arXiv:2302.05042v1 [math.AP] 10 Feb 2023

关于非单调势的晶格六角晶化

罗森平和魏俊成

Abstract. 令 $L=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}}\left(\mathbb{Z}\oplus z\mathbb{Z}\right)$，其中 $z\in\mathbb{H}=\{z=x+iy$或（x，y）$\in\mathbb{C}:\ y>0\}$为具有单位密度的二维晶格。假设 $\alpha\geq 1$，我们证明

$$\min_{L}\sum_{\mathbb{P}\in L,|L|=1}|\mathbb{P}|^2e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}$$

在六角晶格上取得。更一般地，我们证明对于 $\alpha\geq 1$

$$\min_{L}\sum_{\mathbb{P}\in L,|L|=1}(|\mathbb{P}|^2-\frac{b}{\alpha})e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}$$

在六角晶格上取得，而对于$b\leq\frac{1}{2\pi}$则不存在 $b>\frac{1}{2\pi}$。作为推论，我们给出了两类导致晶格中的六边形晶化的非单调势函数。我们的结果部分回答了 [1, 7, 10, 14] 中提出的一些问题，并推广了 [34] 关于两个 theta 函数之差的极小值的主要结果。

1. Introduction and main results

设 L 是一个二维晶格，即具有 $\left(\mathbb{Z}\vec{u}\oplus\mathbb{Z}\vec{v}\right)$的形式，其中 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 是两个线性无关的二维向量。许多物理、化学和数论问题都可以表述为以下关于晶格的极小化问题:

$$\min_{L}E_f(L),\ \text{ where }\ E_f(L):=\sum_{\mathbb{P}\in L\setminus\{0\}}f(|\mathbb{P}|^2),\ |\cdot|\text{ is the Euclidean norm on }\mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

例如，参见 [2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 28, 29, 38, 39, 36, 34, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 4]。求和范围涵盖除原点 0 之外的所有晶格点，函数 f 表示该系统的势。函数 $E_f(L)$表示系统在背景势 f 作用下、在周期晶格 L上的每粒子极限能量。

令 $z\in\mathbb{H}:=\{z=x+iy$或$(x,\ y)\in\mathbb{C}:\ y>0\}$。对于单位晶胞面积为 L 的晶格，可以使用参数化 $L=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}}\left(\mathbb{Z}\oplus z\mathbb{Z}\right)$，其中 $z\in\mathbb{H}$。六角晶格是由两个基向量 $(1,\ 0)$ 和 $(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ 张成的晶格，即可表示为 $\sqrt{\frac{A}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}[\mathbb{Z}(1,0)\oplus\mathbb{Z}(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})]$，或简写为 $\sqrt{\frac{A}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}[\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})]$，其中 A 是晶格的密度/体积。当 $A=1$时，使用 [7]，的记号表示

$$\Lambda_1:=\sqrt{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}[\mathbb{Z}(1,0)\oplus\mathbb{Z}(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})]\text{is the hexagonal lattice with unit density.} \tag{1.2}$$

本文的动机源于极小化问题（1.1）中的若干开放问题。在 Ober- wolfach 报告 [1] 和 [10]（第 3974 页）中，B´etermin 提出了一个非常基本的问题，即:

开放问题 1.1 （[1, 10]）。**对于绝对可求和相互作用势，在晶格中，** E_f（L）的极小化元是什么?

开放问题 1.1 从物理和数学方面作了进一步阐述，如 [15] 所示

- **物理问题**。 假设强力（如金属中的强力）会迫使键具有一定的固定长度，并使每个原子具有精确的（或最小的）配位数，那么势能最低的晶格结构是什么？
- **数学问题**。 对于任意固定的 λ， $E_f(L)$ 的极小化元是什么，如 $\mathcal{L}_d(\lambda)$中所述（即在晶格中）？

开放问题1.1引出了关于晶格极小化和晶化的基础性研究，正如 [10], 所进一步指出的：“关于 $L \to E_f(L)$ 的任何最优性结果，都支持通过 f 得到的粒子晶化猜想。”它在固态物理学和统计物理学（例如 [39, 20, 21, 45]）以及解析数论（例如 [29, 38, 40]）中有着广泛的应用。特别是，六角结晶，即六角（三角）晶格成为$E_f(L)$ 的极小化元 L，受到了更多关注。以下三个开放问题由 [14]针对六角（三角）晶格提出。

Ope关于六角晶格的问题 1.1 (B´etermin-Petrache, [14])。 • 如果 $f(r^2)$ 不是高斯函数的正叠加，那么在任意固定密度下，三角（六角）晶格仍然可以成为 $E_f(L)$ 在晶格中的极小化元吗？

- “逆拉普拉斯变换可以有多负”，同时仍保持极小值 $\min_L E_f(\lambda L)$ 对所有 $\lambda > 0$ 都由三角晶格达到？
- 使得对任意 $\lambda > 0$，三角晶格都是 $L \to E_f(\lambda L)$的唯一极小化元的函数 f 的最大类是什么？

关于六角晶格的开放问题 1.1 提出了如下问题：哪些势函数使得该系统在晶格中具有六边形晶化，正如 B´etermin [10]所提出的那样？这引出了以下更一般的基本问题：

开放问题 1.2。 找出非单调势($f \in \mathcal{F}_d \backslash \mathcal{F}_d^{cm}$)，使得 $L \to E_f(L)$ 的极小值在六角晶格处达到？

注 1.1。 这里我们沿用 [16] 中的记号

$$\mathcal{F}_d := \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(r) = \int_0^\infty e^{-rt} d\mu_f(t), \mu_f(t) \in \mathcal{M}_d, |f(r)| = O(r^{-p_f}) \ as\ r \to \infty, p_f > \frac{1}{2}\}, \tag{1.3}$$

$\mathcal{M}_d$ 是 $\mathbb{R}_+$上的拉东测度空间，并且

$$\mathcal{F}_d^{cm} := \{f \in \mathcal{F}_d^{cm}, \mu_f \geq 0\} \tag{1.4}$$

表示可容许且完全单调势函数的类。注意，

$$\mathcal{F}_d^{cm} \ \textit{is generated by Gaussian potential:}\ f(|\cdot|^2) = e^{-\alpha|\cdot|^2} \ \textit{via Laplace transform.} \tag{1.5}$$

开放问题 1.2 确实提出了这样的问题：对于非单调势，何时会出现晶格中的六边形晶化。正如 [14] 和 [16] 分别指出的那样，“对于 E_f（L），仅有极少数例子能够严格证明某个给定晶格在所有晶格中的全局最优性”，而且“关于带电结构在晶格中的极小化，目前只有少数严格结果。” Montgomery 的著名结果 [37] 证明，若对所有 $\alpha > 0$都有 f（$|\cdot|$） $= e^{-\alpha|\cdot|^2}$，那么$L \to E_f$（L）的极小化元在六角晶格处取得。利用拉普拉斯变换和 Hausdorff-Bernstein-Widder 表示定理（[7]），可知对于记为 $\mathcal{F}_d^{cm}$ 的可容许完全单调类， $L \to E_f$（L）的极小化元是六角晶格；随后由 [41, 22, 25, 26, 27] 得到黎兹势的情形。已有一些结果证明，某些非单调势也存在六角极小化元（[7, 10, 17]），这些结果基于 Montgomery 定理 [37]）和 B´etermin 方法（[7], ；一般判据见 [16] 中的定理 2.9）。

我们关注由 B´etermin [7] 提出的关于六角结晶的一个有趣问题。在 [7]（第 3249 页）的第 4.3 小节中，B´etermin 断言以下不等式

$$\sum_{\mathbb{P} \in \Lambda_1, |\Lambda_1|=1} |\mathbb{P}|^2 e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2} \leq \sum_{\mathbb{P} \in L, |L|=1} |\mathbb{P}|^2 e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2} \tag{1.6}$$

不可能对所有 $\alpha > 0$都成立；其中 Λ_1 是单位密度的六角晶格（1.2）。由此得到以下问题

开放问题 1.3。 是否存在 α 使得不等式 （1.6）成立?

在本文中，我们给出了若干类能够实现晶格中的六边形晶化的非单调势函数。由此，我们对开放问题1.1-1.3给出了肯定及部分肯定的回答。

我们在定理 1.1 和1.2中陈述主要结果。

定理 1.1。 假设 $\alpha \geq 1$。考虑如下晶格极小化问题

$$\min_{L} \sum_{\mathbb{P}\in L, |L|=1} (|\mathbb{P}|^2 - \frac{b}{\alpha}) e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}. \tag{1.7}$$

存在 $b_c = \frac{1}{2\pi}$（与α无关的，使得

- 若 $b \leq b_c$，晶格能量泛函的极小化元为 $e^{i\frac{\pi}{3}}$，对应于六角晶格;
- 若 $b > b_c$，则晶格能量泛函不存在极小化元。

注 1.2。 在定理 *1.1* 和*1.2*中，我们给出以下两种基本的非单调势函数，它们会导致晶格中的六边形晶化。

(1)：高斯势之差 $f(r^2) = e^{-\pi\alpha r^2} - be^{-\pi a\alpha r^2}$，$\alpha \geq 1, a > 1, b \leq \sqrt{a}$，极小化元为六角晶格；**(2)**：多项式与高斯函数的乘积 $f(r^2) = (r^2 - \frac{b}{\alpha})e^{-\pi\alpha r^2}$，$\alpha \geq 1, b \leq \frac{1}{2\pi}$，极小化元为六角晶格。 (1.8)

因此，我们对开放问题 *1.1*-*1.2*给出了肯定的回答。

注 1.3. 注意，环面上的汤川气体([4], 公式 (2.4)，第 *10* 页) 可写成 (1.1) 的形式，其中将 f 替换为汤川势。在此，我们考察 (1.1) 的形式，其中将 f 替换为两类非单调势函数 (1.8) ，并研究使每粒子能量 (1.1)最小的环面形状；结果表明，环面的六边形形状胜出。

注 1.4. 定理 *1.1* 为晶格中的六边形晶化提供了一种模式，即要么存在六边形形状，要么不存在。这不同于单一的六边形形状[37, 7] 或矩形-正方形-菱形-六边形相变 [12, 32, 33, 36]。

定理1.1($b = 0$) 的一个直接应用是下面的推论，它对开放问题1.3给出了部分答案。

推论 1.1。对于任意 $\alpha \geq 1$

$$\min_{L} \sum_{\mathbb{P}\in L, |L|=1} |\mathbb{P}|^2 e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2} \ \textit{is achieved at hexagonal lattice.}$$

注 1.5。推论 *1.1* 中对应的势泛函是

$$f(r^2) = r^2 e^{-\pi\alpha r^2},$$

这也在 [23]（第 *1214* 页）。

注 1.6。 晶格和 $\sum_{\mathbb{P}\in L,\ |L|=1} |\mathbb{P}|^2 e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}$ 也出现在 [24]（第 *6* 节，公式 *6.1*）中，其中生成函数为

$$\tilde{F}(\tau, 0) = -\frac{2\pi i\tau}{d} \sum_{x\in\Lambda_d} |x|^2 e^{\pi i|x|^2\tau}.$$

如果 $\tau = i\alpha$ 是一个虚数，那么

$$\tilde{F}(i\alpha, 0) = \frac{2\pi\alpha}{d} \sum_{x\in\Lambda_d} |x|^2 e^{-\pi\alpha|x|^2}. \tag{1.9}$$

在 $d = 2$ 维中，(1.9) 是推论 *1.1*(除去系数 $\frac{2\pi\alpha}{d}$)中极小化的泛函。 ——

Let

$$\theta(\alpha; z) := \sum_{\mathbb{P}\in L} e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi\alpha\frac{\pi}{y}|mz+n|^2} \tag{1.10}$$

表示 theta 函数，例如参见 [37, 7, 34]。

定理 1.1 有一个出人意料的推论，给出了我们先前结果的一般推广[34]。

定理 1.2。 假设 $\alpha \geq 1$ 和 $a > 1$。考虑极小化问题

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \Big(\theta(\alpha; z) - b\theta(a\alpha; z)\Big)$$

存在一个临界值 $b_T :=\sqrt{a}$ ，它与 α 无关，使得

- 若 $b \leq b_T$，则极小化元为 $e^{i\frac{\pi}{3}}$，对应于六角晶格；
- 若 $b > b_T$，则极小化元不存在。

注 1.7。 注意，极小$_{z\in\mathbb{H}}\Big(\theta(\alpha;\ z) - b\theta(2\alpha;\ z)\Big)$， $\alpha \geq 1$ 此前已解决，即$a = 2$ 定理 *1.2* 中的情形已由 [34], 证明；在这里，我们采用不同的策略，将其推广到一般的 $a > 1$ 。因此，我们给出更多例子，以否定 *B´etermin*([10], 上一页) 通过推论 *1.2*。

由于 $\theta(\alpha;\ z) = \frac{1}{\alpha}\theta(\frac{1}{\alpha};\ z)$(参见例如 [33, 37])，定理 1.2 意味着

推论 1.2。 假设 $\lambda \in (0, 1]$ 且 $\beta \in (0,\ 1)$。那么

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \Big(\theta(\lambda; z) - b\theta(\beta\lambda; z)\Big) = \begin{cases} \textit{is achieved at } e^{i\frac{\pi}{3}}, & \textit{if } b \leq \sqrt{\beta}, \\ \textit{does not exist}, & \textit{if } b > \sqrt{\beta}. \end{cases} \tag{1.11}$$

注 1.8. 在 *B´etermin-Petrache* [14](见注 *1.14* 下文)中，他们指出：“如果我们试图在极小化 $E_f(\lambda L)$ 的同时固定尺度约束，那么对于单阱势，一般来说，在不同尺度下会得到不同的极小化元。随着 λ 增大，极小化元预计会从三角晶格变为菱形晶格，然后变为正方晶格，再变为矩形晶格，最后变为退化矩形晶格。”这在许多情况下都成立(例如， [7, 12, 32, 33, 36])，然而推论 *1.2*给出了一类单阱势，使得极小化元要么是六角晶格，要么不存在；也就是说，在不同尺度下只有一种类型的极小化元（六角晶格）。

Th定理1.1-1.2 可通过拉普拉斯变换推广（受 B´etermin [7] 启发） .

