arXiv:2302.05054v2 [math.RT] 4 Jul 2023

适当 DG 代数奇点范畴的局部化定理

HAIBO JIN、DONG YANG 和 GUODONG ZHOU

Dedicated to Bernhard Keller on the occasion of his 60th birthday

Abstract. 给定诺特交换环上的三个适当 dg 代数构成的一个再拼接，例如，三个作为基环上的模有限生成的代数构成的再拼接，并且该再拼接向下延伸一步，我们证明它们的奇点范畴存在一个短正合列。这使我们能够重获并推广有限维代数奇点范畴的一些已知结果。

Contents

1. 引言 1
2. DG 代数的导出范畴与再拼接 3
3. 三角商的短正合序列 4
4. 奇异范畴的局部化定理 5
5. AGK-范畴的局部化定理 16
6. 定理 4.1 的推广 7
7. 在代数几何中的应用 10
参考文献 25

1. Introduction

对于右诺特环，其奇异范畴（[8, 34]）定义为 A 三角商

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) := \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}A)/\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A),$$

其中， $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}A)$ 和 $\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A)$ 分别是有限生成右A-模的有界导出范畴，以及有限生成射影右 A-模的有界同伦范畴。它衡量了 A 的“奇异”程度 [34], ，并捕捉了 A [8]的稳定同调特征。本文证明如下局部化定理。

定理 1.1. 设 k 是一个交换诺特环，且 A、B 和 C 是有限生成 k-模的 k-代数。假设存在一个无界导出范畴的再拼接，其意义如 [4]所述

$$\mathscr{D}(B) \rightleftarrows \mathscr{D}(A) \rightleftarrows \mathscr{D}(C) \tag{1.1}$$

它以显而易见的方式向下延伸一步。然后第二行诱导出一个三角范畴的短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C).$$

Mathematics Subject Classification(2020): 18G80, 16E45*Keywords*: DG 范畴，奇异范畴，再拼接，幂等元，同调满射

这里，如果三角范畴的一个序列 $\mathcal{T}' \xleftarrow{F} \mathcal{T} \xleftarrow{G} \mathcal{T}''$ 满足以下条件，则称其为短正合列（模去直和项）：G 是全忠实的， $F\circ G=0$ 并且诱导函子$\overline{F}\colon \mathcal{T}/\mathcal{T}''\to\mathcal{T}'$ 是一个等价（模去直和项）。定理 1.1 的一个推论是

推论 1.2. 设 B 和 C 是作为 k-模有限生成的 k-代数，且 M 是一个两侧均有限生成的 C-B-双模。考虑矩阵代数 $A=\begin{pmatrix} B & 0\\ M & C\end{pmatrix}$。则存在一个三角范畴的短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)\longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)\longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C).$$

定理 1.1 和推论 1.2 使我们能够恢复并推广奇点范畴的一些已知结果 [9, 10, 11, 28, 37]。此外，作为定理 1.1的一个应用，文献 [17]研究了有限维分次单项式代数的奇点范畴。

我们在适当 dg 代数这一更一般的框架下陈述并证明定理1.1 （定理 4.1），并给出同调光滑 dg 代数的 AGK 范畴的一个类似结果（定理5.1）。我们还确立了进一步的推广。

定理 1.3 (定理6.1)。 假设给定以下数据：

- $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$、 $\mathcal{T}''$ 是紧生成三角 k-范畴，并且存在一个关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$的$\mathcal{T}$的再拼接，其中 $\mathcal{T}$是代数的；
- $\mathcal{S}$、 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 分别是 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$的三角子范畴，且分别包含 $\mathcal{T}^c$、 $\mathcal{T}'^c$ 和$\mathcal{T}''^c$；
- 再拼接的第一行限制为一个除直和项外的短正合列$\mathcal{S}'\leftarrow\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}''$。

那么，再拼接的第一行会诱导出一个除直和项外的三角范畴短正合列：

$$\mathcal{S}'/\mathcal{T}'^c\longleftarrow \mathcal{S}/\mathcal{T}^c\longleftarrow \mathcal{S}''/\mathcal{T}''^c$$

I在第 7 节中，我们通过给出定理 1.3 在代数几何中的一个应用 a new 以下结果的证明。

定理 1.4 ([10, 定理 1.3])。 设 X 是满足 Orlov 条件（ELF）的概形。设$U\overset{i}{\hookrightarrow} X$ 为一个开子概形，并记 $Z=X\backslash U$。则存在如下三角范畴的短正合列：

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U)\xleftarrow{i^*}\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)\xleftarrow{j_!}\mathscr{D}_{\mathrm{sg},Z}(X).$$

记号。下文中，设 k 为交换环。设 $\mathcal{T}$为一个三角 k-范畴。对于 $\mathcal{T}$中的对象集合 $\mathcal{S}$，记 thick$(\mathcal{S})$ $=\mathrm{thick}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$ 为包含 $\mathcal{S}$ 且对取直和项封闭的$\mathcal{T}$ 最小三角子范畴。对于三角函子$F\colon$ $\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$，记

$$\mathrm{Ker}(F):=\{X\in\mathcal{T}\mid F(X)\cong 0\}.$$

假设 $\mathcal{T}$具有无限直和。若对象 X 属于 $\mathcal{T}$，则称其为紧对象；如果 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,?)$ 与无限直和交换。我们记 $\mathcal{T}^c$ 为由紧对象组成的 $\mathcal{T}$子范畴。对于 $\mathcal{T}$中的对象集合 $\mathcal{S}$，记 Loc$(\mathcal{S})$ $=\mathrm{Loc}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$ 为包含 $\mathcal{S}$ 且对取直和封闭的$\mathcal{T}$最小三角子范畴。

致谢：第一作者获得了德国科学基金会（DFG）通过 SFB/TRR 191 几何、代数与动力学中的辛结构项目（项目编号 281071066–TRR 191）提供的部分资助。第一作者和第三作者获得了国家自然科学基金（编号：12071137）、教育部 MEA 重点实验室以及上海 PMMP 重点实验室（编号：22DZ2229014）的资助。第二作者获得了国家自然科学基金（编号：12031007）以及德国科学基金会 SPP 1388 项目（YA297/1-1 和 KO1281/9-1）的资助。

2. Derived categories of dg algebras and recollements

本节回顾并建立关于微分分次代数的导出范畴和再拼接的一些基本结果。

2.1. 微分分次代数的导出范畴。

我们沿用[20, 22]。令 A 为一个微分分次 k-代数。所谓微分分次 A-模，指右微分分次 A-模；我们将左微分分次 A-模与右微分分次 A^{op}-模等同，其中 A^{op} 是 A的相反微分分次代数。一个 k-代数 A 可视为集中在 0 次的微分分次 k-代数。在这种情况下，微分分次 A-模恰好是一个由 A-模组成的复形。

对于两个微分分次 A-模 M和 N，令 $\mathcal{H}om_A(M,N)$ 表示 k-模的复形，其中 $\mathcal{H}om^p_A(M,N)$ 由次数为 p 的齐次 A-线性映射 $M\to N$ 组成，其微分将$f\in\mathcal{H}om^p_A(M,N)$映为 $d_N\circ f-(-1)^p f\circ d_M$。微分分次 A-模的 DG 范畴 $\mathscr{C}_{\mathrm{dg}}(A)$ 以 DGA-模为对象，而对于两个微分分次 A-模

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathrm{dg}}(A)}(M,N):=\mathcal{H}om_A(M,N).$$

dg A-模的同伦范畴 $\mathscr{K}(A)$ 的对象是 dg A-模，而对于两个 dg$A$-模

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A)}(M,N):=\mathrm{H}^0\mathcal{H}om_A(M,N).$$

若对任意 $p\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{H}^p(M)$ 均为零，则称 dg A-模 M 为无环。dg$A$-模的导出范畴 $\mathscr{D}(A)$ 是 $\mathscr{D}(A)$ 对无环 dg A-模全子范畴的三角商。令 $\mathsf{per}(A):=\mathsf{thick}_{\mathscr{D}(A)}(A_A)$，称为 A 的完美导出范畴。于是 $\mathscr{D}(A)$ 存在无限直和，并由 A_A 紧生成；且 $\mathsf{per}(A)=\mathscr{D}(A)^c$（参见 [20, 第 5] 节）。若 A 是一个 k-代数，将其视为集中在 0 次的 dg k-代数，则 $\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(\mathrm{Mod}A)$ 恰为由所有 A-模构成的范畴 $\mathrm{Mod}A$ 的无界导出范畴，并且从有限生成投射 A-模的有界同伦范畴 $\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A)$ 到 $\mathsf{per}(A)$ 存在一个典范的三角等价。

若 dg A-模 P 满足：$\mathcal{H}om_A(P,?)$ 将无环 dg A-模映为无环的 k-模复形，则称其为 $\mathscr{K}$-投射的。例如，秩为 1 的自由 dg A-模 A_A 是 $\mathscr{K}$-投射的。由 [20, 定理 3.1] 可知，对于任意 dg A-模 M，总存在一个 dg A-模的拟同构$P_M\to M$，其中 P_M 是 $\mathscr{K}$-投射的。这样的拟同构称为 M的$\mathscr{K}$-投射分解。若 P是一个 $\mathscr{K}$-投射 dg A-模，且 N是任意 dg A-模，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(P,N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A)}(P,N)=\mathrm{H}^0\mathcal{H}om_A(P,N). \tag{2.1}$$

特别地，对于 $p\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{Hom}^{\mathscr{D}(A)}(A,A[p])=\mathrm{H}^p(A)$。

2.1.1. 导出函子。

设 A 和 B 是两个 dg k-代数，X 是一个 dg B-A-双模。则存在一对三角函子伴随对

$$\mathscr{D}(A)\underset{\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,?)}{\overset{?\otimes^{\mathbf{L}}_B X}{\rightleftarrows}}\mathscr{D}(B).$$

