对于所有 x，
- $y \in |X|$，我们有 $d_X(x, y) = d_X(y, x)$；对于所有 x，y，
- $z \in |X|$，我们有 $d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$。

下文中，我们将扩展伪度量空间简称为度量空间，并用 X 表示其底层集合 $|X|$ 。

对于度量空间 X 和 Y，若函数 $f\colon X \to Y$ 对所有 x，$x' \in X$ 均满足 $d_Y(fx, fx') \leq d_X(x, x')$，则称其为非扩张函数 。我们用 **Met** 表示由度量空间和非扩张函数构成的范畴。范畴**Met** 具有对称幺半闭结构 $(\mathbf{1}, \otimes, \multimap)$，其中张量积 $X \otimes Y$ 的度量定义为

$$d_{X\otimes Y}((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

我们假设幺半群积满足左结合性，并将 X 的 n 重幺半群积记作 $X^{\otimes n}$。下文中，$\mathbb{R}$ 表示配备绝对距离 $d_{\mathbb{R}}(a, b) = |a - b|$ 的实数度量空间。

3 一种线性编程语言

3.1 语法和操作语义

我们介绍目标语言：一种配备实数常量符号和非扩张函数的线性 λ 演算。我们固定一个非扩张函数集合 S，$f\colon \mathbb{R}^{\otimes n} \to \mathbb{R}$，其中 $n \geq 1$。我们称 n 为 f 的元数 。例如，S 可以包含加法 $+\colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，以及 sin、cos 等三角函数：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。我们假设 $f \in S$ 有函数符号 f，并且实数 $a \in \mathbb{R}$ 有常量符号 a 。

我们的语言记作 Λ_S，定义如下。类型和环境定义为

$$\text{Types} \quad \tau, \sigma := \mathbf{R} \mid \mathbf{I} \mid \tau \multimap \sigma \mid \tau \otimes \sigma, \qquad \text{Environments} \quad \Gamma, \Delta := \varnothing \mid \Gamma, x : \tau.$$

我们用**Ty** 表示类型集，用**Env**表示环境集。我们总是假设每个变量在任一环境中至多出现一次。对于不共享任何变量的环境 Γ和 Δ，我们将 Γ#Δ 记作 Γ 和 Δ的合并 [4, 15]，即通过交错排列 Γ 和 Δ 中的变量，同时保持 Γ 中变量的顺序以及 Δ中变量的顺序所得到的环境。例如，$(x\colon \tau,\ y\colon \sigma,\ y'\colon \sigma',\ x'\colon \tau')$是$(x\colon \tau,\ x'\colon \tau')$和$(y\colon \sigma,\ y'\colon \sigma')$的一个合并。形式化地，当满足以下条件时，称环境 Ξ 是 Γ 和Δ 的一个合并

- Ξ、Γ 和 Δ 都等于空环境；或者$\Gamma = \Gamma'$，$x\colon \tau$，且存在 Γ′ 和 Δ 的一个合并
- Ξ'，使得 $\Xi = \Xi'$，$x\colon \tau$；或者$\Delta = \Delta'$，$x\colon \tau$，且存在 Γ 和 Δ′ 的一个合并
- Ξ'，使得 $\Xi = \Xi'$，$x\colon \tau$。

当我们写作 Γ#Δ 时，隐含地假设 Γ 和 Δ 没有共享变量。项、

$$\frac{}{x:\tau\vdash x:\tau}\qquad \frac{a\in\mathbb{R}}{\vdash \overline{a}:\mathbf{R}}\qquad \frac{}{\vdash *:\mathbf{I}}\qquad \frac{f\in S\quad \Gamma_1\vdash M_1:\mathbf{R}\quad\dots\quad \Gamma_{\mathrm{ar}(f)}\vdash M_{\mathrm{ar}(f)}:\mathbf{R}}{\Gamma_1\#\cdots\#\Gamma_{\mathrm{ar}(f)}\vdash \overline{f}(M_1,\dots,M_{\mathrm{ar}(f)}):\mathbf{R}}$$

$$\frac{\Gamma,x:\sigma\vdash M:\tau}{\Gamma\vdash \lambda x:\sigma.M:\sigma\multimap\tau}\qquad \frac{\Gamma\vdash M:\sigma\multimap\tau\quad\Delta\vdash N:\sigma}{\Gamma\#\Delta\vdash M\,N:\tau}\qquad \frac{\Gamma\vdash M:\tau\quad\Delta\vdash N:\sigma}{\Gamma\#\Delta\vdash M\otimes N:\tau\otimes\sigma}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:\mathbf{I}\quad\Delta\vdash N:\tau}{\Gamma\#\Delta\vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N:\tau}\qquad \frac{\Gamma\vdash M:\sigma_1\otimes\sigma_2\quad\Delta,x:\sigma_1,y:\sigma_2\vdash N:\tau}{\Gamma\#\Delta\vdash \mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N:\tau}$$

图 2 类型规则

$$\frac{}{V\hookrightarrow V}\qquad \frac{M_1\hookrightarrow\overline{a_1}\quad\dots\quad M_n\hookrightarrow\overline{a_n}}{\overline{f}(M_1,\dots,M_n)\hookrightarrow\overline{f(a_1,\dots,a_n)}}\qquad \frac{M\hookrightarrow\lambda x:\tau.L\quad N\hookrightarrow V\quad L[V/x]\hookrightarrow U}{M\,N\hookrightarrow U}$$

$$\frac{M\hookrightarrow V\quad N\hookrightarrow U}{M\otimes N\hookrightarrow V\otimes U}\qquad \frac{M\hookrightarrow *\quad N\hookrightarrow V}{\mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N\hookrightarrow V}\qquad \frac{M\hookrightarrow V\otimes U\quad N[V/x,U/y]\hookrightarrow W}{\mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N\hookrightarrow W}$$

图 3 求值规则

值和上下文由以下巴科斯-诺尔范式给出。

项 $M,N ::= x\in$ **变量集** $\mid a\mid *\mid$ **f**$(M_1,\dots,M_{\mathrm{ar}(f)})\mid M\,N\mid \lambda x:\tau.M\mid M\otimes N\mid$ **let** $*$ **在** M **中** $N\mid$ **let** $x\otimes y$ **在** M **中** N **值** $V,U ::= a\mid *\mid \lambda x:\tau.M\mid V\otimes U$ **上下文** $C[-]::= [-]\mid f(M,\dots,M',C[-],N',\dots,N)\mid C[-]\,M\mid M\,C[-]\mid \lambda x:\tau.C[-]\mid C[-]\otimes M\mid M\otimes C[-]\mid$ **let** $*$ **在** $C[-]$ **中** $M\mid$ **let** $*$ **在** M **中** $C[-]\mid$ **let** $x\otimes y$ **在** $C[-]$ **中** $M\mid$ **let** $x\otimes y$ **在** M **中** $C[-]$

这里， a 的取值范围为 $\mathbb{R}$， f 的取值范围为 S，而 x 的取值范围是一个由变量构成的可数无限集合 Var。若类型判断是根据图 2 所示规则推导得出的，我们记作 $\Gamma\vdash M:\tau$。求值规则见图 3。由于 Λ_S 是一种纯线性编程语言，对于任意闭项 $M:\tau$，都存在一个值 $V:\tau$，使得 $M\twoheadrightarrow V$。对于环境 Γ和类型 τ，我们将 Term(Γ,τ) 定义为所有满足$\Gamma\vdash M:\tau$的项 M 所构成的集合，并将 Value(τ) 定义为类型为 τ的闭值集合。我们将 Term(τ) 简记为 Term($\varnothing,\tau$)，即类型为 τ的闭项集合。对于上下文 $C[-]$，若对所有项 $\Gamma\vdash M:\tau$，都有 $\Delta\vdash C[M]:\sigma$，则记作 $C[-]:(\Gamma,\tau)\to(\Delta,\sigma)$。

我们采用丘奇风格的 λ 抽象，使得每个类型判断 $\Gamma\vdash M:\tau$ 都具有唯一的推导，从而更容易为 Λ_S定义指称语义。除这一点外，我们的语言可以理解为 Fuzz [25] 的一个片段——类型判断$x:\sigma,\dots,y:\rho\vdash M:\tau$对应于 Fuzz 中的 $x:_1\sigma,\dots,y:_1\rho\vdash M:\tau$。在第 9 节中，我们讨论如何将本文的结果扩展到一种更丰富的语言，使其更接近 [25]中的语言。

3.2 等式理论

本文研究一种关于 Λ_S 的等式理论，该理论将被证明有助于为 Λ_S 定义一种称为可容许性（第 3.3 节）的良态度量族概念，并为 Λ_S 给出一种定量等式理论（第 5 节）。在这两种情况下，如果两个项要被视为相等，则要求它们之间的距离为 0。在此，我们

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M = M : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M = N : \tau}{\Gamma \vdash N = M : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M = N : \tau \quad \Gamma \vdash N = L : \tau}{\Gamma \vdash M = L : \tau}$$

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_n) = b}{\vdash \overline{f}(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{\mathrm{ar}(f)}}) = \overline{b} : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M = N : \tau \quad \Delta \vdash C[M] : \sigma \quad \Delta \vdash C[N] : \sigma}{\Delta \vdash C[M] = C[N] : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma \quad \Delta \vdash N : \tau}{\Gamma \# \Delta \vdash (\lambda x : \tau. M)\, N = M[N/x] : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \multimap \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau. M\, x = M : \tau \multimap \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ *\ \mathbf{in}\ M = M : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M \otimes N\ \mathbf{in}\ L : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M \otimes N\ \mathbf{in}\ L = L[M/x, N/y] : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathbf{I}}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ * = M : \mathbf{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \otimes \sigma}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ x \otimes y = M : \tau \otimes \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ C[N] : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ C[N] = C[\mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N] : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ C[N] : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ C[N] = C[\mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N] : \tau}$$

图 4 Λ_S 的等式理论推导规则

采用线性 λ 演算 [20] 的标准等式理论，并扩展以下公理

$$\frac{f \in S \quad f(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(f)}) = b}{\vdash \overline{f}(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{\mathrm{ar}(f)}}) = \overline{b} : \tau} \quad .$$

对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$，当等式可被推导出来时，我们记作 $\Gamma \vdash M = N : \tau$。

只要在将函数符号 f 解释为 f、将常量符号 a 解释为 a时这些公理有效，我们就可以向等式理论中添加一些其他公理。例如，当 $\mathsf{add} : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 属于 S 时，我们可以向等式理论中添加交换律 $x : \mathbf{R}\ y : \mathbf{R} \vdash \mathsf{add}(x, y) = \mathsf{add}(y, x) : \mathbf{R}$。本文其余部分不受对等式理论进行此类扩展的影响。

3.3 可容许性

我们将一族 $\{d_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau \in \mathbf{Ty}}$ 称为 **度量**Λ_S，其中 $d_{\Gamma,\tau}$ 是 **项**(Γ, τ) 上的度量。我们引入 Λ_S 上的一类度量，这是本文的研究对象。

▶ **定义 1**（可容许度量）。设 $\{d_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau \in \mathbf{Ty}}$ 是 Λ_S 上的度量。当满足以下条件时，我们称 $\{d_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau : \mathbf{Ty}}$ 是可容许的：

（*A1*）对于任意环境 Γ、任意类型 τ、任意一对项 $\Gamma \lq M : \tau$、$\Gamma \lq N : \tau$ 以及任意上下文 $C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\Delta, \sigma)$，均有 $d_{\Delta,\sigma}(C[M], C[N]) \leq d_{\Gamma,\tau}(M, N)$。（*A2*）对于所有 a、$b \in \mathbb{R}$，均有 $d_{\varnothing, \mathbf{R}}(a, b) = |a - b|$.（*A3*）对于所有 a_1、……、a_n、b_1、……、$b_n \in \mathbb{R}$ 以及所有闭值 $V : \tau$ 和 $U : \tau$，均有

$$d_{\varnothing, \mathbf{R}^{\otimes n} \otimes \tau}\left(\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes V, \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n} \otimes U\right) \geq |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|.$$

（*A4*）若 $\Gamma \lq M = N : \tau$，则 $d_{\Gamma,\tau}(M, N) = 0$。

第一个条件（A1）指出，所有上下文都是非扩张的；第二个条件（A2）指出，**实数** 上的度量与 $\mathbb{R}$上的绝对度量一致。（A3）指出，两个项 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes V$和 $b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \otimes U$之间的距离，下界由它们的"可观测片段" $d_{\mathbb{R}^{\otimes n}}((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n))$之间的距离给出。最后一个条件（A4）指出，$d_{\Gamma,\ \tau}$ 涵盖了 Λ_S的等式理论。

可容许性的定义受到对 Fuzz [25], 的研究启发。Fuzz 是一种用于验证差分隐私 [5]的线性类型系统。在该研究中，Reed 和 Pierce 使用一族称为度量关系的关系，为 Fuzz 引入了语法定义的度量，并证明所有程序相对于该语法度量都是非扩张的（[25]中的定理 6.4）。(A1) 受到这一结果的启发。此外，在度量关系的定义中，类型的张量积被解释为度量空间的幺半群积，而实数类型则被解释为配备了绝对距离的 $\mathbb{R}$ 。(A2) 和 (A3) 受到这些定义的启发。事实上，给定 Λ_S上的一个可容许度量 $\{d_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau \in \mathbf{Ty}}$ ，我们可以证明 $d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}$ 与 $\mathbb{R}^{\otimes n}$的度量一致。

▶ **Le 引理 2.** 如果度量 $\{d_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env},\, \tau \in \text{类型}}$ 是可容许的，那么对于所有 $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$,

$$d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}(\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n}) = |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|. \tag{1}$$

证明。 由 (A1) 和 (A3),

$$\begin{aligned}\sum_{1 \le i \le n} |a_i - b_i| &\le d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n} \otimes \mathbf{I}}\left(\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes *, \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n} \otimes *\right) \\ &\le d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}\left(\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n}\right).\end{aligned}$$

另一个不等式可由 (A1)、(A2) 和三角不等式推出:

$$\begin{aligned}\sum_{1 \le i \le n} |\overline{a_i} - \overline{b_i}| &\ge d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}\left(\overline{a_1} \otimes \overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \overline{b_1} \otimes \overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}\right) + \sum_{2 \le i \le n} |\overline{a_i} - \overline{b_i}| \\ &\ge d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}\left(\overline{a_1} \otimes \overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \overline{b_1} \otimes \overline{b_2} \otimes \overline{a_3} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}\right) + \sum_{3 \le i \le n} |\overline{a_i} - \overline{b_i}| \\ &\ge \cdots \\ &\ge d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}}\left(\overline{a_1} \otimes \overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \overline{b_1} \otimes \overline{b_2} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n}\right).\end{aligned}$$

◀

我们不将 (1) 作为可容许性的第三个条件，而采用上述更强条件 (A3)，原因在于，若要求满足 (1)，就无法将观察度量（第 4.2 节）刻画为 Λ_S 上最小的可容许度量。

4 逻辑度量与观察度量

我们在 Λ_S 上给出两个通过语法定义的度量：一个基于逻辑关系，另一个则采用 Morris 观察等价 [24] 的风格。接着，我们证明这两个度量相同。这可以看作 Milner 上下文引理 [22] 的一个度量变体。

4.1 逻辑度量

Λ_S 上的第一个度量通过逻辑关系 [25] 的一种定量形式度量逻辑关系给出。在这里，我们直接定义度量逻辑关系，然后定义其在 Λ_S上诱导出的度量。度量逻辑关系

$$\{(-) \simeq_r^{\tau} (-) \subseteq \mathbf{Term}(\tau) \times \mathbf{Term}(\tau)\}_{\tau \in \mathbf{Ty},\, r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\ge 0}}$$

如下通过对 τ 进行归纳给出。

$$\begin{aligned}
M \simeq_r^{\mathbf{R}} N &\iff M \hookrightarrow \overline{a} \text{ and } N \hookrightarrow \overline{b} \text{ and } |a-b| \leq r \\
M \simeq_r^{\mathbf{I}} N &\iff M \hookrightarrow * \text{ and } N \hookrightarrow * \\
M \simeq_r^{\tau \otimes \sigma} N &\iff M \hookrightarrow V \otimes V' \text{ and } N \hookrightarrow U \otimes U' \text{ and} \\
&\quad \exists s, s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}, V \simeq_s^{\tau} U \text{ and } V' \simeq_{s'}^{\sigma} U' \text{ and } s + s' \leq r \\
M \simeq_r^{\tau \multimap \sigma} N &\iff M \hookrightarrow \lambda x : \tau. M' \text{ and } N \hookrightarrow \lambda x : \tau. N' \text{ and} \\
&\quad \forall V, U \in \mathbf{Value}(\tau), \text{ if } V \simeq_s^{\tau} U, \text{ then } M'[V/x] \simeq_{r+s}^{\sigma} N'[U/x]
\end{aligned}$$

那么，对于环境 $\Gamma = (x : \sigma, \ldots, y : \rho)$ 以及一对项 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们定义 $d^{\log}_{\Gamma\,\tau}$，$(M, N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$ 如下

$$d^{\log}_{\Gamma,\tau}(M,N) = \inf\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty} \mid \lambda x : \sigma. \cdots \lambda y : \rho. M \simeq_r^{\sigma \multimap \cdots \multimap \rho \multimap \tau} \lambda x : \sigma. \cdots \lambda y : \rho. N\}.$$

▶ **命题 3**。 对于任意环境 Γ 和任意类型 τ，函数 $d^{\log}_{\Gamma\,\tau}$，是**项**(Γ, τ)上的度量。此外，$\{d^{\log}_{\Gamma\,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau \in \mathbf{Ty}}$ 是可容许的。

证明。 很容易证明，下一节给出的 d^{obs} 是 Λ_S 上的度量，并且满足 (A1)。因此，由定理 9 可知，$d^{\log}_{\Gamma\,\tau}$，是**项**(Γ, τ) 上的度量，并且满足 (A1)。(A2) 和 (A3) 由 $d^{\log}$ 的定义得出。(A4) 的证明见推论 19。◀

我们称 $d^{\log}$ 逻辑度量。

▶ **例 1.** 对于 $a \in \mathbb{R}$，我们将项 M_a 定义为

$$\vdash \overline{a} \otimes \overline{a} \otimes V : \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \otimes ((\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \multimap \mathbf{R}) \multimap \mathbf{R}) \qquad \text{where } V = \lambda k : \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \multimap \mathbf{R}.\, k\,\overline{0}\,\overline{0}.$$

由于 $d^{\log}_{\varnothing,\ \mathbf{实数}(0,\ -1)} = 1$，我们得到 $d^{\log}_{\varnothing,\ \mathbf{实数}\otimes\mathbf{实数}\otimes((\mathbf{实数}\otimes\mathbf{实数}\multimap\mathbf{实数})\multimap\mathbf{实数})(M_0,\ M_1)} = 1 + 1 + 0 = 2$。 □

4.2 观察度量

接下来我们给出一种度量，称为观察度量，它通过观察任意可能的上下文所产生的具体值，来衡量项之间的距离。对于项$\Gamma \vdash M : \tau$和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们将 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\ \tau}(M,\ N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$定义为

$$d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) = \sup_{(n,\sigma,C[-]) \in \mathcal{K}(\Gamma,\tau)} \left\{ |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n| \;\middle|\; \begin{array}{l} C[M] \hookrightarrow \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes V \\ \text{and } C[N] \hookrightarrow \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n} \otimes U \end{array} \right\}$$

其中 $(n,\ \sigma,\ C[-]) \in \mathcal{K}(\Gamma,\ \tau)$ 当且仅当 $C[-]$是从 $(\Gamma,\ \tau)$ 到 $(\varnothing,\ \mathbf{实数}^{\otimes n} \otimes \sigma)$ 的上下文。

▶ **例 2.** 我们再次考虑例 1 中给出的项$\vdash M_a : \tau$。通过在平凡上下文 $[-]$中观察 M_0 和 M_1，我们可以直接验证 $d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\ \mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\otimes((\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\multimap\mathbf{R})\multimap\mathbf{R})}(M_0, M_1) \geq 2$。（事实上，由定理 9 可知，距离等于 2。）定义 $\mathcal{K}(\Gamma, \tau)$ 中引入辅助类型 σ，是为了能够进行此类型的观察。在这种情况下，虽然逻辑度量能够区分 M_0 和 M_1，但我们无法通过类型为 $\mathbf{R}^{\otimes n}$ 的观察，在 $S = \emptyset$ 时观察区分 M_0 和 M_1。关于不可能在 $\mathbf{R}^{\otimes n}$ 类型下观察区分这些项，请参见命题 4。□

▶ **命题 4.** 若 $S = \emptyset$，则对于任意 $n \in \mathbb{N}$，不存在上下文

$$C[-] : (\varnothing, \mathbf{R} \otimes ((\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}) \multimap \mathbf{R})) \to (\varnothing, \mathbf{R}^{\otimes n}).$$