定理 1.3. 设二维晶格 L 的面积归一化为 *1*。考虑势为以下形式 $_{,P}$, $g_{\alpha,P}$ 的极小化问题(1.1)

$$\begin{aligned} f_{\alpha,P}(r) :&= \int_1^\infty \Big(\big(e^{-\pi\alpha x\cdot r} - be^{-\pi a\alpha x\cdot r}\big)\cdot P(x)\Big)dx,\ \ \alpha \geq 1, b \leq \sqrt{a} \\ g_{\alpha,P}(r) :&= \int_1^\infty \Big(\big(r\cdot x - \frac{b}{\alpha}\big)e^{-\pi\alpha x\cdot r}\cdot P(x)\Big)dx,\ \ \alpha \geq 1, b \leq \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中 $P(x)$ 是任意实值函数(不一定连续)，满足 $f_{\alpha,P}(r)$ $g_{\alpha,P}(r)$ 均为有限值，并且

$$P(x) \geq 0.$$

那么存在与 $P(x)$ 无关的$\beta_c = \sqrt{a}$,$\beta_s = \frac{1}{2\pi}$，使得

- 若 $b \leq \beta_c$，则 $E_{f_{\alpha,P}}(L)$ 的极小化元存在，且总是六角晶格。
- 若 $b \leq \beta_s$，则 $E_{g_{\alpha,\ P}}(L)$ 存在极小化元，且其必为六角晶格。

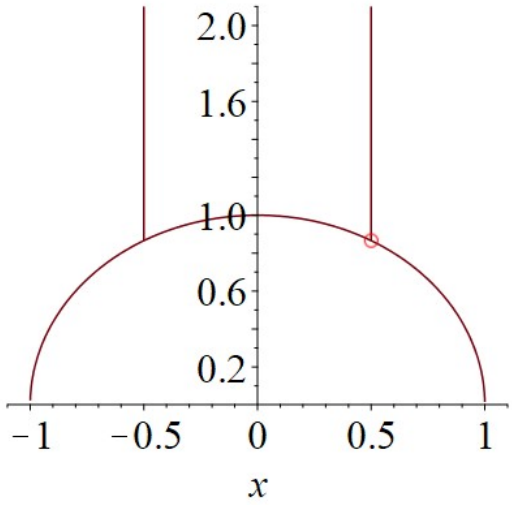

FIGURE 1. 基本域中的六边形点与六边形形状

定理 1.3 的一个具体应用是经典的汤川势情形。

推论 1.3 (**汤川势**$\{\cong P(x) \equiv 1\}$ **定理 1.3的推论**。 设二维晶格 L 的面积归一化为 *1*。考虑势 h_α 具有以下形式的极小化问题

$$h_\alpha(r) := \frac{e^{-\pi\alpha r}}{r} - b\frac{e^{-\pi a\alpha r}}{r}, \quad \alpha \geq 1, a > 1.$$

那么，存在一个与参数 ~~α~~ 无关的 $b_{c_0} = \frac{1}{\sqrt{a}}$，使得

- 若 $b \leq b_{c_0}$，则 $E_{h_\alpha}(L)$ 的极小化元存在，且始终是六角晶格。

备注 1.9。 关于极小化元的汤川势之差，针对 (1.1) 的首个严格证明由 *B´etermin* [7]给出。值得注意的是，我们提供了一种有效的方法，证明汤川势之差条件下晶格中的六边形晶化。

定理1.3 的另一个重要应用如下

推论 1.4 ($\{\cong P(x) \equiv e^{kx}, \ k \leq 0\}$ **定理 1.3的推论)**。设二维晶格L 的面积归一化为 *1*。考虑具有如下形式的势(1.1) 的极小化问题 I_α

$$I_\alpha(r) := e^{-\pi\alpha r} \cdot \frac{r}{r+b}, \quad \alpha \geq 1, b \geq 0.$$

于是， $E_{I_\alpha}(L)$的极小化元存在，且总是六角晶格。

本文组织如下：第 2 节介绍泛函的一些初步性质，并给出雅可比 theta 函数的一些估计。第 3 节证明，基本域上的极小化问题可约化为一条垂直线（见图1 和定理 3.3）。第 4 节证明，垂直线上的极小化问题可约化为六边形点（见图1 和定理 4.1）。最后，第 5 节给出定理1.1 和1.2的证明。

2. PRELIMINARIES

本节收集泛函及其相关基本域的一些简单对称性，并给出后续章节将用到的雅可比 theta 函数导数估计。

令 $\mathbb{H}$ 表示上半平面， $\mathcal{S}$ 表示模群

$$\mathcal{S} := SL_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.1}$$

我们采用以下基本域定义，它与经典定义略有不同（参见 [37]）：

定义 2.1 (第 108, [31]页)。 与群 G 相关联的基本域是一个连通域 $\mathcal{D}$ 满足

- 对于任意 $z \in \mathbb{H}$，存在一个元素 $\pi \in G$ 使得 $\pi(z) \in \mathcal{D}$;
- 假设 z_1、 $z_2 \in \mathcal{D}$ 和 $\pi(z_1) = z_2$ 对某个 $\pi \in G$成立，则 $z_1 = z_2$ 且 $\pi = \pm Id$。

根据定义 2.1，与模群 $\mathcal{S}$ 相关联的基本域为

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} := \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\} \tag{2.2}$$

这是开集。注意，基本域可以是开集。（见 [第 30, [3]] 页。 ）

接下来我们介绍另一个与泛函 $\theta(\alpha; z)$ 相关的群。该群的生成元如下:

$$\mathcal{G} : \text{the group generated by } \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, \ \tau \mapsto \tau + 1, \ \tau \mapsto -\overline{\tau}. \tag{2.3}$$

I容易看出，与群 $\mathcal{G}$ 相关的基本域（记为 $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ ）是

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} := \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, \ 0 < x < \frac{1}{2}\}. \tag{2.4}$$

下面的引理刻画了 theta 函数 $\theta(s; z)$ 的基本对称性。证明很简单，故略去。

引理 2.1。 对于任意 $s > 0$、任意 $\gamma \in \mathcal{G}$ 和 $z \in \mathbb{H}$、 $\theta(s; \gamma(z)) = \theta(s; z)$。

Let

$$\mathcal{W}_b(\alpha; z) := \sum_{\mathbb{P} \in L, |L|=1} (|\mathbb{P}|^2 - \frac{b}{\alpha}) e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}.$$

根据引理2.1 我们还可以得到 的以下不变性。

引理 2.2. 对于任意 $\alpha > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，任意 $\gamma \in \mathcal{G}$ 和 $z \in \mathbb{H}$， $\mathcal{W}_b(\alpha; \gamma(z)) = \mathcal{W}_b(\alpha; z)$.

接下来，我们需要对雅可比 theta 函数进行一些精细分析，该函数定义为 s

$$\vartheta_J(z; \tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau + 2\pi i n z}.$$

经典的一维 theta 函数定义为

$$\vartheta(X; Y) := \vartheta_J(Y; iX) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 X} e^{2n\pi i Y}. \tag{2.5}$$

根据泊松求和公式，有

$$\vartheta(X; Y) = X^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}. \tag{2.6}$$

为了估计 $\vartheta(X : Y)$ 的导数商的界，我们记

$$\mu(X) := \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\pi(n^2-1)X}, \ \nu(X) := \sum_{n=2}^{\infty} n^4 e^{-\pi(n^2-1)X}. \tag{2.7}$$

我们将陈述一个引理，它是本节末尾陈述的引理 2.8 和 2.9 的变体。这为第 3 节中的估计提供了新的视角。

引理 2.3。 • 对于 $X > \frac{1}{5}$ 以及任意的 $Y > 0,\ k \in \mathbb{N}^+$

$$|\frac{\vartheta_Y(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}| \leq k \cdot \frac{1+\mu(X)}{1-\mu(X)}.$$

• 对于 $X < \frac{\pi}{\pi+2}$ 以及任意的 $Y > 0,\ k \in \mathbb{N}^+$

$$|\frac{\vartheta_Y(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}| \leq k \cdot \frac{1}{\pi} e^{\frac{\pi}{4X}}.$$

为了在第 3 节中给出所需的估计，我们还需要以下

引理 2.4. • 对于 $X \geq \frac{3}{10}$ 以及任意的 $Y > 0,\ k \in \mathbb{N}^+$

$$|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_{XY}(X;Y)}| \leq k \cdot \frac{1+\nu(X)}{1-\nu(X)}.$$

• 对于 $X \geq \frac{1}{5}$ 以及任意的 $Y > 0,\ k \in \mathbb{N}^+$

$$|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}| \leq k\pi \cdot \frac{1+\nu(X)}{1-\mu(X)}.$$

对于 $k = 1$，我们有更精确的界

$$|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}| \leq \pi \cdot \frac{1+\nu(X)}{1+\mu(X)}.$$

证明。 我们首先估计 $|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_{XY}(X;Y)}|$ 如下

$$\begin{aligned} |\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_{XY}(X;Y)}| =& \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\pi n^2 X} \sin(2nk\pi Y)}{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\pi n^2 X} \sin(2n\pi Y)} \\ =& |\frac{\sin(2k\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}| \cdot \frac{1+\sum_{n=2}^{\infty} n^3 e^{-\pi(n^2-1)X} \frac{\sin(2nk\pi Y)}{\sin(2k\pi Y)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} n^3 e^{-\pi(n^2-1)X} \frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

于是由（2.8）以及以下结果可得

$$|\frac{\sin(kx)}{\sin(x)}| \leq k, \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+. \tag{2.9}$$

（（2.9）的证明可由简单的归纳论证得到。）

对 $\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_Y(X;kY)\vartheta_Y(X;Y)}$ 采用类似的步骤，即可得到所需结果。

还需估计 $|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)\vartheta_Y(X;Y)}|$ 关于 Y，函数 $|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}|$ 是周期为 1 的周期函数，且关于 $Y = \frac{1}{2}$ 对称。因此，只需考虑 $Y \in [0, \frac{1}{2}]$。我们将证明

$$\frac{\partial}{\partial Y}|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}| \geq 0 \quad \text{for} \quad Y \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{2.10}$$

直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial Y}|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}| = \frac{D(X;Y)}{\vartheta_Y^2(X;Y)}, \tag{2.11}$$

其中

$$\begin{aligned} D(X;Y) :=& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{n,m}(X;Y), \\ D_{n,m}(X;Y) :=& nm(n^2-m^2) e^{-\pi(m^2+n^2-2)X} (\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)})' \cdot (\frac{\sin(2m\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

我们进一步将双重求和分为四部分，如下所示

$$\sum_{n=1,2} \sum_{m=1,2} + \sum_{n=1,2,m\geq 3} + \sum_{m=1,2,n\geq 3} + \sum_{n\geq 3, m\geq 3}. \tag{2.13}$$

注意，经过直接化简可得

$$\sum_{n=1,2}\sum_{m=1,2} D_{n,m}(X;Y) = -24\pi e^{-3\pi X}\sin(2\pi Y) \tag{2.14}$$

and

$$\frac{D_{n,m}(X;Y)}{24\pi e^{-3\pi X}\sin(2\pi Y)} = \frac{1}{24\pi} nm(n^2-m^2)e^{-\pi(m^2+n^2-5)X}\frac{1}{\sin(2\pi Y)}\Big(\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}\Big)'\frac{\sin(2m\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}. \tag{2.15}$$

由引理 2.7

$$\Big|\frac{D_{n,m}(X;Y)}{24\pi e^{-3\pi X}\sin(2\pi Y)}\Big| \le \frac{1}{36}n^2m^2|n^2-m^2|(n^2-1)e^{-\pi(m^2+n^2-5)X}. \tag{2.16}$$

因此，由（2.11）、（2.12）、（2.13）、（2.14）和（2.16），

$$\begin{aligned}\frac{D(X;Y)}{-24\pi e^{-3\pi X}\sin(2\pi Y)} =& 1-\frac{1}{36}\Big(\sum_{n=1,2,m\ge 3}+\sum_{m=1,2,n\ge 3}+\sum_{n\ge 3,m\ge 3}\Big)\\ & n^2m^2|n^2-m^2|(n^2-1)e^{-\pi(m^2+n^2-5)X}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