假设 X_A 是 $\mathscr{K}$-投射的，且 $X_A\in\mathsf{per}(A)$。那么根据 [20, 引理 6.2], , 存在一个三角函子之间的同构 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,?)\cong?\otimes^{\mathbf{L}}_A X^{\mathrm{tr}}$，其中 $X^{\mathrm{tr}}=X^{\mathrm{tr}_A}:=\mathcal{H}om_A(X,A)$。下面的引理是显然的。

引理 2.1. 假设 X_A 是 $\mathscr{K}$-投射的，且 $X_A\in\mathsf{per}(A)$。那么存在一个由三角函子构成的伴随三元组

$$\mathscr{D}(A)\underset{\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^{\mathrm{tr}},?)}{\overset{?\otimes^{\mathbf{L}}_B X}{\overset{?\otimes^{\mathbf{L}}_A X^{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}}}\mathscr{D}(B).$$

我们将这个三元组称为由 X 诱导的伴随三元组。

下面的引理是 [3, 引理 2.8 (i)⇒(ii)] 的推广。证明类似，因此略去。

Le引理 2.2. 假设 ${}_BX$ 是 $\mathscr{K}$-投射的，且 ${}_BX \in$ 属于 per(B^{op})。那么 $?\otimes^{\mathbf{L}}_B X\colon \mathscr{D}(B) \to \mathscr{D}(A)$ 具有一个左伴随 $?\otimes^{\mathbf{L}}_A X^{\mathrm{tr}_{B^{\mathrm{op}}}}$。

设 M 是一个 dg A-模，并令 $\mathcal{E}nd_A(M) := \mathcal{H}om_A(M,M)$。于是 M 自然成为一个 dg $\mathcal{E}nd_A(M)$-A-双模。下面的引理是众所周知的。

引理 2.3. 若 $M_A \in$ 属于 per(A) 且 M_A 是 $\mathscr{K}$-投射的，则三角函子 $?\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{E}nd_A(M)} M\colon \mathscr{D}(\mathcal{E}nd_A(M)) \to \mathscr{D}(A)$ 是全忠实的。

2.1.2. 有限生成导出范畴。A

表示由满足 $\mathrm{H}^*(M)$ 在 k 上有限生成的 dg$A$-模 M 构成的 $\mathscr{D}(A)$ 的满子范畴。这是 $\mathscr{D}(A)$ 的一个三角子范畴。若 A 是一个 k-代数（视为集中于 0 次的 dg k-代数），且作为 k-模有限生成，则存在自然的三角等价 $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}A) \to \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$。当 k 是域时，我们也将此范畴记为 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A)$。以下对 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 的描述由 d´evissage 得到，与 [3, 引理 2.4(a)] 类似。

(4)
假设 k 是诺特的。令 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}$

引理 2.4. 设 A 是一个 dg k-代数。那么对于 $X \in \mathscr{D}(A)$，以下条件等价：

(i) $X \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$，(ii) 对任意 $P \in$ per(A)，H^*导出 $\mathrm{Hom}_A(P,X)$ 在 k 上有限生成，即 $\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(P, X[p])$ 在 k 上有限生成。此处我们将 P 视为 dg k-A-双模。(iii) 对 per(A) 的一个经典生成元 T，H^*导出 $\mathrm{Hom}_A(T,X)$ 在 k 上有限生成（即 thick(T) $=$per(A）。

根据这一描述，我们有

引理 2.5. 设 A, B 是 dg k-代数。设 (F,G) 是其导出范畴之间的三角函子伴随对：$\mathscr{D}(A) \rightleftarrows \mathscr{D}(B)$。若 F(per(A)) $\subset$ per(B)，则 $G(\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B)) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$。此外，若 $F(A)$ 是 per(B) 的经典生成元，则 G 检测 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}$；也就是说，对于 $N \in \mathscr{D}(B)$，若$G(N) \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$，则 $N \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B)$。

证明. 对于 $N \in \mathscr{D}(B)$，我们有

$$\mathrm{H}^*(G(N)) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(A, G(N)[p]) \cong \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(F(A), N[p]).$$

若 $F(A) \in$ per(B) 且 $N \in \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)$，则由引理 2.4 可知，该 k-模是有限生成的，这表明 $G(N) \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$。若 $F(A)$ 是 per(B) 的经典生成元且 $G(N) \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$，即 thick($F(A)$) $=$ per(B)，则由引理 2.4 可得 $N \in \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B)$。□

2.1.3. 中山函子。

设 k 是一个域，并令 A 为一个微分分次 k-代数。考虑中山函子

$$\nu = \nu_A = D\mathcal{H}om_A(?, A)\colon \mathscr{C}_{\mathrm{dg}}(A) \to \mathscr{C}_{\mathrm{dg}}(A)$$

及其左导出函子

$$\mathbf{L}\nu = \mathbf{L}\nu_A\colon \mathscr{D}(A) \to \mathscr{D}(A).$$

显然，$\mathbf{L}\nu(A) = DA$。因此，$\mathbf{L}\nu$ 限制为一个三角函子

$$\mathbf{L}\nu\colon \mathsf{per}(A) \to \mathsf{thick}(DA),$$

若对任意 $p \in \mathbb{Z}$，H^pA 都是有限维的，则它是一个三角等价。此外，我们有 Auslander–Reiten 公式，即一个双函子同构

$$D\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(N, \mathbf{L}\nu(M))$$

对于 $M \in$per(A) 和 $N \in \mathscr{D}(A)$（参见 [20, 第 10] 节或 [18, 第 2 节3]）。

引理 2.6. 设 A 和 B 是 dg k-代数，并假设存在一个三角函子的伴随三元组

$$\mathscr{D}(B) \underset{H}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \underset{}{\overset{G}{\rightarrow}} \mathscr{D}(A).$$

(a) F限制为一个三角函子 $F|_{\mathsf{per}(A)}\colon \mathsf{per}(A) \to \mathsf{per}(B)$，并且存在三角函子之间的一个同构

$$(H \circ \mathbf{L}\nu_A)|_{\mathsf{per}(A)} \cong (\mathbf{L}\nu_B \circ F)|_{\mathsf{per}(A)}\colon \mathsf{per}(A) \to \mathscr{D}(B).$$

(b) H 限制为一个三角函子 $H|_{\mathsf{thick}(DA)}\colon \mathsf{thick}(DA) \to \mathsf{thick}(DB)$，且下图在三角函子同构意义下交换

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{per}(B) & \xleftarrow{F} & \mathsf{per}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}\nu_B} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}\nu_A} \\ \mathsf{thick}(DB) & \xleftarrow{H} & \mathsf{thick}(DA) \end{array}$$

(c) 如果 F是一个三角等价，那么 $F|_{\mathsf{thick}(DA)}\colon \mathsf{thick}(DA) \to \mathsf{thick}(DB)$ 是一个三角等价。

证明。 (a) 首先，根据下文的引理 2.10 ， F 将紧对象映射为紧对象，即F限制为一个三角函子 $F|_{\mathsf{per}(A)}\colon \mathsf{per}(A) \to \mathsf{per}(B)$。现在，对于$M \in \mathsf{per}(A)$ 和 $N \in \mathscr{D}(B)$ 存在同构，

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(N, H \circ \mathbf{L}\nu_A(M)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(G(N), \mathbf{L}\nu_A(M)) \\ &\cong D\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(M, G(N)) \\ &\cong D\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(F(M), N) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(N, \mathbf{L}\nu_B \circ F(M)), \end{aligned}$$

它们关于 M 和 N 是函子性的，并且与移位函子交换。

(b) 鉴于 (a)，只需证明 $H(DA) \in \mathsf{thick}(DB)$；这同样由 (a) 得出： $H(DA) = H \circ \mathbf{L}\nu_A(A) \cong \mathbf{L}\nu_B \circ F(A) \in \mathsf{thick}(DB)$。

(c) 若 F 是一个等价，则 $F \cong H$ ，因而由 (b) 可知 $F(\mathsf{thick}(DA)) \subset \mathsf{thick}(DB)$。当然，限制 $F|_{\mathsf{thick}(DA)}\colon \mathsf{thick}(DA) \to \mathsf{thick}(DB)$ 是全忠实的。此外，存在 $M \in \mathsf{per}(A)$ 使得 $B_B \cong F(M)$。因此

$$DB = \mathbf{L}\nu_B(B) \cong \mathbf{L}\nu_B \circ F(M) \cong F \circ \mathbf{L}\nu_A(M) \in F(\mathsf{thick}(DA)),$$

这表明 $F|_{\mathsf{thick}(DA)}\colon \mathsf{thick}(DA) \to \mathsf{thick}(DB)$ 由 [20, 引理 4.2可知是一个等价]. □

2.2. 拼接。

本小节中，我们回顾并建立关于再拼接的一些基本结果。设 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$是三角 k-范畴。

定义 2.7（[4, 36, 25]）。关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的 $\mathcal{T}$ 再拼接，是由六个三角函数组成的图表

$$\mathcal{T}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \underset{}{\overset{i_*}{\rightarrow}} \mathcal{T} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \underset{}{\overset{j^*}{\rightarrow}} \mathcal{T}'', \tag{2.2}$$

其满足

(R1) $(i^*, i_*, i^!)$ 和 $(j_!, j^*, j_*)$ 是伴随三元组；(R2) i_*, j_*, $j_!$ 是全忠实的；(R3) $j^* \circ i_* = 0$;

(R4) 对于 $\mathcal{T}$ 中的任意对象 X，存在两个三角形：

$$i_*i^!X \longrightarrow X \longrightarrow j_*j^*X \longrightarrow i_*i^!X[1]$$

$$j_!j^*X \longrightarrow X \longrightarrow i_*i^*X \longrightarrow j_!j^*X[1]$$

其中左边四个态射由单位和余单位给出。

上面的两行

$$\mathcal{T}' \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}'',$$

称为关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的 $\mathcal{T}$ 的左再拼接，若四个函子 i^*、i_*、$j_!$ 和 j^* 满足 (R1)–(R4) 中涉及它们的条件。右再拼接的定义类似，通过下面两行给出。

注意，关于 $\mathcal{T}''$ 和 $\mathcal{T}'$ 的 $\mathcal{T}$ 的右再拼接，恰好就是关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的 $\mathcal{T}$ 的左再拼接。