证明。我们首先证明，不存在类型为 **实数**$^{\otimes 2}$ $\multimap$**实数** 的闭项。为此，对每种类型 τ，我们递归地定义 $|\tau| \in \mathbf{Z}$ 如下：

$$|\mathbf{R}| = 1, \qquad |\mathbf{I}| = 0, \qquad |\tau \otimes \sigma| = |\tau| + |\sigma|, \qquad |\tau \multimap \sigma| = -|\tau| + |\sigma|.$$

我们将定义扩展到环境 $\Gamma = (x\colon \tau, \ldots, y\colon \sigma)$，令 $|\Gamma|$ 为 $|\tau| + \cdots + |\sigma|$。于是，通过对 $\Gamma \vdash M\colon \tau$ 的推导作归纳，我们可以证明，若 $S = \emptyset$，则 $|\Gamma| \leq |\tau|$。由于 $|\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}| = -1$，可知不存在类型为 $\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}$ 的闭项。接下来证明该命题。假设存在上下文 $C[-]\colon (\varnothing, \mathbf{R}) \otimes ((\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}) \multimap \mathbf{R})) \to (\varnothing, \mathbf{R}^{\otimes n})$，其中 $n \in \mathbb{N}$，并由此导出矛盾。由于 Λ_S 可规范化，存在一个值 V，使得 $C[0 \otimes (\lambda f\colon \mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}.\, f\, 0\, 0)] \twoheadrightarrow V$。正如我们所观察到的，不存在闭值 $U \in \mathbf{Value}(\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R})$。因此，在归约 $C[0 \otimes (\lambda f\colon (\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}).\, f\, 0\, 0)] \twoheadrightarrow V$ 的过程中，不会发生形如 $(\lambda f\colon (\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}).\, f\, 0\, 0)\ U \twoheadrightarrow U\, 0\, 0$ 的 β-归约。因此，$\overline{\lambda f\colon (\mathbf{R}^{\otimes 2} \multimap \mathbf{R}).\, f\, 0\, 0}$ 必须是 V 的子项，这与 $V \in \overline{\mathbf{Value}}(\mathbf{R}^{\otimes n})$ 矛盾。◀

4.3 逻辑度量与观察度量的一致性

本节旨在证明逻辑度量与观察度量一致。为此，我们引入另一族定量关系，称为度量关系 [25]。我们定义度量关系

$$\{(-) \cong_r^\tau (-) \subseteq \mathbf{Term}(\tau) \times \mathbf{Term}(\tau)\}_{\tau \in \mathbf{Ty}, r \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0}}$$

按 τ 归纳如下。

$$\begin{aligned}
M \cong_r^{\mathbf{R}} N &\iff M \hookrightarrow \overline{a} \text{ and } N \hookrightarrow \overline{b} \text{ and } |a-b| \leq r \\
M \cong_r^{\mathbf{I}} N &\iff M \hookrightarrow * \text{ and } N \hookrightarrow * \\
M \cong_r^{\tau \otimes \sigma} N &\iff M \hookrightarrow V \otimes V' \text{ and } N \hookrightarrow U \otimes U' \text{ and} \\
&\qquad \exists s, s' \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0},\ V \cong_s^\tau U \text{ and } V' \cong_{s'}^\sigma U' \text{ and } s + s' \leq r \\
M \cong_r^{\tau \multimap \sigma} N &\iff M \hookrightarrow \lambda x : \tau.\, M' \text{ and } N \hookrightarrow \lambda x : \tau.\, N' \text{ and} \\
&\qquad \forall V \in \mathbf{Value}(\tau),\ M'[V/x] \cong_r^\sigma N'[V/x]
\end{aligned}$$

$\simeq$ 与 $\cong$ 定义的唯一区别在线性函数类型的情形。

引入一些记号。对于环境 $\Gamma = (x_1\colon \tau_1, \ldots, x_n\colon \tau_n)$，我们将 $\mathbf{Value}(\Gamma)$ 定义为 $\mathbf{Value}(\tau_1) \times \cdots \times \mathbf{Value}(\tau_n)$。给定 $\gamma \in \mathbf{Value}(\Gamma)$ 和 $\Gamma \vdash M\colon \tau$，我们以显然的方式定义 $M\gamma\colon \tau$。对于 $\gamma = (V_1, \ldots, V_n)$ $\delta = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbf{Value}(\Gamma)$，当存在 $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0}$ 使得 $r \geq s_1 + \cdots + s_n$ 且 $V_1 \,{}_{s_1}^{\tau_1}\!\!\sim U_1, \ldots, V_n \,{}_{s_n}^{\tau_n}\!\!\sim U_n$ 成立时，我们记作 $\gamma \,{}_r^\Gamma\!\sim \delta$。

▶ **引理 5**。对于任意环境 $\Gamma = (x_1\colon \tau_1, \ldots, x_n\colon \tau_n)$ 以及任意一对项 $\Gamma \vdash M\colon \tau$ 和 $\Gamma \vdash N\colon \tau$，若 $\gamma \in$ **值**(Γ)，则 $M\gamma \cong^\tau_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\,\tau,(M,N)}} N\gamma$。

证明。我们对 τ 作归纳来证明该命题。（当 $\tau =$ **实数** 时）令 $\gamma = (V_1, \ldots, V_n)$ 为 **值**(Γ) 的一个元素。对于满足 $M\gamma \hookrightarrow a$ 和 $N\gamma \hookrightarrow b$ 的 $a, b \in \mathbb{R}$，我们证明 $|a-b| \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\mathbf{R}}(M,N)$。令上下文 $C[-]$ 为

$$(\lambda x_1 : \tau_1.\, \cdots \lambda x_n : \tau_n.\, [-] \otimes *)\, V_1\, \cdots\, V_n.$$

于是，由于我们有 $C[M] \hookrightarrow a \otimes *$ 和 $C[N] \hookrightarrow b \otimes *$，可得 $|a-b| \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\mathbf{R}}(M,N)$。（当 $\tau = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ 时）令 $\gamma = (V_1, \ldots, V_n)$ 为 **值**(Γ) 的一个元素。对于 $U_1, V_1 \in$ **值**(σ_1)

以及 $U_2, V_2 \in$值(σ_2)，使得 $M\gamma, \twoheadrightarrow U_1 \otimes U_2$和 $N\gamma, \twoheadrightarrow V_1 \otimes V_2$，我们证明存在 $s, s' \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$，使得 $U_1 \cong^{\sigma_1}_{s} W_1$且 $U_2 \cong^{\sigma_2}_{s'} W_2$，并且$s + s' \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \otimes \sigma_2}(M, N)$。根据关于 σ_1 和 σ_2的归纳假设，我们得到 $U_1 \cong^{\mathrm{obs}}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_1}(U_1, W_1)} W_1$ 以及 $U_2 \cong^{\sigma_2}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}(U_2, W_2)} W_2$。因此，根据 $\cong$的定义，我们有 $M\gamma \cong^{\sigma_1 \otimes \sigma_2}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_1}(U_1, W_1) + d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}(U_2, W_2)} N\gamma$。还需验证 $d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_1}(U_1, W_1) + d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}(U_2, W_2) \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \otimes \sigma_2}(M, N)$。为此，我们证明，对于任意 $t_1 < d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_1}(U_1, W_1)$ 和 $t_2 < d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}(U_2, W_2)$，都有 $t_1 + t_2 \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \otimes \sigma_2}(M, N)$。给定这样的 t_1和 t_2，我们可以找到上下文 $C_1[-] \colon (\varnothing, \sigma_1) \to (\varnothing,$ 实数 $^{\otimes n} \otimes \rho_1)$ 和 $C_2[-] \colon (\varnothing, \sigma_2) \to (\varnothing,$ 实数 $^{\otimes m} \otimes \rho_2)$，使得

$$
\begin{aligned}
&C_1[U_1] \hookrightarrow \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes W_1,\\
&C_1[V_1] \hookrightarrow \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n} \otimes W_1',\\
&C_2[U_2] \hookrightarrow \overline{c_1} \otimes \cdots \otimes \overline{c_m} \otimes W_2,\\
&C_2[V_2] \hookrightarrow \overline{d_1} \otimes \cdots \otimes \overline{d_m} \otimes W_2',
\end{aligned}
$$

and

$$
t_1 \leq |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|, \qquad t_2 \leq |c_1 - d_1| + \cdots + |c_m - d_m|.
$$

我们将上下文 $D[-]$ 定义为

$$
\begin{aligned}
D[-] = \mathbf{let}\ y \otimes z\ \mathbf{be}\ (\lambda x_1 : \tau_1. \cdots \lambda x_n : \tau_n. [-])\, V_1 \cdots V_n\ \mathbf{in}\\
\mathbf{let}\ v \otimes v'\ \mathbf{be}\ C_1[y]\ \mathbf{in}\ \mathbf{let}\ u \otimes u'\ \mathbf{be}\ C_2[z]\ \mathbf{in}\ (H\,(v \otimes u)) \otimes (v' \otimes u')
\end{aligned}
$$

其中 y和 z是新变量，它们既不出现在 $C[-]$ 中，也不出现在 $D[-]$中，而$\vdash H$: **实数** $^{\otimes n} \otimes$**实数**$^{\otimes m} \to$**实数**$^{\otimes (n+m)}$ 是一个通过使用 let 绑定改变括号结构的值。于是，我们得到

$$
\begin{aligned}
&B[M] \hookrightarrow \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{c_1} \otimes \cdots \otimes \overline{c_m} \otimes (W_1 \otimes W_2),\\
&B[N] \hookrightarrow \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_n} \otimes \overline{d_1} \otimes \cdots \otimes \overline{d_m} \otimes (W_1' \otimes W_2').
\end{aligned}
$$

因此，$t_1 + t_2 \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \otimes \sigma_2}(M, N)$。（当 $\tau = \sigma_1 \multimap \sigma_2$时）令 $\gamma = (V_1, \ldots, V_n)$ 为 Value(Γ) 的一个元素。给定 Value$(\sigma_1 \multimap \sigma_2)$ 中的 $\lambda x\colon \sigma_1. M'$和 $\lambda x\colon \sigma_1. N'$，满足$M\gamma, \to \lambda x\colon \sigma_1. M'$且 $N\gamma, \to \lambda x\colon \sigma_1. N'$，我们证明，对于任意 Value$(\sigma_1)$ 中的 $U \in$，都有 $M'[U/x] \cong^{\sigma_2}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \multimap \sigma_2}(M, N)} N'[U/x]$。根据关于 σ_2的归纳假设以及$\cong$的定义，我们有

$$
M'[U/x] \cong^{\sigma_2}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}((\lambda x:\sigma_1.\, M')\, U, (\lambda x:\sigma_1.\, N')\, U)} N'[U/x].
$$

因此，还需要验证 $d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}((\lambda x\colon \sigma_1. M')\ U, (\lambda x\colon \sigma_1. N')\ U) \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \multimap \sigma_2}(M, N)$。为此，我们证明，对于任意 $r < d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}((\lambda x\colon \sigma_1. M')\ U, (\lambda x\colon \sigma_1. N')\ U)$，都有$r \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma, \sigma_1 \multimap \sigma_2}(M, N)$。由于 $r < d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing, \sigma_2}((\lambda x\colon \sigma_1. M')\ U, (\lambda x\colon \sigma_1. N')\ U)$，存在一个上下文

$$
C[-] \colon (\varnothing, \sigma_2) \to (\varnothing, \mathbf{R}^{\otimes m} \otimes \upsilon)
$$

使得

$$
\begin{aligned}
&C[(\lambda x : \sigma_1. M')\, U] \hookrightarrow \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_m} \otimes V\\
&C[(\lambda x : \sigma_1. N')\, U] \hookrightarrow \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_m} \otimes W
\end{aligned}
$$

以及 $r \leq |a_1 - b_1| + \cdots + |a_m - b_m|$. 我们将 $D[-]$ 定义为

$$
D[-] = (\lambda y : \sigma_1 \multimap \sigma_2. C[y\, U])\, ((\lambda x_1 : \tau_1. \cdots \lambda x_n : \tau_n. [-])\, V_1 \cdots V_n).
$$

由于

$$D[M] \hookrightarrow \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_m} \otimes V, \qquad D[N] \hookrightarrow \overline{b_1} \otimes \cdots \otimes \overline{b_m} \otimes W,$$

我们看到 $r \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\ \sigma_1 \multimap \sigma_2}(M,\ N)$。 ◀

▶ **引理 6**。 设 $\Gamma = (x_1 :\ \tau_1, \ldots, x_n :\ \tau_n)$ 为一个环境，并设 $\gamma, \gamma' \in$ **值**(Γ) 为替换。若 $\gamma \overset{\Gamma}{\underset{r}{\sim}} \gamma'$，则对于任意项 $\Gamma \vdash M :\ \tau$，都有 $M\gamma \overset{\tau}{\underset{r}{\sim}} M\gamma'$。

证明。 对 $\Gamma \vdash M :\ \tau$。的推导进行归纳 ◀

▶**引理 7**。 设 τ 为一种类型。
1. 对于任意 $\vdash M : \tau$，都有 $M \overset{\tau}{\underset{0}{\sim}} M$。 *2.* 对于任意 $\vdash M, N, L : \tau$，若 $M \overset{\tau}{\underset{r}{\sim}} N$且 $N \overset{\tau}{\underset{s}{\sim}} L$，则 $M \overset{\tau}{\underset{r+s}{\sim}} L$。 *3.* 对于任意 $\vdash M : \tau$，都有 $M \cong^{\tau}_{0} M$。
4. 对于任意 $\vdash M, N, L : \tau$，若 $M \cong^{\tau}_{r} N$且 $N \cong^{\tau}_{s} L$，则 $M \cong^{\tau}_{r+s} L$。

证明。 (1) 由引理 6 得出。(2) 对 τ进行归纳。对于 $\tau = \tau_1 \multimap \tau_2$的情形，我们使用 (1)。(3 和 4) 对 τ进行归纳。 ◀

▶ **引理 8**。 对于任意类型 τ 和任意 $r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$， $M \overset{\tau}{\underset{r}{\sim}} N$ 当且仅当 $M \cong^{\tau}_{r} N$。

证明。对 τ进行归纳。唯一非平凡的情形是 $\tau = \tau_1 \multimap \tau_2$。我们先证明， $M \overset{\tau}{\underset{r}{\sim}} N$蕴含 $M \cong^{\tau}_{r} N$。设 $\lambda x :\ \tau_1.\, M'$和 $\lambda x :\ \tau_1.\, N'$是满足 $M, \twoheadrightarrow \lambda x :\ \tau_1.\, M'$以及 $N, \twoheadrightarrow \lambda x :\ \tau_1.\, N'$的值。我们证明，对于任意 $V \in$Value(τ_1)，都有 $M'[V/x] \cong^{\tau_2}_{r} N'[V/x]$。给定 $V \in$ Value(τ_1)，由引理 7 可得 $M'[V/x] \overset{\tau_2}{\underset{r}{\sim}} N'[V/x]$。根据关于 τ_2的归纳假设，我们得到结论 $M'[V/x] \cong^{\tau_2}_{r} N'[V/x]$。接下来，假设$M \cong^{\tau}_{r} N$且 $M, \twoheadrightarrow \lambda x :\ \tau_1.\, M'$以及 $N, \twoheadrightarrow \lambda x :\ \tau_1.\, N'$。对于所有 $V, U \in$Value(τ_1)，我们证明若 $V \overset{\tau_1}{\underset{s}{\sim}} U$，则 $M'[V/x] \overset{\tau_2}{\underset{r+s}{\sim}} N'[U/x]$。由引理 6 可得 $M'[V/x] \overset{\tau_2}{\underset{s}{\sim}} M'[U/x]$。根据假设 $M \cong^{\tau}_{r} N$，我们得到 $M'[U/x] \cong^{\tau_2}_{r} N'[U/x]$。因此，根据关于 τ_2的归纳假设， $M'[U/x] \overset{\tau_2}{\underset{r}{\sim}} N'[U/x]$。最后，由引理 7 可得 $M'[V/x] \overset{\tau_2}{\underset{r+s}{\sim}} N'[U/x]$。 ◀

▶ **定理 9.** 对于任意环境 Γ 和任意类型 τ，我们有 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\ \tau} = d^{\log}_{\Gamma\ \tau,\ }$。

证明。由引理 5 和引理 8 可知 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau} \geq d^{\log}_{\Gamma\ \tau,}$。对于另一个不等式，我们证明：若 $d^{\log}_{\Gamma\ \tau,}(M, N) \leq r$，则 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N) \leq r$。为简单起见，我们假设$\Gamma = (x :\ \sigma)$，并对 $\lambda x :\ \sigma.\, M$ 定义 V，记 U 为 $\lambda x :\ \sigma.\, N$。当 $d^{\log}_{\Gamma\ \tau,}(M, N) \leq r$ 时，我们有 $V \overset{\sigma \multimap \tau}{\underset{r}{\sim}} U$。于是，根据引理 6，对于任意上下文 $C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\varnothing, \mathbf{R}^{\otimes m} \otimes \upsilon)$，我们有 $C[V\,x] \overset{\mathbf{R}^{\otimes m} \otimes \upsilon}{\underset{r}{\sim}} C[U\,x]$。由此不难推出 $C[M] \overset{\mathbf{R}^{\otimes m} \otimes \upsilon}{\underset{r}{\sim}} C[N]$。根据 $\sim$ 的定义，我们得到 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N) \leq r.$ ◀

5 等式度量

我们在 Λ_S 上给出另一种句法度量，称为等式度量。这本质上是 [10]中的定量等式理论，但不包含称为弱规则、合并规则和Arch 规则的规则。我们排除这些规则，是因为它们不会影响下文给出的等式度量 d^{equ} 。证明见注 11。

对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$，以及 $r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$，我们记作

$$\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash M = N : \tau}{\Gamma \vdash M \approx_0 N : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau}{\Gamma \vdash N \approx_r M : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau \quad \Gamma \vdash N \approx_s L : \tau}{\Gamma \vdash M \approx_{r+s} L : \tau}$$

$$\frac{|a - b| \leq r}{\vdash \overline{a} \approx_r \overline{b} : \mathbf{R}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau \quad C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\Delta, \sigma)}{\Delta \vdash C[M] \approx_r C[N] : \sigma}$$

图5 Γ 的推导规则$\vdash M \approx_r N : \tau$

当我们可以根据图5中的规则推导出该判断时。对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们将 $d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$定义为

$$d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma,\tau}(M, N) = \inf\{r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \mid \Gamma \vdash M \approx_r N : \tau\}.$$

▶ **命题 10**。 对于任意环境 Γ 和任意类型 τ，函数 $d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}$是**项**$(\Gamma, \tau)$上的一个度量。此外，$\{d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env}, \tau \in \mathbf{Ty}}$ 是可容许的。

证明。 不难验证，$d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}$是**项**$(\Gamma, \tau)$上的一个度量。也容易验证 (A1) 和 (A4)。(A2) 和 (A3) 可由语义观察（推论 19）得出。◀

▶ **例3**。 等式度量通过比较项的子项来衡量项之间的差异。例如，我们有$\vdash 2 =_1 3 :$ **实数**，因此， $k :$ **实数** $\multimap$ **实数** $\vdash k\,2 =_1 k\,3 :$ **实数**成立。由此可见， $d^{\mathrm{equ}}_{(k:\text{实数}\multimap\text{实数}),\text{实数}}(k\,2, k\,3) \leq 1$。事实上，这是一个等式。这可由 $d^{\mathrm{obs}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{R}),\mathbf{R}}(k\,0, k\,1) \geq 1$ 得出；这一点很容易验证，并可由下文的定理 18 得出。□

一般而言，我们有 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N) < d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}(M, N)$，也就是说，等式度量比观察度量具有严格更强的区分能力（定理 18）；下一节将通过受语义启发的度量证明这一点。

▶ 注 11。以下规则

$$\frac{r \geq s \quad \Gamma \vdash M \approx_s N : \tau}{\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau}\,(\mathbf{weak}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau \quad \Gamma \vdash M \approx_s N : \tau}{\Gamma \vdash M \approx_{\min\{r,s\}} N : \tau}\,(\mathbf{join})$$

$$\frac{\forall r > s,\ \Gamma \vdash M \approx_r N : \tau}{\Gamma \vdash M \approx_s N : \tau}\,(\mathbf{Arch})$$

在 [10] 中考虑的规则未出现在图5中，因为它们不会影响等式度量。为说明这一点，我们定义 $\Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau$ 为由图5中的规则以及**弱规则**、**合并规则** 和**Arch 规则**生成的二元关系族。于是有

$$d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma,\tau}(M, N) = \inf\{r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \mid \Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau\}.$$

事实上，由于 $\Gamma \vdash M \approx_r N : \tau$ 蕴含 $\Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau$，对所有 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$ 都成立，因此我们有 $d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \geq \inf\{r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \mid \Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau\}$。另一方面，由于以下二元关系族

$$\Gamma \vdash M \dot{\approx}_r N : \tau \iff d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma,\tau}(M, N) \leq r$$