因此，式（2.17）的右端在 $X > 0.21$ 时为正。注意，$1-\nu(X) > 0$ 当$X > 0.2989938127$时。

（2.17）和（2.11）证明了（2.10）。由（2.10），

$$\Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big| \le \Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;0)}{\vartheta_Y(X;0)}\Big|,$$

这就得到了所需的结果。

□

我们将证明以下估计，这些估计在下一节中很有用。

引理 2.5。对于 $X \le \frac{1}{2}$ 和任意 $Y > 0$, $k \in \mathbb{N}^+$

$$\Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big| \le \frac{3}{2}X^{-1}(1+\frac{\pi}{6}\frac{1}{X}).$$

$$\Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big| \le \frac{3k}{2\pi}X^{-1}(1+\frac{\pi}{6}\frac{1}{X})e^{\frac{\pi}{4X}}.$$

证明。由（2.6），经过简单计算可得

$$\vartheta_{XY}(X;Y) = \pi X^{-\frac{7}{2}}\Big(-3X\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}} + 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)^3e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}\Big). \tag{2.18}$$

于是，由（2.18）和（2.6）可得

$$\Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;Y)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big| = \Big|\frac{3}{2}X^{-1}\cdot\Big((1-\frac{2\pi}{3X}\cdot\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)^3e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}}\Big)\Big| \tag{2.19}$$

引理 2.5 的第一部分由（2.19）和引理 2.6得出。为证明引理2.5的第二部分，使用如下变形

$$\Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big| = \Big|\frac{\vartheta_{XY}(X;kY)}{\vartheta_Y(X;kY)}\Big|\cdot\Big|\frac{\vartheta_Y(X;kY)}{\vartheta_Y(X;Y)}\Big|.$$

因此，引理 2.5 的第二部分由引理 2.3 和引理 2.5的第一部分得出。□

在引理2.6 和2.7中，我们给出了引理2.5中使用的两个估计。

引理 2.6。

$$\sup_{X\in(0,\frac{1}{2}],Y\in\mathbb{R}}|\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)^3e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-Y)e^{-\frac{\pi(n-Y)^2}{X}}}|\leq\frac{1}{4}.$$

证明。令 $a=\frac{1}{X}$且 $f(a,\ Y):=\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\quad n-Y\ ^3e^{-a\pi(n-Y\ ^2})())()^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\ n-Y\ e^{-a\pi(n-Y}}$，那么 $a\geq 2$。直接检查可得

$$f(a,Y+1)=f(a,Y),\ \ f(a,1-Y)=f(a,Y).$$

于是只需考虑 $f(a,\ Y)$，其中 $a\geq 2$和 $Y\in[0,\frac{1}{2}]$。只需证明

$$\sup_{a\geq 2,Y\in[0,\frac{1}{2}]}|f(a,Y)|\leq\frac{1}{4}.$$

经过冗长的计算，此处省略细节，可得

$$f_Y(a,Y)>0\ \text{ for }\ a\geq 2,Y\in[0,\frac{1}{2}].$$

由此可知，对于 $a\geq 2$

$$\max_{Y\in[0,\frac{1}{2}]}|f(a,Y)|=\max\{|f(a,Y=0)|,|f(a,Y=\frac{1}{2})|\}. \tag{2.20}$$

由洛必达法则，

$$|f(a,Y=0)|=\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2a\pi n^4-3n^2)e^{-a\pi n^2}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2a\pi n^2-1)e^{-a\pi n^2}}\leq\frac{4a\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^4e^{-a\pi n^2}}{1-4a\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-a\pi n^2}}\leq 0.05\ \text{ for }\ a\geq 2 \tag{2.21}$$

and

$$\begin{aligned}|f(a,Y=\frac{1}{2})|=&\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2a\pi(n-\frac{1}{2})^4-3(n-\frac{1}{2})^2)e^{-a\pi n^2}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2a\pi(n-\frac{1}{2})^2-1)e^{-a\pi n^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a\pi-6}{a\pi-2}\cdot\frac{1+\sigma_{a,1}}{1+\sigma_{a,2}}\\=&\frac{1}{4}\Big(1-(\frac{4}{a\pi-2}-\frac{\sigma_{a,1}-\sigma_{a,2}}{1+\sigma_{a,2}})-\frac{\sigma_{a,1}-\sigma_{a,2}}{1+\sigma_{a,2}}\cdot\frac{4}{a\pi-2}\Big).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Here

$$\sigma_{a,1}:=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2a\pi(n-\frac{1}{2})^4-3(n-\frac{1}{2})^2}{\frac{a\pi}{8}-\frac{3}{4}}e^{-a\pi(n^2-n)},$$

$$\sigma_{a,2}:=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2a\pi(n-\frac{1}{2})^2-1}{\frac{a\pi}{2}-1}e^{-a\pi(n^2-n)}.$$

注意，$\sigma_{a,\ 1}>\sigma_{a,\ 2}$ 以及

$$a\Big(\frac{4}{a\pi-2}-\frac{\sigma_{a,1}-\sigma_{a,2}}{1+\sigma_{a,2}})\Big)\geq 1>0 \tag{2.23}$$

通过直接计算可得。由（2.22）和（2.23）可知

$$|f(a,Y=\frac{1}{2})|\leq\frac{1}{4}\ \text{ for }\ a\geq 2. \tag{2.24}$$

（2.24）中的界 1 4 是尖锐的，因为当 $a\to\infty$ 时，它根据（2.22）渐近达到。由（2.20）、（2.21）和（2.24），证明完成。

□

下面的引理 2.7是初等的，且在微积分中可能已广为人知；不过，我们尚未找到相关文献，因此在此给出详细证明。

引理 2.7。对于 $n\in\mathbb{N}^+$，有

$$|\frac{1}{\sin(2\pi Y)}(\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)})'|\leq C(n),\ \ for\ \ Y\in\mathbb{R},$$

其中 $C(n)=\frac{2\pi}{3}(n-1)n(n+1)$。上界 $C(n)$ 是精确的，并在 $Y=k\pi,k\in N$ 处取得。

证明。由于

$$\frac{\sin(2(n+1)\pi Y)}{\sin(2\pi Y)} = \frac{\sin(2n\pi Y)\cos(2\pi Y)+\cos(2n\pi Y)\sin(2\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}$$
$$= \cos(2\pi Y)\cdot\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)} + \cos(2n\pi Y).$$

由此可得

$$\frac{1}{\sin(2\pi Y)}\Big(\frac{\sin(2(n+1)\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}\Big)' = \cos(2\pi Y)\cdot\frac{1}{\sin(2\pi Y)}\Big(\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}\Big)' - 2(n+1)\pi\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}. \tag{2.25}$$

Let

$$a_n := \Big|\frac{1}{\sin(2\pi Y)}\Big(\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}\Big)'\Big| \text{ for short.}$$

因此由（2.25），

$$a_{n+1} - a_n \le 2\pi(n+n^2). \tag{2.26}$$

这里使用了不等式 $\big|\frac{\sin(2n\pi Y)}{\sin(2\pi Y)}\big| \le n$。由（2.26），

$$a_n \le \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) + a_1 \le \sum_{k=1}^{n-1} 2\pi(k+k^2) = \frac{2\pi}{3}(n-1)n(n+1),$$

从而得到所需结果。

□

下面的引理2.8 和2.9已在 [33] 中证明。

引理 2.8. [33]。假设 $X > \frac{1}{5}$。若 $\sin(2\pi Y) > 0$，则

$$-\overline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y) \le \frac{\partial}{\partial Y}\vartheta(X;Y) \le -\underline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y).$$

若 $\sin(2\pi Y) < 0$，则

$$-\underline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y) \le \frac{\partial}{\partial Y}\vartheta(X;Y) \le -\overline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y).$$

Here

$$\underline{\vartheta}(X) := 4\pi e^{-\pi X}(1-\mu(X)),\ \ \overline{\vartheta}(X) := 4\pi e^{-\pi X}(1+\mu(X)),$$

and

$$\mu(X) := \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\pi(n^2-1)X}. \tag{2.27}$$

引理 2.9. [33]。假设 $X <$最小值$\{\frac{\pi}{\pi+2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{\text{对数}\ \pi}\} = \frac{\pi}{\pi+2}$。若 $\sin(2\pi Y) > 0$，则

$$-\overline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y) \le \frac{\partial}{\partial Y}\vartheta(X;Y) \le -\underline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y).$$

如果 $\sin(2\pi Y) < 0$，那么

$$-\underline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y) \le \frac{\partial}{\partial Y}\vartheta(X;Y) \le -\overline{\vartheta}(X)\sin(2\pi Y).$$

Here

$$\underline{\vartheta}(X) := \pi e^{-\frac{\pi}{4X}}X^{-\frac{3}{2}};\ \ \overline{\vartheta}(X) := X^{-\frac{3}{2}}.$$

3. The horizontal monotonicity

设 $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} := \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, \quad 0 < x \prec \frac{1}{2}\}$ 为与群 $\mathcal{G}$相关联的基本域。定义垂直线

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\}. \tag{3.1}$$

见图 1。

定义

$$\mathcal{W}_b(\alpha; z) := \sum_{\mathbb{P} \in L, |L|=1} (|\mathbb{P}|^2 - \frac{b}{\alpha}) e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}. \tag{3.2}$$

我们使用参数化 $L = \sqrt{{}^{1}\,\mathrm{Im}(z)}\left(\mathbb{Z} \oplus z\mathbb{Z}\right)$，其中 $z \in \mathbb{H}$，于是基于双重无穷和的 $\mathcal{W}_b(\alpha; z)$ 的显式表达式为

$$\mathcal{W}_b(\alpha; z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (\frac{1}{y}|mz + n|^2 - \frac{b}{\alpha}) e^{-\alpha\frac{\pi}{y}|mz+n|^2}. \tag{3.3}$$

定理 1.1的表述等价于

定理 3.1。 假设 $\alpha \geq 1$。那么

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \mathcal{W}_b(\alpha; z) = \begin{cases} \textit{is achieved at } e^{i\frac{\pi}{3}}, & \textit{if } b \leq \frac{1}{2\pi}, \\ \textit{does not exist}, & \textit{if } b > \frac{1}{2\pi}. \end{cases} \tag{3.4}$$

首先有一个比较原理:

引理 3.1。 假设 $\alpha \geq 1$。如果

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \mathcal{W}_{b_0}(\alpha; z) \ \textit{ is achieved at } \ e^{i\frac{\pi}{3}}. \tag{3.5}$$

那么对于 $b \leq b_0$,

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \mathcal{W}_b(\alpha; z) \ \textit{ is stil achieved at } \ e^{i\frac{\pi}{3}}. \tag{3.6}$$

证明。 对于 $b \leq b_0$，我们使用变形

$$\mathcal{W}_b(\alpha; z) = \mathcal{W}_{b_0}(\alpha; z) + \frac{b_0 - b}{\alpha} \cdot \theta(\alpha; z). \tag{3.7}$$

结论由（3.7）以及以下事实可得

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \theta(\alpha; z) \ \text{ is achieved at } \ e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{3.8}$$

由 [37]。

□

为证明定理3.1的第一部分，根据引理 3.1，我们只需证明 $b = \frac{1}{2\pi}$ 时的临界情形。

定理 3.2. 假设 $\alpha \geq 1$。则

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) \ \textit{ is achieved at } \ e^{i\frac{\pi}{3}}. \tag{3.9}$$

定理 3.2 的证明由两部分组成。本节旨在证明第一部分，即

定理 3.3. 假设 $\alpha \geq 1$。则对于 $b = \frac{1}{2\pi}$,

$$\min_{z\in\mathbb{H}} \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) = \min_{z\in\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{G}}}} \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) = \min_{z\in\Gamma} \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z), \tag{3.10}$$

其中 Γ 是在 (3.1) 处定义的垂直线。

定理 3.3 的证明基于以下水平单调性结果:

定理 3.4. 假设 $\alpha \geq 1$。那么对于 $b = \frac{1}{2\pi}$，

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) < 0, \quad for \ \ z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}. \tag{3.11}$$

本节余下部分将证明定理 3.4。

3.1. 估计。 我们首先给出 $\mathcal{W}_b(\alpha; z)$ 的指数展开，这对我们的估计很有用。

引理 3.2。 我们有如下 $\mathcal{W}_b(\alpha; z)$ 的指数展开：

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_b(\alpha; z) =& \frac{1}{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} \cdot \Big(\frac{1}{2}(1-2\pi b)\cdot\frac{\alpha}{y}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) \\ &+ \pi\alpha^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha}; nx)\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

特别地，当 b 等于临界情形$_{12\pi}$ 时，我们有 $\mathcal{W}_b(\alpha; z)$ 的指数展开
—

$$\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) = \frac{1}{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} \cdot \Big(\pi\alpha^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha}; nx)\Big). \tag{3.13}$$