引理 2.8。设

$$\mathcal{T}' \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}''$$

设 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 构成的左再拼接。假设 $\mathcal{S}$、$\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 分别是 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的子范畴，且 $i_*(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}$、$j^*(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}''$、$j_!(\mathcal{S}'') \subset \mathcal{S}$ 以及 $i^*(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}'$。那么，上述左再拼接限制为由 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 构成的 $\mathcal{S}$ 的左再拼接。

以下结果众所周知，参见 [4, 1.4.4、1.4.5、1.4.8] 和 [30, 第 2]节。

命题 2.9。(a) 左再拼接的两行是三角范畴的短正合列。反之，假设存在一个三角范畴的短正合列（可能相差直和项）

$$\mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}''.$$

那么，i_* 有左伴随（分别地，右伴随）当且仅当 j^* 有左伴随（分别地，右伴随）。在这种情况下，i_* 和 j^* 及其左伴随（分别地，右伴随）构成 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$的左再拼接（分别地，右再拼接）。

(b) 假设存在一个图表

$$\mathcal{T}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}'',$$

满足条件（R1）。若它是一个再拼接，则三行都是三角范畴的短正合列。反之，若三行中的任意一行是三角范畴的短正合列，则该图表是一个再拼接。

如果再拼接（2.2）向下延伸一步，则称之为 $i^!$ 和 j_* 都存在右伴随函子。在这种情况下，图表扩展为四行，并且根据命题2.9，下面三行也构成一个再拼接。这意味着这四行构成了 [5, 3]意义下的高度为 2 的梯子。类似地，我们也有再拼接向上延伸一步的概念。

2.2.1. 紧生成三角范畴的再拼接。

设 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$ 是具有无限直和的三角 k范畴，并假设它们是紧生成的。

引理 2.10 ([32, 定理 4.1 和 5。1])。 对于一对伴随$_F$三角函子 $\mathcal{T}' \rightleftarrows \mathcal{T}$：$_G$，以下条件等价：

(a) F 将紧对象映为紧对象；(b) G保持无限直和；(c) G 有一个右伴随。

设 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 是具有无限直和的三角 k范畴，并假设它们是紧生成的。假设存在一个再拼接 (2.2)。那么根据引理 2.10， $j_!$和 i^* 都将紧对象映为紧对象。根据 [31, 定理 2.1]， i^* 将 $\mathcal{T}$ 的一组紧生成元映为 $\mathcal{T}'$的一组紧生成元。此外，根据 [3, 引理 4.2], ，函子$j_!$ 能检测紧对象，也就是说，如果 $j_!(Z)$ 是紧的，那么 Z 也是紧的。以下结论是命题 2.9 和引理 2.10 的推论。

引理 2.11. 假设存在一个再拼接 (2.2)。那么以下条件等价：

(i) i_* 将紧对象映为紧对象，(ii) j^* 将紧对象映为紧对象，(iii) $i^!$ 存在右伴随，(iv) j_* 存在右伴随，(v) 该再拼接向下延伸一步。

2.2.2. 由同调满射生成的再拼接。

设 A 和 B 是微分分次 k-代数，且 $f\colon A \to B$ 是一个 dg 代数同态。那么 B 通过 f 既是 dg$B$-A-双模，也是 dg A-B-双模，并诱导出一个三角函子 $f^* = ? \otimes^{\mathbf{L}}_B B =$导出 $\mathrm{Hom}_B(B, ?)\colon \mathscr{D}(B) \to \mathscr{D}(A)$。以下是引理 2.1 的一个特例。

推论 2.12. 存在一个由三角函子构成的伴随三元组

$$\mathscr{D}(B) \underset{\text{导出 } \mathrm{Hom}_A(B,?)}{\overset{?\otimes^{\mathbf{L}}_A B}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{f^*}}}}} \mathscr{D}(A).$$

我们称这个三元组为由 f 诱导的伴随三元组。

以下定义紧接在 [33, 第 4 节，引理]之后。对于代数，这个概念最早由[14]引入。

定义 2.13（[33, 第 4] 节）。若三角函子 $f^*\colon \mathscr{D}(B) \to \mathscr{D}(A)$ 是全忠实的，则称 dg 代数同态 f 为同调单态射。

引理2.14（[33, 第 4] 节）。假设 f 是一个同调满射。则存在一个再拼接：

$$\mathscr{D}(B) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{i_*}}}}} \mathscr{D}(A) \underset{}{\overset{j_!}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}} \mathsf{Loc}(X),$$

其中 $j_!$ 是包含函子，左半部分由 f 诱导，而 X 由三角定义

$$X \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow X[1].$$

进一步假设 $B_A \in \mathsf{per}(A)$，且 X_A 是 $\mathscr{K}$-投射的。那么存在一个再拼接

$$\mathscr{D}(B) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(A) \xrightarrow{i_*} \mathscr{D}(A) \underset{}{\overset{j_!=?\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{E}nd_A(X)}X}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(\mathcal{E}nd_A(X)), \tag{2.3}$$

它向下延伸一步。

证明。第一条陈述紧接在 [33,Section 4] 中同调满射的定义之后。如果 $B_A \in \mathsf{per}(A)$，那么 $X_A \in \mathsf{per}(A)$。由引理 2.3 可得，$?\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{E}nd_A(X)}X\colon \mathscr{D}(\mathcal{E}nd_A(X)) \to \mathscr{D}(A)$ 是全忠实的，其本质像为 $\mathsf{Loc}(X)$。于是，由第一条陈述可知再拼接存在。此外，在这种情况下，i_* 将紧对象映到紧对象，因此根据引理 2.11，再拼接向下延伸一步。□

2.2.3. 三角矩阵代数的再拼接。

下面推广[3, 例 3。4]。

引理 2.15. 设 B 和 C 是 dg k-代数，M 是 dg C-B-双模，并设 A 为矩阵代数

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ M & C \end{pmatrix}.$$

于是存在一个导出范畴的再拼接：

$$\mathscr{D}(B) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(A) \underset{j_*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(C) \tag{2.4}$$

其中，左半部分由典范同态 $A \to B$ 诱导，右半部分由 dg C-A-双模 (M, C) 诱导。此外，

(a) 该再拼接向下延伸一步；(b) 若 $M_B \in \mathsf{per}(B)$，则它向下延伸两步；(c) 若 ${}_CM \in \mathsf{per}(C^{\mathrm{op}})$ 且 ${}_CM$ 是 $\mathscr{K}$-投射的，则它向上延伸一步。

证明。 我们首先证明图表 (2.4) 是一个再拼接。根据命题 2.9，只需证明上面的两行构成一个左再拼接。

设 $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_C \end{smallmatrix}\right)$ 是 A 的一个幂等元。那么存在典范同构 $eAe \cong C$ and$A/AeA \cong B \cong (1-e)A(1-e)$，它们是 dg k-代数；$(M, C) \cong eA$ 是 dg C-A-双模的典范同构；并且 $B \cong (1-e)A$ 是 dg B-A-双模的典范同构。因此，根据引理 2.3，我们可知 $j_!$ 和 i_* 都是全忠实的。由于 $Ae \cong eAe$ 作为 dg C-模以及 $eA \cong AeA$ 作为 dg A-模，典范态射 $Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA = Ae \otimes_{eAe} eA \to AeA$ 是一个同构。因此，在$\mathscr{D}(A^{\mathrm{op}} \otimes_k A)$中有如下三角：

$$Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA[1]$$

因此，对于任意 dg A-模 M，在 $\mathscr{D}(A)$ 中都有一个三角：

$$M \otimes^{\mathbf{L}}_A (Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA) \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes^{\mathbf{L}}_A B \longrightarrow M \otimes^{\mathbf{L}}_A (Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA)[1].$$

显然，$M \otimes^{\mathbf{L}}_A B = i_*i^*(M)$。由于 $Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA \cong Ae \otimes_{eAe} eA$，可得 $M \otimes^{\mathbf{L}}_A (Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA) \cong (M \otimes^{\mathbf{L}}_A Ae) \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA = j_!j^*(M)$。这表明图表的上两行构成一个左再拼接。

(a) 我们有 $j^*(A) = Ae \cong eAe$，这意味着 j^* 将紧对象映为紧对象，因此根据引理 2.11，再拼接向下扩展一步。

(b) 我们有 $i^!(A) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(B_A, A) \cong \begin{pmatrix} B \\ M \end{pmatrix} \in \mathsf{per}(B)$，这意味着 $i^!$ 将紧对象映射为紧对象，因此根据(a)和引理 2.11，再拼接向下延伸两步。

(c) 在这种情况下， $_C(M,\ C) \in \mathsf{per}(C^{\mathrm{op}})$ 和 $_C(M,\ C)$ 是 $\mathscr{K}$-射影的，因此根据引理 2.2 $j_!$具有一个左伴随。由此根据命题2.9，再拼接向上延伸一步。□

2.2.4. 由幂等元生成的再拼接。

设 A 是非正微分分次 k-代数（即， $A^p = 0$ 对所有 $p > 0$）， $\mathscr{K}$作为k-模的复形是平坦的，并且 $e \in A$ 是一个幂等元，即 $e^2 = e$。以下结果的第一个结论是对[19, 命题 61]的推广。

命题2.16. 设 A 和 $e \in A$ 如上。那么存在一个微分分次 k代数 B，以及一个微分分次 k代数 f的同调满射： $A \to B$，并且存在导出范畴的再拼接：

$$\mathscr{D}(B) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(A) \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(eAe)$$

使得以下条件成立：

(a) 左半部分由 f 诱导，右半部分由微分分次 eAe-A-双模 eA 诱导；(b) B 是非正微分分次代数；(c) $\mathrm{H}^0(B)$ 同构于 $\mathrm{H}^0(A)/\mathrm{H}^0(A)e\mathrm{H}^0(A)$。

此外，若 $Ae_{eAe} \in$per(eAe)，则此再拼接可向下延伸一步。

证明。 第一个结论的证明类似于 [19, 命题 6。1], 的证明，此处从略。对于“此外”部分，注意到 $j^*(A) = A \otimes^{\mathbf{L}}_A Ae = Ae$，它在 $\mathscr{D}(eAe)$ 中由假设可知是紧的。因此 j^* 将紧对象映为紧对象。由引理 2.11，该再拼接可向下延伸一步。□