满足图5中的规则和上述三条规则；若 $\Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau$，则 $d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \leq r$。因此，$d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \leq \inf\{r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \mid \Gamma \vdash M \approx^{+}_{r} N : \tau\}$。

6 Λ_S 模型及相关度量

现在，我们将注意力转向 Λ_S上的语义导出的度量。我们首先基于由**Met**富集的对称幺半闭范畴，给出 Λ_S 模型的概念。[10] 将由**Met**富集的对称幺半闭范畴作为线性 λ 演算的定量等式理论的模型进行了研究。接着，我们给出Λ_S上语义度量的两个示例：一个基于域理论，另一个基于交互几何。

6.1 Met-富集对称幺半闭范畴

当一个对称幺半闭范畴（$\mathcal{C}$ I，$\otimes$，$\multimap$）满足以下条件时，我们称其为**Met**-富集的：每个同态集$\mathcal{C}(X, Y)$都具有度量空间的结构：

- 复合是 Met 中从 $\mathsf{C}(X,Y) \otimes \mathsf{C}(Z,X)$ 到 $\mathsf{C}(Z,Y)$ 的一个态射；张量是 Met 中从 $\mathsf{C}(X,Y) \otimes \mathsf{C}(Z,W)$ 到 $\mathsf{C}(X \otimes Z, Y \otimes W)$ 的一个态射；柯里化运算是 Met 中从 $\mathsf{C}(X \otimes Y, Z)$ 到 $\mathsf{C}(X, Y \multimap Z)$ 的一个同构。对于 C 中的态射 $f, g\colon X \to Y$，我们用 $d(f,g)$ 表示 f与 g之间的距离。

▶ **定义 12**。一个预模型 $M = (\mathcal{C}\ I, \otimes, \multimap, \llbracket - \rrbracket_{\mathbf{c}})$ Λ_S是一个**Met**富集的对称幺半闭范畴$(\mathcal{C}\ I, \otimes, \multimap)$，其配备了一个对象 $\llbracket \mathbf{R} \rrbracket_{\mathbf{c}} \in \mathcal{C}$ 以及态射族 $\{\llbracket a \rrbracket_{\mathbf{c}} : I \to \llbracket \mathbf{R} \rrbracket_{\mathbf{c}}\}_{a \in \mathbb{R}}$ 和 $\{\llbracket f \rrbracket_{\mathbf{c}} : \llbracket \mathbf{R} \rrbracket_{\mathbf{c}}^{\otimes \mathrm{ar}(f)} \to \llbracket \mathbf{R} \rrbracket_{\mathbf{c}}\}_{f \in S}$。

对于 Λ_S 的预模型$\mathcal{M} = (\mathcal{C}\ I, \otimes, \multimap, \lfloor - \rfloor)$，我们按如下方式解释类型：

$$\llbracket \mathbf{R} \rrbracket^{\mathcal{M}} = \lfloor \mathbf{R} \rfloor, \quad \llbracket \mathbf{I} \rrbracket^{\mathcal{M}} = I, \quad \llbracket \tau \otimes \sigma \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket \tau \rrbracket^{\mathcal{M}} \otimes \llbracket \sigma \rrbracket^{\mathcal{M}}, \quad \llbracket \tau \multimap \sigma \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket \tau \rrbracket^{\mathcal{M}} \multimap \llbracket \sigma \rrbracket^{\mathcal{M}}.$$

对于一个环境 $\Gamma = (x\colon \tau, \ldots, y\colon \sigma)$，我们将 $\llbracket \Gamma \rrbracket^{\mathcal{M}}$ 定义为 $\llbracket \tau \rrbracket^{\mathcal{M}} \otimes \cdots \otimes \llbracket \sigma \rrbracket^{\mathcal{M}}$。随后，解释 $\llbracket \Gamma \vdash M\colon \tau \rrbracket^{\mathcal{M}}\colon \llbracket \Gamma \rrbracket^{\mathcal{M}} \to \llbracket \tau \rrbracket^{\mathcal{M}}$在$\mathcal{M}$中按照 [20]，的标准方式给出，而常量解释如下：$\llbracket \vdash a\colon \mathbf{R} \rrbracket^{\mathcal{M}} = \lfloor a \rfloor$，

$$\llbracket \Gamma \# \cdots \# \Delta \vdash \overline{f}(M, \ldots, N) : \mathbf{R} \rrbracket^{\mathcal{M}} = \lfloor f \rfloor \circ (\llbracket M \rrbracket^{\mathcal{M}} \otimes \cdots \otimes \llbracket N \rrbracket^{\mathcal{M}}) \circ \theta$$

其中 $\theta\colon \llbracket \Gamma \# \Delta \rrbracket^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\cong} \llbracket \Gamma \rrbracket^{\mathcal{M}} \otimes \llbracket \Delta \rrbracket^{\mathcal{M}}$ 按照合并 $\Gamma \# \Delta$ 交换对象。

▶ **定义 13.** 我们称预模型 $M = (\mathcal{C}\ I, \otimes, \multimap, \llbracket - \rrbracket_{\mathbf{c}})$ 是 Λ_S 的一个模型，如果 M 满足以下三个条件。

- *(M1)* 对任意 $f \in S$，若 $f(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(f)}) = b$，则 $\llbracket f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket b \rrbracket^{\mathcal{M}}$。*(M2)* 对所有 $a, b \in \mathbb{R}$, $d(\llbracket a \rrbracket_{\mathbf{c}}, \llbracket b \rrbracket_{\mathbf{c}}) = |a - b|$。*(M3)* 对所有 $x, y\colon I \to X$ 属于 $\mathcal{C}$ 的对象，以及所有有限序列 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$，我们有

$$d(\lfloor a_1 \rfloor \otimes \cdots \otimes \lfloor a_n \rfloor \otimes x, \lfloor b_1 \rfloor \otimes \cdots \otimes \lfloor b_n \rfloor \otimes y) \geq |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|.$$

第一个条件对应于函数符号的归约规则，对于证明 Λ_S 的模型的可靠性是必要的。其余条件则用于保证由 Λ_S 的模型导出的度量具有可容许性。

▶ **命题 14**（可靠性）。设 M 是 Λ_S 的一个模型。对于任意项 $M \in$ **项**(τ) 以及任意值 $V \in$ **值**(τ)，若 $M \twoheadrightarrow V$，则 $\llbracket M \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket V \rrbracket^{\mathcal{M}}$。

证明。对 M 的推导进行$\twoheadrightarrow V$归纳。除 $f(M_1, \ldots, M_{\mathrm{ar}(f)}) \to b$这种情况外，我们可以利用对称幺半闭范畴相对于线性 λ 演算的可靠性来验证 $\llbracket M \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket V \rrbracket^{\mathcal{M}}$。[20]情况 $f(M_1, \ldots, M_{\mathrm{ar}(f)}) \to b$可由 **(M1)** 得出。◀

设 $\mathcal{M} = (\mathcal{C}\ I, \otimes, \multimap, \lfloor - \rfloor)$ 是 Λ_S 的一个模型。对于环境 Γ 和类型 τ，我们将 $d^{\mathcal{M}}_{\Gamma,\tau}$ 定义为函数

$$d(\llbracket - \rrbracket^{\mathcal{M}}, \llbracket - \rrbracket^{\mathcal{M}}) \colon \mathbf{Term}(\Gamma, \tau) \times \mathbf{Term}(\Gamma, \tau) \to \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}.$$

▶ **命题 15**。 对于任意环境 Γ 和任意类型 τ，函数 $d^{\mathcal{M}}_{\Gamma,\tau}$ 是 $\mathbf{Term}(\Gamma, \tau)$ 上的度量。此外，$\{d^{\mathcal{M}}_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env},\ \tau \in \mathbf{Ty}}$ 是可容许的。

证明。 由 $\mathbf{Met}$ 富集可知，$d^{\mathcal{M}}_{\Gamma,\tau}$ 是度量，且 (A1) 成立。(A2) 和 (A3) 由 (M2) 和 (M3) 得出。(A4) 由对称幺半闭范畴相对于线性 λ 演算的可靠性 [20] 以及 (M1) 得出。◀

▶ **例 4**。 度量空间与非扩张函数构成的对称幺半闭范畴 $\mathbf{Met}$ 可扩展为 Λ_S 的一个模型 $(\mathbf{Met}\ I, \otimes, \multimap, \lfloor - \rfloor)$，其中我们定义 $\lfloor \mathbf{R} \rfloor \in \mathbf{Met}$ 为 $\mathbb{R}$；对于 $f \in S$，我们定义 $\lfloor f \rfloor : \mathbb{R}^{\otimes \mathrm{ar}(f)} \to \mathbb{R}$ 为 f。□

6.2 指称度量

本节回顾 [3] 中引入的度量 cpo 概念，它是 Fuzz 的一种指称模型；我们还基于度量 cpo 给出 Λ_S 的一个模型。虽然为 Λ_S 建模并不需要度量 cpo 的域论特性，但我们认为，度量 cpo 范畴是探索指称模型中的度量与交互式语义模型中的度量之间关系的理想场所。这是因为，度量 cpo 范畴的域论结构可通过 Int 构造直接导出一个交互式语义模型，正如我们将在第 6.3.2 节所示。

我们来回顾（带底元的）度量 cpo 的概念 [3]。

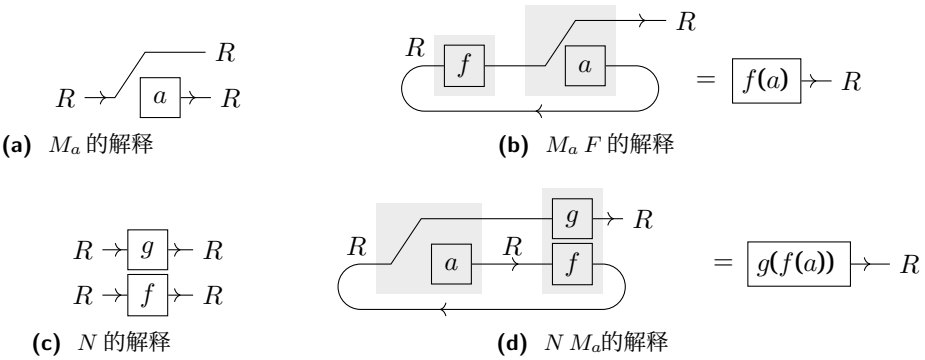
▶ **定义 16.** 一个（带底元的）度量 cpo X 由一个度量空间 $(|X|, d_X)$ 及其上的偏序 $\leq_X$ 构成，其中 $|X|$ 上的 $(|X|, \leq_X)$ 是一个（带底元的）*cpo*，并且对于 X 上任意上升链 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$，都有 $d_X\left(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} x_i, \bigvee_{i \in \mathbb{N}} x'_i\right) \leq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} d_X(x_i, x'_i)$。

对于度量 cpo X 和 Y，若函数 $f\colon |X| \to |Y|$ 满足：f 是从 $(|X|, \leq_X)$ 到 $(|Y|, \leq_Y)$ 的连续函数，并且是从 $(|X|, d_X)$ 到 $(|Y|, d_Y)$ 的非扩张函数，则称其为连续且非扩张的。下文中，我们将底层集合 $|X|$ 简记为 X。

带基点度量 cpo 及连续且非扩张函数构成一个范畴，记作 $\mathbf{MetCppo}$。$\mathbf{MetCppo}$ 的单位对象 I 是配备平凡偏序的 $\mathbf{Met}$ 单位对象。张量积 $X \otimes Y$ 由度量空间的张量积配以逐分量序构成。同对象 $X \multimap Y$ 由连续且非扩张函数的集合配以逐点序构成，并且

$$d_{X \multimap Y}(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(fx, gx).$$

我们将 MetCppo 与 Λ_S 的模型结构关联如下。我们将 bRc 定义为 $(\mathbb{R} \cup \{\bot\}\ d_R, \leq_R)$，其中 d_R 是 $\mathbb{R}$ 上度量的扩展，其定义为 $d_R(a, \bot) = \infty$，对所有 $a \in \mathbb{R}$ 均成立；而 $(\mathbb{R} \cup \{\bot\}\ \leq_R)$ 是离散 cpo $\mathbb{R}$ 的提升。对于 $f \in S$，我们将 $\mathtt{b}f\mathtt{c}\colon R^{\otimes \mathrm{ar}(f)} \to R$ 定义为满足以下条件的函数：当且仅当 x_1、……、$x_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathbb{R}$ 且 $f(x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(f)}) = y$ 时，$\mathtt{b}f\mathtt{c}(x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(f)}) = y \in \mathbb{R}$。下文中，我们将此模型所诱导的 Λ_S 上的度量记为 d^{den}，并称度量 d^{den} 为指称度量。



(a) M_a 的解释　**(b)** $M_a\ F$ 的解释

(c) N 的解释　**(d)** $N\ M_a$的解释

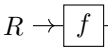
图6 交互式语义模型中项的解释

6.3 交互度量

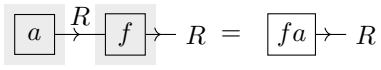
我们介绍 Λ_S 的另一种模型，称为交互式语义模型。在交互式语义模型中，项被解释为与其求值环境交互的策略。从范畴论的角度来说，该构造基于迹算子以及相关的*Int* 构造 [18]。下面，我们先说明项如何被解释，然后正式描述交互式语义模型的构造。

6.3.1 项如何被解释（非正式说明）

我们使用弦图来介绍交互式语义模型中项的解释，但不精确说明其含义。首先考虑一个简单的项 $F = \lambda x:$ **实数**. $f(x)$。其解释由下图给出。



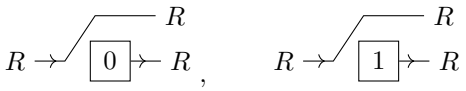
这种解释意味着，给定一个参数 $a \in \mathbb{R}$，它将返回$F(a)\ \to f(a)$ 的求值结果，如下所示:



这里，灰色区域表示分别对应参数 a 和项F的分量。在这个例子中，函数与其参数之间没有交互；这种交互只会出现在高阶计算中。考虑 $M_a = \lambda k:\mathrm{R} \multimap \mathrm{R}.\, k\, a\, \text{for} a \in \mathbb{R}$。该项的解释如图 6a 所示，而应用 $M_a\, F$ 的解释如图 6b 所示；后者可以理解为项 M_a 与其参数 F 之间的以下交互过程：项 M_a 首先向参数 F发送查询 a，随后参数 F调用 $f(a)$。求值结果 $f(a)$被发送给 M_a，而 M_a 输出值 $f(a)$。再考虑另一个例子$N = \lambda k:\ (\mathrm{R} \multimap \mathrm{R}) \multimap \mathrm{R}.\, g\,(k\,(\lambda x:\mathrm{R}.\, f(x)))$。其解释如图 6c 所示，而 $N\ M_a$ 的解释如图 6d 所示。N 与 M_a 之间的交互始于从 M_a发往 N的查询 a。随后，N调用 $f(a)$。求值结果 $f(a)$被发送给M_a，而 M_a向 N发送 $f(a)$。最后，N调用 $g(f(a))$，并输出 $g(f(a))$的求值结果$g(f(a))$。

通过这种方式，在交互式语义模型中，项被解释为弦图，用于表示“与其参数交互的策略”。交互度量的直观含义

d^{int} 与交互式语义模型相关联，旨在度量这些策略之间的差异。例如，我们有 $d^{\mathrm{int}}_{\varnothing,\,(\mathbf{R}\multimap\mathbf{R})\multimap\mathbf{R}}(M_0, M_1) = 1$，因为这两个解释之间的差异



查询是 0 和 1。我们注意到，交互式语义模型提供了一种意向性视角，因此，交互度量能够区分一些观察等价项。例如，如果 S 有一个常值函数 $c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，那么对于所有 $a\in\mathbb{R}$，项 $L_a = \lambda k : \textbf{实数} \multimap \textbf{实数}.\, c(k\,a)$ 都是观察等价的。另一方面，我们有 $d^{\mathrm{int}}_{\varnothing,\,(\mathbf{R}\multimap\mathbf{R})\multimap\mathbf{R}}(L_0, L_1) = 1$。这是因为 L_a 的解释告诉我们，对于任意值 V:**实数** $\multimap$ **实数**，$L_a\,V$ 求值过程中的第一个事件就是调用 $V\,a$。

6.3.2 交互式语义模型：形式化描述

为了形式化地描述交互式语义模型，我们首先注意到，范畴 **MetCppo** 具有迹算子，这是将 Int 构造应用于 **MetCppo**所必需的。对于 $f\colon X\otimes Z\to Y\otimes Z$属于 **MetCppo**，我们定义 $\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}(f)\colon X\to Y$，其定义如下

$$\mathrm{tr}^{Z}_{X,Y}(f)(x) = \text{the first component of } f(x,z)$$

其中 z 是连续函数 $f(x,\,-)\colon Z\to Z$ 的最小不动点。忽略度量空间这一部分时，$\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}(f)$ 的定义与带底 cpo 范畴上由最小不动点算子关联的迹算子定义一致。因此，要证明 $\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}$ 是迹算子，只需验证 $\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}(f)$ 的非扩张性。

▶ **命题 17**。对称幺半范畴 $(\mathbf{MetCppo}\ I, \otimes)$ 配备算子族 $\{\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}\}_{X,\,Y,\,Z\in\mathbf{MetCppo}}$ 后，构成一个带迹对称幺半范畴。

证明。我们记 $g\colon X\otimes Z\to Z$ 和 $h\colon X\otimes Z\to Y$ 为满足 $f(x,\,a) = (g(x,\,a)\ h(x,\,a))$ 的连续函数和非扩张函数。为证明 $\mathrm{tr}^{Z}_{X,\,Y}(f)$ 的非扩张性，我们假设存在 $x,\,x'\in X$ 使得

$$d_Y(\mathrm{tr}^{Z}_{X,Y}(f)(x), \mathrm{tr}^{Z}_{X,Y}(f)(x')) > d_X(x,x')$$

并导出矛盾。根据假设，$d_X(x,x')$ 是有限的。我们定义 $a_n, a'_n\in Z$ 为

$$a_0 = a'_0 = \bot, \qquad a_{n+1} = g(x,a_n), \qquad a'_{n+1} = g(x',a'_n).$$

我们用 a_∞ 表示 $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$，用 a'_∞ 表示 $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a'_n$。下面我们证明 $d_Z(a_\infty, a'_\infty)$ 是有限的。我们先检查 $d_Z(a_n, a'_n)$ 是有限的。基础情形显然成立。对于归纳步骤 $n>0$，由 g 的非扩张性可知

$$d_X(x,x') + d_Z(a_n,a'_n) \geq d_Z(a_{n+1}, a'_{n+1}).$$

因此，我们得出 $d_Z(a_n,\ a'_n)$ 是有限的。接下来我们验证序列 $d_Z(a_n,\ a'_n)$ 有界。由于我们有

$$\mathrm{tr}^{Z}_{X,Y}(f)(x) = h(x,a_\infty) = \bigvee_{n\geq 0} h(x,a_n), \quad \mathrm{tr}^{Z}_{X,Y}(f)(x') = h(x,a'_\infty) = \bigvee_{n\geq 0} h(x',a'_n),$$

通过在 [3], 中使用引理 4.5，我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} d_Y(h(x,a_n),h(x',a'_n)) \geq d_Y(\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x),\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x')) > d_X(x,x').$$

由此可知，存在 $N \geq 0$，使得对于所有 $n \geq N$，

$$d_Y(h(x,a_n),h(x',a'_n)) > d_X(x,x').$$

于是，由于 f 具有非扩张性，对于所有 $n \geq N$，我们有

$$\begin{aligned} d_X(x,x') + d_Z(a_n,a'_n) &\geq d_Y(h(x,a_n),h(x',a'_n)) + d_Z(a_{n+1},a'_{n+1}) \\ &\geq d_X(x,x') + d_Z(a_{n+1},a'_{n+1}). \end{aligned}$$

因此，由于 $d_X(x,\ x')$ 是有限的，我们有

$$d_Z(a_n,a'_n) \geq d_Z(a_{n+1},a'_{n+1})$$

对于所有 $n \geq N$。现在，我们得到

$$d_Z(a_\infty,a'_\infty) = d_Z\left(\bigvee_{n\geq N} a_n, \bigvee_{n\geq N} a'_n\right) \leq d_X(a_N,a'_N) < \infty.$$

由于

$$d_X(x,x') + d_Z(a_\infty,a'_\infty) \geq d_Y(\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x),\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x')) + d_Z(a_\infty,a'_\infty),$$

我们有

$$d_X(x,x') \geq d_Y(\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x),\mathrm{tr}^Z_{X,Y}(f)(x')),$$