引理3.2 的证明基于引理 3.3 和 3.4。
下面的引理基于对以下结构的观察： $\mathcal{W}_b(\alpha;\ z)$(3.2)。

引理 3.3。 我们有 $\mathcal{W}_b(\alpha;\ z)$ 的结构。

$$\mathcal{W}_b(\alpha; z) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta(\alpha; z) - \frac{b}{\alpha}\theta(\alpha : z). \tag{3.14}$$

证明。 注意到

$$\sum_{\mathbb{P}\in L, |L|=1} |\mathbb{P}|^2 e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{\mathbb{P}\in L, |L|=1} e^{-\pi\alpha|\mathbb{P}|^2}. \tag{3.15}$$

该引理由（3.15）和（3.2）得到。

□

下面的引理用于 [33, 37]。

引理 3.4。 [33, 37] 我们有 $\theta(\alpha;\ z)$ 的展开式。

$$\begin{aligned}\theta(\alpha; z) &= \sqrt{\frac{y}{\alpha}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) \\ &= 2\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) + \sqrt{\frac{y}{\alpha}}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; 0).\end{aligned}$$

我们还将陈述引理 3.3的一个推论，它部分解释了为何我们在证明定理 3.4时要分情况讨论。

引理 3.5. 对于 $b = \frac{1}{2\pi}$ 和任意 $z \in \mathbb{H}$,

$$\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(1; z) = 0. \tag{3.16}$$

证明。由于

$$\theta(\frac{1}{\alpha}; z) = \alpha\cdot\theta(\alpha; z) \tag{3.17}$$

通过傅里叶变换，参见例如 [33, 37]。对 α 两边关于其求导（3.17），得到

$$-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta(\frac{1}{\alpha}; z) - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta(\alpha; z) = \theta(\alpha; z). \tag{3.18}$$

将 $\alpha = 1$ 代入（3.18），可得

$$\Big(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta(1;z) - \frac{1}{2}\theta(1;z)\Big) = 0. \tag{3.19}$$

(3.19) 和引理 3.3 给出该结果。 □

由引理 3.5，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(1;z) = 0 \ \text{ for } \ z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}. \tag{3.20}$$

因此，由（3.20）给出，为了证明定理3.4，我们将证明分为两种情形，即 **情形 a：** $a \in [1, 1.2]$，**情形 b：** $a \in [1.2, \infty)$。

我们首先证明 **情形 b：** $a \in [1.2, \infty)$。对引理3.13中的（3.2 ）求导可直接得到

引理 3.6。我们有 $-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ z)$ 的展开式

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) = \frac{1}{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^3 e^{-\alpha\pi y n^2}\cdot\big(-\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};nx)\big) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n e^{-\alpha\pi y n^2}\big(-\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};nx)\big)\Big).$$

为了证明 **情形 b**，我们使用引理 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z)$ 中的变形3.6。

引理 3.7。我们有 $-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ z)$ 的商展开式

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) = \frac{2}{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}\big(-\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)\big)\cdot e^{-2\pi y}\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot\big(1+\sum_{n=2}^{\infty} n^3 e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\\ +\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};x)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)} + \sum_{n=2}^{\infty} n e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\Big).\end{aligned}$$

这里，对于 $\frac{y}{\alpha} > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$，

$$-\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x) > 0. \tag{3.21}$$

注 3.1。(3.21)由引理 *2.8* 和 *2.9*可得。

基于引理 3.7 中的变形以及第 2 节中 theta 函数导数的商估计，我们现在可以证明定理 3.4的情形 b。具体而言，我们将证明

命题 3.1。假设 $\alpha \geq 1.1$。那么对于 $b = \frac{1}{2\pi}$，

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) < 0, \ \ for \ z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}. \tag{3.22}$$

证明。为便于陈述这些估计，我们记

$$\mathcal{C}(\alpha,x,y) := \frac{2}{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}\big(-\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)\big)\cdot e^{-2\pi y}. \tag{3.23}$$

Here

$$\mathcal{C}(\pi,\alpha,y) > 0 \tag{3.24}$$

由（3.21）。注意，$z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ 蕴含 $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$。

我们进一步将证明分为两个子情形：**情形** b_1**：** $\frac{y}{\alpha} \geq \frac{1}{2}$ 和**情形** b_2**：** $\frac{y}{\alpha} \in (0,\ 1.2)$。

情形 b_1**:** $-\frac{y}{\alpha} \geq -\frac{1}{2}$。根据引理3.7、2.3 和2.4，我们有

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) &= \mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot\big(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^3e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\\
&\quad+\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};x)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}+\sum_{n=2}^{\infty}ne^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\Big)\\
&\geq \pi\cdot\mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\alpha^2\cdot\big(1-\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{1+\mu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}\big)\\
&\quad-\frac{1+\nu(\frac{y}{\alpha})}{1+\mu(\frac{y}{\alpha})}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{1+\nu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}\Big)
\end{aligned}\tag{3.25}$$

根据（$\frac{y}{\alpha}\geq\frac{1}{2}$）和（$\mu$），$\nu$由（2.27）可知均为递减函数，因此

$$\frac{1+\nu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}\leq\frac{1+\nu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}=1.186694067\cdots,\quad\frac{1+\mu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}\leq\frac{1+\nu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}=1.074612508\cdots.\tag{3.26}$$

对于$\frac{1+\nu}{}(x)\ 1+\mu(x)$，仍然有

$$\frac{1+\nu(x)}{1+\mu(x)}\ \text{is decreasing with}\ x\geq\frac{1}{2}.\tag{3.27}$$

通过求导并结合（3.27），可直接验证（2.27），此处省略细节。因此，对于$\frac{y}{\alpha}\geq\frac{1}{2}$，有

$$\frac{1+\nu(x)}{1+\mu(x)}\leq\frac{1+\nu(\frac{1}{2})}{1+\mu(\frac{1}{2})}=1.104299511\cdots.\tag{3.28}$$

将（3.30）中的误差项记为

$$\sigma_1:=\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{1+\mu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}),\ \sigma_2:=\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{1+\nu(\frac{y}{\alpha})}{1-\mu(\frac{y}{\alpha})}.$$

由（3.26）可得,

$$\begin{aligned}
\sigma_1&\leq\frac{1+\mu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\leq\frac{1+\mu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-1.1\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(n^2-1)}\leq 2.169\cdot10^{-3},\\
\sigma_2&\leq\frac{1+\nu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\leq\frac{1+\nu(\frac{1}{2})}{1-\mu(\frac{1}{2})}\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-1.1\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(n^2-1)}\leq 6.75\cdot10^{-4}.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

因此，由（3.30）、（3.28）和（3.29），

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z)&\geq\pi\cdot\mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\alpha^2\cdot\big(1-\sigma_1\big)-\frac{1+\nu(\frac{y}{\alpha})}{1+\mu(\frac{y}{\alpha})}-\sigma_2\Big)\\
&\geq\pi\cdot\mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(1.1^2\cdot(1-2.169\cdot10^{-3})-1.105-6.75\cdot10^{-4}\Big)\\
&\geq\pi\cdot\mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot0.1017005100>0.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

这就完成了**情形** b_1的证明。

剩下只需证明**情形** b_2。

情形 $b_2 :- \frac{y}{\alpha} \in (0, 1\ 2)$。 由引理 3.7、2.3 和 2.5，可得

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) &= \mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot\big(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^3e^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\cdot\frac{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\\
&\quad+\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};x)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}+\sum_{n=2}^{\infty}ne^{-\alpha\pi y(n^2-1)}\frac{\vartheta_{XY}(\frac{y}{\alpha};nx)}{\vartheta_Y(\frac{y}{\alpha};x)}\Big)\\
&\geq \mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot(1-\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\alpha\pi\left((n^2-1)y-\frac{1}{4y}\right)})\\
&\quad-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{y}(1+\frac{\pi}{6}\frac{\alpha}{y})-\frac{3}{2\pi}\frac{\alpha}{y}(1+\frac{\pi}{6}\frac{\alpha}{y})\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\alpha\pi\left((n^2-1)y-\frac{1}{4y}\right)}\Big).
\end{aligned}\tag{3.31}$$

由于 $\frac{y}{\alpha} \in (0,\ 1\ 2)$，因此 $\frac{\alpha}{y} > 2$ 和 $\alpha > 2y \geq \sqrt{3}$.

记 (3.34) 中的误差项为

$$\sigma_3 := \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\alpha\pi\left((n^2-1)y-\frac{1}{4y}\right)},\quad \sigma_4 := \frac{3}{2\pi}\frac{\alpha}{y}(1+\frac{\pi}{6}\frac{\alpha}{y})\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\alpha\pi\left((n^2-1)y-\frac{1}{4y}\right)}).\tag{3.32}$$

Then

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &\leq \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}n^4e^{-\sqrt{3}\pi\left((n^2-1)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)} \leq 1.777\cdot10^{-6},\\
\sigma_4 &\leq \frac{3}{\pi}(1+\frac{\pi}{3})\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{3}\pi\left((n^2-1)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}) \leq 2.727\cdot10^{-5}.
\end{aligned}\tag{3.33}$$

由 (3.34)、(3.32) 和 (3.33)，可得

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) &\geq \mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(\pi\alpha^2\cdot(1-\sigma_3)-(\pi+3)-\sigma_4\Big)\\
&\geq \mathcal{C}(\alpha,x,y)\cdot\Big(3\pi\cdot(1-\sigma_3)-(\pi+3)-\sigma_4\Big)\\
&> 0.
\end{aligned}\tag{3.34}$$

这证明了**情形** $b_2 :\ \frac{y}{\alpha} \in (0,\ 1\ 2)$。证明完毕。

□

接下来我们将证明**定理** 3.4 的情形 a，即

命题 3.2。 假设 $\alpha \in (1,\ 1.1]$。那么对于 $b = \frac{1}{2\pi}$，

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) < 0,\ \ for\ \ z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}.\tag{3.35}$$

我们从一个引理开始，该引理直接由引理3.6得到。

引理 3.8。

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) = 8\pi\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}n^3m\big(\alpha^2e^{-\pi y(\alpha n^2+\frac{1}{\alpha}m^2)}-e^{-\pi y(\alpha m^2+\frac{1}{\alpha}n^2)}\big)\cdot\sin(2mn\pi x)\Big).$$

根据引理 3.8，为方便起见，记

$$\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y) := n^3m\cdot\big(\alpha^2e^{-\pi y(\alpha n^2+\frac{1}{\alpha}m^2)}-e^{-\pi y(\alpha m^2+\frac{1}{\alpha}n^2)}\big).\tag{3.36}$$

由引理 3.8，可将 $-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \ z)$ 改写为_

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) = 8\pi\alpha^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)\Big).$$

因此，命题 3.2 等价于

引理 3.9. 假设 $\alpha \in$ <style id='4>(1, 1.1]。那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)>0 \tag{3.37}$$

对于 $z=x+iy\in\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$。这里 $\mathcal{A}_{n,\ m}(\alpha;\ y)$ 定义于 (3.36)。事实上，我们证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)\geq\frac{1}{2}(\alpha^2-1)\sin(2\pi x)>0 \ \ for\ \ z=x+iy\in\mathcal{D}_{\mathcal{G}}.$$

为证明引理3.9，我们将双重无穷和（3.37）分成如下三部分 :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}=\sum_{m=n}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}. \tag{3.38}$$

为估计（3.38）中的每一部分，我们建立以下两个引理。

引理 3.10。

$$|\sum_{n=m+1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)|\leq B\cdot\mathcal{A}_{m,m}(\alpha;y)\cdot|\sin(2m^2\pi x)|, \tag{3.39}$$

其中常数 B 由下式定义

$$B:=\frac{2^6\alpha_0\pi y e^{-3\pi y\alpha_0}}{1-2^6e^{-5\pi y\alpha_0}}, \tag{3.40}$$

其中 α_0 是属于（$\frac{1}{\alpha}$, α）的一个常数。–

证明。

$$\begin{aligned}|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)}{\mathcal{A}_{m,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2m^2\pi x)}|&\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4|\alpha\frac{\alpha e^{-\pi y\alpha(n^2-m^2)}-\frac{1}{\alpha}e^{-\pi y\frac{1}{\alpha}(n^2-m^2)}}{\alpha^2-1}|\\&=\sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4\big(\alpha_0\pi y(n^2-m^2)-1\big)e^{-\pi y\alpha_0(n^2-m^2)},\ \ \alpha_0\in(\frac{1}{\alpha},\alpha)\\&\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4\alpha_0\pi y n^2e^{-\pi y\alpha_0(n^2-m^2)}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

这里我们使用中值定理来估计

$$\frac{\alpha e^{-\pi y\alpha(n^2-m^2)}-\frac{1}{\alpha}e^{-\pi y\frac{1}{\alpha}(n^2-m^2)}}{\alpha^2-1}. \tag{3.42}$$

继续由（3.41），我们通过令 $k=n-m$ 来变形

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4\alpha_0\pi y n^2e^{-\pi y\alpha_0(n^2-m^2)}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{m+k}{m})^4(m+k)^2\alpha_0\pi y e^{-\alpha_0\pi y(2m+k)k}. \tag{3.43}$$

为简化记号，我们记

$$b_k:=(\frac{m+k}{m})^4(m+k)^2\alpha_0\pi y e^{-\alpha_0\pi y(2m+k)k},m\geq1. \tag{3.44}$$