注 2.17 ([12])。 假设 A 是一个 k-代数，且作为 k-模是平坦的。若 AeA 是一个 分层理想，即 典范态射 $Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA \to A$ 诱导一个同构 $Ae \otimes^{\mathbf{L}}_{eAe} eA \cong AeA$，则 $B = A/AeA$。例如，若 k 是一个域，且 $A = kQ$ 是无圈箭图的路径代数Q，那么 AeA 对任意幂等元 e，都是 A的分层理想。

2.2.5. per、thick$(D-)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}$ 的左/右粘合。

假设 k 是诺特的。设 A、B 和 C 为 dg k-代数。考虑如下图表

$$\mathscr{D}(B) \rightleftarrows \mathscr{D}(A) \rightleftarrows \mathscr{D}(C)。$$

引理 2.18. 假设在上述图表中，上面三行和下面三行均为拼接（即该图表是 $[5,\ 3]$ 意义下高度为 2 的梯子）。那么，上面两行限制为 per(A) 关于 per(B) 和 per(C) 的左再拼接，中间两行限制为 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 关于 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(C)$ 的右再拼接。特别地，第二行限制为短正合列

$$\mathsf{per}(B) \longrightarrow \mathsf{per}(A) \longrightarrow \mathsf{per}(C),$$
$$\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(C),$$

第三行限制为短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B) \longleftarrow \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A) \longleftarrow \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(C).$$

If k 是一个域，那么下面两行限制为 thick(DA) 的左再拼接，具体为 thick(DB) 和 thick(DC)。特别地，第三行限制为一个短正合列

$$\mathsf{thick}(DB) \longleftarrow \mathsf{thick}(DA) \longleftarrow \mathsf{thick}(DC).$$

证明。 根据引理 2.8 和命题2.9，只需证明上面两行限制为 per，中间两行限制为 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}$，并且当 k 是一个域时，下面两行限制为 thick$(D-)$。这可由引理 2.6 和 2.5得到。 □

3. Short exact sequences of triangle quotients

设 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 为三角 k-范畴， $\mathcal{S}$、 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 分别为 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的三角子范畴。假设存在一个由三角函子构成的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}' & \xrightarrow{G|_{\mathcal{S}'}} & \mathcal{S} & \xrightarrow{F|_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}' & \xrightarrow{G} & \mathcal{T} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T}'', \end{array} \tag{3.1}$$

whe，其中两行都是相差直和项意义下的短正合列。我们关心何时 th e indu列

$$\mathcal{T}'/\mathcal{S}' \xrightarrow{\bar{G}} \mathcal{T}/\mathcal{S} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{T}''/\mathcal{S}'' \tag{3.2}$$

¯是相差直和项意义下的短正合列。由 [18, 引理 3.2]， F 诱导出一个三角 ¯等价 $(\mathcal{T}/\mathcal{S})/(\mathrm{thick}G(\mathcal{T}'/\mathcal{S}')) \simeq \mathcal{T}''/\mathcal{S}''$，相差直和项意义下。此外， G 将非零¯对象映为非零对象。事实上，设 $X \in \mathcal{T}'/\mathcal{S}'$ 满足 $G(X) = 0$，即 $G(X) \in \mathsf{add}\,\mathcal{S}$。那么 $F|_{\mathcal{S}}(G(X)) = 0$，这表明 $X \in \mathsf{add}\ \mathcal{S}'$。因此，(3.2) 是相差¯ ¯直和项意义下的短正合列，当且仅当 G 是全忠实的，当且仅当 G 是满的。然而，一般来说， G可能不是满函子，实际上甚至可能不是忠实的，见下文注 3.3。

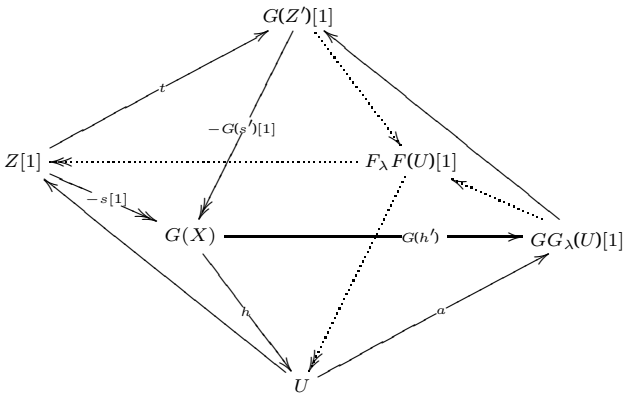
引理 3.1. 若满足以下两个条件之一：

(a) $G|_{\mathcal{S}'}$和 $F|_{\mathcal{S}}$均存在左伴随 G_λ和 F_λ，使得 $\mathrm{Hom}(F_\lambda(\mathcal{S}'')\ G(\mathcal{T}')) = 0$；(b) $G|_{\mathcal{S}'}$和 $F|_{\mathcal{S}}$均存在右伴随 G_ρ和 F_ρ，使得 $\mathrm{Hom}(G(\mathcal{T}')\ F_\rho(\mathcal{S}'')) = 0$,

那么 (3.2) 在相差直和项的意义下是一个短正合列。若进一步假设 (3.1) 的第一行是一个短正合列，那么 (3.2)也如此。

¯证明。我们证明 G 是满的。

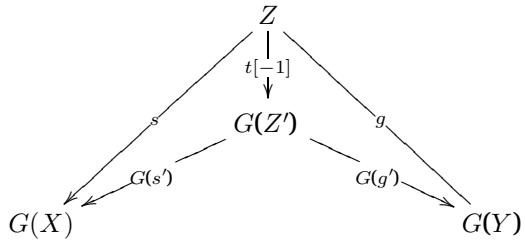
(a) 对于任意 $X, Y \in \mathcal{T}'/\mathcal{S}'$和 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(\bar{G}(X)\ \bar{G}(Y))$. 我们可以将 f写成 $G(X) \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{g} G(Y)$，使得 s 可扩展为 $\mathcal{T}$中的一个三角形 $Z \xrightarrow{s} G(X) \xrightarrow{h} U \to Z[1]$，且满足 $U \in \mathcal{S}$。由命题 2.9(a)， $\mathcal{S}$中存在一个三角形 $F_\lambda F(U) \to U \xrightarrow{a} GG_\lambda(U) \to F_\lambda F(U)[1]$。由于 G是全忠实的，存在 $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(X, G_\lambda(U))$，使得 $ah = G(h')$。将 h'扩展为 $\mathcal{T}'$中的一个三角形$Z' \xrightarrow{s'} X \xrightarrow{h'} G_\lambda(U) \to Z'[1]$。现在考虑这个八面体



根据八面体公理，存在一个三角形

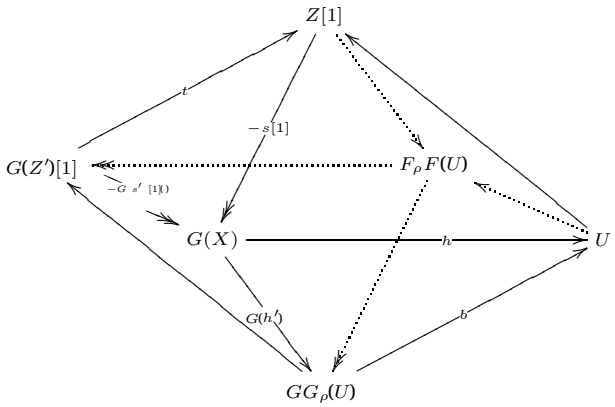
$$F_\lambda F(U)[-1] \longrightarrow Z \xrightarrow{t[-1]} G(Z') \longrightarrow F_\lambda F(U).$$

因此，$t[-1]$的锥 $\cong F_\lambda F(U) \in \mathcal{S}$。此外，由于 $\mathrm{Hom}(F_\lambda F(U)[-1], G(Y)) = 0$，态射$g$: $Z \to G(Y)$ 必须经过 $t[-1]$ 分解，因此存在 $g' \in \mathrm{Hom}(Z', Y)$，使得 $g = G(g') \circ t[-1]$。现在交换图



表明 $G(X) \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{g} G(Y)$ 等价于 $G(X) \xleftarrow{G(s')} G(Z') \xrightarrow{G(g')} G(Y)$，即 $\bar{G}$ 下 $X \xleftarrow{s'} Z' \xrightarrow{g'} Y$ 的像。

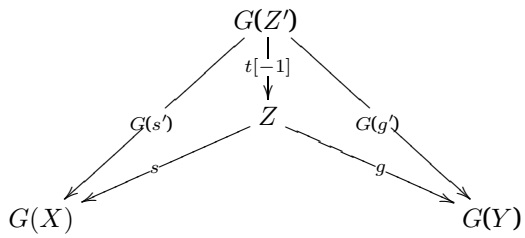
(b) 对任意 X、$Y \in \mathcal{T}'/\mathcal{S}'$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(\bar{G}(X), \bar{G}(Y))$。我们可以将 f 写成 $G(X) \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{g} G(Y)$，使得 s 可扩展为 $Z \xrightarrow{s} G(X) \xrightarrow{h} U \to Z[1]$ 中的一个三角 $\mathcal{T}$，其中有 $U \in \mathcal{S}$。根据命题 2.9(a)，存在一个三角 $GG_\rho(U) \xrightarrow{b} U \xrightarrow{a} F_\rho F(U) \to GG_\rho(U)[1]$，位于 $\mathcal{S}$ 中。由于 $\mathrm{Hom}(G(X), F_\rho F(U)) = 0$ 且 G 是全忠实的，存在 $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(X, G_\rho(U))$，使得 $h = b \circ G(h')$。将 h' 扩展为 $Z' \xrightarrow{s'} X \xrightarrow{h'} G_\rho(U) \to Z'[1]$ 中的一个三角 $\mathcal{T}'$。现在考虑八面体