这与假设矛盾。 ◀

现在，我们可以对 **MetCppo** 应用 Int 构造，并得到一个对称幺半闭范畴 **Int(MetCppo)**。（事实上，我们得到的是一个紧闭范畴，而解释 Λ_S 只需要其对称幺半闭结构。）**Int(MetCppo)** 中的对象是由 **MetCppo** 中的对象 X_+ 和 X_- 组成的有序对 $X = (X_+, X_-)$；在 **Int(MetCppo)** 中，从 X 到 Y 的态射是 **MetCppo** 中从 $X_+ \otimes Y_-$ 到 $X_- \otimes Y_+$ 的态射。(X_+, X_-) 上的恒等态射是对称态射 $X_+ \otimes X_- \cong X_- \otimes X_+$，而 $f\colon (X_+, X_-) \to (Y_+, Y_-)$ 的复合定义为

$$\mathrm{tr}^{Y_-\otimes Y_+}_{X_+\otimes Z_-, X_-\otimes Z_+}((X_-\otimes\theta)\circ(f\otimes g)\circ(X_+\otimes\theta'))$$

其中，$\theta\colon Y_+ \otimes Y_- \otimes Z_+ \to Z_+ \otimes Y_- \otimes Y_+$ 和 $\theta'\colon Y_- \otimes Y_+ \otimes Z_- \to Z_- \otimes Y_- \otimes Y_+$ 是典范同构，并且我们省略了一些相干同构。**Int(MetCppo)** 的对称幺半闭结构定义如下。张量单位是 (I, I)，张量积 $X \otimes Y$ 是 $(X_+ \otimes Y_+, X_- \otimes Y_-)$。同对象 $X \multimap Y$ 是 $(X_- \otimes Y_+, X_+ \otimes Y_-)$。有关 **Int(MetCppo)** 范畴结构的更多细节，请参见 [18, 26]。

我们按如下方式将**Int(MetCppo)**与 Λ_S 的模型结构相关联。我们定义$\lfloor$**实数**$\rfloor$为 (R, I)，对于每个 $f \in S$，定义$\lfloor f \rfloor\colon (R,I)^{\otimes \mathrm{ar}(f)} \to (R,I)$，其定义如下

$$R^{\otimes\mathrm{ar}(f)} \otimes I \xrightarrow{\cong} R^{\otimes\mathrm{ar}(f)} \xrightarrow{\text{the interpretation of } \overline{f} \text{ in } \mathbf{MetCppo}} R \xrightarrow{\cong} I^{\otimes\mathrm{ar}(f)} \otimes R.$$

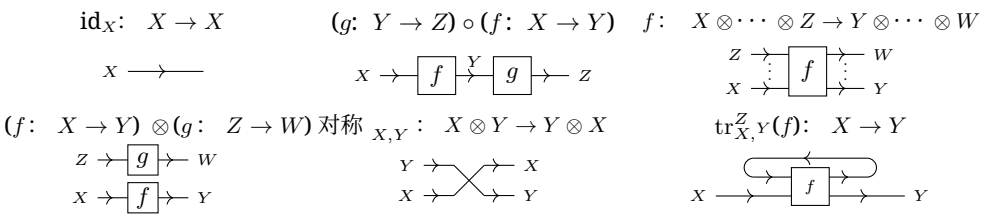


图 7 带迹对称幺半结构的弦图

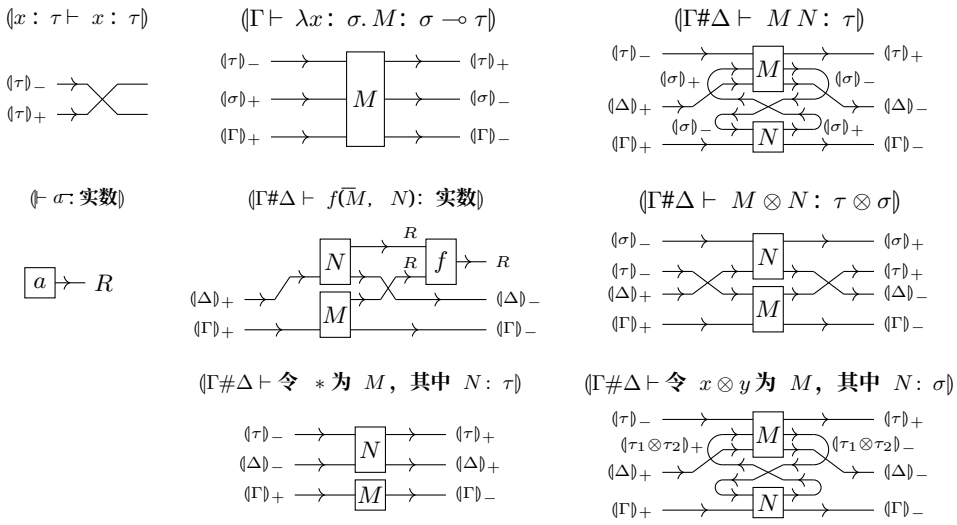


图 8 Λ_S 在 **Int(MetCppo)** 中的解释

我们用 d^{int} 表示交互式语义模型在 Λ_S 上诱导的度量，并称d^{int} 为交互度量。

在图 8 中，我们用弦图描述 Λ_S 在 **Int(MetCppo)** 中的解释。这里，我们用 $(\!|\tau|\!)_+$和 $(\!|\tau|\!)_-$表示 τ解释的正部分和负部分，并用 $(\!|\Gamma \vdash M\colon \tau|\!)$表示项 $\Gamma \vdash M\colon \tau$的解释。弦图的含义见图 7（以及 [26]）。解释 $(\!|\vdash *\colon \mathbf{I}|\!)$ 未在图 8 中列出，因为 $(\!|\vdash *\colon \mathbf{I}|\!)$ 是单位对象 I上的恒等态射，而单位对象由零条线表示。在解释 $f(M_1, \ldots\ldots, M_{\mathrm{ar}(f)})$ 时，为了便于阅读，我们假设 $\mathrm{ar}(f) = 2$。 −

7 在度量空间动物园中找到自己的路

我们将说明本文中的 Λ_S 上的可容许度量之间的关系。下文中，对于 Λ_S 上的度量 $d = \{d_\Gamma, \tau\}_{\Gamma \in \mathbf{Env},\ \tau \in \mathbf{Ty}}$ 和 $d' = \{d'_{\Gamma,\tau}\}_{\Gamma \in \mathbf{Env},\ \tau \in \mathbf{Ty}}$，若对于所有项 Γ‘ $M\colon \tau$ 和 Γ‘ $N\colon \tau$，都有 $d_{\Gamma, \tau}(M, N) \leq d'_{\Gamma,\tau}(M, N)$，则记作 $d \leq d'$。若有 $d \leq d'$ 和 $d \neq d'$，则记作 $d < d'$。我们的主要结果讨论了 Λ_S 上各种度量之间的关系，如图 1 所示。

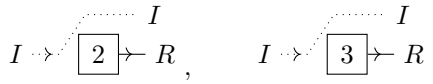
▶**定理 18.** 以下包含关系成立。
1. 对于任意可容许度量 d 在 Λ_S上，我们有 $d^{\log} = d^{\mathrm{obs}} \leq d \leq d^{\mathrm{equ}}$。2. 如果度量 d 在 Λ_S 上满足 *(A1)* 且 $d^{\mathrm{obs}} \leq d \leq d^{\mathrm{equ}}$，那么 d 是可容许的。3. $d^{\log} = d^{\mathrm{obs}} \leq d^{\mathrm{den}} < d^{\mathrm{int}} \leq d^{\mathrm{equ}}$。

证明。 (命题 (1) 的证明) 我们首先证明 $d^{\mathrm{obs}} \leq d$。对于任意 $(n,\ \sigma,\ C[-]) \in \mathcal{K}(\Gamma,\ \tau)$，若$C[M]$，$\overline{\rightarrow}\, a_1 \otimes \cdots \overline{\otimes}\, a_n \otimes V$且 $C[N]$，$\overline{\rightarrow}\, b_1 \otimes \cdots \overline{\otimes}\, b_n \otimes U$，则

$$\sum_{1\leq i\leq n} |a_i - b_i| \overset{(A3)+(A4)}{\leq} d_{\varnothing,\mathbf{R}^{\otimes n}\otimes\sigma}(C[M], C[N]) \overset{(A1)}{\leq} d_{\Gamma,\tau}(M,N).$$

根据 d^{obs} 的定义，我们得到 $d^{\mathrm{obs}} \leq d$。接下来证明 $d \leq d^{\mathrm{equ}}$。我们可以用归纳法证明，若 $\Gamma \text{‘}\ M \approx_r N\colon \tau$，则 $d_{\Gamma,\tau}(M,N) \leq r$。在 $\Gamma \text{‘}\ M \approx_0 N\colon \tau$ 的归纳步骤中，我们使用 (A4)。在 $\text{‘}\ a \approx_r b\colon$实数 的归纳步骤中，我们使用(A2)。在 $\Delta \text{‘}\ C[M] \approx_r C[N]\colon \sigma$ 的归纳步骤中，我们使用 (A1)。根据 $d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\ \tau}$ 的定义，(M,N)，我们得到$d_{\Gamma,\tau}(M,N) \leq d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\ \tau}(M,N)$。（(2) 的证明）我们验证 d 满足 (A2)、(A3) 和 (A4)。(A2) 成立，因为$|a-b| = d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\mathbf{R}}(a,b) \leq d_{\varnothing,\mathbf{R}}(a,b) \leq d^{\mathrm{equ}}_{\varnothing,\mathbf{R}}(a,b) = |a-b|$。(A3) 由 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau} \leq d_{\Gamma,\tau}$ 得出。(A4) 由 $d_{\Gamma,\tau} \leq d^{\mathrm{equ}}_{\Gamma\ \tau}$ 得出。（(3) 的证明）不等式 $d^{\mathrm{obs}} \leq d^{\mathrm{den}}$ 和 $d^{\mathrm{int}} \leq d^{\mathrm{equ}}$ 由 (3) 得出。严格不等式 $d^{\mathrm{den}} < d^{\mathrm{int}}$ 的证明推迟到下一节。◀

d^{obs} 与 d^{equ} 之间的具体度量有助于计算 d^{obs} 和 d^{equ}。例如，直接证明 $d^{\mathrm{equ}}(k\colon \mathbf{R}\multimap \mathbf{I}),\mathbf{I}(k\,2, k\,3) \geq 1$ 并不容易，因为我们需要知道，只要$\overline{k}\colon \overline{\mathbf{R}} \multimap \mathbf{I} \text{‘}\ k\,2 \approx_r k\,3 : \mathbf{I}$ 是可推导的，就有 $r \geq 1$。下面给出不等式 $\overline{d}^{\mathrm{equ}}(k\colon \mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\mathbf{I}(k\,2, k\,3) \geq 1$的语义证明。这里，我们使用交互式语义模型。这些项在交互式语义模型中的解释为



在这里，我们可以直接 看到应用于 k 的值。因此，我们得到 $d^{\mathrm{int}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\ \mathbf{I}(k\,2,\ k\,3)} = \overline{1}$。然后，该断言由 $d^{\mathrm{int}} \leq d^{\mathrm{equ}}$ 得出。

通过将定理 18 应用于 d^{den}，我们可以证明 d^{obs} 和 d^{equ} 的可容许性。

▶ **推论 19.** Λ_S 上的度量 $d^{\log} = d^{\mathrm{obs}}$ 和 d^{equ} 是可容许的。

证明. 我们首先证明 d^{obs}的可容许性。正如我们在命题 3 的证明中提到的，只需检验 d^{obs} 满足 (A4)。当 $\Gamma \vdash M = N\colon \tau$时，根据定理 18，我们得到 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) \leq d^{\mathrm{den}}_{\Gamma\ \tau,}(M,N) = 0$。因此，$d^{\log}_{\Gamma\ \tau,}(M,N) = d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) = 0$。接下来我们证明 d^{equ}的可容许性。正如我们在命题 10 的证明中提到的，只需检验 d^{equ} 满足 (A2) 和 (A3)。由于对所有 $a,b \in \mathbb{R}$，我们都有

$$|a-b| \leq d^{\mathrm{den}}_{\varnothing,\mathbf{R}}(\overline{a},\overline{b}) \leq d^{\mathrm{equ}}_{\varnothing,\mathbf{R}}(\overline{a},\overline{b}).$$

因此，d^{equ} 满足 (A2)。(A3) 可用同样的方法验证。◀

至于语义度量，我们有如下分离结果。

▶ **命题 20。** 如果 $S = \emptyset$，那么我们有 $d^{\mathrm{obs}} < d^{\mathrm{den}}$ 和 $d^{\mathrm{obs}} < d^{\mathrm{int}}$。

证明。 我们只验证 $d^{\mathrm{obs}} < d^{\mathrm{den}}$这一陈述。另一个严格不等式可以用同样的方法验证。由于 $d^{\mathrm{obs}} \leq d^{\mathrm{den}}$，我们只需验证它们不同。令 Γ 为$(f\colon \textbf{实数}^{\otimes 2} \multimap \textbf{实数})$。于是，我们有

$$d^{\mathrm{den}}_{\Gamma,\mathbf{R}^{\otimes 2}}(\overline{0}\otimes(f\,\overline{0}\,\overline{0}), \overline{1}\otimes(f\,\overline{0}\,\overline{0})) = 1.$$

另一方面，正如我们在命题 4 的证明中所观察到的，类型$\textbf{实数}^{\otimes 2} \multimap \textbf{实数}$不存在闭项。因此，$d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\ \mathbf{R}^{\otimes 2}}(0\otimes(f\,0\,0)\ 1\otimes(f\,\overline{0}\,0)) = \overline{d}^{\log}_{\Gamma,\ \textbf{实数}^{\otimes 2}}(\overline{0}\otimes(f\,0\,0)\ 1\otimes(f\,\overline{0}\,0)) = \overline{0}$。◀

▶ **命题 21**。 我们有 $d^{\mathrm{den}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\ \mathbf{I}(k\,\underline{0},k\,\underline{1})}=\overline{0}$ 和 $d^{\mathrm{int}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\ \mathbf{I}(k\,\underline{0},k\,\underline{1})}=\overline{1}$。特别是，$d^{\mathrm{int}}\not\leq d^{\mathrm{den}}$。

证明。 我们有 $d^{\mathrm{den}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\ \mathbf{I}(k\,\underline{0},\ k\,\underline{1})}=\sup_{k:\,[\text{实数}]\to I} d(k(0)\ k(1))=0$。另一方面，对于 $a\in\mathbb{R}$，我们有 $(\!|\underline{a}|\!)=a\colon\ I\to R$。因此，$d^{\mathrm{int}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\ \mathbf{I}(\underline{k}\,0,\ k\,1)}=1$。◀

8 比较两种指称观点

本节将说明，通过 Int 构造从**MetCppo** 转到交互模型，可以得到一种区分能力更强的度量。换言之，我们的目标是证明 $d^{\mathrm{den}}<d^{\mathrm{int}}$。

本节中，除了第 3 节定义的求值关系外，我们还将提及 β-归约和 β-等价关系，它们定义在 Λ_S 上。事实上，我们所考虑的两种语义对这些关系的表现不同：对于 β-等价的项 M，N，它们在 **MetCppo**中的解释相同（因此 $d^{\mathrm{den}}(M,\ N)=0$）；但在交互模型中则未必如此。

我们先来更明确地说明交互度量。值得注意的是，对于 β-范式项，在 Int(MetCppo) 中计算距离可以归约为如下在 MetCppo 中计算距离：Int(MetCppo) 中从 Γ 到 σ 的态射，是 MetCppo 中从 $(\!|\Gamma|\!)_+\otimes(\!|\sigma|\!)_+$ 到 $(\!|\Gamma|\!)_-\otimes(\!|\sigma|\!)_+$的态射，其中这两个对象对应于形如 $\mathsf{U}\otimes\cdots\otimes\mathsf{U}$ 的张量，且 $\mathsf{U}\in\{\mathsf{I},\mathsf{R}\}$。更精确地说，对于任意类型列表$\Gamma$，都可以归纳地关联两个自然数 Γ^+,Γ^-，其定义如下：$(\emptyset)^+=(\emptyset)^-=0$，$(\mathsf{U}*\Gamma)^+=1+\Gamma^+$，$(\mathsf{U}*\Gamma)^-=\Gamma^-$，$(\sigma\multimap\tau*\Gamma)^+=\sigma^-+\tau^++\Gamma^+$，$(\sigma\multimap\tau*\Gamma)^-=\sigma^++\tau^-+\Gamma^-$，$(\sigma\otimes\tau*\Gamma)^+=\sigma^++\tau^++\Gamma^+$，$(\sigma\otimes\tau*\Gamma)^-=\sigma^-+\tau^-+\Gamma^-$。于是有如下结论：

▶ 命题 *22*（一阶 *int* 项）。令 M、N为 β-正规项，且 $\Gamma\text{`}\ M,N\colon\sigma$，并令 $m=\Gamma^++\sigma^-$，$n=\Gamma^-+\sigma^+$。则存在一阶线性项 $H^M_1,\ldots,H^M_n$，它们依赖于变量 $x_1,\ldots,x_m$，以及 *{1,...,m}* 的一个划分 $I_1,\ldots,I_m$，使得：$\Gamma_j\text{`}\ H^M_j\colon U$，对所有 $j=1,\ldots,n$ 均成立，其中 $\Gamma_j=\{x_l\colon U\mid l\in I_j\}$，且 $U\in\{I,R\}$；$[\![M]\!]^{\mathbf{Int(MetCppo)}}=\bigotimes_j[\![H^M_j]\!]^{\mathbf{MetCppo}}$。

证明。若 $M=x$，则 $\Gamma=\{x\colon\sigma\}$，因此 $m=\sigma^++\sigma^-$和 $n=\sigma^-+\sigma^+$，于是变量$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$可拆分为 $\beta_1,\ldots,\beta_{\sigma^+},\gamma_1,\ldots,\gamma_{\sigma^-}$，并且我们令，对于 $i\leq\sigma^-$，$H^M_i=\gamma_i$；对于 $i\geq\sigma^+$，$H^M_{\sigma^-+i}=\alpha_i$；若 $M=\star$，则 $\Gamma=\emptyset$ 和 $n=1$，并令 $H^M_1=\star$；若 $M=a$，则 $\Gamma=\emptyset$ 和 $n=1$，并令 $H^M_1=a$；若 $M=f(M_1,\ldots,M_k)$，则存在$1,\ldots,m$的一个划分 $J_1,\ldots,J_k$，使得 $\Gamma_l\text{`}M_l:\mathsf{U}$，其中 Γ_l 只包含满足 $r\in J_l$的变量 α_r。此外，我们有 $m=\Gamma^++\mathsf{U}^-=\Gamma^+=\sum_l(\Gamma_l)^+$ 且 $n=\Gamma^-+\mathsf{R}^+=\sum_l(\Gamma_l)^-+1$。因此我们按如下方式定义 H^M_i：若 $i=\sum_{l=1}^m\Gamma^-_l+j$，且 $m<k$ 和 $j\leq\Gamma^-_{m+1}$，则 $H^M_i=H^{M_{m+1}}_j$；若 $i=\sum_l^j\Gamma^-_l+1$，则 $H^M_i=f(H^{M_1}_{\Gamma^-_1+1},\ldots,H^{M_k}_{\Gamma^-_k+1})$。若 $M=\lambda x.M'$，则 H^M_i的定义方式与 $H^{M'}_i$ 相同。

若 $M=xM_1\ldots M_k$，则存在一个划分 J_1、……、J_k，将 ρ^++1、……、m 划分为如下形式：$\Gamma=\{x\colon\ \rho\}+\sum_{l=1}\Gamma_l$，其中 Γ_l 仅包含变量 α_s（$s\in J_l$），并且$\rho=\sigma_1\multimap\cdots\multimap\sigma_k\multimap\sigma$ 以及 $\Gamma_l\vdash M_l\colon\ \sigma_l$。于是 $m=\rho^++\sum_l\Gamma^+_l+\sigma^-=\sum_l\sigma^-_l+\sigma^++\sum_l\Gamma^+_l+\sigma^-$，因此变量 α_1、……、α_m 可以与所有项 $H^{M_l}_l$中出现的变量，以及 β_s 中任意负出现所对应的新变量 σ 和 γ_r 中的任意

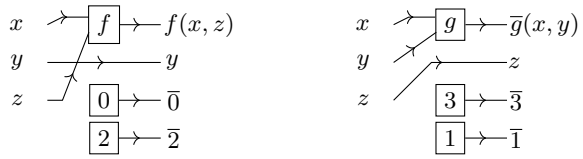


图 9 用于 $M = f(x(y0)\ z2)$ 和 $N = g(x(z1)\ y3)$ 的含 int 项的弦图。

σ中的正出现；此外，$n = \rho^- + \sum_l \Gamma_l^- + \sigma^+ = \sum_l \sigma_l^+ + \sigma^- + \sum_l \Gamma_l^- + \sigma^+$。因此，我们定义项 H_i^M如下：