于是，由（3.41）、（3.43）和（3.44），可得

$$|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)}{\mathcal{A}_{m,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2m^2\pi x)}|\leq\sum_{k=1}^{\infty}b_k. \tag{3.45}$$

为给出 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 的上界，我们估计得到

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+1}}{b_k} &= (1+\frac{1}{m+k})^6 e^{-\pi y\alpha_0(1+2k+2m)} \\ &\le 2^6 e^{-5\pi y\alpha_0} := q.\end{aligned} \tag{3.46}$$

由（3.46），$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 受一个几何级数控制，因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \le \frac{b_1}{1-q} \le \frac{2^6\alpha_0\pi y e^{-3\pi y\alpha_0}}{1-2^6 e^{-5\pi y\alpha_0}}. \tag{3.47}$$

所需结果由（3.45）和（3.47）即可得出。

□

与引理 3.10对偶，我们有

引理 3.11。

$$|\sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)| \le B\cdot\mathcal{A}_{n,n}(\alpha;y)\cdot|\sin(2n^2\pi x)|,$$

其中常数 B 定义于 （3.40）。

证明。 证明与引理 3.10的证明类似。

$$\begin{aligned}|\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)}{\mathcal{A}_{m,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2m^2\pi x)}| &\le \sum_{m=n+1}^{\infty}(\frac{m}{n})^4|\alpha\frac{\alpha e^{-\pi y\frac{1}{\alpha}(m^2-n^2)}-\frac{1}{\alpha}e^{-\pi y\alpha(m^2-n^2)}}{\alpha^2-1}| \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4\big(\alpha_0\pi y(m^2-n^2)+1\big)e^{-\pi y\alpha_0(n^2-m^2)},\quad \alpha_0\in(\frac{1}{\alpha},\alpha) \\ &\le \sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{n}{m})^4\alpha_0\pi y m^2 e^{-\pi y\alpha_0(n^2-m^2)}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

这里我们对以下对象使用了中值定理

$$\frac{\alpha e^{-\pi y\frac{1}{\alpha}(m^2-n^2)}-\frac{1}{\alpha}e^{-\pi y\alpha(m^2-n^2)}}{\alpha^2-1}, \tag{3.49}$$

这与（3.42）略有不同。

由（3.48）可知，证明的其余部分与引理 3.10 的证明相同，只需交换 m和 n。

□

我们现在可以证明引理3.9。

证明。 **引理 3.9 的证明**。 根据（3.38）中的分解，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_{k,k}(\alpha;y)\cdot\sin(2k^2\pi x) \\ &+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x) \\ &\ge \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_{k,k}(\alpha;y)\cdot\sin(2k^2\pi x)-2B\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{m,m}(\alpha;y)\cdot|\sin(2m^2\pi x)|,\end{aligned} \tag{3.50}$$

其中常数 B 定义于（3.40）中。注意，$z \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ 意味着 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 且 $y > \frac{\sqrt{3}}{2}$。于是 $\sin(2\pi x) > 0$。因此，由（3.50），

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x) &\geq (1-2B)\mathcal{A}_{1,1}(\alpha;y)\sin(2\pi x) - (1+2B)\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n,n}(\alpha;y)\cdot|\sin(2n^2\pi x)| \\ &\geq (1-2B)\mathcal{A}_{1,1}(\alpha;y)\sin(2\pi x)\cdot\Big(1-\frac{1+2B}{1-2B}\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n,n}(\alpha;y)\cdot\Big|\frac{\sin(2n^2\pi x)}{\sin(2\pi x)}\Big|\Big) \\ &\geq (1-2B)\mathcal{A}_{1,1}(\alpha;y)\sin(2\pi x)\cdot\Big(1-\frac{1+2B}{1-2B}\sum_{n=2}^{\infty}n^2\mathcal{A}_{n,n}(\alpha;y)\Big)\end{aligned} \tag{3.51}$$

注意，根据（3.36），

$$\mathcal{A}_{n,n} = (\alpha^2-1)n^4 e^{-n\pi y(\alpha+\frac{1}{\alpha})}. \tag{3.52}$$

Then

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2\mathcal{A}_{n,n} = \sum_{n=2}^{\infty}n^6 e^{-n\pi y(\alpha+\frac{1}{\alpha})} \leq \sum_{n=2}^{\infty}n^6 e^{-2n\pi y} \leq \sum_{n=2}^{\infty}n^6 e^{-n\sqrt{3}\pi} \leq 1.27\cdot 10^{-3}. \tag{3.53}$$

因此，根据（3.51）、（3.52）和（3.53），我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n,m}(\alpha;y)\cdot\sin(2mn\pi x) \geq (\alpha^2-1)\frac{9}{10}(1-2B)\sin(2\pi x) > 0. \tag{3.54}$$

引理 3.9的证明至此完成。

□

因此，定理 3.4由命题 3.1 和3.2证明，而命题 3.2 由引理 3.9证明。

4. Analysis on the vertical line Γ

在定理 3.3中，我们已证明，对 $\alpha \geq 1$,

$$\min_{z\in\mathbb{H}}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) = \min_{z\in\Gamma}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z), \tag{4.1}$$

其中垂直线 Γ 定义为

$$\Gamma = \{z\in\mathbb{H} : \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

参见（3.1）。

在本节中，我们旨在证明

定理 4.1. 假设 $\alpha > 1$。则

$$\min_{z\in\Gamma}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;z) \ \textit{ is achieved at } \ e^{i\frac{\pi}{3}}. \tag{4.2}$$

定理 4.1 的证明基于以下命题

命题 4.1. 对于 $\alpha \geq 1$ 和 $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy) \geq 0.$$

我们首先陈述一个关于 $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2}+iy)$ 的零点的引理，它由引理 3.5 和命题 3.4([10]) 推出。

引理 4.1. $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2}+iy)$ 的零点。

- $\alpha = 1$ *is a first order zero of* $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)$ *with respect to* α *for any* $y > 0$;
- $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *is a first order zero of* $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)$ *with respect to* y *for any* $\alpha > 0$.

从定性角度来看，

$$\lim_{a\to 1, y\to \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)}{(a-1)(y-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \partial_{yya}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)\mid_{a=1, y=\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.127521373\cdots > 0. \tag{4.3}$$

证明。 第一项和第二项中的零点性质分别由引理 3.5 和命题 3.4 推得 [10] 。(4.3) 由洛必达法则计算得出。随后由 (4.3) 可得零点的阶数。

□

为了证明命题 4.1，基于引理 4.1，我们将其证明分为四种情况。为便于阐述证明策略，我们记

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_a &:= \{(\alpha, y) \mid \alpha \in [1, 1.2],\ y \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]\},\\
\mathcal{R}_b &:= \{(\alpha, y) \mid \alpha \in [1, 1.2],\ y \geq 1\},\\
\mathcal{R}_c &:= \{(\alpha, y) \mid \alpha \geq 1.2,\ y \geq \frac{5}{6}\alpha\},\\
\mathcal{R}_d &:= \{(\alpha, y) \mid \alpha \geq 1.2,\ y \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{6}\alpha]\}.
\end{aligned}$$

Then

$$\{(\alpha, y) \mid \alpha \geq 1,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\} = \mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b \cup \mathcal{R}_c \cup \mathcal{R}_d.$$

我们将证明 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$分别在 $\mathcal{R}_a$、 $\mathcal{R}_b$、 $\mathcal{R}_c$ 和 $\mathcal{R}_d$ 上非负。在每个区域中，我们采用不同的方法。在区域 $\mathcal{R}_b$ 和 $\mathcal{R}_c$ 中，我们分别通过双重求和和指数展开直接估计 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$。在区域 $\mathcal{R}_d$ 中，我们估计 $(\partial_{yy} + \frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$。而在区域 $\mathcal{R}_a$ 中，我们估计 $\partial_{yya}\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$。接下来的四个小节将分别证明 $\mathcal{R}_b$、 $\mathcal{R}_c$、$\mathcal{R}_d$ 和 $\mathcal{R}_a$ 这几种情况。

4.1. 区域 $\mathcal{R}_b$：对 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$的估计。

在本小节中，我们将证明 tha t

引理 4.2。对于$(\alpha, y) \in \mathcal{R}_b$，则 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy) \geq 0$。

引理 4.2 的证明基于以下引理 4.3 和 4.4。

引理 4.3。对于$(\alpha, y) \in \mathcal{R}_b$，则

$$\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy) \geq 2\pi(\alpha^2-1)y^{\frac{1}{2}}e^{-\pi\frac{y}{\alpha}}\mathcal{L}_b(\alpha; y),$$

其中

$$\mathcal{L}_b(\alpha; y) := \frac{\pi y}{\alpha} - \frac{3}{2} - (\pi y\alpha - \frac{3}{2})\alpha^2 e^{-\pi y(\alpha-\frac{1}{\alpha})} + (3\pi(1-B) - 2(1+B)\frac{\alpha^2+1}{\alpha}y)(\alpha^2-1)e^{-\pi y\alpha}.$$

常数 B 非常小，这一结果见引理4.8，即

$$B = \frac{2^6\alpha_0\pi y e^{-3\pi y\alpha_0}}{1-2^6 e^{-5\pi y\alpha_0}},$$

其中 $\alpha_0 \in (\frac{1}{\alpha}, \alpha)$。

引理 4.4. 对于 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_b$，则

$$\mathcal{L}_b(\alpha; y) \geq 0.316(\alpha^2-1) \geq 0.$$

证明。 我们首先断言，对于 (α, y) ， $\partial_y \mathcal{L}_b(\alpha;\ y) > 0 \in \mathcal{R}_b$。事实上，

$$\begin{aligned}\partial_y \mathcal{L}_b(\alpha; y) &= \pi(\frac{1}{\alpha} - \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha-\frac{1}{\alpha})}) + \pi\alpha(\alpha^2-1)(\pi y\alpha - \frac{3}{2})e^{-\pi y(\alpha-\frac{1}{\alpha})} \\ &\geq \pi(\frac{1}{\alpha} - \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha-\frac{1}{\alpha})}).\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} - \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha-\frac{1}{\alpha})} &= \alpha e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}\big(\frac{1}{\alpha^2}e^{-\frac{\pi y}{\alpha}} - \alpha^2 e^{-\pi y\alpha}\big) \\ &= e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}(\alpha^2-1)e^{-\pi y\alpha_b}(\pi y\alpha_b - 2), \alpha_b \in (\frac{1}{\alpha}, \alpha)\end{aligned}$$

由中值定理可知，其为正，因为 $\pi y\alpha_b - 2 \geq \frac{\pi}{\alpha} - 2 > 0$。

于是可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_b(\alpha; y) \geq \mathcal{L}_b(\alpha; 1) = (\alpha^2-1)\cdot\Big(&\frac{\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - (\pi\alpha - \frac{3}{2})\alpha^2 e^{-\pi(\alpha-\frac{1}{\alpha})}}{\alpha^2-1} \\ &+(3\pi(1-B) - 2(1+B)\frac{\alpha^2+1}{\alpha})e^{-\pi\alpha}\Big)\end{aligned}$$

证明的其余部分基于初等不等式

$$\frac{\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2} - (\pi x - \frac{3}{2})x^2 e^{-\pi(x-\frac{1}{x})}}{x^2-1} + (3\pi(1-B) - 2(1+B)\frac{x^2+1}{x})e^{-\pi x} \geq 0.316\cdots, \quad \text{for } x \in [1, 1.2].$$

这里 $\frac{\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2} - (\pi x - \frac{3}{2})x^2 e^{-\pi(x-\frac{1}{x})}}{x^2-1}$ 在 $x = 1$ 处有一个可去奇点，并且

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2} - (\pi x - \frac{3}{2})x^2 e^{-\pi(x-\frac{1}{x})}}{x^2-1} = \pi^2 - 3.5\pi + 1.5 = 0.374030114\cdots.$$

□

剩下需要证明引理 4.3。我们对 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2} + iy)$ 作变形。

引理 4.5。 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2} + iy)$ 的双重和展开。

$$\begin{aligned}\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2} + iy) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\Big(&-2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^2 e^{-\pi n^2 y\alpha}) \\ &+4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mn}n^2\big(\alpha^2 e^{-\pi y(n^2\alpha + \frac{m^2}{\alpha})} - e^{-\pi y(m^2\alpha + \frac{n^2}{\alpha})}\big)\Big) \\ &+y^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{2\pi^2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} n^4(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^4 e^{-\pi n^2 y\alpha}) \\ &+\frac{4\pi^2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mn}n^4\big(e^{-\pi y(m^2\alpha + \frac{n^2}{\alpha})} - \alpha^4 e^{-\pi y(n^2\alpha + \frac{m^2}{\alpha})}\big)\Big).\end{aligned}$$

引理4.5 基于以下引理

引理 4.6。 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ z)$ 的θ函数表达式

$$\begin{aligned}\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\Big(&\pi\alpha^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha}; nx)\Big) \\ &+y^{\frac{3}{2}}\Big(-\pi^2\alpha^3\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta(\frac{y}{\alpha}; nx) + \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2}\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha}; nx)\Big).\end{aligned}$$