根据八面体公理，存在一个三角

$$G(Z') \xrightarrow{t[-1]} Z \longrightarrow F_\rho F(U) \longrightarrow G(Z')[1].$$

因此，$\mathrm{Cone}(t[-1]) \cong F_\rho F(U)[-1] \in \mathcal{S}$。此外，由于 G 是全忠实的，存在 $g' \in \mathrm{Hom}(Z', Y)$，使得 $G(g') = g \circ (t[-1])$。现在，交换图



表明 $G(X) \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{g} G(Y)$ 等价于 $G(X) \xleftarrow{G(s')} G(Z') \xrightarrow{G(g')} G(Y)$，即 $X \xleftarrow{s'} Z' \xrightarrow{g'} Y$ 在 $\bar{G}$ 下的像。□

我们恢复[29, 引理 2。3]。

推论 3.2. 设

$$\mathcal{T}' \underset{G}{\overset{G_\lambda}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{F}{\overset{F_\lambda}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}''$$

是关于 $\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的 $\mathcal{T}$ 的左再拼接，它限制为关于 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 的 $\mathcal{S}$ 的左再拼接。则它诱导一个左再拼接

$$\mathcal{T}'/\mathcal{S}' \underset{\bar{G}}{\overset{\bar{G}_\lambda}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}/\mathcal{S} \underset{\bar{F}}{\overset{\bar{F}_\lambda}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}''/\mathcal{S}''.$$

证明。 由于 $\mathrm{Hom}(F_\lambda(\mathcal{S}'')\ G(\mathcal{T})) = \mathrm{Hom}(\mathcal{S}'', FG(\mathcal{T})) = 0$，由引理 3.1 可知，上述图表的第二行是一个短正合列。所需结论随后由命题2.9(a) 和 [34, 引理 1。1]。 □

我们以一条评注结束本节。

注 3.3。序列 (3.2) 一般而言并不是一个在直和项意义下的短正合列。下面给出一类例子。设 Q 是一个无环箭图，且设 i 是 Q 的一个既不是源点也不是汇点的顶点。设 Q^1 是通过移除 i 以及与 i 相 incident 的所有箭头而从 Q 得到的箭图；设 Q^2 是通过对 Q^1 添加一个新箭头 $[\alpha\beta]: s(\beta) \to t(\alpha)$ 而得到的箭图，其中对 Q 中满足 $t(\beta) = i = s(\beta)$ 的每一对箭头 (α, β) 都添加这样的箭头。这里，一个箭头 ρ 从 $s(\rho)$ 出发，并终止于 $t(\rho)$。由于 i 既不是源点也不是汇点，因此可知 Q^1 与 Q^2 不同。

现在设 $A = kQ$ 是 Q 的路径代数，并设 $e = e_i$ 是 i处的平凡路径。那么 $eAe \cong k$，$A/AeA = kQ^1$，$(1-e)A(1-e) = kQ^2$ 以及 $A/A(1-e)A \cong k$。根据注 *2.17*和引理 *2.18*，存在短正合列

$$\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}(1-e)A(1-e)) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_{(1-e)A(1-e)}(1-e)A} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_A A/A(1-e)A} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/A(1-e)A),$$

$$\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}eAe) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_{eAe}eA} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_A A/AeA} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/AeA).$$

不难验证，复合映射

$$\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}eAe) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_{eAe}eA} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A) \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_A A/A(1-e)A} \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/A(1-e)A)$$

是一个三角等价，并且下图是交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}eAe) & \xrightarrow{\simeq} & \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/A(1-e)A) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ?\otimes^{\mathbf{L}}_{eAe}eA} & & \| \\
\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}(1-e)A(1-e)) & \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_{(1-e)A(1-e)}(1-e)A} & \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A) & \xrightarrow{?\otimes^{\mathbf{L}}_A A/A(1-e)A} & \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/A(1-e)A) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle ?\otimes^{\mathbf{L}}_A A/AeA} & & \downarrow \\
\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}(1-e)A(1-e)) & \longrightarrow & \mathscr{K}^b(\mathrm{proj}A/AeA) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中，第三行左侧的函子由代数同态 $(1-e)A(1-e) = kQ^2 \to kQ^1 = A/AeA$ 消去 $[\alpha\beta]$ 所诱导，该函子既不满也不忠实。

4. A localisation theorem for the singularity category

本节考虑由导出范畴的再拼接所诱导的奇点范畴短正合列。

假设 k 是诺特的。若一个微分分次 k-代数 A 满足 $\mathrm{H}^*(A)$ 在 k 上有限生成，即 $\mathsf{per}(A) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$，则称其为适当的。有限维 k-代数（当 k 是域时）是适当微分分次 k-代数的典型例子。适当微分分次 k-代数 A 的奇点范畴定义为三角商

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) := \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)/\mathsf{per}(A).$$

根据引理 2.18和引理 3.1，我们得到以下定理，这是本文的主要结果。

定理 4.1. 设 A、 B 和 C 是适当微分分次 k-代数，并且它们构成一个再拼接

$$\mathscr{D}(B) \overset{i^*}{\underset{i^!}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathscr{D}(A) \overset{j_!}{\underset{j_*}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathscr{D}(C). \tag{4.1}$$

假设该再拼接向下延伸一步。那么第二行诱导出一个短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \xrightarrow{\bar{i}_*} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \xrightarrow{\bar{j}^*} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C). \tag{4.2}$$

4.1. 整体维数的有限性。

对于适当的 dg k-代数 A，我们称 A 具有 有限整体维数，并记作 $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$，如果$\mathsf{per}A = \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$。下面结果的（b）推广了 [37, 定理 4]，，而（c）推广了[40, 引理 2。1] （另见 [25, 推论 5], [16] 和 [3, 命题 2。14]）。

推论 4.2。 设 A、 B 和 C 为适当的 dg k-代数，并带有一个再拼接 （4.1）。则

（a） i_* 诱导一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 当且仅当 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。（b） j^* 诱导一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 当且仅当 $i_*(B) \in \mathsf{per}(A)$ 且 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$。（c）$\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$ 当且仅当 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$ 且 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。

证明。（a）假设 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。则 $\mathsf{per}(C) = \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(C)$，且 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C) = 0$。由于 A 是适当的，并且 $j^*(\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(C)$，我们有 $j^*(\mathsf{per}A) \subset \mathsf{per}C$。根据引理 2.11，再拼接向下延拓一步。由定理 4.1，存在一个短正合列（4.2），于是 i_* 诱导出一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$。

假设 i_* 诱导出一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$。则必然有$i_*(\mathsf{per}(B)) \subset \mathsf{per}(A)$。根据引理 2.11，再拼接向下延拓一步。因此由定理4.1，存在一个短正合列（4.2），从而迫使 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 为平凡的，即 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。

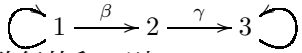
(b) 假设 $i_*(B) \in \mathsf{per}(A)$ 且 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$。那么 i_* 将紧对象映为紧对象，并由引理 2.11可知，再拼接向下延伸一步。因此，由定理 4.1，存在短正合列（4.2）。但是 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) = 0$，所以 j^* 诱导出三角等价$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$。

假设 j^* 诱导出三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$。如同 [37, 定理4], 的证明中那样，我们可以证明 $i_*(B) \in \mathsf{per}(A)$。然后由引理 2.11可知，再拼接向下延伸一步；由定理 4.1，存在短正合列（4.2）。这迫使 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 平凡，即 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$。

(c) 假设 $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$。那么 $\mathsf{per}A = \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) = 0$。由于 $i_*(\mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(B)) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fg}}(A)$，且 B 是适当的，我们知道 $i_*(\mathsf{per}B) \subset \mathsf{per}A$。根据引理 2.11，再拼接向下扩展一步。根据定理 4.1，存在一个短正合列 (4.2)，于是 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) = 0 = \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$。因此 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$，且 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。

逆命题：假设 $\mathrm{gl.dim}\ B < \infty$ 和 $\mathrm{gl.dim}\ C < \infty$。则由 (a) 可得 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$，这是显然的。因此 $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$。□

注 4.3. 我们给出一个具体例子，说明 gl.dim $B < \infty$, $i_*(B) \notin \mathrm{per}(A)$，且 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \not\simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$。假设 k 是一个域，并令 A 为与下列箭图关联的根基平方零 k-代数



令 $e = e_1 + e_3$ 为顶点 1 和 3 处平凡路径的和。则 $eAe \cong k[x]/(x^2) \times k[y]/(y^2)$, $A/AeA \cong k$，并且作为 A-模，A/AeA 是顶点 2 处的简单模 S_2。容易看出，对所有 $p > 0$，$\mathrm{Ext}^p_A(S_2, S_2) = 0$。由此可知 $A \to A/AeA$ 是同调满射，因此存在一个再拼接

$$\mathscr{D}(k) \rightleftarrows \mathscr{D}(A) \rightleftarrows \mathscr{D}(k[x]/(x^2) \times k[y]/(y^2)).$$

我们声称 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是 Hom-无限的。因此它不可能等价于 $\mathscr{D}(k[x]/(x^2) \times k[y]/(y^2))$，后者等价于 $\mathrm{mod}k \times \mathrm{mod}k$。为证明这一断言，考虑短正合列

$$0 \longrightarrow S_1 \oplus S_2 \longrightarrow e_1 A \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0.$$

这意味着 $S_1 \cong S_1[1] \oplus S_2[1]$ 属于 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$。这在 Hom-有限三角范畴中是不可能的，因为 S_2 在 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$中非零（它在 A上的投射维数无限）。

4.2. 奇点范畴的拼接。

当 k 是一个域且 A、B 和 C 是有限维 k-代数时，以下结果的第一条陈述是 [37, 命题 3]。

推论 4.4. 设 A、B 和 C 是适当的 dg k-代数，并具有一个再拼接 (4.1)。如果该拼接向下延伸两步，则存在一个由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 拼接而成的 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 的右再拼接。如果向下延伸三步，则存在一个由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 拼接而成的 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 的再拼接。