- 对于 $i = \sum_{l=1}^{m} \sigma_l^+ + j$，对于 $m < k$和 $j \le \sigma_{m+1}^+$，$H_i^M = H^{M_{m+1}}_{\Gamma^-_{m+1}+j}$；对于
- $i = \sum_l \sigma_l^+ + s$，对于 $s \le \sigma^-$，$H_i^M = \beta_s$；对于$i = \sum_l \sigma_l^+ + \sigma^- + \sum_{l=1}^{m} \Gamma_l^- + j$，对
- 于 $m < k$和 $j \le \Gamma^-_{m+1}$，$H_i^M = H_j^{M_{m-1}}$；对于$i = \sum_l \sigma_l^+ + \sigma^- + \sum_l \Gamma_l^- + r$，对于
- $r \le \sigma^+$，$H_i^M = \gamma_r$。

- 如果 $M = M_1 \otimes M_2$，那么 $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$和 Γ 分裂为 $\Gamma_1 + \Gamma_2$，其中 $\Gamma_1 \vdash M_1 :\ \sigma_1$和$\Gamma_2 \vdash M_2 :\ \sigma_2$。那么 $m = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \sigma_1^- + \sigma_2^-$和 $n = \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \sigma_1^+ + \sigma_2^+$，因此我们定义$H_i^M$ 如下：
  - 若 $i \le \Gamma_1^-$，则 $H_i^M = H_i^{M_1}$；若 $i = \Gamma_1^- + j$，且有
  - $j \le \Gamma_2^-$，则 $H_i^M = H_j^{M_2}$；若 $i = \Gamma^- + j$，且有
  - $j \le \sigma_1^+$，则 $H_i^M = H^{M_1}_{\Gamma_1^-+j}$；若 $i = \Gamma^- + \sigma_1^+ + j$，
  - 且有 $j \le \sigma_2^+$，则 $H_i^M = H^{M_2}_{\Gamma_2^-+j}$。
- 若 $M =$**令** $\star$**为** M**中的** N，则定义与 $(\lambda x.N)M$ 的情形相同；
- 若 $M =$**令** $x \otimes y$**为** M**中的** N，则定义与 $(\lambda x.N)M$ 的情形相同。

这 $[\![M]\!]^{\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})} = \bigotimes_j [\![H_j^M]\!]^{\mathbf{MetCppo}}$很容易通过对 M 进行归纳来验证。◀直观地说，$\Gamma_j \vdash H_j^M : \mathbf{U}$左侧出现的变量对应于 $[\![M]\!]^{\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})}$的弦图表示中左侧的“导线”，而一阶项 H_j^M描述了从第 i 个右侧“导线” $[\![M]\!]^{\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})}$中输出的内容。

▶**例23.** 令 $M = f(x(y0)\ z2)$ 和 $N = g(x(z1)\ y3)$，使得 $\Gamma \vdash M, N :$ **实数**，其中$\Gamma = \{x :$ **实数** $\multimap$ **实数** $y :$ **实数** $\multimap$ **实数** $z :$ **实数** $\multimap$ **实数**$\}$。M和 N的弦图表示及其对应的 int 项如图9所示。

由命题 22，我们现在可以推导出以下结论：

▶**推论24.** 对于所有 β-正规项 M, N, $d^{\mathrm{int}}(M, N) = \sum_{j=1}^{n} d^{\mathrm{den}}(H_j^M, H_j^N)$。

例如，在例23的情形下，距离 $d^{\mathrm{int}}(M, N)$ 等于图9所示 int 项之间在**MetCppo**中计算出的距离之和。

我们可以利用推论24证明等式 $d^{\mathrm{int}} = d^{\mathrm{den}}$ 不成立。例如，虽然 $d^{\mathrm{den}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\mathbf{I}}(k2, k3) = 0$，但通过计算 int 项 $H_1^{k2}(x) = H_1^{k3}(x) = x$，$H_2^{k3} = 2$，$H_2^{k3} = 3$，我们可以推出 $d^{\mathrm{int}}_{(k:\mathbf{R}\multimap\mathbf{I}),\mathbf{I}}(k2, k3) = \bar{0} + 1 = 1$。

因此，剩下要证明的是 $d^{\mathrm{den}} \le d^{\mathrm{int}}$。

▶**定理 25**。对于所有满足 Γ‘ M 的 M, N，$N :\ \sigma$成立，$d^{\mathrm{den}}(M, N) \le d^{\mathrm{int}}(M, N)$。

▶ **例26.** 对于例23中的项 M 和 N，刚才概述的过程定义了如下序列：$M = f(x(y0)\ z2) \xrightarrow{f(x,\ z)\mapsto g(x,\ y)} g(x(y0)\ y0) \xrightarrow{y\mapsto z} g(x(z2)\ y0) \xrightarrow{0\mapsto 3} g(x(z2)\ y3) \xrightarrow{2\mapsto 1} g(x(z1)\ y3) = N$，其中每一步的替换形式均为$H_i^M[\ldots \varphi_j M \ldots] \mapsto H_i^N[\ldots \varphi_j M \ldots]$。

虽然上述论证在线性情形下成立，但它似乎无法推广到分级指数；而在后一种情形下，我们甚至不能确定类似定理 25 的结果是否真的成立（另见下一节的讨论）。

本节其余部分将用于证明定理 25。为简单起见，我们将把讨论限制在线性语言中，不包含单位和张量类型$\mathbf{I}$ $\sigma \otimes \tau$，也不包含相应的项构造子。不过，下面给出的论证可以很容易地扩展到包含这些构造子的情形。鉴于这一限制，我们不妨假设定理 25 中右侧的类型 σ 是**实数**。

此外，只需证明该结论对 M, N β-范式成立；这是因为，若 M^* 和 N^* 是 β-范式 M, N，则 $d^{\mathrm{den}}(M, M^*) = d^{\mathrm{den}}(N, N^*) = 0$，并且 $d^{\mathrm{int}}(M^*, N^*) \leq d^{\mathrm{int}}(M, N)$，这是迹算子的非扩张性所导致的。

回忆一下，

$$d^{\mathrm{den}}(M, N) = \sup\{d_\sigma^{\mathrm{den}}([\![M]\!]^{\mathbf{MetCppo}}(\vec{a}), [\![N]\!]^{\mathbf{MetCppo}}(\vec{a})) \mid \vec{a} \in [\![\Gamma]\!]^{\mathbf{MetCppo}}\}$$

$$d^{\mathrm{int}}(M, N) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d_{\mathbf{R}}^{\mathrm{den}}(H_i^M[\vec{r}], H_i^N[\vec{r}]) \;\middle|\; \vec{r} \in \mathbb{R}^m\right\}$$

固定 $\vec{a} \in [\![\Gamma]\!]^{\mathbf{MetCppo}}$ 后，我们将构造实数 $\vec{r} \in \mathbb{R}^m$、项序列 $M = M_0, \ldots, M_k = N$，其中 $k = \Gamma^- + \sigma^+$，以及一个双射 $\rho\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots k\}$，使得 $M_i[\vec{a}]$ 与 $M_{i+1}[\vec{a}]$ 之间的距离不超过 int 项 $H^M_{\rho(i+1)}[\vec{r}]$ 与 $H^N_{\rho(i+1)}[\vec{r}]$ 之间的距离。这样，我们便可通过有限次应用三角不等式得出

$$\begin{aligned} d_\sigma^{\mathrm{den}}(M[\vec{a}], N[\vec{a}]) &\leq d_\sigma^{\mathrm{den}}(M_0[\vec{a}], M_1[\vec{a}]) + \cdots + d_\sigma^{\mathrm{den}}(M_{k-1}[\vec{a}], M_k[\vec{a}]) \\ &\leq d_{\mathbf{R}}^{\mathrm{den}}(H^M_{\rho(1)}[\vec{r}], H^N_{\rho(1)}[\vec{r}]) + \cdots + d_{\mathbf{R}}^{\mathrm{den}}(H^M_{\rho(k)}[\vec{r}], H^N_{\rho(k)}[\vec{r}]) \leq d^{\mathrm{int}}(M, N) \end{aligned}$$

为了构造序列 M_0、…、M_k，我们需要一些预备结果。

对于任意类型 σ（或类型列表 Γ），我们将 σ 中正（分别为负）的原子出现从左到右排列成的列表记作$\{\sigma^+\}$（分别记作 $\{\sigma\}^-$）。注意，σ^+（分别为 σ^-）等于列表 $\{\sigma^+\}$（分别为 $\{\sigma^-\}$）的长度。

We will establish a few bijecti次，更准确地说isel

: 列表 $\{\Gamma^-\} * \mathbf{R}$ 的元素与 M（分别为 N）的正子项之间，参见下文定义 27；这将使我们能够将每个一阶项 H_i^M与 M 的一个正子项关联起来；列表 $\{\Gamma^+\}$ 的元素与 M（分别为N）的自由变量和约束变量之间；这将使我们能够将 M 中的每个变量 x_i 与 M 的 int 项中出现的一个一阶变量 x_i关联起来。最后，在 $\{\Gamma^-\} * \mathbf{R}$ 与 M 的变量集上的某个商集之间。

▶ **记号 8.1**。下文中，我们用 $F(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $G(x_1, \ldots, x_n)$ 表示自由变量属于 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性一阶项。此外，给定类型为 R 的项 $M_1, \ldots, M_n$，我们用 $F(M_1, \ldots, M_n)$ 表示在 F中用 $M_1, \ldots, M_n$ 替换 $x_1, \ldots, x_n$ 后得到的项（不一定是一阶项）。

▶ **定义 27.** M 中形如 $N = F(N_1, \ldots, N_k)$ 的子项，若不存在其他一阶函数 g使得 N 在 M 中以形如$g(P_1, \ldots, P_{r-1}, N, P_{r+1}, \ldots, P_k)$的项出现，则称为 M 的正子项 。我们用 $\mathsf{PS}(M)$表示 M的正子项集合。此外，我们用$\mathsf{PS}_0(M) \subseteq \mathsf{PS}(M)$ 表示 M 中不含自由变量或约束变量的正子项集合。

▶ **记号 8.2.** 下文将正子项表示为 $F(M_1,\ldots,M_n)$ 时，不失一般性地假设项 $M_1,\ldots,M_n$ 并非以函数符号开头，即它们的形式为 $xQ_1\ldots Q_s$。

▶ **引理 28**。 存在一个双射 ι_M： $\{\Gamma^-\}*\mathbf{R}\to \mathsf{PS}(M)$ （N 也同样如此）。

证明。 对 M：进行归纳：

- 如果 $M=F(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个一阶项，那么 $\{\Gamma^+\}=\mathrm{R}*\cdots*\mathrm{R}$，因此 $\{\Gamma^-\}*\mathrm{R}=\{\mathrm{R}\}$，且该双射为 $\iota_M(1)=t$；如果 $M=F(M_1,\ldots,M_n)$，其中 $M_i=x_iM_{i1}\ldots M_{iq_i}$，那么令 $M_{ij}=\lambda z_1.\ldots.\lambda z_{n_{ij}}.t'_{ij}$，其中对于某个上下文 $\Delta_{ij}=\{z_1:\sigma_{ij1},\ldots,z_{n_{ij}}:\sigma_{ijr_{ij}}\}$，$\Gamma_{ij},\Delta_{ij}\text{`}\ t'_{ij}:R$，其中 Γ_{ij} 是 $\Gamma-\{x_1:\sigma_1,\ldots,x_n:\sigma_n\}$ 的一个划分，且 $\sigma_i=\sigma_{i1}\multimap\cdots\multimap\sigma_{iq_i}\multimap\mathrm{R}$，$\sigma_{ij}=\sigma_{ij1}\multimap\cdots\multimap\sigma_{ijn_{ij}}\multimap R$；于是根据归纳假设，存在双射 $\iota_{M_{ij}}$，其定义域为 $\{(\Gamma_{ij},\Delta_{ij})^-\}$，值域为 $\mathsf{PS}(M_{ij})$。注意，$\mathsf{PS}(M)=\{t\}\cup\bigcup_{i,j}\mathsf{PS}(M_{ij})$。现在观察到，$\{\Gamma^-\}*\mathrm{R}$ 的一个元素必定是以下四者之一：(1) 最后一个元素 R；(2) $\{\Gamma_{ij}^-\}$ 的一个元素；(3) 某个 $\{\sigma_{ij}^+\}$ 的最后一个元素；或 (4) 某个 $\{\sigma_{ijm}^-\}$ 的一个元素。因此，通过令：我们得到一个双射 $\iota_M:\{\Gamma^-\}*\mathrm{R}\to\mathsf{PS}(M)$
  - 如果 l 是 $\{\Gamma^-\}*$**实数** 中的最后一个元素，则 $\iota_M(l)=M$；如果 l 属于 $\{\Gamma_{ij}^-\}$，
  - 则 $\iota_M(l)=\iota_{M_{ij}}(l)$；如果 l 是 $\{\sigma_{ij}^+\}$ 中的最后一个元素，则 $\iota_M(l)=M'_{ij}$；如
  - 果 l 属于 $\{\sigma_{ijm}^-\}$，则 $\iota_M(l)=\iota_{M_{ij}}(l^*)$，其中 l^* 是 σ_i 中对应的元素。

◀

▶注 29。上面的引理实际上定义了 $t=F(N_1,\ldots,N_k)$ 的正子项与项 H_i^M 之间的一个双射（如下文将更详细说明的，这些项确实具有 $F(x_1,\ldots,x_k)$ 的形式）。

设 σ 是一个类型；对于任意出现 $l\in\{\sigma^+\}$，令 σ_l 表示 σ 中以 l 为最右侧出现的唯一子类型。直观地说，$\iota_M(l)$ 是在对 M 进行类型推导时被赋予类型 σ_l 的正子项。

令 $\Gamma=\{x_1:\sigma_1,\ldots,x_n:\sigma_n\}$，并令 $\mathrm{V}(M)$ 表示 t 的自由变量和约束变量的集合。

▶ **引理 30**。 存在一个双射 $\delta_M:\{\Gamma^+\}\to\mathrm{V}(M)$（对于 $\mathrm{V}(N)$ 也同样如此）。

证明。 对 M: 进行归纳：

- 若 $M=F(x_1,\ldots,x_n)$，则 $\Gamma^+=\mathrm{R}*\cdots*\overbrace{\mathrm{R}}$，并令 $\delta_M(i)=x_i$；$_n$ 次，若 $M=F(M_1,\ldots,M_n)$，其中 $M_i=x_iM_{i1}\ldots M_{iq_i}$，则令 $M_{ij}=\lambda z_1.\ldots.\lambda z_{n_{ij}}.t'_{ij}$，其中对于某个上下文 $\Delta_{ij}=\{z_1:\sigma_{ij1},\ldots,z_{n_{ij}}:\sigma_{ijr_{ij}}\}$，$\Gamma_{ij},\Delta_{ij}\text{`}\ t'_{ij}:\mathrm{R}$，且 Γ_{ij} 是 $\Gamma-\{x_1:\sigma_1,\ldots,x_n:\sigma_n\}$ 的一个划分，其中 $\sigma_i=\sigma_{i1}\multimap\cdots\multimap\sigma_{iq_i}\multimap\mathrm{R}$，且 $\sigma_{ij}=\sigma_{ij1}\multimap\ldots\multimap\sigma_{ijn_{ij}}\multimap\mathrm{R}$；根据归纳假设，存在双射 $\delta_{M_{ij}}$，它们分别作用于 $(\Gamma_{ij}*\Delta_{ij})^+$ 和 $\mathrm{V}(M_{ij})$ 之间。注意，$\mathrm{V}(M)=\{x_1,\ldots,x_n\}\cup\bigcup_{i,j}\mathrm{V}(M_{ij})$。
  现在请注意，Γ^+ 中的元素要么是：(1) Γ_{ij}^+ 中的元素；(2) 某个 σ_i^+ 的最后一个元素；要么是(3) 某个 σ_{ijm}^+中的元素。因此，我们通过如下定义，得到一个双射 $\iota_M:\Gamma^+\to\mathrm{V}(M)$:
  - 如果 l 属于Γ_{ij}^+，则 $\delta_M(l)=\delta_{M_{ij}}(l)$；如果 l 是σ_i^+的最后一个元素，则 $\delta_M(l)$
  - $=x_i$；如果 l 属于σ_{ijm}^+，则 $\delta_M(l)=\delta_{M_{ij}}(l^*)$，其中 l^* 是 σ_i中对应的元素。

◀

▶ 注 31。上面的引理实际上定义了 M 的变量与 M 的 int 项中出现的一阶变量之间的一个双射（这些变量确实由列表 $\{\Gamma^+\}$ 枚举）。

▶ **记号 8.3**。 利用上面的引理，$\mathrm{V}(M)$’$\mathrm{V}(N)$’ Γ^{+}。我们用 X 表示这些等价集合中的任意一个。由于可以进行重命名，我们不妨从现在起假设 $\delta_M = \delta_N$；对于所有$i \in X$，我们将变量 $\delta_M(i) = \delta_N(i)$ 记作 x_i。

▶ **定义 32. </style}对于任意，令 为 中形如 的唯一子项，并令 为 中形如 (**$N_1, \ldots, N_{m-1}, \phi_i M, N_{m+1}, \ldots, N_n$)的唯一正子项。对于所有 $i, j \in X$，若 $\phi_i M$是 $\phi_j M$的子项，则令 $i \sqsubset_M j$；若 $\psi_i M = \psi_j M$，则令 $i \sim_M j$。

▶**引理 33.** ν_M 是 X上的良基序。
$\sim_M$ 是 X上的等价关系。

关系 $\sqsubseteq_M$自然扩展到 $\mathrm{PS}_0(M)$，方法是令 $F \sqsubset_M i$；对于 $F \in \mathrm{PS}_0(M)$，若 F是 $\phi_i M$的子项，则成立。

令 $X_{\sim_M}$表示 X关于 $\sim_M$的商集，并令 $X^M := X_{\sim_M} \cup \mathrm{PS}_0(M)$。下文中，我们将用 ξ，χ，.....表示 X^M的元素。

我们将关系 $\sqsubseteq_M$ 从 X 扩展到 X^M:

▶ **De定义 34**。 对于所有 $\xi, \chi \in X^M$，当且仅当 $\xi = \chi$ 或 $\exists j \in \chi\ \forall i \in \xi\ i \sqsubset_M j$时，$\nu_M^* \chi$成立。

此外，若 $\xi \neq \chi$, $\xi\, \nu_M\, \chi$，且对于所有 $\theta \in X^M$, $\xi\, \nu_M\, \theta$ 和 $\theta\, \nu_M\, \chi$，都有 $\theta \in \{\xi, \chi\}$，则记作 $\xi\, \nu_M^0\, \chi$。

注意，只有当存在 $j \in \chi$，使得对于所有 $i \in \xi$,$\phi_j M = x_j Q_1 \ldots Q_{l-1}(\psi_i M)$ $Q_{l+1} \ldots Q_r$时， $\xi \sqsubseteq_M^0 \chi$ 才成立。此外，容易证明:

▶ **引理 35.** ν_M^*是一个具有最大元 $\top_M = \{i_1, \ldots, i_r\}$ 的良基预序，其中 $M = F(\phi_{i_1} M, \ldots \phi_{i_r} M)$。

我们可以定义一个双射 $\theta_M : \mathrm{PS}(M) \to X^M$，将每个正子项 $P = F(N_1, \ldots, N_n)$（其中 $N_i = x_i Q_{i1} \ldots Q_{in_i}$）映到等价类 $\{x_1, \ldots, x_n\}$（若 $n > 0$），否则映到单元素集合 $\{P\}$（即若 $P \in \mathrm{PS}_0$）。双射 $\theta_M : \mathrm{PS}(M) \to X^M$、 $\theta_N : \mathrm{PS}(N) \to X^N$ 的存在，结合 ι_M: $\{\Gamma^-\} * 实数和 \iota_M$: $\{\Gamma^-\} * 实数$，意味着两个集合 $X^M = X_{\sim_M} \cup \mathrm{PS}_0(M)$ 和 $X^N = X_{\sim_N} \cup \mathrm{PS}_0(N)$ 也存在双射（因为它们都与 $\{\Gamma^-\} * 实数存在双射$）。

令 $L = (\theta_N \circ \delta_N) \circ (\theta_M \circ \delta_M)^{-1} : X^M \to X^N$为一个双射，它将$X^M$中的每个元素与 X^N 中对应于 $\{\Gamma^-\} * \mathbf{R}$ 中同一 R出现的唯一元素相关联。注意，列表 $\{\Gamma^-\} * \mathbf{R}$ 最右侧的元素与 $\top_M = M$ 和$\top_N = N$相关联，我们由此可推出 $L(\top_M) = \top_N$。