引理4.6 是引理 3.2的直接推论。

由引理 4.5，我们还需要一些辅助引理来证明引理 4.3。

引理 4.7。 对于 $\alpha \in [1,7]$ 和 $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 有

$$2y^{\frac{3}{2}}\frac{\pi^2}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty} n^4(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^4 e^{-\pi n^2 y\alpha}) \geq 3\pi y^{\frac{1}{2}}\sum_{n=2}^{\infty} n^2(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^2 e^{-\pi n^2 y\alpha})$$

证明。 记

$$\mathcal{B}_n(\alpha;y) := 2y^{\frac{3}{2}}\frac{\pi^2}{\alpha}n^4(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^4 e^{-\pi n^2 y\alpha}) - 3\pi y^{\frac{1}{2}}n^2(e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}} - \alpha^2 e^{-\pi n^2 y\alpha}). \tag{4.4}$$

于是，等价于证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{B}_n(\alpha;y) > 0.$$

事实上，我们将证明

$$\mathcal{B}_n(\alpha;y) > 0, \text{ for } n \geq 2, \alpha \in [1,7] \text{ and } y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由（4.4），可得

$$\mathcal{B}_n(\alpha;y) = n^2 e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}}\Big(\frac{\pi}{\alpha}yn^2 - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha\pi yn^2 - \frac{3}{2})e^{-\pi yn^2(\alpha-\frac{1}{\alpha})}\Big)$$

要证明 $\mathcal{B}_n(\alpha;\ y)$ 在所需区域内非负，等价于证明 $\frac{\pi}{\alpha}yn^2 - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha\pi yn^2 - \frac{3}{2})e^{-\pi yn^2(\alpha-\frac{1}{\alpha})}$ 在所需区域内非负。这与引理 4.4 的证明类似。我们考虑函数

$$\Big(\frac{\pi}{\alpha}x - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha\pi x - \frac{3}{2})e^{-\pi x(\alpha-\frac{1}{\alpha})}\Big), x = yn^2 \geq 2\sqrt{3}.$$

由于 $yn^2 \geq 2\sqrt{3}$，有

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha\pi yn^2 - \frac{3}{2})e^{-\pi yn^2(\alpha-\frac{1}{\alpha})}\Big) &\geq \Big(2\sqrt{3}\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha 2\sqrt{3}\pi - \frac{3}{2})e^{-2\sqrt{3}\pi(\alpha-\frac{1}{\alpha})}\Big)\\ &\geq (\alpha^2-1)\frac{2\sqrt{3}\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha 2\sqrt{3}\pi - \frac{3}{2})e^{-2\sqrt{3}\pi(\alpha-\frac{1}{\alpha})}}{\alpha^2-1}\\ &\geq 0.00113927433(\alpha^2-1) \text{ for } \alpha \in [1,7].\end{aligned}$$

这里 $\frac{2\sqrt{3}\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha 2\sqrt{3}\pi - \frac{3}{2})e^{-2\sqrt{3}\pi(\alpha-\frac{1}{\alpha})}}{\alpha^2-1}$ 在 $\alpha = 1$ 处有一个可去奇点，并且

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{2\sqrt{3}\frac{\pi}{\alpha} - \frac{3}{2} - \alpha^2(\alpha 2\sqrt{3}\pi - \frac{3}{2})e^{-2\sqrt{3}\pi(\alpha-\frac{1}{\alpha})}}{\alpha^2-1} = 81.84546604\cdots.$$

□

引理 4.8. 对于 $\alpha \leq [1,1.2]$ 和 $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mn}n^4\big(e^{-\pi y(m^2\alpha+\frac{n^2}{\alpha})} - \alpha^4 e^{-\pi y(n^2\alpha+\frac{m^2}{\alpha})}\big) \geq (1-B)(\alpha^4-1)e^{-\pi y(\alpha+\frac{1}{\alpha})},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mn}n^2\big(\alpha^2 e^{-\pi y(n^2\alpha+\frac{m^2}{\alpha})} - e^{-\pi y(m^2\alpha+\frac{n^2}{\alpha})}\big) \geq -(1+B)(\alpha^2-1)e^{-\pi y(\alpha+\frac{1}{\alpha})}.$$

这里常数 B 定义于 (3.40) 如下

$$B = \frac{2^6\alpha_0\pi y e^{-3\pi y\alpha_0}}{1-2^6e^{-5\pi y\alpha_0}},$$

其中 $\alpha_0 \in (\frac{1}{\alpha}, \alpha)$。

引理 4.8的证明与引理 3.10 和 3.11的证明非常相似，因此这里省略细节。

证明。 **引理 4.3的证明**。 由引理 4.5、 4.7 和4.8可得。 □

因此，引理 4.2 的证明完成。

4.2. **区域 $\mathcal{R}_c$：估计 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy)$。** 在本小节中，我们将证明**引理 4.9**。 对于 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; \frac{1}{2}+iy) > 0$。

引理 4.9 的证明归结为以下引理 4.10、4.11 和 4.12。

引理 4.10. 对于 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则

$$\begin{aligned}\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) \geq & \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \vartheta_X(\frac{y}{\alpha}; 0) + y^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\alpha} \vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha}; 0) - 2\pi y^{\frac{3}{2}} \alpha^3 \vartheta(\frac{y}{\alpha}; \frac{1}{2})(1+\epsilon_{c,3}) e^{-\pi y} \\ & + 2y^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\alpha}(1+\epsilon_{c,4}) \vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha}; \frac{1}{2}) e^{-\alpha\pi y}.\end{aligned}$$

此处 $\epsilon_{c,3}$ 和 $\epsilon_{c,4}$ 在引理 *4.13* 和*4.14* 中分别都很小。

引理 4.10 的证明基于引理 4.6、4.13 和4.14。

我们进一步简化引理 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z)$ 的下界4.10。

引理 4.11。 对于 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则

$$\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z) \geq 2\pi y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi y}{\alpha}} \cdot \Big(\frac{\pi y}{\alpha} - \frac{3}{2} - (1+\epsilon_{c,3}) y \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha - \frac{1}{\alpha})} - 2(1+\epsilon_{c,4}) \frac{\pi y}{\alpha} e^{-\alpha\pi y} \Big).$$

这里 $\epsilon_{c,3}$ 和 $\epsilon_{c,4}$ 都非常小，并分别出现在引理 *4.13* 和 *4.14* 中。

现在我们可以得出结论：如果 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则 $\partial_y \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha; z)$ 为正，依据以下

引理 4.12。 对于 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则

$$\frac{\pi y}{\alpha} - \frac{3}{2} - (1+\epsilon_{c,3}) y \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha - \frac{1}{\alpha})} - 2(1+\epsilon_{c,4}) \frac{\pi y}{\alpha} e^{-\alpha\pi y} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

这里 $\epsilon_{c,3}$ 和 $\epsilon_{c,4}$ 都非常小，并分别出现在引理 *4.13* 和*4.14* 中。

证明。由于 $\frac{y}{\alpha} \geq \frac{5}{6}$, $\frac{\pi y}{\alpha}, =ye^{-\pi y(\alpha - \frac{1}{\alpha})}, - -ye^{-\alpha\pi y}$ 在 y 上单调递减，因此我们有 as

$$\begin{aligned}& \frac{\pi y}{\alpha} - \frac{3}{2} - (1+\epsilon_{c,3}) y \alpha^3 e^{-\pi y(\alpha - \frac{1}{\alpha})} - 2(1+\epsilon_{c,4}) \frac{\pi y}{\alpha} e^{-\alpha\pi y} \\ \geq & \frac{5\pi}{6} - \frac{3}{2} - (1+\epsilon_{c,3}) \frac{5}{6} \alpha^4 e^{-\frac{5\pi}{6}(\alpha^2 - 1)} - 2(1+\epsilon_{c,4}) \frac{5\pi}{6} e^{-\frac{5\pi}{6}\alpha^2}.\end{aligned}$$

后者通过一个基本估计可知大于$_{1\ 2}$，此处省略细节。

□

证明基于引理4.6中的表达式。随后，我们分别利用引理4.6和引理4.13-4.16对各部分进行估计。

引理 4.13。 假设 $(\alpha, y) \in \mathcal{R}_c$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta(\frac{y}{\alpha}; \frac{n}{2}) \geq & 2e^{-\pi\alpha y} \vartheta(\frac{y}{\alpha}; \frac{1}{2})(1-\epsilon_{c,1}), \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta(\frac{y}{\alpha}; \frac{n}{2}) \leq & 2e^{-\pi\alpha y} \vartheta(\frac{y}{\alpha}; \frac{1}{2})(1+\epsilon_{c,3}).\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}\epsilon_{c,1} := & \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\pi\alpha y(n^2-1)}, \\ \epsilon_{c,3} := & \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^4 e^{-\pi\alpha y(n^2-1)}.\end{aligned}$$

数值上，

$$\epsilon_{c,1} \le 5.68 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_{c,3} \le 2.27 \cdot 10^{-3}.$$

证明。 我们只证明第一个，第二个的证明非常相似，因此这里省略细节。我们从变形开始

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) &= 2\sum_{n=1} n^2 e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) \\ &= 2e^{-\alpha\pi y}\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2}) \cdot \big(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\alpha\pi y(n^2-1)} \frac{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})}\big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

对于 $\frac{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})}$，有

$$\frac{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})} \le \frac{1+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}}{1-\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}} \tag{4.6}$$

因为对于任意 x

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}} \le \vartheta(\frac{y}{\alpha};x) \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{y}{\alpha}}.$$

(4.5) 和 (4.6) 可得所需结果。

□

引理 4.14。若 $\frac{y}{\alpha} \ge \frac{5}{6}$，则

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) &\ge \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};0) + 2e^{-\pi\alpha y}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})(1-\epsilon_{c,2}), \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) &\ge \vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};0) + 2e^{-\pi\alpha y}\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})(1+\epsilon_{c,4}). \end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,2} &:= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\pi(k^2-1)\frac{y}{\alpha}}}{1-4e^{-3\pi\frac{y}{\alpha}}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi\alpha y(n^2-1)}, \\ \epsilon_{c,4} &:= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-\pi(k^2-1)\frac{y}{\alpha}}}{1-16e^{-3\pi\frac{y}{\alpha}}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi\alpha y(n^2-1)}. \end{aligned}$$

数值上，

$$\epsilon_{c,2} \le 1.23 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_{c,4} \le 1.24 \cdot 10^{-5}.$$

证明。 第二个证明与第一个非常相似，因此这里只给出第一个的证明。

将该表达式变形，可得

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) &= \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi y n^2} \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2}) \\ &= \vartheta_X(\frac{y}{\alpha};0) + 2e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2}) \cdot \big(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\alpha\pi y(n^2-1)} \frac{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})}\big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

对于 $\frac{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})}$，可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{n}{2})}{\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})}\right| &= \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{kn}k^2e^{-k^2\frac{\pi y}{\alpha}}\right|}{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2e^{-k^2\frac{\pi y}{\alpha}}}\\ &\le \frac{\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-(k^2-1)\frac{\pi y}{\alpha}}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2e^{-(k^2-1)\frac{\pi y}{\alpha}}}\\ &\le \frac{\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-(k^2-1)\frac{\pi y}{\alpha}}}{1-4e^{-3\frac{\pi y}{\alpha}}}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

由 (4.7) 和 (4.8) 得到该结果。

□

引理 4.15. 对于 $\frac{y}{\alpha} \ge \frac{3}{2\pi}$，

$$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};0)+y^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\alpha}\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};0) \ge 2\pi y^{\frac{1}{2}}(\frac{\pi y}{\alpha}-\frac{3}{2})e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}.$$

证明。 使用 $\vartheta_X, \vartheta_{XX}$ 的显式表达式，可得

$$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\vartheta_X(\frac{y}{\alpha};0)+y^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\alpha}\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};0) = 2\pi y^{\frac{1}{2}}\cdot\left((\frac{\pi y}{\alpha}-\frac{3}{2})e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}+\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{\pi y}{\alpha}n^4-\frac{3}{2}n^2)e^{-\pi n^2\frac{y}{\alpha}}\right).$$

于是得到该结果。

□

引理 4.16. 对于 $\frac{y}{\alpha} \ge \frac{5}{6}$，

$$\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2}) \le 1, \quad |\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})| \le 2\pi^2e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}.$$

证明。 利用 ϑ, ϑ_{XX} 的显式表达式，可得

$$\begin{aligned}\vartheta(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2}) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^ne^{-n^2\frac{\pi y}{\alpha}}\\ |\vartheta_{XX}(\frac{y}{\alpha};\frac{1}{2})| &= 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^4e^{-n^2\frac{\pi y}{\alpha}}\\ &= 2\pi^2e^{-\frac{\pi y}{\alpha}}(1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}n^4e^{-(n^2-1)\frac{\pi y}{\alpha}})\end{aligned}$$

结论随即得出。

□

4.3. 区域 $\mathcal{R}_d$，$\mathcal{W}(\alpha;y)$ 的估计。 本小节旨在证明

引理 4.17。 假设 $(\alpha,y) \in \mathcal{R}_d$，则 $(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;-\frac{1}{2}+iy) > 0$。