证明。这立即由定理4.1 和 [34, 引理 1。1]。 □

4.3. 三角矩阵代数的奇异范畴。

当 k 是域且 A 是有限维的 k 代数时，以下结果的第三个结论恰好就是 [28, 定理 3.2]。

推论 4.5. 设 B 和 C 是适当的微分分次 k 代数，且 M 是一个总上同调有限维的微分分次 C-B 双模。考虑矩阵微分分次代数 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ M & C \end{pmatrix}$。则存在三角范畴之间的短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C).$$

此外，

(a) 若 $M_B \in$ 属于 $\mathrm{per}(B)$，则 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 可由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 进行右再拼接。(b) 若 ${}_CM \in$ 属于 $\mathrm{per}(C^{\mathrm{op}})$，则 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 可由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 进行左再拼接。(c) 假设 B 在 k 上是 $\mathscr{K}$- 投射的。若 $M_B \in$ 属于 $\mathrm{per}(B)$ 且 ${}_CM \in$ 属于 $\mathrm{per}(C^{\mathrm{op}})$，则 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 可由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 进行再拼接。

证明。第一个结论由引理 2.15(a) 和定理 4.1 得出。结论 (a) 由引理 2.15(b) 和推论 4.4 得出。为证明 (b)，设 M' 是 $C^{\mathrm{op}} \otimes_k B$ 上 M 的 $\mathscr{K}$-投射分解，并设 $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ M' & C \end{pmatrix}$。那么 A 与 A' 拟同构，因此 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 与 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A')$ 三角等价。此外，${}_CM' \in$ 属于 $\mathrm{per}(C^{\mathrm{op}})$，且 ${}_CM'$ 是 $\mathscr{K}$-投射的。因此，根据引理 2.15(c) 和推论 4.4，存在一个由 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(C)$ 拼接 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A')$ 的左再拼接。将 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A')$ 替换为 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$，即可得到 (b)。最后，(c) 由 (a) 和 (b) 得出，因为 (b) 中左再拼接的下行恰好是 (a) 中右再拼接的上行。□

4.4. 关于幂等元的奇异约化。

设 A 是一个非正适当 dg k-代数，且 $e \in A$ 是一个幂等元。以下结论是定理 4.1的直接推论。

推论4.6。 设 B 如命题 *2.16* 中所述，并假设 $Ae_{eAe} \in \mathsf{per}(eAe)$。则存在三角范畴的短正合列：

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \xrightarrow{\widetilde{i_*}} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \xrightarrow{\widetilde{j^*}} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(eAe).$$

推论4.7 ([10, 定理3。1] 和 [9, 定理2。1])。 假设 A 是一个有限维k-代数。假设 $\mathrm{p.d.}Ae_{eAe} < \infty$。则 Schur 函子 $S_e = ? \otimes_A Ae \colon \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}eAe$诱导出一个三角等价

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)/\mathsf{thick}\langle q(\mathcal{B}_e)\rangle \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(eAe),$$

其中 q: $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A) \to \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是自然商函子， $\mathcal{B}_e$ 是 S_e 的本质核。此外，若进一步假设每个有限生成的 A/AeA-模在 A 上都有有限投射维数，则存在一个奇异等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(eAe)$。

注意， [10, 定理 3.1]和 [9, 定理 2.1] 对左诺特环的表述更为一般。

证明。首先注意，$\mathsf{thick}(\mathcal{B}_e)$ 恰好是 $\mathsf{Ker}(j^*\colon \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A) \to \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(eAe))$ ([9, 引理 2.2]) ，因此由引理 2.18 可知，它与 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)$ 三角等价。所以，$\mathsf{thick}\langle q(\mathcal{B}_e)\rangle$ 与 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ 在取直和项的意义下三角等价。于是，第一条结论由推论4.6得出。第二条结论由第一条结论得出，因为在附加假设下， $i_*(\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)) \subset \mathsf{per}(A)$，因此， $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B) = i^*i_*(\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)) \subset \mathsf{per}(B)$。所以， $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) = 0$。□

4.5. 同调满射的应用。

根据引理 2.14，以下结果是定理4.1的直接推论。

推论 4.8. 设 $f\colon A \to B$ 是适当 dg k-代数之间的同调满射。假设$B_A \in \mathsf{per}(A)$。则存在三角范畴的短正合列：

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{E}nd_A(X)),$$

其中 X 是 $\mathsf{Cone}(f)[-1]$的 $\mathscr{K}$-投射分解。

推论4.9 ([11,定理])。 假设 k 是一个域。设 A 是一个有限维 k-代数，且 J 是 A 的一个理想，使得典范同态 $A \to A/J$ 是一个同调满射。假设 J 作为一个 A-A-双模具有有限投射维数。则存在一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A/J)$。

证明。 设 $B = A/J$。由于 J 作为右 A-模具有有限投射维数，因此$B_A \in \mathsf{per}(A)$。由推论 4.8，存在一个短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(B) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(A) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J)).$$

这里，$\mathbf{p}J$ 是 A 上 J 的一个投射分解。只需证明 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J))$=0。由于 $\mathbf{p}J \in \mathsf{per}(A)$，可知 $\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J)$ 是适当的。对于任意 $M \in \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J))$，我们只需验证 $M \in \mathsf{per}(\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J))$。考虑诱导的再拼接 (2.3)。根据引理 2.18，中间一行限制为一个 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}$ 的短正合列。特别地，存在 $N \in \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A)$，使得 $j^*(N) = M$。将 $N \otimes^{\mathbf{L}}_A ?$ 应用于三角 $J \to A \to B \to J[1]$，得到 $\mathscr{D}(A)$ 中的一个三角$N \otimes^{\mathbf{L}}_A J \to N \to N \otimes^{\mathbf{L}}_A B \to N \otimes^{\mathbf{L}}_A J[1]$。注意，态射 $N \to N \otimes^{\mathbf{L}}_A B$ 由 f 诱导，因此由 (2.3) 可知 $N \otimes^{\mathbf{L}}_A J \cong j_!j^*(N)$。还要注意， $N \otimes^{\mathbf{L}}_A J \in \mathsf{per}(A)$，因为 $J \in \mathsf{per}(A^{\mathrm{op}} \otimes_k A)$。于是 $M \cong j^*j_!(M) \cong j^*j_!j^*(N) \in \mathsf{per}(\mathcal{E}nd_A(\mathbf{p}J))$，因为 j^* 将紧对象映为紧对象。□

4.6. 一个对偶陈述。 以下是定理 4.1 的一个“对偶”版本。

定理 4.10。 假设 k 是一个域。设 A、 B 和 C 是适当的微分分次 k-代数，并且存在一个再拼接 (4.1)。假设该再拼接向上延伸一步。那么第二行诱导出一个短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)/\mathsf{thick}(DB) \xrightarrow{\bar{i}_*} \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A)/\mathsf{thick}(DA) \xrightarrow{\bar{j}^*} \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(C)/\mathsf{thick}(DC). \tag{4.3}$$

证明。 这由引理 2.18 和引理 3.1得出。 □

5. A localisation theorem for the AGK-category

本节针对同调光滑 DG 代数建立一个结果，它与定理 4.1互为“Koszul 对偶”。

假设 k 是一个域，并设 A 是一个微分分次 k-代数。假设 A 是同调光滑的，即 $A \in \mathsf{per}(A^{\mathrm{e}})$，其中 $A^{\mathrm{e}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_k A$。在 [23, 引理 4.1] 的证明中可知$\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A) \subset \mathsf{per}(A)$。我们将 AGK-范畴 定义为 A 的三角商

$$\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) := \mathsf{per}(A)/\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A).$$

注意，若 A 满足以下条件
(1) A 是非正的；(2) A 是同调光滑的；(3) $\mathrm{H}^0(A)$ 是有限维的；(4) 对于 $d \geq 1$,
$i.e.$, A 是双模 $(d+1)$-Calabi-Yau 的，存在 $\mathscr{D}(A^{\mathrm{e}})$ 中的一个同构

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(A, A^{\mathrm{e}}) \simeq A[-d-1].$$

那么， A 的 AGK-范畴就是簇范畴 $\mathscr{C}_A$ ([2, 15])。

本节的主要结果如下

定理 5.1。 令 A、 B 和 C 为同调光滑的 dg k-代数，并配有一个向下延伸一步的再拼接(4.1) 。那么，第二行诱导出一个短正合列

$$\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) \xrightarrow{\overline{i_*}} \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \xrightarrow{\overline{j^*}} \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C). \tag{5.1}$$

证明。 这由引理 2.18 和引理 3.1得出。 □

与推论4.2类似，我们有

推论 5.2。 设 A， B 和 C 是同调光滑 dg k-代数，并具有一个再拼接(4.1)。则

(a) j^* 诱导一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C)$，当且仅当 B 是适当的。(b) i_* 诱导一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A)$，当且仅当 $j^*(A) \in \mathsf{per}(C)$ 且 C是适当的。(c) A 是适当的，当且仅当 B 和 C 是适当的。

证明。(a) 假设 B 是适当的。那么 $\mathsf{per}(B) = \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)$，因此

$$i_*(\mathsf{per}(B)) = i_*(\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A) \subset \mathsf{per}(A),$$

也就是说， i_* 将紧对象映到紧对象。由引理 2.11，给定的再拼接向下延伸一步。但 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) = 0$, 这与定理 5.1中的短正合列结合起来，蕴含 j^* 诱导一个三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C)$。

假设 j^* 诱导出三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C$。那么 j^* 必然限制到 per，因此根据引理 2.11，再拼接向下延伸一步。因此根据定理 5.1，存在一个短正合列（5.1），这意味着 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) = 0$，即 B 是适当的。

(b) 假设 i_* 诱导出三角等价 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A$。那么 i_*必然限制到 per，因此根据引理 2.11， $j^*(A) \in \mathsf{per}(C)$，并且再拼接向下延伸一步。根据定理 5.1，存在一个短正合列（5.1），这迫使 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C)$ 为平凡对象，即 C 是适当的。