作为上述双射的结果，我们可以对M和 N的 int 项进行枚举，使用 X^M作为索引集，而不是 $\{\Gamma^-\} * \mathbf{R}$。特别地，对于所有 $\xi \in X^M$，我们将 t 的相关正子项表示为

$$M_\xi := F_\xi\left(\phi_j M\right)_{j \in \xi}$$
$$N_\xi := G_\xi\left(\phi_j N\right)_{j \in L(\xi)}$$

以及相关的 int 项表示为

$$H_\xi^M := F_\xi(x_j)_{j \in \xi}$$
$$H_\xi^N := G_\xi(x_j)_{j \in L(\xi)}$$

现在我们引入一类特殊的项:

▶ **定义 36** (带括号项)。 带括号的 λ-项 集合定义为：在 λ-项的语法中增加一条新规则：若 t 是一个项，则 $[t]$ 是一个项。对于任意带括号项 M，我们用 $M^{\downarrow}$表示从 M中删去所有括号后得到的项。

对于所有 $i \in X$，令 $\{\phi_i M\} = x_i(\lambda\vec{z}_1.[M_1]) \dots (\lambda\vec{z}_n.[M_n])$，其中 $\phi_i M = x_i(\lambda\vec{z}.M_1) \dots (\lambda\vec{z}.M_n)$。

▶ **定义 37. </style}集合 是向上闭**的，如果 $\alpha \in U$ 且 $\alpha \nu_M \alpha'$ 蕴含 $\alpha' \in U$。对于所有向上闭集 U， U的前沿，记作 ∂U，是满足以下条件的 $\xi \in X^M - U$的集合：存在某个 $\chi \in U$ $\xi \nu^0_M \chi$。我们约定令 $\partial\emptyset = \{\top_M\}$。

对于任意向上闭的 $U \subseteq X^M$，我们通过对 M 进行归纳，定义一个由带括号的 λ-项构成的集合 $U(M)$，如下所示：

- 若 $U = \emptyset$且 $M = \lambda\vec{z}.M'$，则 $U(M) = \{\lambda\vec{z}.[Q] \mid Q$是一个 λ-项$\}$；
- 若 $U \neq \emptyset$（这意味着 $\top_M \in U$）且 $M = \lambda\vec{z}.F\big(\phi_i M\big)_{i\in\top_M}$，则

$$U(M) = \Big\{\lambda\vec{z}.F\big(x_i Q^i_1, \dots, Q^i_{r_i}\big)_{i\in\top_M} \mid Q^i_j \in U^i_j(M^i_j)\Big\}$$

其中，对于所有 $i \in \top_M$、 $\phi_i M = x_i P^i_1 \dots P^i_{r_i}$， $U^i_j = U \cap X^{P^i_j}$ 是 $X^{M^i_j}$ 的向上闭集合。

直观地说，如果 $P \in U(M)$，那么它是一个项：在对应于 U 中各元素的所有位置上都像 M 一样定义，并且在 ∂U 的所有位置上都有一个括号中的项。

以下事实可通过对 M 进行归纳轻易证明：

▶**引理 38**。*i.* $P \in X^M(M)$当且仅当 $P = M$。

ii. 如果 $P \in U(M)$且 P是无括号的，那么 $U = X^M$ 且 $P = M$。

现在，我们已经具备了通过归纳定义一系列项 S_0、.....、 S_k 和一系列向上闭集合 $U_0 \subseteq \dots \subseteq U_k \subseteq X^N$ 所需的全部要素，并在每一步验证 i：
a. $S_i \in U_i(N)$；b. 对所有 $\xi \in \partial U_i$、 S_i， S_i 在位置 ξ包含子项 $[M_{L^{-1}(\xi)}]$。

令 $S_0 := [M] = [M_{\alpha_\top}]$，且令 $U_0 = \emptyset$。则 $S_0 \in U_0(M)$ 必然成立。此外，$\partial U_0 = \{\top_N\}$，并且 S_0在其根部包含子项$[M_{L^{-1}(\top_N)}] = [M_{\top_M}] = [M]$。

现在，为了定义 S_{i+1}，取 $\xi \in \partial U_i$，令 $\chi = L^{-1}(\xi)$，并且

$$S_{i+1} := S_i\Big([F_\chi\big(\phi_i M\big)_{i\in\chi}] \mapsto G_\xi\big(\{\phi_j M\}\big)_{j\in\xi}\Big)$$

最后令 $U_{i+1} = U_i \cup \{\xi\}$。为检验 S_{i+1} 定义良好，注意到：

- 根据归纳假设， S_i 在位置 ξ包含子项 $[M_\chi] = [F_\chi\big(\phi_i M\big)_{i\in\chi}]$；如果新引入的变量
- $j \in \xi$ 中有一个在 S_i 中被约束，那么它绝不会在其抽象 λx_j 的作用域之外被引入。事实上，根据归纳假设， S_i 在所有位置 $\theta \in U_i$上都与 N 一致；因此，由于 N 在位置 ξ 包含子项 $G_\xi(\phi_j N)_{j\in\xi}$，可知变量 x_j 中的任意一个在 S_{i+1} 中处于抽象 λx_j 的作用域内，当且仅当它在 N 中处于同一抽象的作用域内。

现在，由 $S_i \in U_i(N)$ 可知， $S_{i+1} \in U_{i+1}(N)$ 可由 $U_{i+1}(N)$ 的定义推出。此外，若 $\xi' \in \partial U_{i+1}$，则或者 $\xi' \in \partial U_i$，因此由归纳假设可推得 S_i 包含$[M_{L^{-1}(\xi')}]$，并且由于 $\xi' \neq \xi$， S_{i+1} 也包含；或者 $\xi' \sqsubset^0_M \xi$，即存在 $j \in \xi$ 使得 $\xi' \sqsubset^0_M j$；此时， S_{i+1} 中的位置 ξ' 包含项 Q_i之一，其中 $i = 1, \dots, s$，且 $[\phi_j M] = x_j W_1 \dots W_s$和 $W_i = \lambda\vec{z}.Q_i$，事实上我们有 $Q_i = [M_{L^{-1}(\xi')}]$。

现在令 $M_1, \dots, M_k$ 为 $M_i := S^\downarrow_i$。显然， $M_1 = M$。我们来验证 $N_k = N$：由 $\sharp U_0 = 0$ 和 $\sharp U_{i+1} = \sharp U_i + 1$，可推得 $\sharp U_k = k$，进而得到 $\sharp\partial U_k = 0$，这意味着 $U_k = X^N$。由 $S_k \in U_k(N) = X^N(N)$，再利用引理 38，可推得 $M_k = S^\downarrow_k = S_k = N$。

现在我们可以证明主要结果：

▶ **命题 39.** 对于所有 $\vec{a} \in [\![\Gamma]\!]$，都存在 $\vec{r} \in [\![\Gamma]\!]_+$，使得

$$|[\![M]\!](\vec{\varphi}) - [\![N]\!](\vec{a})| \leq \sum_{i \in \{\Gamma^-\} * R} [\![H_i^M]\!](\vec{r}) - [\![H_i^N]\!](\vec{r})|.$$

证明。 利用双射 $\delta : \Gamma^+ \to V(M)$，令 $r_l := [\![\phi_{\delta(l)} M]\!](\vec{\varphi})$。

回忆一下，对于 $i \in \{\Gamma^-\} * R$，项 H_i^M 和 H_i^N 可以等价地枚举为 $H^M_{L^{-1}(\xi)}$、H^N_ξ，其中 $\xi \in X^N$。令 $\xi_0, \ldots\ldots, \xi_k$ 为在构造序列 $S_0, \ldots\ldots, S_k$ 时从 X^N 中选取的序列，并令 $\chi_0 = L^{-1}(\xi_0) \ldots\ldots, \chi_k = L^{-1}(\xi_k)$。我们将证明，对于所有 $i = 1, \ldots\ldots, k$，$|[\![M_{i-1}]\!](\varphi) - [\![M_i]\!](\varphi)| \leq |[\![H^M_{\chi_i}]\!](\vec{r}) - [\![H^N_{\xi_i}]\!](\vec{r})|$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
\left|[\![M_{i-1}]\!](\vec{\varphi}) - [\![M_i]\!](\vec{a})\right| &= \left|[\![M_{i-1}]\!](\vec{\varphi}) - [\![M_{i-1}\left(F_{\chi_i}(r_l)_{l \in \chi_i} \mapsto G_{\xi_i}(r_m)_{m \in \xi_i}\right)]\!](\vec{a})\right| \\
&= \left|[\![M_{i-1}]\!](\vec{\varphi}) - [\![M_{i-1}\left(H^M_{\chi_i}(\vec{r}) \mapsto H^N_{\xi_i}(\vec{r})\right)]\!](\vec{a})\right| \\
&\leq \left|[\![H^M_{\chi_i}]\!](\vec{r}) - [\![H^N_{\xi_i}]\!](\vec{r})\right|
\end{aligned}$$

利用 $M_0 = M$ 和 $M_k = N$ 这一事实，以及三角不等式，我们由此推得

$$\begin{aligned}
|[\![M]\!](\vec{a}) - [\![N]\!](\vec{a})| &\leq |[\![M_0]\!](\vec{a}) - [\![M_1]\!](\vec{a})| + \cdots + |[\![M_{k-1}]\!](\vec{a}) - [\![M_k]\!](\vec{a})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left|[\![H^M_{\chi_i}]\!](\vec{r}) - [\![H^N_{\xi_i}]\!](\vec{r})\right|.
\end{aligned}$$

◀

9 带有分级指数的线性规划语言

在本文接下来的部分中，我们将部分论证推广到 Fuzz 的一个限制版本，即不含加法（余）积和递归类型的 Fuzz；其中分级取非负的、可能为无穷大的整数，而非实数。我们注意到，虽然没有递归类型，但有递归。我们的推广如下。

- 我们描述目标语言，并将其称为 $\Lambda^!_S$。我们将逻辑度量和观察度量扩展到 $\Lambda^!_S$，并证明
- 这两种扩展是一致的。我们将指称度量和交互度量扩展到 $\Lambda^!_S$，并证明观察度量受这些度量所界定。

9.1 语法

下面介绍扩展后的目标语言，我们将其称为 $\Lambda^!_S$，以及它的操作语义。对于类型，我们采用分级指数。

$$\text{Types} \qquad \tau, \sigma := \cdots \mid !_n \tau \qquad \text{Environments} \qquad \Gamma, \Delta, \Xi := \varnothing \mid \Gamma, x :_n \tau$$

在类型和环境的定义中，n 取遍由正的、可能为无穷大的整数构成的集合 $\mathbb{N}^\infty_{>0} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\} \cup \{\infty\}$。

对于环境 Γ，我们将 $|\Gamma|$ 记作从 x 中移除所有分级后得到的语法对象：$_n\,\tau$ 在 Γ 中。对于满足 $|\Gamma| = |\Delta|$ 的环境 Γ 和 Δ，我们通过归纳定义环境 $\Gamma + \Delta$：

$$\varnothing + \varnothing = \varnothing, \qquad (\Gamma, x :_n \tau) + (\Delta, x :_m \tau) = (\Gamma + \Delta), x :_{n+m} \tau.$$

$$\frac{a \in \mathbb{R}}{\Gamma \vdash \overline{a} : \mathbf{R}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : \mathbf{I}} \qquad \frac{f \in S \quad \Gamma_1 \vdash M_1 : \mathbf{R} \quad \dots \quad \Gamma_{\mathrm{ar}(f)} \vdash M_{\mathrm{ar}(f)} : \mathbf{R}}{\Gamma_1 + \dots + \Gamma_{\mathrm{ar}(f)} \vdash \overline{f}(M_1, \dots, M_{\mathrm{ar}(f)}) : \mathbf{R}}$$

$$\frac{x :_n \tau \in \Gamma \quad n \geq 1}{\Gamma \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad n \cdot \Gamma \leq \Delta}{\Delta \vdash !M : !_n \tau} \qquad \frac{\Gamma, f :_\infty \tau \multimap \sigma, x :_1 \tau \vdash M : \sigma}{\infty \cdot \Gamma \vdash \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M) : \tau \multimap \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathbf{R} \quad \Delta \vdash N : \mathbf{R}}{\Gamma + \Delta \vdash M + N : \mathbf{R}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : !_n \mathbf{R} \quad |a| \leq n}{\Gamma \vdash \overline{a} \cdot M : \mathbf{R}}$$

$$\frac{\Gamma, x :_1 \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \multimap \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \multimap \tau \quad \Delta \vdash N : \sigma}{\Gamma + \Delta \vdash M\, N : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Delta \vdash N : \sigma}{\Gamma + \Delta \vdash M \otimes N : \tau \otimes \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathbf{I} \quad \Xi \vdash N : \tau \quad n \cdot \Gamma \leq \Delta}{\Delta + \Xi \vdash \mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma_1 \otimes \sigma_2 \quad \Xi, x :_n \sigma_1, y :_n \sigma_2 \vdash N : \tau \quad n \cdot \Gamma \leq \Delta}{\Delta + \Xi \vdash \mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : !_m \sigma \quad \Xi, x :_{n \cdot m} \sigma \vdash N : \tau \quad n \cdot \Gamma \leq \Delta}{\Delta + \Xi \vdash \mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N : \tau}$$

图10 类型规则

当我们写作 $\Gamma + \Delta$ 时，始终假设 $|\Gamma|$ 等于 $|\Delta|$。当$|\Gamma| = |\Delta|$ 且对于所有 $x :_n \tau \in \Gamma$ 和 $x :_m \tau \in \Delta$，都有 $n \leq m$ 时，我们记作 $\Gamma \geq \Delta$。对于环境 Γ 和$n \in \mathbb{N}^{\infty}_{>0}$，我们将 $n \cdot \Gamma$ 定义为对 Γ 中的分级与 n 进行逐分量乘法后得到的环境。

项、值和上下文由以下巴科斯-诺尔范式给出。

$$\begin{array}{rl} \text{Terms} & M, N := \cdots \mid !M \mid \mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N \mid \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M) \mid \overline{a} \cdot M \mid M + N \\ \text{Values} & V, U := \cdots \mid \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M) \mid !V \\ \text{Contexts} & C[-] := \cdots \mid !C[-] \mid \mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ C[-]\ \mathbf{in}\ M \mid \mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ C[-] \end{array}$$

具体而言，我们有分级指数 !(–)、分级余单子的 let 绑定、递归、一元乘法和加法。我们加入这些项构造子，以简化 $\Lambda^!_S$ 上观察度量的定义。类型规则见图10，求值规则见图11。我们将 **项**$^!(\Gamma, \tau)$、**值**$^!(\tau)$ 和 **值**$^!(\Gamma)$ 的定义自然地扩展到 $\Lambda^!_S$。当 $C[-]$ 满足以下条件时，我们记 $C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\Delta, \sigma)$。

- 对于所有项 $\Gamma \vdash M : \tau$，都有 $\Delta \vdash C[M] : \sigma$。对于一个新鲜变量 y，有 $y :_1 !_{k_1} \tau_1 \multimap \cdots !_{k_n} \tau_n \multimap \tau, \Delta \vdash C[y\, !x_1 \cdots !x_n] : \sigma$，其中 $\Gamma = (x_1 :_{k_1} \tau_1, \dots, x_n :_{k_n} \tau_n)$。

我们在上下文的定义中不包含 **fix**，因为当上下文的洞位于**fix**之下时，第二个条件永远不成立。直观地说，第二个条件意味着洞 $[-]$ 在上下文 $C[]$中线性出现。

下面的命题可以通过对类型判断的推导进行归纳来证明 .

▶ **Proposition 40** (Substitution). *If* $\Gamma \vdash M : \tau$ *and* $\gamma \in \mathbf{Value}^!(\Gamma)$, *then* $\vdash M\gamma : \tau$.

▶ **命题 41** (保持性)。若$\vdash M : \tau$ 且 $M \hookrightarrow V$，则$\vdash V : \tau$。

通常，一个类型判断 $\Gamma \vdash M : \tau$ 可能有不同的推导。例如，

$$\frac{}{V \hookrightarrow V} \qquad \frac{M_1 \hookrightarrow \overline{a_1} \quad \dots \quad M_n \hookrightarrow \overline{a_n}}{\overline{f}(M_1, \dots, M_n) \hookrightarrow \overline{f(a_1, \dots, a_n)}} \qquad \frac{M \hookrightarrow \overline{a} \quad N \hookrightarrow \overline{b} \quad c = a + b}{M + N \hookrightarrow \overline{c}}$$

$$\frac{M \hookrightarrow !\overline{b} \quad ab = c}{\overline{a} \cdot M \hookrightarrow \overline{c}} \qquad \frac{M \hookrightarrow \lambda x : \tau. M' \quad N \hookrightarrow V \quad M'[V/x] \hookrightarrow U}{M\, N \hookrightarrow U}$$

$$\frac{M \hookrightarrow V \quad N \hookrightarrow U}{M \otimes N \hookrightarrow V \otimes U} \qquad \frac{M \hookrightarrow * \quad N \hookrightarrow V}{\mathbf{let}\ *\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N \hookrightarrow V} \qquad \frac{M \hookrightarrow V \otimes U \quad N[V/x, U/y] \hookrightarrow W}{\mathbf{let}\ x \otimes y\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N \hookrightarrow W}$$

$$\frac{M \hookrightarrow \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M') \quad N \hookrightarrow V \quad M'[\mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M')/f, V/x] \hookrightarrow U}{M\, N \hookrightarrow U}$$

$$\frac{M \hookrightarrow V}{!M \hookrightarrow !V} \qquad \frac{M \hookrightarrow !V \quad N[V/x] \hookrightarrow U}{\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N \hookrightarrow U}$$

图11 求值规则

$x :_3 \mathbf{实数} \vdash x + x : \mathbf{实数}$ 有以下推导。

$$\frac{x :_1 \mathbf{R} \vdash x : \mathbf{R} \quad x :_2 \mathbf{R} \vdash x : \mathbf{R}}{x :_3 \mathbf{R} \vdash x + x : \mathbf{R}}, \qquad \frac{x :_2 \mathbf{R} \vdash x : \mathbf{R} \quad x :_1 \mathbf{R} \vdash x : \mathbf{R}}{x :_3 \mathbf{R} \vdash x + x : \mathbf{R}}.$$

我们可以证明，分级是推导不唯一的唯一来源。这个观察有助于在第 12 节为 $\Lambda^!_S$ 定义指称语义。

▶ **命题42**。对于任意环境 Γ 和任意项 M，若 D_1 是 $\Gamma \mathrel{‘} M : \tau$ 的一个推导，且 D_2 是 $\Gamma \mathrel{‘} M : \sigma$ 的一个推导，那么 τ 可以通过改变 σ 中的分级得到，D_1 也可以通过改变 D_2 中的分级得到。

10 逻辑度量与观察度量

10.1 度量逻辑关系

我们定义度量逻辑关系

$$\{(-) \preceq^\tau_r (-) \subseteq \mathbf{Term}^!(\tau) \times \mathbf{Term}^!(\tau)\}_{\tau \in \mathbf{Ty},\ r \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0}}$$

具体如下：对 $\Lambda^!_S$ 进行归纳，依据 τ。

$$\begin{aligned}
M \preceq^{\mathbf{R}}_r N &\iff \text{if } M \hookrightarrow a, \text{ then } N \hookrightarrow b \text{ and } |a - b| \leq r \\
M \preceq^{\mathbf{I}}_r N &\iff \text{if } M \hookrightarrow *, \text{ then } N \hookrightarrow * \\
M \preceq^{\tau \otimes \sigma}_r N &\iff \text{if } M \hookrightarrow V \otimes V', \text{ then } N \hookrightarrow U \otimes U' \\
&\quad \text{and } \exists s, s' \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0},\ V \preceq^\tau_s U \text{ and } V' \preceq^\sigma_{s'} U' \text{ and } s + s' \leq r \\
M \preceq^{\tau \multimap \sigma}_r N &\iff \text{if } M \hookrightarrow V, \text{ then } N \hookrightarrow V' \\
&\quad \text{and } \forall U, U' \in \mathbf{Value}^!(\tau), \text{ if } U \preceq^\tau_s U', \text{ then } V\, U \preceq^\sigma_{r+s} V'\, U' \\
M \preceq^{!_n \tau}_r N &\iff \text{if } M \hookrightarrow !V, \text{ then } N \hookrightarrow !U \\
&\quad \text{and } \exists s \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0},\ V \preceq^\tau_s U \text{ and } r \geq n\, s.
\end{aligned}$$

令 $\Gamma = (x_1 :_{k_1} \sigma_1, \dots, x_n :_{k_n} \sigma_n)$ 为一个环境。对于 $\mathbf{值}^!(\Gamma)$ 中的 $\gamma = (V_1, \dots, V_n)$ 和 $\gamma' = (V'_1, \dots, V'_n)$，以及 $\epsilon = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^\infty_{\geq 0})^n$，我们记 $\gamma \preceq^\Gamma_\epsilon \gamma'$，当