我们将引理 4.17 的证明推迟到后面，并先给出所需的估计如下。

引理 4.18。 假设 $(\alpha,y) \in \mathcal{R}_d$，则 $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy) \ge 0$。

证明。 注意到

$$\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y = y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y).$$

于是由引理4.17可得

$$\partial_y(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy) > 0 \ \text{ for } \ (\alpha,y) \in \mathcal{R}_d. \tag{4.9}$$

另一方面，由 B´etermin [10], 可知

$$(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\mid_{y=\frac{\sqrt{3}}{2}}=0 \text{ for } a>0. \tag{4.10}$$

（4.9）和（4.10）得出该结果。

□

在本小节余下部分，我们旨在证明引理 4.17。我们首先得到关于 $\theta(\alpha;\ z)$ 的一个恒等式，见 [37, 34]。

引理 4.19。有

$$\begin{aligned}(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\theta(\alpha;z)=&(\pi\alpha)^2\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+nx)^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+nx)^2}{y})}\\&-\frac{2\pi\alpha}{y}\sum_{n,m}n^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+nx)^2}{y})}.\end{aligned}$$

以下引理由引理 4.19 推得。

引理 4.20。 我们有关于 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2}+iy)$ 的微分恒等式

$$\begin{aligned}&(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\\=&(\pi\alpha)^2\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\&+\frac{3}{y}\sum_{n,m}n^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}-\frac{5}{2}\pi\alpha\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\&-\frac{2\pi\alpha}{y}\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\end{aligned}$$

由引理 4.20，我们可推出 $(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2}+iy)$ 的下界。

引理 4.21 ($(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\ \frac{1}{2}+iy)$ 的下界)。 假设 $(\alpha,y)\in\mathcal{R}_d$，则

$$(\partial_{yy}+\frac{2}{y}\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq\pi\alpha y^{-4}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}\mathcal{L}_d(\alpha;y),$$

其中

$$\mathcal{L}_d(\alpha;y):=\frac{2\pi\alpha}{y}-5(1+\epsilon_{d,1})+4\pi\alpha(y^2-\frac{1}{4})^2(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y-\frac{3}{4y})}-8(1+\epsilon_{d,2})y^3(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y-\frac{3}{4y})}$$

引理 4.17 由引理 4.21 及后续引理 4.22 得证。引理 4.21 由引理4.20 和引理4.23-4.26得证。

引理 4.22 (引理 4.21 中下界函数的正性)。 假设 $(\alpha,y)\in\mathcal{R}_d$，则

$$\mathcal{L}_d(\alpha;y)>0.$$

证明。 我们将证明分为两种情形，情形 a: $y\geq 1$ 和情形 b: $y\in[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$。对于情形 a: $y\geq 1$，则 $\left(4\pi\alpha(y^2-\frac{1}{4})^2-8(1+\epsilon_{d,2})y^3\right)\geq 0$，因为 $\alpha\geq 1.2$，所以 $\mathcal{L}_d(\alpha;\ y)>0$，这显然成立，因为$\frac{2\pi\alpha}{y}-5(1+\epsilon_{d,1})>0$。

对于情形 b: $y\in[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，经检验可知，对于 $\alpha\geq 1.2$，$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{L}_d(\alpha;\ y)>0$。接着

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_d(\alpha;y)\geq&\frac{2.4\pi}{y}-5(1+\epsilon_{d,1})+4.8(y^2-\frac{1}{4})^2(y+\frac{1}{4y})e^{-1.2\pi(y-\frac{3}{4y})}\\&-8(1+\epsilon_{d,2})y^3(y+\frac{1}{4y})e^{-1.2\pi(y-\frac{3}{4y})}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

(4.11) 中后面给出的显式函数在 $y \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$上的下界为 7，因此结论成立。

□

在 接下来的引理 4.23-4.26中，我们将分析引理4.20中的恒等式的各个部分 .

引理 4.23 （双重求和的下界：第一类）。

$$\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}$$
$$\geq \frac{2}{y^5}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+4(1-\frac{1}{4y^2})^2(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}.$$

证明。 双重求和在

$$(m,n)=\{(1,0),(-1,0)\} \text{ contributing } \frac{1}{y^5}e^{-\pi\frac{\alpha}{y}} \text{ each}$$

and

$$(m,n)=\{(0,1),(0,-1),(1,-1),(-1,1)\} \text{ contributing } (1-\frac{1}{4y^2})^2(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})} \text{ each.}$$

双重求和中的其余各项均为正，因此结论成立。 □

引理 4.24 （双重求和的下界：第二类）。

$$\sum_{n,m}n^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\geq 4e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}.$$

证明。 双重求和可计算为

$$(m,n)=\{(0,1),(0,-1),(1,-1),(-1,1)\} \text{ contributing } e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})} \text{ each.}$$

双重求和中的其余各项均为正，因此结论成立。

□

引理 4.25 （双重求和的上界：第三类）。

$$\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\leq(1+\epsilon_{d,1})\frac{2}{y^4}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+4(1-\frac{1}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})},$$

其中

$$\epsilon_{d,1}\leq 4y^4e^{-\pi\alpha(4y-\frac{1}{y})}+16y^4e^{-4\pi\alpha y}\leq 3.92\cdot 10^{-4}.$$

证明。 我们将双重求和变形为

$$\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}=\sum_{p\equiv q(\mod 2)}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}. \tag{4.12}$$

接着将双重求和拆分为四部分，如下所示：

$$(p,q)\in(a):p=\pm1,q=\pm1;(b):p=0,q=\pm2;(c):p=\pm2,q=0 \text{ and } (d):p\geq 2,q\geq 2.$$

继续利用（4.12），可得

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}=&4(1-\frac{1}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+\frac{2}{y^4}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+8e^{-4\pi\alpha y}\\&+\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq 2,q\geq 2}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

（4.13）中的最后一项非常小，可以通过以下方式控制：

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq 2,q\geq 2}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\
\leq&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq 2,q\geq 2}(p^4+\frac{q^4}{16y^4})e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\
\leq&\sum_{p\geq 2}p^4e^{-\pi\alpha yp^2}\sum_{q\geq 2}e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}+\frac{1}{16y^4}\sum_{p\geq 2}e^{-\pi\alpha yp^2}\sum_{q\geq 2}q^4e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}\\
\leq&16e^{-\pi\alpha(4y+\frac{1}{y})}\cdot d(\alpha;y).
\end{aligned}\tag{4.14}$$

此处 $d(\alpha;y)$ 由某个常数所界，且具有如下表达式

$$d(\alpha;y):=\sum_{p\geq 2}(\frac{p}{2})^4e^{-\pi\alpha y(p^2-4)}\sum_{q\geq 2}e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}(q^2-4)}+\frac{1}{16y^4}\sum_{p\geq 2}e^{-\pi\alpha y(p^2-4)}\sum_{q\geq 2}(\frac{q}{2})^4e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}(q^2-4)}.\tag{4.15}$$

粗略地说，有

$$d(\alpha;y)\leq 2.\tag{4.16}$$

因此，由（4.13）、（4.14）和（4.16），

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\leq&4(1-\frac{1}{4y^2})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+\frac{2}{y^4}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}\\
&+8e^{-4\pi\alpha y}+32e^{-\pi\alpha(4y+\frac{1}{y})}.
\end{aligned}\tag{4.17}$$

证明完毕。

□

引理 4.26（双重求和的上界：第四类）。

$$\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\leq 4(1+\epsilon_{d,2})(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})},$$

其中

$$\epsilon_{d,2}\leq 16e^{-3\pi\alpha y}(1+e^{-\frac{3\pi\alpha}{4y}})\leq 9.27\cdot 10^{-4}.$$

证明。 我们首先将双重求和变形为

$$\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}=\sum_{p\equiv q(\mod 2)}p^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}.\tag{4.18}$$

接着将双重求和拆分为四部分，得

$$(p,q)\in(a):p=\pm 1,q=\pm 1;(b):p=0,q=\pm 2;(c):p=\pm 2,q=0\ \text{ and }\ (d):p\geq 2,q\geq 2.$$

于是由（4.18），

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}=&4(y+\frac{1}{4y})e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+16ye^{-4\pi\alpha y}\\
&+\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq 2,q\geq 2}p^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}
\end{aligned}\tag{4.19}$$

（4.19）中的最后一项非常小，可以通过以下方式控制 □

$$\begin{aligned}&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq 2,q\geq 2} p^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\ \leq & y\sum_{p\geq 2}p^4e^{-\pi\alpha p^2}\sum_{q\geq 2}e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}+\frac{1}{4y}\sum_{p\geq 2}p^2e^{-\pi\alpha p^2}\sum_{q\geq 2}q^2e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

经过一些简单的变形后，由（4.19）和（4.20）即可得到该结果，此处省略细节。

4.4. 区域 $\mathcal{R}_a$的估计 $(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)$。 本节旨在证明

引理 4.27。 假设$(\alpha,y)\in\mathcal{R}_a$，则$(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq 0$。 -

由引理 4.27，可得

引理 4.28。 假设$(\alpha,y)\in\mathcal{R}_a$，则 $\partial_y\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq 0$。

证明。 注意到

$$\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha}=\partial_\alpha(y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y)). \tag{4.21}$$

由引理 3.5，可得

$$y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\mid_{a=1}=0\ \text{ for }\ y>0. \tag{4.22}$$

然后由引理4.27、（4.21）和（4.22）

$$\partial_y(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq 0\ \text{ for }\ (\alpha,y)\in\mathcal{R}_a. \tag{4.23}$$

另一方面，由 B´etermin [10]，的命题 3.4，可知

$$(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\mid_{y=\frac{\sqrt{3}}{2}}=0\ \text{ for }\ a>0. \tag{4.24}$$

于是由（4.23）和（4.24），

$$(y^2\partial_y)\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq 0\ \text{ for }\ (\alpha,y)\in\mathcal{R}_a. \tag{4.25}$$

（4.25）即得所需结果。

□

还需证明引理 4.27。我们从引理 4.20 出发。经过简单计算，可得

引理 4.29 （关于 $(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)$ 的恒等式）。

$$\begin{aligned}(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)=&\frac{9}{2}\pi^2\alpha\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\ &+\frac{2\pi^2\alpha}{y}\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\ &-\frac{5\pi}{2}\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\ &-\frac{5\pi}{y}\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\ &-\pi^3\alpha^2\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\end{aligned}$$

基于引理 4.29，我们接着陈述以下引理，并将其证明推迟到本小节后面部分。

引理 4.30 （$(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)$ 的下界函数）。 假设 $(\alpha,y)\in\mathcal{R}_a$，则

$$(\partial_{yy\alpha}+\frac{2}{y}\partial_{y\alpha})\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(\alpha;\frac{1}{2}+iy)\geq\frac{\pi}{y^4}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}\cdot\mathcal{L}_a(\alpha;y).$$

Here

$$\mathcal{L}_a(\alpha;y)=\frac{9\pi\alpha}{y}-5-\frac{2\pi^2\alpha^2}{y^2}+H(\alpha;y)e^{-\pi\alpha(y-\frac{3}{4y})},$$

and

$$\begin{aligned}H(\alpha;y)=&18\pi\alpha(y^2-\frac{1}{4})^2(y+\frac{1}{4y})+8\pi\alpha y^3(y+\frac{1}{4y})^2\\&-10(y^2-\frac{1}{4})^2-20y^3(y+\frac{1}{4y})-4\pi^2\alpha^2(y^2-\frac{1}{4})^2(y+\frac{1}{4y})^2.\end{aligned}$$

引理 4.31 （引理 4.30中下界函数的正性）。 假设 $(\alpha,y)\in\mathcal{R}_a$，则

$$\mathcal{L}_a(\alpha;y)\geq\frac{1}{2}>0.$$

证明。 由于 $\mathcal{R}_a$ 是一个小的有限区域，我们将其划分为14个子区域以得到结果 t. □

根据引理 4.30和 4.31，可得引理 4.27。

尚需证明引理 4.30。我们从引理4.29出发。引理 4.29中有五类双重求和，其中三类已在引理 4.23、4.25-4.26中进行了估计。本小节后半部分将估计剩余两类。由引理 4.30 可结合引理 4.23、4.25-4.26以及 4.32-4.33得出。

引理 4.32 （双重求和的下界）。

$$\sum_{n,m}n^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\geq4(y+\frac{1}{4y}))^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}.$$

证明。 双重求和可在以下位置求得

$$(m,n)=\{(0,1),(0,-1),(1,-1),(-1,1)\}\ \text{contributing}\ (y+\frac{1}{4y}))^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}\ \text{each.}$$

双重求和中的其余各项均为正，因此结论成立 s.