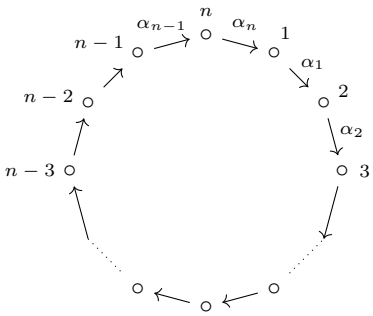
假设 $j^*(A) \in \mathsf{per}(C)$ 且 C 是适当的，即 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C) = 0$。那么 j^* 将紧对象映射为紧对象，因此由引理 2.11 再拼接向下延伸一步，并且由定理 5.1，存在短正合序列（5.1），这表明 i_* 诱导出三角等价$\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(B) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A)$。

(c) 如果 B 和 C 都是适当的，那么由 (a) 可得 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(C) \simeq 0$。如果 A 是适当的，那么 C 也是适当的，因为 $C \cong j^*j_!(C) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(C)$。此外，在 $\mathscr{D}(A)$ 中存在一个三角

$$i_*i^*(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_!j^*(A) \longrightarrow i_*i^*(A)[1].$$

由于 A 和 C 都是适当的，因此 A 和 $j_!j^*(A)$ 都属于 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(A)$，$i_*i^*(A)$ 也属于其中。因此，根据引理 2.5 以及 $i^*(A)$ 是 $\mathsf{per}(B)$ 的经典生成元这一事实， $i^*(A)$ 属于 $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)$。所以 $\mathsf{per}(B) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(B)$，也就是说， B 是适当的。□

例 5.3. 设 A 为一个分次循环箭图的分次路径代数



设 $d = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$。设 $C = e_1Ae_1$ 且 $B = A/Ae_1A$。则 A、 B 和 C 都是同调光滑的，并且存在一个再拼接 (4.1)，由 [19, 引理 7。2]注意到 B 是一个线性定向的 $\mathbb{A}_{n-1}$ 型分次箭图的分次路径代数，特别地，它是适当的。因此根据推论 5.2，存在一个三角等价

$$\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(k[x]),$$

其中 $|x| := d$。如果 $d = 0$，则 $\mathsf{per}(k[x]) \simeq \mathscr{K}^b(\mathsf{proj}k[x])$，且 $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(k[x]) \simeq \mathscr{D}^b(\mathsf{mod}k)$。接下来，假设 $d \neq 0$。那么 $\mathsf{per}(k[x])$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴，并且如 [24, 定理 4。1]，所示，$\mathsf{per}(k[x])$ 的一组完备不可分解对象由下式给出

$$k[x][p],\ (k[x]/(x^n))[p],\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},$$

并且， $\mathscr{D}_{\mathrm{fd}}(k[x])$ 的一组完备不可分解对象由下式给出

$$(k[x]/(x^n))[p],\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}.$$

此外，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{per}(k[x])}(k[x], k[x][p]) = \mathrm{H}^p(k[x]) = \begin{cases} k & \textit{if } p \in \mathbb{N} \textit{ is a multiple of } d, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

直接计算表明， $\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(k[x])$ 是一个半单范畴，其简单对象为 $k[x][p]$、$p = 0$.....、$|d| - 1$。总而言之，存在三角等价

$$\mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(A) \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{agk}}(k[x]) \simeq \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}k)/[d].$$

6. A generalisation of Theorem 4.1

设 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 是紧生成的三角 k-范畴，并且带有一个再拼接

$$\mathcal{T}' \overset{\overset{i^*}{\longleftarrow}}{\underset{i^!}{\xrightarrow{i_*}}} \mathcal{T} \overset{\overset{j_!}{\longleftarrow}}{\underset{j_*}{\xrightarrow{j^*}}} \mathcal{T}''. \tag{6.1}$$

假设 $\mathcal{T}$ 是代数的。设 $\mathcal{S}$、$\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 分别是 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{T}''$ 的骨架小三角子范畴，且分别包含 $\mathcal{T}^c$、$\mathcal{T}'^c$ 和 $\mathcal{T}''^c$。

本节的主要结果如下：

定理 6.1. 进一步假设上述再拼接的第一行限制为一个短正合列（分别地，限制为一个模直和项的短正合列）

$$\mathcal{S}' \xleftarrow{i^*} \mathcal{S} \xleftarrow{j_!} \mathcal{S}''.$$

那么存在一个短正合列（分别地，存在一个模直和项的短正合列）：

$$\mathcal{S}'/\mathcal{T}'^c \xleftarrow{\overline{i^*}} \mathcal{S}/\mathcal{T}^c \xleftarrow{\overline{j_!}} \mathcal{S}''/\mathcal{T}''^c.$$

6.1. Neeman 局部化定理。

T以下是 Neeman 局部化定理的一个众所周知的改述 [31, 定理 2.1].

定理 6.2（[31, 定理 2.1]）。假设存在一个紧生成三角 k-范畴的再拼接：

$$\mathcal{T}' \overset{\overset{i^*}{\longleftarrow}}{\underset{i^!}{\xrightarrow{i_*}}} \mathcal{T} \overset{\overset{j_!}{\longleftarrow}}{\underset{j_*}{\xrightarrow{j^*}}} \mathcal{T}''.$$

那么，第一行限制为一个模去直和项的短正合列

$$\mathcal{T}'^c \xleftarrow{i^*} \mathcal{T}^c \xleftarrow{j_!} \mathcal{T}''^c.$$

我们有以下逆命题。

引理 6.3。假设存在一个紧生成三角 k-范畴之间的三角函子图表：

$$\mathcal{T}' \overset{\overset{i^*}{\longleftarrow}}{\underset{i^!}{\xrightarrow{i_*=i_!}}} \mathcal{T} \overset{\overset{j_!}{\longleftarrow}}{\underset{j_*}{\xrightarrow{j^*=j^!}}} \mathcal{T}''$$

满足定义 2.7. 若第一行限制后（模去直和项）构成一个短正合列

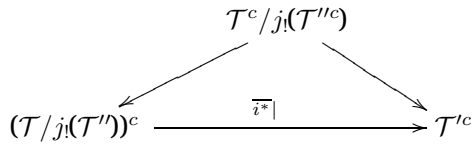
$$\mathcal{T}'^c \xleftarrow{i^*} \mathcal{T}^c \xleftarrow{j_!} \mathcal{T}''^c,$$

那么上述图表就是一个再拼接。

证明。 由于 $j_!|_{\mathcal{T}''^c}$： $\mathcal{T}''^c \to \mathcal{T}^c$ 是全忠实的，根据 [20, 引理 4.2 b)] 可知 $j_!$ 是全忠实的。注意到复合 $i^* \circ j_!$： $\mathcal{T}'' \to \mathcal{T}'$ 与无限直和交换，并将紧对象映为零，因此它是零函子。因此存在唯一的三角函子 $\overline{i^*}$： $\mathcal{T}/j_!(\mathcal{T}'') \to \mathcal{T}'$ 使得 $\overline{i^*} \circ \pi = i^*$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i^*} \\ \mathcal{T}/j_!(\mathcal{T}'') & \xrightarrow{\overline{i^*}} & \mathcal{T}' \end{array}$$

其中 π 是商函子。由于 π 是稠密的并且与无限直和交换，因此 $\overline{i^*}$ 也与无限直和交换。根据我们的假设以及定理 6.2，存在一个交换图



使得两个斜函子在直和项意义下都是三角等价。因此可得 $\overline{i^*}|_{(\mathcal{T}/j_!(\mathcal{T}''))^c}:(\mathcal{T}/j_!(\mathcal{T}''))^c\to\mathcal{T}'^c$ 是一个三角等价。根据 [20, 引理 4.2 c)]，$\overline{i^*}$ 本身是一个三角等价。因此，给定图表的第一行是一个短正合列，且根据命题 2.9，该图表是一个再拼接。□

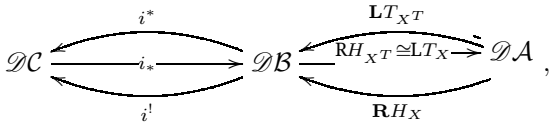
6.2. DG 范畴的导出范畴。

DG k-范畴可视为具有多个对象的微分分次 k-代数。对于一个小的微分分次 k-范畴 $\mathcal{A}$，我们将 $\mathscr{D}\mathcal{A}$ 记作关于 $\mathcal{A}$ 的 DG 模的导出范畴，并将$\mathrm{per}\mathcal{A}$ 记作 $\mathcal{A}$的完美导出范畴。我们将采用第2.1 节以及 [20, 22]中的记号。

按照 [13, 附录 B], 中的说法，若对任意 $X,Y\in\mathcal{A}$，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 都是一个递增子复形序列 M_i，$i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 的并，且其中每个商 M_{i+1}/M_i 在 k 上都是自由的，则称 dg k-范畴 $\mathcal{A}$ 为半自由。根据 [13, 引理 B.5], ，对于任意 dg k-范畴 $\mathcal{A}$, ˜ ˜，存在一个半自由 dg k-范畴 $\mathcal{A}$，以及一个拟同构 F: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$；我们称之为 $\mathcal{A}$ 的半自由分解˜ ˜ ˜。令 X 为由 $X(A,A):=\mathcal{A}(A,F(A))$ 定义的 dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-双模。˜那么，根据 [20, 引理 6.1 a) 和引理 6.2 b)], ，诱导函子 $\mathrm{L}T_X$: $\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 是一个三角等价，其拟逆为限制函子 $\mathrm{L}T_Y$: $\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{A})$；其中 Y 是由 $Y(A,A)=\mathcal{A}(F(A)\ A)$ 定义的˜ ˜ ˜dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-双模。