$V_1 \preceq^{\sigma_1}_{r_1} V_1', \ldots, V_n \preceq^{\sigma_n}_{r_n} V_n'$。我们将 $\epsilon \cdot \Gamma$ 定义为 $r_1 k_1 + \cdots + r_n k_n$。这里，我们将 0∞ 定义为 0。然后，对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们将 $d^{\log}_{\Gamma,\tau}(M,N) \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$ 定义为

$$d^{\log}_{\Gamma,\tau}(M,N) = \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \gamma, \gamma' \in \mathbf{Value}^!(\Gamma), \text{ if } \gamma \preceq^{\Gamma}_{\epsilon} \gamma', \text{ then} \\ M\gamma \preceq^{\tau}_{r+\epsilon\cdot\Gamma} N\gamma' \text{ and } N\gamma \preceq^{\tau}_{r+\epsilon\cdot\Gamma} M\gamma' \end{array} \right\}.$$

我们称 $d^{\log}$ 为 $\Lambda^!_S$ 上的逻辑度量。为供后续使用，我们证明基本引理。

▶ **引理 43.** 设 $\Gamma = (x_1 :_{k_1} \tau_1, \ldots, x_n :_{k_n} \tau_n)$ 是一个环境，并设 $\Gamma \text{‘} M : \tau$ 是一个项。给定 $\gamma, \gamma' \in$ 值$^!(\Gamma)$ 使得 $\gamma \preceq^{\Gamma}_{\epsilon} \gamma'$，则有 $M\gamma \preceq^{\tau}_{\epsilon\cdot\Gamma} M\gamma'$。

证明。 证明与 [25] 基本相同，使用步索引逻辑关系来计数 **fix** 在 $M \hookrightarrow V$ 中的归约次数。◀

11 观察度量

对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$ 和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们将 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$ 定义为

$$d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) = \sup_{C[-]:\,(\Gamma,\tau)\to(\varnothing,\mathbf{R})} \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \,\middle|\, C[M] \sqsubseteq_r C[N] \text{ and } C[N] \sqsubseteq_r C[M] \right\}$$

其中，对于 $\vdash L, L' :$ **实数**，

$$L \sqsubseteq_r L' \iff \text{if } L \hookrightarrow a, \text{ then } L' \hookrightarrow b \text{ and } |a-b| \leq r.$$

▶ **定理 44.** 对于项 $\Gamma \text{‘} M : \tau$ 和 $\Gamma \text{‘} N : \tau$，有 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) = d^{\log}_{\Gamma,\tau}(M,N)$。

证明。 该结论可由下文给出的引理 45 和引理 46 得出。◀

▶ 引理 *45.* 对于任意环境 $\Gamma = (x_1 :_{k_1} \tau_1, \ldots, x_n :_{k_n} \tau_n)$ 以及任意一对项 $\Gamma \text{‘} M : \tau$ 和 $\Gamma \text{‘} N : \tau$，若 $\gamma \in$ 值$^!(\Gamma)$ 且 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) < \infty$，则 $M\gamma \preceq^{\tau}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)} N\gamma$。

证明。对 τ 作归纳，我们证明对于所有 $\Gamma \text{‘} M : \tau$ 和 $\Gamma \text{‘} N : \tau$，都有 $M\gamma \preceq^{\tau}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)} N\gamma$。我们只给出 $\tau = \sigma \otimes \rho$ 和 $\tau = \sigma \multimap \rho$ 的证明。（$\tau = \sigma \otimes \rho$ 的情形）给定 $\gamma \in$ 值$^!(\Gamma)$，若 $M\gamma$ 发散，则根据 $\preceq$ 的定义，可得 $M\gamma \preceq^{\sigma}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)} N\gamma$。若有 $M\gamma \to V_1 \otimes V_2$，则由于 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N) < \infty$，存在 $U_1 \in$ 值$^!(\sigma)$ 和 $U_2 \in$ 值$^!(\rho)$，使得 $N\gamma \to U_1 \otimes U_2$。根据关于 σ 和 ρ 的归纳假设，我们有 $V_1 \preceq^{\sigma}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\sigma}(V_1,U_1)} U_1$ 和 $V_2 \preceq^{\rho}_{d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\rho}(V_2,U_2)} U_2$。剩下只需验证 $d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\sigma}(V_1,U_1) + d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\rho}(V_2,U_2) \leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\sigma\otimes\rho}(M,N)$。下文中，我们假设 $\gamma = (W_1, \ldots, W_n)$。我们 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 写作 M 和 N 分别表示

$$(\lambda x_1 : \tau_1. \cdots \lambda x_n : \tau_n. M)\, W_1 \cdots W_n$$
$$(\lambda x_1 : \tau_1. \cdots \lambda x_n : \tau_n. N)\, W_1 \cdots W_n$$

分别。于是，

$$
\begin{aligned}
& d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\sigma}(V_1,U_1)+d^{\mathrm{obs}}_{\varnothing,\rho}(V_2,U_2)\\
\leq & \sup_{\substack{C[-]\colon(\varnothing,\sigma)\to(\varnothing,\mathbf{R})\\ D[-]\colon(\varnothing,\rho)\to(\varnothing,\mathbf{R})}} \inf\left\{ r\in\mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} C[U_1]+D[U_2]\sqsubseteq_r C[V_1]+D[V_2]\\ \text{and}\\ C[V_1]+D[V_2]\sqsubseteq_r C[U_1]+D[U_2]\end{array}\right\}\\
\leq & \sup_{\substack{C[-]\colon(\varnothing,\sigma)\to(\varnothing,\mathbf{R})\\ D[-]\colon(\varnothing,\rho)\to(\varnothing,\mathbf{R})}} \inf\left\{ r\in\mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ \widetilde{M}\ \mathbf{in}\ C[x]+D[y]\\ \quad\sqsubseteq_r \mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ \widetilde{N}\ \mathbf{in}\ C[x]+D[y]\\ \text{and}\\ \mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ \widetilde{N}\ \mathbf{in}\ C[x]+D[y]\\ \quad\sqsubseteq_r \mathbf{let}\ x\otimes y\ \mathbf{be}\ \widetilde{M}\ \mathbf{in}\ C[x]+D[y]\end{array}\right\}\\
\leq & d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\sigma\otimes\rho}(M,N).
\end{aligned}
$$

我们注意到，我们使用加法来构造上下文。我们需要一元乘法来证明 $\tau=!_n\sigma$ 的情形。（ $\tau=\sigma\multimap\rho$ 的情形）给定 $\gamma\in\mathsf{Value}^!(\Gamma)$，如果 $M\gamma$ 发散，那么根据 $\preceq$ 的定义，我们有 $M\gamma\preceq^{\tau}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,N\gamma$。假设我们有 $M\gamma\Downarrow V$，并证明 $M\gamma\preceq^{\tau}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,N\gamma$。根据该假设，由于 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)<\infty$，我们看到，对于某个 $V'\in\mathsf{Value}^!(\tau)$，有 $N\gamma\Downarrow V'$。为了证明 $M\gamma\preceq^{\tau}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,N\gamma$，我们证明对于所有 $U\preceq^{\sigma}_{r}U'$，都有 $V\,U\preceq^{\rho}_{r+d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,V'\,U'$。根据引理 43，我们得到 $V'\,U\preceq^{\rho}_{r}V'\,U'$。因此，根据三角不等式，只需验证 $V\,U\preceq^{\rho}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,V'\,U$。根据 $\preceq$ 的定义，这等价于 $M\gamma\,U\preceq^{\rho}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma\ \tau}}(M,N)\,N\gamma\,U$。由关于 ρ 的归纳假设可知，我们有

$$M\gamma\,U\preceq^{\rho}_{d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\rho}(M\,U,N\,U)}N\gamma\,U.$$

由于 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\rho}(M\,U,N\,U)\leq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)$，我们得出所述结论。 ◀

▶**引理 46**。 对于项 $\Gamma\vdash M\colon\tau$和 $\Gamma\vdash N\colon\tau$，有 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)\leq d^{\log}_{\Gamma\ \tau,}(M,N)$。

证明。 为简单起见，假设 $\Gamma=(x\colon_k\sigma)$。我们证明，如果

$$\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ M\preceq^{!_k\sigma\multimap\tau}_{r}\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ N$$
$$\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ N\preceq^{!_k\sigma\multimap\tau}_{r}\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ M$$

对于某个 $r\in\mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0}$，那么 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)\leq r$。给定上下文 $C[-]\colon(\Gamma,\tau)\to(\varnothing,\mathbf{实数})$，由指称模型的充分性（定理 47）可知

$$C[M]\hookrightarrow a\iff(\lambda z:!_k\sigma\multimap\tau.\,C[z\,!x])(\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ M)\hookrightarrow a,$$
$$C[N]\hookrightarrow b\iff(\lambda z:!_k\sigma\multimap\tau.\,C[z\,!x])(\lambda y:!_k\sigma.\,\mathbf{let}\ !x\ \mathbf{be}\ y\ \mathbf{in}\ N)\hookrightarrow b.$$

因此，由引理 43 可知， $C[M]$收敛当且仅当 $C[N]$收敛。若$C[M]\hookrightarrow a$且 $C[N]\hookrightarrow b$，则有 $|a-b|\leq r$。由于这对任意上下文$C[-]\colon(\Gamma,\tau)\to(\varnothing,\mathbf{实数})$均成立，我们得到 $d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M,N)\leq r$。 ◀

12 指称度量

令 $\mathbf{MetCpo}_{\perp}$ 为带基点度量 cpo 及严格连续非扩张函数所构成的范畴。具体而言，$\mathbf{MetCpo}_{\perp}$ 中的对象是具有最小元的度量 cpo

$\perp$，其距离 $d(\perp, x)$ 在 $x \neq \perp$ 时为 ∞，且从 X 到 Y 的态射保持底元。正如 [3], $\mathbf{MetCpo}_\perp$ 为 Fuzz 提供了充分语义所示，将他们的结果限制到我们的语言后，我们便得到 $\Lambda_S^!$ 的充分性。对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$，记 $[\![M]\!]^{\mathrm{den}} : [\![\Gamma]\!]^{\mathrm{den}} \to [\![\tau]\!]^{\mathrm{den}}$ 为 M 在 $\mathbf{MetCpo}_\perp$ 中的解释。注意，$[\![M]\!]^{\mathrm{den}}$ 是相对于类型判断定义的，而非相对于$\Gamma \vdash M : \tau$的类型推导定义的。观察可知，$[\![M]\!]^{\mathrm{den}}$ 的底层连续函数是这样得到的：先将 $\Lambda_S^!$ 转换为 λ_c-演算中的 [23]，再在 $\mathbf{Cpo}_\perp$中解释转换后的项。将 $\Lambda_S^!$ 转换为 λ_c-演算时，分级会被舍弃，因此，类型判断 $\Gamma \vdash M : \tau$ 的所有推导都会转换为 λ_c- 演算中的同一个推导。

▶ **定理 47** ([3])。令 $\vdash M : \tau$ 是 $\Lambda_S^!$中的一个项。如果 $M \hookrightarrow V$，那么 $[\![M]\!]^{\mathrm{den}} = [\![V]\!]^{\mathrm{den}}$。如果 $[\![M]\!]^{\mathrm{den}} \neq \perp$，那么存在一个值 $V \in \mathbf{Value}^!(\tau)$ 使得 $M \hookrightarrow V$。

对于项 $\Gamma \vdash M : \tau$和 $\Gamma \vdash N : \tau$，我们定义 $d^{\mathrm{den}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \in \mathbb{R}^\infty_{\geq 0}$如下：

$$d^{\mathrm{den}}_{\Gamma,\tau}(M, N) = d([\![M]\!]^{\mathrm{den}}, [\![N]\!]^{\mathrm{den}}).$$

容易看出，d^{den} 是 $\Lambda_S^!$上的一个度量。我们称 d^{den} 为 $\Lambda_S^!$上的指称度量。由$\mathbf{MetCpo}_\perp$的充分性可知，d^{obs} 有界于 d^{den}。

▶ **定理 48**。 $d^{\mathrm{obs}} \leq d^{\mathrm{den}}$。

证明。若存在上下文 $C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\varnothing, \text{实数})$，使得 $C[M]$ 收敛而 $C[N]$发散，则根据充分性，我们有 $[\![C[M]]\!] = [\![a]\!]$。 $[\![C[N]]\!] = \perp$对某个 $a \in \mathbb{R}$。因此，$d^{\mathrm{den}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \geq d^{\mathrm{den}}_{\varnothing}(C[M], C[N]) = \infty \geq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N)$。类似地，当 $C[M]$ 发散而 $C[N]$ 收敛时，则 $d^{\mathrm{den}}_{\Gamma\,\tau}(M, N) \geq d^{\mathrm{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N)$。下面，我们假设对于任意上下文 $C[-] : (\Gamma, \tau) \to (\varnothing, \text{实数})$， $C[M]$ 发散当且仅当 $C[N]$ 发散。在此情形下，由定理 47 可知，若 $C[M] \hookrightarrow a$ 且 $C[N] \hookrightarrow b$，则 $|a - b| \leq d^{\mathrm{den}}_{\Gamma\,\tau}(M, N)$。因此，我们得到了所要证明的结论。◀

13 交互式语义模型

13.1 准备工作

13.1.1 解释分级指数的结构

我们为范畴 **Int(MetCppo)** 准备结构，以便在 $\Lambda_S^!$ 中解释分级指数。对于 $X \in \mathbf{MetCppo}$ 和 $n \in \mathbb{N}^\infty_{>0}$，我们将 $n \cdot X$ 定义为其底层连续偏序集的可数无限乘积，并配备以下度量：

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i<n} d(x_i, y_i).$$

不难验证，$n \cdot (-)$ 是 **MetCppo** 上的带迹对称幺半函子。因此，我们可以将函子 $n \cdot (-)$ 提升为 **Int(MetCppo)** 上的对称幺半函子。为简化记法，我们也将 **Int(MetCppo)** 上的函子记为 $n \cdot (-)$。具体而言，对于 **Int(MetCppo)** 中的对象 $X = (X_+, X_-)$，有 $n \cdot X = (n \cdot X_+, n \cdot X_-)$。

为了对 $\Lambda_S^!$的弃置、挖掘和收缩进行解释，对于 $n, m \in \mathbb{N}^\infty_{>0}$，我们选择双射$u_{n,m} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$和$v_{n,m} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得$u_{n,m}$将$\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < n \text{ 和 } j < m\}$嵌入$\{i \in \mathbb{N} \mid i < nm\}$中；并且

- $v_{n,\,m}$ 将$\{(0,\ i)\mid i<n\}\cup\{(1,\ i)\mid i<m\}$ 嵌入$\{i\in\mathbb{N}\mid i<n+m\}$

中。然后，我们定义以下态射

$$\begin{aligned} d_{n,X} &\colon n\cdot X\to X,\\ \delta_{n,m,X} &\colon nm\cdot X\cong n\cdot(m\cdot X),\\ c_{n,m,X} &\colon (n+m)\cdot X\cong (n\cdot X)\otimes(m\cdot X)\end{aligned}$$

由 $n,\ m\in\mathbb{N}_{>0}^{\infty}$

$$\begin{aligned} d_{n,X}((x_i)_{i\in\mathbb{N}},y) &= ((y,\bot,\bot,\ldots),x_0),\\ \delta_{n,m,X}((x_i)_{i\in\mathbb{N}},((y_{i,j})_{j\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}}) &= ((y_{u_{n,m}^{-1}(i)})_{i\in\mathbb{N}},((x_{u_{n,m}(i,j)})_{j\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}}),\\ c_X((x_i)_{i\in\mathbb{N}},((y_{0,i})_{i\in\mathbb{N}},(y_{1,i})_{i\in\mathbb{N}})) &= ((y_{v_{n,m}(i)})_{i\in\mathbb{N}},((x_{v_{n,m}^{-1}(0,i)})_{i\in\mathbb{N}},(x_{v_{n,m}^{-1}(1,i)})_{i\in\mathbb{N}})).\end{aligned}$$

~我们还给出一种更一般的弃置 $d_{n,\ m,\ X}\colon (n+m)\cdot X\to n\cdot X$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{n,m,X}((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = ((y_0,y_1,\ldots,y_{n-1},\overbrace{\bot,\ldots,\bot}^{m},y_n,y_{n+1},\ldots),\\ (x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+m-1},x_{n+m},\ldots)).\end{aligned}$$

~注意，态射 $d_{n,\ X}$, $\delta_{n,\ m,\ X}$, $c_{n,\ m,\ X}$, $d_{n,\ m,\ X}$和 w_X关于 X并非自然。不过，我们可以证明它们是逐点 自然变换，也就是说，这些态射对全局元素满足自然性条件。例如，对所有 $x\colon I\to X$，都有 $d_{n,\ X}\circ(n\cdot x)=x\circ d_{n,\ I}=x$。关于逐点自然性的更多细节，请参见 [1]。

13.1.2 用于解释弱化和按值调用求值的结构

我们还需要在 **Int(MetCppo)** 上定义结构，以解释弱化和按值调用求值。对于前者，给定一个对象 $X\in\mathbf{Int(MetCppo)}$，我们将 $w_X\colon X\to I$ in**Int(MetCppo)** 定义为 $\bot\colon X_+\to X_-$ in **MetCppo**。对于后者，我们使用延续单子的 Kleisli 范畴

$$TX=X\otimes(K,K)\cong(X\multimap(K,I))\multimap(K,I)$$

在 **Int(MetCppo)** 中，其中 $K\in\mathbf{MetCppo}$ 是 Sierpiński 空间 $\{\bot\le\top\}$，并配备了$d(\bot,\top)=\infty$。我们将单子 T 的单位、乘法和强度分别记为

$$\begin{aligned}\eta_X &\colon X\to TX,\\ \mu_X &\colon TTX\to TX,\\ \mathrm{str}_{X,Y} &\colon TX\otimes Y\to T(X\otimes Y),\end{aligned}$$

并将 $\mathrm{dstr}_{X,Y}\colon TX\otimes TY\to T(X\otimes Y)$ 记作双重强度

$$TX\otimes TY\longrightarrow T(X\otimes TY)\longrightarrow TT(X\otimes Y)\longrightarrow T(X\otimes Y).$$

对于 $n\in\mathbb{N}_{>0}^{\infty}$，我们定义一个态射

$$\xi_{n,X}\colon n\cdot TX\to T(n\cdot X)$$

在 **Int**(**MetCppo**) 定义为

$$n\cdot TX=n\cdot(X\otimes(K,K))\cong n\cdot X\otimes n\cdot(K,K)\xrightarrow{(n\cdot X)\otimes d}(n\cdot X)\otimes(K,K)=T(n\cdot X).$$

我们利用 $n\cdot(_)$ 对 T 的分配律，来模拟分级指数对项的作用。

13.1.3 常量解释结构

对于常量 a 和 $f(M_1,\dots,M_{\mathrm{ar}(f)})$ 的解释，我们遵循 Λ_S 中对项的解释：我们将基类型 $\mathbf{R}$ 解释为 (R,I)，并使用 $\lfloor a\rfloor\colon I\to R$ 和 $\lfloor f\rfloor\colon R^{\otimes \mathrm{ar}(f)}\to R$ 来解释实数和一阶函数。对于一元乘法的解释，我们使用

$$\mathrm{mult}_{a,n}\colon n\cdot(R,I)\to(R,I)$$

对于 $a\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{N}^{\infty}_{>0}$，满足 $|a|\le n$，其定义如下

$$\mathrm{mult}_{a,n}((x_i)_{i\in\mathbb{N}},*)=(*,a(x_0+\cdots+x_{n-1})/n).$$

13.2 交互式语义模型及其相关度量

基于前几节的准备工作，我们在 Kleisli 范畴 $\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})_T$ 中给出 $\Lambda^{!}_S$ 的解释。

$\Lambda^{!}_S$ 中的类型解释如下：

$$\begin{aligned}
[\![\mathbf{R}]\!]^{\mathrm{int}} &= (R,I),\\
[\![\mathbf{I}]\!]^{\mathrm{int}} &= (I,I),\\
[\![\tau\otimes\sigma]\!]^{\mathrm{int}} &= [\![\tau]\!]^{\mathrm{int}}\otimes[\![\sigma]\!]^{\mathrm{int}}\\
[\![\tau\multimap\sigma]\!]^{\mathrm{int}} &= [\![\tau]\!]^{\mathrm{int}}\multimap T[\![\sigma]\!]^{\mathrm{int}} = ([\![\tau]\!]^{\mathrm{int}})^{*}\otimes[\![\sigma]\!]^{\mathrm{int}}\otimes(K,K)\\
[\![!_n\tau]\!]^{\mathrm{int}} &= n\cdot[\![\tau]\!]^{\mathrm{int}}
\end{aligned}$$

where $(X_+,X_-)^*$ 定义为 (X_-,X_+)。照例，我们如下解释环境 $:$

$$[\![(x:_n\tau,\dots,y:_m\sigma)]\!]^{\mathrm{int}}=n\cdot[\![\tau]\!]^{\mathrm{int}}\otimes\cdots\otimes m\cdot[\![\sigma]\!]^{\mathrm{int}}.$$