□

引理 4.33 （双重求和的上界）。

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\\leq&\frac{2}{y^6}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+4(1-\frac{1}{4y^2})^2(y+\frac{1}{4y})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+3\cdot16^2e^{-4\pi\alpha y}.\end{aligned}$$

证明。 我们将双重求和变形为

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\=&\sum_{p\equiv q(\mod 2)}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

接着将双重求和拆分为四部分：

$$(p,q)\in(a):p=\pm1,q=\pm1;(b):p=0,q=\pm2;(c):p=\pm2,q=0\ \text{ and }\ (d):p\geq2,q\geq2.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p\equiv q(\mod 2)}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\=&4(1-\frac{1}{4y^2})^2(y+\frac{1}{4y})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+\frac{2}{y^6}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+2\cdot16^2e^{-4\pi\alpha y}\\+&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq2,q\geq2}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

(4.27) 中的最后一项很小，可以由

$$\begin{aligned}&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq2,q\geq2}(p^2-\frac{q^2}{4y^2})^2(yp^2+\frac{q^2}{4y})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\=&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq2,q\geq2}y^2(p^4-\frac{q^4}{16y^4})^2e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\\leq&\sum_{p\equiv q(\mod 2),p\geq2,q\geq2}y^2(p^8+\frac{q^8}{16^2y^8})e^{-\pi\alpha(yp^2+\frac{q^2}{4y})}\\\leq&y^2\sum_{p\geq2}p^8e^{-\pi\alpha yp^2}\sum_{q\geq2}e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}+\frac{1}{16^2y^6}\sum_{p\geq2}e^{-\pi\alpha yp^2}\sum_{q\geq2}q^8e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}q^2}\\\leq&16^2y^2e^{-\pi\alpha(4y+\frac{1}{y})}\cdot d_2(\alpha;y)\end{aligned}\tag{4.28}$$

这里， $d_2(\alpha;y)$ 由某个常数控制，且其表达式如下

$$d_2(\alpha;y):=\sum_{p\geq2}(\frac{p}{2})^4e^{-\pi\alpha y(p^2-4)}\sum_{q\geq2}e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}(q^2-4)}+\frac{1}{16y^4}\sum_{p\geq2}e^{-\pi\alpha y(p^2-4)}\sum_{q\geq2}(\frac{q}{2})^4e^{-\frac{\pi\alpha}{4y}(q^2-4)}.\tag{4.29}$$

粗略地说，有

$$d(\alpha;y)\leq2.\tag{4.30}$$

因此，由 (4.27)、(4.28) 和 (4.30)，

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}(n^2-\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y^2})^2e^{-\pi\alpha(yn^2+\frac{(m+\frac{n}{2})^2}{y})}\\\leq&4(1-\frac{1}{4y^2})^2(y+\frac{1}{4y})^2e^{-\pi\alpha(y+\frac{1}{4y})}+\frac{2}{y^6}e^{-\frac{\pi\alpha}{y}}+2\cdot16^2e^{-4\pi\alpha y}\\&+2\cdot16^2y^2e^{-\pi\alpha(4y+\frac{1}{y})}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

于是所需结论得证。

□

5. Proof of Theorems 1.1-1.2

定理1.1的证明。

情形 1： $b=\frac{1}{2\pi}$。这由定理3.3 和4.1。情形 2： $b<\frac{1}{2\pi}$。

由引理3.1 和情形 1 可证。

情形 3： $b>\frac{1}{2\pi}$。由引理3.2。事实上，根据引理3.2，有

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_b(\alpha;z)&=\alpha^{-\frac{3}{2}}\sqrt{y}\cdot\Big(\frac{1}{2\pi}-b+o(1)\Big)\\&\mapsto-\infty,\quad\text{if}\quad b>\frac{1}{2\pi},\quad\text{as}\quad y\to+\infty\end{aligned}$$

证明了不存在性结果。

定理证明1.2。

情形 1：$b=\bar{\sqrt{a}}$。通过简单观察，可以得出泛函 $\theta(\alpha;\ z)-\sqrt{a}\theta(a\alpha;\ z)$ 与 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(x\alpha;z)$ 之间的关系。事实上，对参数 t 应用微积分基本定理，可得

$$\theta(\alpha;z)-\sqrt{a}\theta(a\alpha;z)=-\int_1^a \partial_t(\sqrt{t}\theta(t\alpha;z))dt=\pi\int_1^a \mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(t\alpha;z)dt. \tag{5.1}$$

见 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2\pi}}(t\alpha;\ z)$ 见（3.2）。然后由定理 1.1（或定理 3.3）以及（5.1）即可得证。

情形 2：$b<\bar{\sqrt{a}}$。

$$\Big(\theta(\alpha;z)-b\theta(a\alpha;z)\Big)=\Big(\theta(\alpha;z)-\sqrt{a}\theta(a\alpha;z)\Big)+(\sqrt{a}-b)\theta(a\alpha;z). \tag{5.2}$$

那么由（5.2）、情形 1 以及

$$\min_{z\in\mathbb{H}}\theta(\alpha;z)\ \text{ is achieved at }\ e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{5.3}$$

由 [37]。

情形 3：$b>\bar{\sqrt{a}}$。由引理 3.4，对于 $\forall\alpha>0$,

$$\begin{aligned}\theta(\alpha;z)-b\theta(a\alpha;z)&=\sqrt{\frac{y}{a\alpha}}\cdot\Big(\sqrt{a}-b+o(1)\Big)\\&\mapsto-\infty,\quad\text{if}\quad b>\sqrt{a},\quad\text{as}\quad y\to+\infty\end{aligned}$$

这证明了不存在性结果。

致谢。 S. Luo 的研究部分受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12261045、12001253）和江西省双千计划（jxsq2019101048）的资助。J. Wei 的研究部分受到加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。

声明：不存在利益冲突。
数据可用性：本文稿没有相关数据。

References

[1] S. Adams、M. Baake、M. Heydenreich，《结晶数学》迷你研讨会。 *Oberwolfach Rep.* 16 (2019)，第 2 期，第 1071-1111 页。[2] A. A. Abrikosov，诺贝尔讲座：II型超导体与涡旋晶格。 *Reviews of modern physics* 76 2004 975 ( )，第3期，第 页。

[3] T. M. Apostol。《数论中的模函数与狄利克雷级数》。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1976。[4] R. Bauerschmidt、P. Bourgade、M. Nikula、H.-T. Yau，二维库仑等离子体：准自由近似与中心极限定理。 *Adv. Theor. Math. Phys.* 23 (2019)，第 4 期，841-1002。[5] S. Bernstein，论绝对单调函数。（法语） *Acta Math.* 52 (1929)，第 1 期，1-66。[6] L. B´etermin 和 P. Zhang。Lennard-Jones势与托马斯-费米情形下布拉维晶格的每粒子能量极小化。 $\mathbb{R}^2$ *Commun. Contemp. Math.*，17(6) (2015)，1450049。[7] L. B ´ *SIAM Journal on* etermin, *Mathematical Analysis* 48 5 2016 3236 269 二维θ函数与布拉维晶格的结晶，，( ) ( )，-。[8] L. B´etermin 和 M. Petrache，Mircea 使用降维技术极小化晶格上的θ函数，*J. Math. Phys.* 58 (2017)，第 7 期，071902，共 40 页。[9] L. B ´ ü *Lett.* etermin 和 H. *Math. Phys.* 108 2018 10, 2213 2228 Kn pfer，空间延展粒子相互作用的最优晶格构型。( )，第 - 期。[10] L. B´etermin，二维晶格能量的局部变分研究及其在Lennard-Jones型相互作用中的应用，*Nonlinearity*，31(9) (2018)，3973-4005。[11] L. B ´ *Anal. Math. Phys.* 9 2019 1, etermin，相互作403 426 用能的立方晶格局部最优性。( )，第 - 期。[12] L. B ´ *Journal of* etermin，二维和 *Mathematical Physics* 60 10 2019 102901 三维莫尔斯势能的极小化晶格结构，，( ) ( )，。[13] L. B´etermin，极小软晶格θ函数。 *Constr. Approx.* 52 (2020)，第 1 期，115-138。

[14] L. B´etermin 和 M. Petrache，非完全单调相互作用势的最优与非最优晶格， *Analysis and Mathematical Physics* 9 (4):2033-2073，2019。[15] L. B´etermin, *Journal of Physics A* 54 24 245202, 2021 具有指定键的晶体晶格结构中的能量基态问题，( )：。[16] L. B´etermin，周期性缺陷阵列对晶格能量极小化构型的影响。 *Ann. Henri Poincaré* 22 (2021)，第 9 期，2995-3023。[17] L. B´etermin，Lennard-Jones型晶格能量中三角晶格的最优性: 一种计算机辅助方法， *arXiv:2104.09795.* L. Betermin、M. Faulhuber 和 S. Steinerberger，高斯晶格和的变分原理， *arXiv:2110.006008v1.*[18] L. B´etermin、L. ˇSamaj 和 I. Travˇenec，Riesz型与Lennard-Jones型能量的三维晶格基态， *arXiv:2107.14020.*[19] X. Blanc 和 M. Lewin，《结晶猜想：综述》。 *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, *EMS* 2 2 306 ( )2015, 255- 。[20] X. Blanc，库仑气体与Riesz气体：已知与未知。 *J. Math. Phys.* 63，061101 (2022)，纪念弗里曼·戴森的论文特辑。[21] J. W. S. Cassels，论Rankin关于Epstein ζ函数的问题， *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 4(1959)，73-80。（勘误，见同刊第 6 卷 (1963)，116。）[22] J. A. Ca˜nizo、J. A. Carrillo 和 F. S. Patacchini，相互作用能存在紧支撑全局极小值， *Arch. Rat. Mech. Anal.* 217，第 1197-1217 页 (2015)。[23] H. Cohn、A. Kumar、S. Miller、D. Radchenko 和 M. Viazovska，E8晶格与Leech晶格的普适最优性及插值公式。 *Ann. of Math.* (2) 196 (2022)，第 3 期，983-1082。[24] P. H. Diananda，关于Epstein ζ函数的两个引理的注记， *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 6 (1964)，202-204。[25] V. Ennola，关于Epstein ζ函数的一个引理， *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 6 (1964)，198-201。[26] V. Ennola，论一个有关Epstein ζ函数的问题， *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60(1964)，855-875。[27] X. Chen 和 Y. Oshita。模函数在非局部变分问题中的一个应用。 *Arch. Rat. Mech. Anal.* 186 1 2007 109 132 , ( ) ( )，- 。[28] P. Cohen，《Dedekind ζ函数与量子统计力学》，ESI 617(1998)。[29] H. Cohen，《数论》。第二卷：解析与现代工具。《数学研究生教材》第 240 卷。Springer，纽约，2007。xxiv+596 页。ISBN：978-0-387-49893-5。[30] R. Evans。Hecke模群的一个基本区域。 *J. Number Theory*，5(2) (1973)，108-115。[31] S. Luo、X. Ren 和 J. Wei，双组分相互作用系统中的非六角晶格， *SIAM J. Math. Anal.*，52 2 2020 1903 1942 ( ) ( )，- 。[32] S. Luo；J. Wei，θ函数和的极小值及其在Mueller-Ho猜想中的应用。 *Arch. Ration. Mech. Anal.* 243 2022 199 139- 。[33] S. Luo；J. Wei，θ函数差的极小值及其在六角结晶中的应用， *Ann. Math.* 即将出版。[34] S. Luo、J. Wei 和 W. Zou，完全单调势的普适最优晶格相变与能量极小化子，arXiv。[35] S. Luo；J. Wei，Epstein ζ函数差的极小值及Lennard-Jones晶格能量的精确解， *arXiv:2212.10727.* H. Montgomery，极小θ函数。 *Glasgow Math. J.* 30 (1988)，75-85。[37] [38] P. Sarnak 和 A. Str¨obergsson，Epstein ζ函数的极小值与平坦环面的高度。( )，- 。[39] C. Radin，低温与结晶对称性的起源， *Invent. Math.* 165 2006 115 151 *International Journal of Modern Physics B* 05 1157 1191 1987 , 第 01 卷，第 n06 期，第 - 页 ( )。[40] C. Radin，局部来源产生的全局有序。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 25 (1991)，第 2 期，335-364。[41] R. A. Rankin，Epstein ζ函数的一个极小值问题， *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 1 (1953)，149-158。[42] E. Sandier 和 S. Serfaty，Ginzburg-Landau极小化构型中的涡旋图样。 *XVIth International Congress on Mathematical Physics* 246 264, 2010 , - World Sci. Publ.，。[43] E. Sandier 和 S. Serfaty，从Ginzburg-Landau模型到涡旋晶格问题。 *Comm. Math. Phys.* ( )，- 。313 2012 635 743 [44] S. Serfaty，Ginzburg-Landau涡旋、库仑气体与Abrikosov晶格， *Comptes-Rendus Physique* 15 2014 6 ( )，第 期。[45] S. Serfaty，具有库仑相互作用的点系。 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Rio de Janeiro 2018.* 935 977, 2018 第一卷。大会报告，- World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，。[46] D. Schumayer、D. Hutchinson，专题综述：黎曼猜想的物理学， *Reviews of Modern Physics*，第 83 卷，2011 年 4—6 月 - APS。[47] I. Sigal 和 T. Tzaneteas，Abrikosov涡旋晶格的稳定性， *Adv. Math.* 326 (2018)，108-199。MR3758428。

（S. Luo） School of Mathematics and statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330022, China

(J.Wei) Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, B.C., Canada, V6T1Z2*Email address* luosp1989@163.com , S. Luo: , J. Wei: jcwei@math.ubc.ca
Email address