接下来，我们在 $\Lambda^{!}_S$ 中定义类型判断的解释（见图 12），为便于阅读，我们简单地将$[\![-]\!]$写作 $[\![-]\!]^{\mathrm{int}}$。需要注意的是，该解释是针对类型推导给出的，而不是针对类型判断。

我们将这个模型称为 $\Lambda^{!}_S$ 的**交互式语义模型**。交互式语义模型还产生了另一个通过语义获得的度量族。对于项 $\Gamma\vdash M:\tau$ 和$\Gamma\vdash N:\tau$，我们定义 $d^{\mathrm{int}}_{\Gamma,\tau}(M,N)\in\mathbb{R}^{\infty}_{\ge 0}$如下：

$$d^{\mathrm{int}}_{\Gamma,\tau}(M,N)=d([\![M]\!]^{\mathrm{int}},[\![N]\!]^{\mathrm{int}}).$$

我们证明交互式语义模型的充分性，并将用它来证明$d^{\mathrm{obs}}\le d^{\mathrm{int}}$。下文中，对于$\vdash M:\tau$，若不存在 $f\colon I\to[\![\tau]\!]$ 使得$[\![M]\!]=f\otimes\bot_{(K,K)}$，我们就记作 $[\![M]\!]\Downarrow$，其中 $\bot_X$ 表示 $\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})(I,X)$ 的最小元。

▶ **定理 49**。令$\vdash M:\tau$为 $\Lambda^{!}_S$中的一个项。若 $M\hookrightarrow V$，则存在$\vdash V:\tau$的推导，使得 $[\![M]\!]=[\![V]\!]$。若 $[\![M]\!]\Downarrow$，则存在一个值 V，使得 $M\hookrightarrow V$。

证明。我们可以对 $M\hookrightarrow V$的推导进行归纳，利用第 13.1.1 节中态射的逐点自然性证明第一个断言，细节从略。我们借助逻辑关系证明第二个断言。对于类型 τ，我们定义一个二元关系

$$P_\tau\subseteq\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})(I,\ [\![\tau]\!])\times\mathbf{值}^{!}(\tau)$$

by

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{R}} &= \{([\![\overline{a}]\!], \overline{a}) \mid a \in \mathbb{R}\},\\
P_{\mathbf{I}} &= \{([\![*]\!], *)\},\\
P_{\tau\otimes\sigma} &= \{(f \otimes g, V \otimes U) \mid (f, V) \in P_\tau \text{ and } (g, U) \in P_\sigma\},\\
P_{\tau\multimap\sigma} &= \{(f, V) \mid \forall (g, U) \in P_\tau,\ (f \bullet g, V\,U) \in \overline{P}_\sigma\},\\
P_{!_n\tau} &= \{(n \cdot f, !V) \mid (f, V) \in P_\tau\}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_\tau = \{(\eta \circ f, M) \mid M \hookrightarrow V \text{ and } (f, V) \in P_\tau\}\\
\cup \{(f \otimes \bot_{(K,K)}, M) \mid f\colon I \to [\![\tau]\!] \text{ and } M \in \mathbf{Term}^!(\tau)\}
\end{aligned}
$$

且 $f \bullet g$ 由下式给出

$$
I \xrightarrow{f\otimes g} ([\![\tau]\!] \multimap T[\![\sigma]\!]) \otimes [\![\tau]\!] \xrightarrow{\text{eval}} T[\![\sigma]\!].
$$

根据 P_τ 的定义，我们可以证明 P_τ 和 P_τ 对第一分量取最小上界封闭：对于所有 $(x_1, M), (x_2, M) \ldots \in P_\tau$，若 $x_1 \le x_2 \le \cdots$，则有 $\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n, M\right) \in P_\tau$。我们证明关于 P_τ 的基本引理：对于任意 $\Gamma = (x :_{n_1} \sigma, \ldots, y :_{n_k} \rho)$、任意 $\Gamma \vdash M\colon \tau$，以及任意 $(v, V) \in P_\sigma, \ldots, (u, U) \in P_\rho$，有

$$
([\![M]\!] \circ ((n_1 \cdot v) \otimes \cdots \otimes (n_k \cdot u)), M[V/x, \ldots, U/y]) \in \overline{P}_\tau.
$$

我们只检查**fix**的情形。其他情形不难检查。我们要检查的是：对于满足$\infty\cdot\Gamma \le \Delta$的环境 $\Gamma = (x_1 :_{k_1} \rho_1, \ldots, x_n :_{k_n} \rho_n)$ 和 $\Delta = (x_1 :_{k'_1} \rho_1, \ldots, x_n :_{k'_n} \rho_n)$，以及项 $\Delta \vdash \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M) : \tau \multimap \sigma$，给定 $(v_1, V_1) \in P_{\rho_1}, \ldots, (v_n, V_n) \in P_{\rho_n}$，有

$$
([\![\mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M)]\!] \circ ((k_1 \cdot v_n) \otimes \cdots \otimes (k_n \cdot v_n)), \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M)[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n]) \in P_{\tau\multimap\sigma}.
$$

令 $\varphi\colon \mathbf{Int(MetCppo)}(\infty \cdot [\![\Gamma]\!], \tau \multimap \sigma) \to \mathbf{Int(MetCppo)}(\infty \cdot [\![\Gamma]\!], \tau \multimap \sigma)$ 为图 12 所给出的函数。于是，通过对 m 进行归纳，我们可以证明

$$
\left(I \xrightarrow{(k'_1\cdot v_1)\otimes\cdots(k'_n\cdot v_n)} [\![\Delta]\!] \xrightarrow{d} [\![\infty \cdot \Gamma]\!] \xrightarrow{\varphi^m} [\![\tau \multimap \sigma]\!], \mathbf{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M)[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n]\right)
$$

是 $P_{\tau\multimap\sigma}$ 的一个元素。由于 $P_{\tau\multimap\tau'}$ 对第一分量的最小上界封闭，因此我们得出所需结论。 ◀

▶ **定理 50.** 对于任意一对项 $\Gamma \text{‘ } M\colon \tau$ 和 $\Gamma \text{‘ } N\colon \tau$，有 $d^{\text{obs}}_{\Gamma,\tau}(M, N) \le d^{\text{int}}(M, N)$。

证明。 我们可以用与定理 48 相同的方法证明该命题。 ◀

14 结论

本文研究线性类型高阶程序的定量推理。我们针对纯线性编程语言 Λ_S 引入度量族的可容许性概念，并探讨其中五种程序度量及其相互关系，分别是逻辑度量、观察度量、等式度量、指称

$$[\![\Gamma \text{‘ } a\colon \mathrm{R}]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{w} I \mathsf{b}_a\mathsf{c}\longrightarrow (R, I) \xrightarrow{\eta} T(R, I)[\![\Gamma \text{‘ } *\colon \mathrm{I}]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{w} I \xrightarrow{\eta} TI[\![\Gamma_1 + \Gamma_2 \text{‘ } f\ (M_1, M_2)\colon \mathrm{R}]\!] = [\![\Gamma_1 + \Gamma_2]\!] \xrightarrow{c} [\![\Gamma_1]\!] \otimes [\![\Gamma_2]\!] \xrightarrow{[\![M_1]\!]\otimes[\![M_2]\!]} T[\![\mathrm{R}]\!] \otimes T[\![\mathrm{R}]\!]\ \mathrm{dstr}\longrightarrow T([\![\mathrm{R}]\!] \otimes [\![\mathrm{R}]\!])\ _T\mathsf{b}_f\mathsf{c}\longrightarrow T[\![\mathrm{R}]\!][\![x\colon_n \tau \text{‘ } x\colon \tau]\!] = n\cdot [\![\tau]\!] \xrightarrow{d} [\![\tau]\!] \xrightarrow{\eta} T[\![\tau]\!][\![\Delta \text{‘ } !M\colon !_n\tau]\!] = [\![\Delta]\!] \xrightarrow{\tilde{d}} n\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{n\cdot [\![M]\!]} n\cdot T[\![\tau]\!] \xrightarrow{\xi} T[\![!_n\tau]\!][\![\Delta \text{‘ } \mathrm{fix}_{\tau,\sigma}(f, x, M)\colon \tau \multimap \sigma]\!] = [\![\Delta]\!] \xrightarrow{d} \infty\cdot [\![\Gamma]\!] \text{最小不动点} \xrightarrow{\varphi} \tau \multimap \sigma[\![\Gamma + \Delta \text{‘ } M + N\colon \mathrm{R}]\!] =$$

$$[\![\Gamma + \Delta]\!] \xrightarrow{c} [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]\otimes[\![N]\!]} T[\![\textbf{实数}]\!] \otimes T[\![\textbf{实数}]\!]\ \textbf{dstr}\longrightarrow T([\![\textbf{实数}]\!] \otimes [\![\textbf{实数}]\!])\ _{T(+)}\longrightarrow T[\![\textbf{实数}]\!][\![\Delta \text{‘ } a\cdot M\colon \textbf{实数}]\!] = [\![\Delta]\!] \xrightarrow{\tilde{d}} [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} n\cdot [\![\textbf{实数}]\!]\ \textbf{mult}\xrightarrow{n\ a} [\![,\textbf{实数}]\!] \xrightarrow{\eta} T[\![\textbf{实数}]\!][\![\Gamma \text{‘ } \lambda x\colon \sigma.\, M\colon \sigma \multimap \tau]\!] = (\textbf{对}\ [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\sigma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![\tau]\!]\ \textbf{的柯里化}) \xrightarrow{\eta} T[\![\sigma \multimap \tau]\!][\![\Gamma + \Delta \text{‘ } M\ N\colon \tau]\!] = [\![\Gamma + \Delta]\!] \xrightarrow{c} [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]\otimes[\![N]\!]} [\![\tau \multimap \sigma]\!] \otimes [\![\tau]\!]\ \textbf{eval}\longrightarrow T[\![\sigma]\!][\![\Gamma + \Delta \text{‘ } M \otimes N\colon \tau \otimes \sigma]\!] = [\![\Gamma + \Delta]\!] \xrightarrow{c} [\![\Gamma]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]\otimes[\![N]\!]} T[\![\tau]\!] \otimes T[\![\sigma]\!]\ \textbf{dstr}\longrightarrow T[\![\tau \otimes \sigma]\!][\![\Delta + \Xi \text{‘ } \textbf{let}\ * \textbf{是}\ M\ \textbf{in}\ N\colon \tau]\!] = [\![\Delta + \Xi]\!] \xrightarrow{c} [\![\Xi]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{\tilde{d}} [\![\Xi]\!] \otimes n\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![N]\!]\otimes((n\cdot[\![M]\!]);\xi)}$$

$$T[\![\tau]\!] \otimes TI \xrightarrow{\mathrm{dstr}} T[\![\tau]\!]$$

$$[\![\Delta + \Xi \vdash \textbf{let}\ x \otimes y\ \textbf{be}\ M\ \textbf{in}\ N : \tau]\!] = [\![\Delta + \Xi]\!] \xrightarrow{c} [\![\Xi]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{\tilde{d}} [\![\Xi]\!] \otimes n\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![\Xi]\!]\otimes((n\cdot[\![M]\!]);\xi)}$$

$$[\![\Xi]\!] \otimes T(n\cdot([\![\sigma_1]\!] \otimes [\![\sigma_2]\!])) \xrightarrow{\sim} [\![\Xi]\!] \otimes T\,(n\cdot [\![\sigma_1]\!] \otimes n\cdot [\![\sigma_2]\!]) \xrightarrow{\text{字符串};[\![N]\!]\mu} T[\![\tau]\!]$$

$$[\![\Delta + \Xi \vdash \textbf{let}\ !x\ \textbf{be}\ M\ \textbf{in}\ N\colon \tau]\!] = [\![\Delta + \Xi]\!] \xrightarrow{c} [\![\Xi]\!] \otimes [\![\Delta]\!] \xrightarrow{\tilde{d}} [\![\Xi]\!] \otimes n\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![\Xi]\!]\otimes((n\cdot[\![M]\!]);\xi)}$$

$$[\![\Xi]\!] \otimes T(n\cdot m\cdot [\![\sigma]\!]) \xrightarrow{\sim} [\![\Xi]\!] \otimes T(nm\cdot [\![\sigma]\!]) \xrightarrow{\text{字符串};\ [\![N]\!];\ \mu} T[\![\tau]\!]$$

其中 $\varphi\colon$ $\mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})(\infty\cdot [\![\Gamma]\!], \tau \multimap \sigma) \to \mathbf{Int}(\mathbf{MetCppo})(\infty\cdot [\![\Gamma]\!], \tau \multimap \sigma)$ 定义为

$$\varphi(f) = \infty\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{c} \infty\cdot [\![\Gamma]\!] \otimes \infty\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{d\otimes\delta} [\![\Gamma]\!] \otimes \infty\cdot\infty\cdot [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![\Gamma]\!]\otimes\infty\cdot f} [\![\Gamma]\!] \otimes \infty\cdot(\tau \multimap \sigma) \xrightarrow{\text{the currying of } [\![M]\!]} \tau \multimap \sigma$$

图 12 项的解释

度量和交互度量。我们的一些结果可以看作是关于程序等价的著名结果的定量类比：观察度量的区分能力不强于语义度量，而语义中的不可定义泛函则是产生包含关系的根源。关于相对于观察度量的 Λ_S 完全抽象语义是否存在，仍是一个开放问题。我们的研究揭示了比较通过应用 Int 构造得到的指称模型与交互式语义模型的内在困难。事实上，即使在程序等价层面，它们之间的关系也并非显而易见。由 [16]可知，**Int(MetCppo)** 与 **MetCppo** 之间存在一个对称幺半范畴余反射。这些模型之间存在紧密联系。然而，我们尚不清楚这种范畴结构是否有助于阐明它们在高阶程序层面的关系。

我们的一些结果可以推广到 Fuzz 的一个片段，其中分级仅限于扩展自然数。为完整的 Fuzz 提供定量等式理论和交互度量，是未来工作中另一个非常有趣的课题。本文未考虑某些度量概念。在 [13], Gavazzo 为扩展了代数效应和递归类型的 Fuzz 给出了归纳定义的度量，而我们在此不考虑这种扩展。所谓的观察商 [17] 是一种从细粒度程序度量构造区分度较低的程序度量的方法。对这些程序距离概念与本文所引入概念进行全面比较，是另一个值得探讨的问题，也是我们计划在未来开展的工作。

参考文献

1 Abramsky, S., Haghverdi, E., Scott, P.：交互几何与线性组合代数。《计算机科学中的数学结构》**12**（5），625–665（2002）。ht-tps://doi.org/10.1017/S09601295020037302 Abramsky, S., Jagadeesan, R.：交互几何的新基础。《信息与计算》**111**（1），53–119（1994年5月）3 Azevedo de Amorim, A., Gaboardi, M., Hsu, J., Katsumata, S.y., Cherigui, I.：度量保持的语义描述。载于：第44届 ACM SIGPLAN 编程语言原理研讨会论文集。第545–556页。POPL 2017，美国计算机协会，纽约州纽约，美国（2017）4 Barber, A., Plotkin, G.D.：对偶直觉主义线性逻辑（1996），未发表的草稿。早期版本以技术报告 ECS-LFCS-96-347 发表，LFCS，爱丁堡大学5 Blum, A., Dwork, C., McSherry, F., Nissim, K.：实用隐私：sulq 框架。载于：第二十四届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART 数据库系统原理研讨会论文集。第128–138页。PODS '05，美国计算机协会，纽约州纽约，美国（2005）。https://doi.org/10.1145/1065167.1065184, https://doi.org/10.1145/1065167.10651846 Crubillé, R., Dal Lago, U.：关于 λ-项的度量推理：仿射情形。载于：2015年第30届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会（LICS）论文集。第633?644页。LICS '15，IEEE 计算机学会，美国（2015）。https://doi.org/10.1109/LICS.2015.64, https://doi.org/10.1109/LICS.2015.647 Crubillé, R., Dal Lago, U.：关于 λ-项的度量推理：一般情形。载于：Yang, H.（编）《编程语言与系统》。第341–367页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡（2017）8 Crubillé, R., Lago, U.D.：关于概率应用双模拟与按值调用 λ-演算。载于：Shao, Z.（编）《编程语言与系统——第23届欧洲编程研讨会，ESOP 2014，作为欧洲软件理论与实践联合会议 ETAPS 2014 的一部分举行，法国格勒诺布尔，2014年4月5日至13日，论文集》。《计算机科学讲义》，第8410卷，第209–228页。施普林格（2014）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-54833-8_12, https://doi.org/10.1007/978-3-642-54833-8_12

9 Crubillé, R., Lago, U.D., Sangiorgi, D., Vignudelli, V.：关于应用相似性、序贯性与完全抽象。载于：Meyer, R., Platzer, A., Wehrheim, H.（编）《正确的系统设计——纪念 Ernst-Rüdiger Olderog 60岁生日研讨会，德国奥尔登堡，2015年9月8日至9日，论文集》。《计算机科学讲义》，第9360卷，第65–82页。施普林格（2015）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-23506-6_7, https://doi.org/10.1007/978-3-319-23506-6_710 Dahlqvist, F., Neves, R.：赋范于广义度量空间的范畴的内部语言。载于：Manea, F., Simpson, A.（编）《第30届 EACSL 计算机科学逻辑年会，CSL 2022，2022年2月14日至19日，德国哥廷根（线上会议）》。LIPIcs，第216卷，第16:1–16:18页。Schloss Dagstuhl–Leibniz 信息学中心（2022）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2022.16, https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2022.16 11 Dal Lago, U., Honsell, F., Lenisa, M., Pistone, P.：定量代数高阶理论。载于：Felty, A.P.（编）《第7届计算与演绎形式结构国际会议（FSCD 2022）》。Leibniz 信息学国际论文集（LIPIcs），第228卷，第4:1–4:18页。Schloss Dagstuhl–Leibniz 信息学中心，德国达格斯图尔（2022）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2022.4, https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/16285 12 Ehrhard, T., Pagani, M., Tasson, C.：概率 PCF 的完全抽象。《ACM 学报》65（4）（2018年4月）。https://doi.org/10.1145/3164540, https://doi.org/10.1145/3164540 13 Gavazzo, F.：高阶有效应程序的定量行为推理：应用距离。载于：第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集。第452–461页。LICS '18，美国计算机协会，纽约州纽约，美国（2018）。https://doi.org/10.1145/3209108.3209149, https://doi.org/10.1145/3209108.3209149 14 Girard, J.Y.：交互几何1：系统 F 的解释。载于：Ferro, R., Bonotto, C., Valentini, S., Zanardo, A.（编）《逻辑座谈会 '88》，《逻辑与数学基础研究》，第127卷，第221–260页。爱思唯尔（1989） 15 Hasegawa, M.：《共享图模型：let 与 letrec 的范畴语义》。施普林格出版社，柏林，海德堡（1999） 16 Hasegawa, M.：关于带迹幺半闭范畴。《计算机科学中的数学结构》19（2），217–244（2009）。https://doi.org/10.1017/S0960129508007184 17 Hyland, J.M.E., Ong, C.H.L.：关于 PCF 的完全抽象：I、II 与 III。《信息与计算》163（2），285–408（2000）。https://doi.org/https://doi.org/10.1006/inco.2000.2917, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089054010092917118 Joyal, A., Street, R., Verity, D.：带迹幺半范畴。《剑桥哲学学会数学学报》119（3），447—468（1996） 19 Lassen, S.B.：关于函数与非确定性的关系推理。博士学位论文，奥胡斯大学，可访问 https://www.brics.dk/DS/98/2/BRICS-DS-98-2.pdf （1998） 20 Mackie, I., Román, L., Abramsky, S.：自主范畴的内部语言。《应用范畴结构》1，311–343（1993） 21 Mardare, R., Panangaden, P., Plotkin, G.：定量代数推理。载于：2016年第31届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会（LICS）。第1–10页（2016） 22 Milner, R.：类型化 λ-演算的完全抽象模型。《理论计算机科学》4（1），1–22（1977）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-3975(77)90053-6, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439757790053623 Moggi, E.：计算 λ 演算与单子。载于：第四届计算机科学逻辑年会论文集。第14–23页。IEEE 出版社（1989） 24 Morris, James Hiram, J.：程序设计语言的 λ 演算模型。博士学位论文，麻省理工学院，可访问 https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/64850 （1969）

25 J. Reed, B. C. Pierce：距离使类型更强：差分隐私演算。SIGPLAN 通讯 **45**(9)，157–168（2010 年 9 月）。https://doi.org/10.1145/1932681.1863568, https://doi.org/10.1145/1932681.1863568 26 P. Selinger：幺半范畴图形语言综述。载于：B. Coecke（编），《物理学的新结构》，《物理学讲义》第 813 卷，第 289–355 页。施普林格出版社·柏林·海德堡（2011）