设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathscr{D}\mathcal{A}$ 的全子范畴。$\mathcal{U}$ 的一个标准提升是一个二元组 $(\mathcal{B},X)$，其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathrm{dg}}\mathcal{A}$ 的一个满 dg 子范畴，恰好由 $\mathcal{U}$ 中每个对象的一个 $\mathscr{K}$-投射分解组成，而 X 是由 $X(A,B):=B(A)$（对于 $A\in\mathcal{A}$ 和 $B\in\mathcal{B}$）定义的 dg $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$ 双模。于是，三角函子 $\mathrm{L}T_X$: $\mathscr{D}\mathcal{B}\to\mathscr{D}\mathcal{A}$ 限制后给出 $\mathrm{per}\mathcal{B}\to\mathrm{thick}_{\mathscr{D}\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ 之间的一个等价。参见 [20, Section7]。此外，如果 $\mathcal{A}$ 是半自由的，那么我们可以假设 X 在 $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\otimes_k\mathcal{A}$ 上是 $\mathscr{K}$-投射的；在这种情况下，X 在 $\mathcal{B}$ 上也是 $\mathscr{K}$-投射的，并且 $\mathrm{L}T_X\cong T_X$，根据 [20, Lemma 6.2 a)]。

命题 6.4（[39, 定理 1]）。设 $\mathcal{A}$ 是一个 dg k-范畴。设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathscr{D}\mathcal{A}$ 的一个全子范畴，使得 $\mathrm{per}\mathcal{A}\subset\mathrm{thick}(\mathcal{S})$。设 $(\mathcal{B},X)$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个标准提升。那么存在一个 dg k-范畴 $\mathcal{C}$、一个 dg 函子 F: $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$，以及一个再拼接:

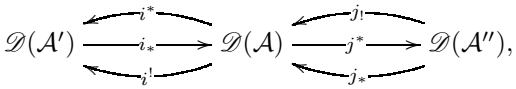


其中，三元组 $(i^*,i_*,i^!)$ 由 dg 函子 F 诱导。

6.3. 用 DG 范畴表述的主要结果。

在本小节中，我们证明定理 6.1 等价于

定理 6.5. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 为 DG k-范畴，并配有一个再拼接



其中，$i^*=T_V$ 对于一个 dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-双模 V，它在 $\mathcal{A}$ 上是 $\mathscr{K}$-投射的；而 $j_!=T_U$ 对于一个 dg$\mathcal{A}''$-$\mathcal{A}$-双模 U，它在 $\mathcal{A}''$ 上是 $\mathscr{K}$-投射的。

设 $\mathcal{S}$、 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 是 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$、 $\mathscr{D}(\mathcal{A}')$ 和 $\mathscr{D}(\mathcal{A}'')$ 的三角子范畴，分别包含 $\mathsf{per}(\mathcal{A})$、$\mathsf{per}(\mathcal{A}')$ 和 $\mathsf{per}(\mathcal{A}'')$, 并且使得上述再拼接的第一行限制为一个短正合列（分别地，限制为一个在直和项意义下的短正合列）

$$\mathcal{S}' \xleftarrow{i^*} \mathcal{S} \xleftarrow{j_!} \mathcal{S}''. \tag{6.2}$$

Then 存在一个短正合列（分别地，存在一个在直和项意义下的短正合列 *):*

$$\mathcal{S}'/\mathsf{per}(\mathcal{A}') \xleftarrow{\bar{i}^*} \mathcal{S}/\mathsf{per}(\mathcal{A}) \xleftarrow{\bar{j}_!} \mathcal{S}''/\mathsf{per}(\mathcal{A}'').$$

显然，定理 6.1 推出定理6.5。现在我们证明定理 6.5 推出定理6.1。保留定理 6.1中的记号和假设。

F首先，根据 [20, 定理 4。3], 存在一个 dg k-范畴 $\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{T} \simeq \mathscr{D}\mathcal{A}$。将 $\mathcal{A}$ 替换为 a semi-自由分解 of $\mathcal{A}$，我们可以假设 $\mathcal{A}$ 是半自由的，且 $\mathcal{T} = \mathscr{D}\mathcal{A}$。

其次，设 $\mathcal{W}$是 $\mathcal{T}''$的一组紧生成元。考虑 $\mathcal{U} = j_!(\mathcal{W})$ 的标准提升（$\mathcal{A}'', U$）。由于 $\mathcal{U} \subset \mathsf{per}(\mathcal{A})$, 根据提升的性质，存在一个三角等价 $\mathrm{L}T_U\colon \mathscr{D}\mathcal{A}'' \to \mathrm{Loc}(\mathcal{U})$。由于 $j_!$ 是全忠实的，它诱导出一个三角等价 $j_!\colon \mathcal{T}'' \to \mathrm{Loc}(\mathcal{U})$。因此，我们可以用 $\mathscr{D}\mathcal{A}''$替换 $\mathcal{T}''$，并且可以假设 $j_! = \mathrm{L}T_U$。然后，将 U 替换为 $\mathcal{A}''^{\mathrm{op}} \otimes_k \mathcal{A}$上的一个 $\mathscr{K}$-投射分解后，我们可以假设 U 是 $\mathcal{A}''^{\mathrm{op}} \otimes_k \mathcal{A}$上的 $\mathscr{K}$-投射的，因此它也是 $\mathcal{A}''$ 和 $j_! = T_U$上的 $\mathscr{K}$-投射的。

第三，根据 [33, 定理 4], 存在一个与再拼接（6.1）等价的再拼接

$$\mathscr{D}(\mathcal{A}'_1) \underset{\mathrm{L}T_{V_1}}{\rightleftarrows} \mathscr{D}(\mathcal{A}) \underset{T_U}{\rightleftarrows} \mathscr{D}(\mathcal{A}'').$$

这里，dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'_1$-双模 V_1 由一个同调满射 F诱导，其中该满射在对象上是双射，即 $V_1(A, A'_1) := \mathcal{A}'_1(A'_1, FA)$。进一步地，设 $G\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'_1$是 $\mathcal{A}'$ 的半自由分解，并设 V_2 为由 $V_2(A'_1, A') = \mathcal{A}'_1(G(A')\ A'_1)$ 定义的 dg $\mathcal{A}'_1$-$\mathcal{A}'$-双模。则 $\mathrm{L}T_{V_2}$ 是一个三角等价，并且根据 [20, 引理 6.3 b)], , 存在一个 dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-双模 V，使得 $\mathrm{L}T_V \cong \mathrm{L}T_{V_2} \circ \mathrm{L}T_{V_1}$。最后，用其在 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes_k \mathcal{A}'$上的 $\mathscr{K}$-投射分解替换 V后，我们有 V 在 $\mathcal{A}$ 上是 $\mathscr{K}$-投射的，并且 $\mathrm{L}T_V \cong T_V$，因此得到一个满足定理 6.5开头条件的再拼接。

6.4. 定理 **6.5**的证明。

我们首先指出，只需证明（6.2）在相差直和项的意义下为短正合列的情形。

下面的观察将会很有用。

引理 6.6. 假设我们有如下三角范畴及三角函子构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}' & \xleftarrow{F} & \mathcal{T} & \xleftarrow{G} & \mathcal{T}'' \\ {\scriptstyle\beta'}\uparrow & & {\scriptstyle\beta}\uparrow & & {\scriptstyle\beta''}\uparrow \\ \mathcal{P}' & \xleftarrow{H} & \mathcal{P} & \xleftarrow{K} & \mathcal{P}'' \end{array}$$

其中函子 β、 β' 和 β'' 都是全忠实的，而且稠密到相差直和项的意义下。那么，上行在相差直和项的意义下为短正合列，当且仅当底行在相差直和项的意义下为短正合列。

证明。假设上行在取直和项后构成短正合列。显然， K 是全忠实的，且 $H \circ K = 0$。根据我们对 β''的假设，自然函子$\mathcal{T}/\mathcal{P}'' \to \mathcal{T}/\mathcal{T}''$ 是一个等价。由于$\overline{F}\colon \mathcal{T}/\mathcal{T}'' \to \mathcal{T}'$ 是全忠实的，我们得到 $\overline{H}\colon \mathcal{P}/\mathcal{P}'' \to \mathcal{P}'$也全忠实，并且在取直和项后是稠密的。

另一方面，假设下行在取直和项后构成短正合列。容易证明 G 是全忠实的，且 $F\circ G=0$。等价 $\mathcal{T}/\mathcal{P}''\to\mathcal{T}/\mathcal{T}''$以及 β 在取直和项后是等价这一事实，推出$\overline{\beta}$：$\mathcal{P}/\mathcal{P}''\to\mathcal{T}/\mathcal{T}''$ 在取直和项后是等价。由于 β' 和 $\overline{F}$：$\mathcal{T}/\mathcal{T}''\to\mathcal{T}$都是在取直和项后成立的等价，我们便得证。□

为了证明定理6.5，我们将把 $\mathcal{S}'/\mathrm{per}\mathcal{A}'$、 $\mathcal{S}/\mathrm{per}\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{S}''/\mathrm{per}\mathcal{A}''$ 识别为某些 DG 范畴的导出范畴中的紧对象子范畴。然后，我们将构造这些导出范畴的再拼接。首先，我们可以为 $\mathcal{S}'$、 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}''$选择合适的提升。

引理 6.7. $\mathcal{S}'$、 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}''$存在标准提升，分别记为（$\mathcal{B}',X'$）、（$\mathcal{B},X$）和（$\mathcal{B}'',X''$），使得 $T_U(\mathcal{B}'')\subset\mathcal{B}$ 且 $T_V(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}'$。

证明。设（$\mathcal{B}'',X''$）是 $\mathcal{S}''$的一个标准提升。对于 $S''\in\mathcal{S}''$，设$\mathrm{p}S''\to S''$ 是一个 $\mathcal{K}$-投射分解。由于 T_U 保持无环性和 $\mathscr{K}$-投射性（见 [20, 引理 6.1]），可知$T_U(\mathrm{p}S'')\to T_U(S'')$ 是 $T_U(S'')\in\mathcal{S}$ 的一个 $\mathscr{K}$-投射分解。我们可以将 $\{T_U(\mathrm{p}S'')\mid S''\in\mathcal{S}''$ 延拓为 $\mathcal{B}$的一个标准提升。显然， $T_U(\mathcal{B}'')\subset\mathcal{B}$。类似地，可以找到 $\mathcal{S}'$ 的一个标准提升（$\mathcal{B}',X'$），使得 $T_V(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}'$。□

现在我们有两个 dg 函子： T_U：$\mathcal{B}''\to\mathcal{B}$ 和 T_V：$\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$。它们分别诱导一个 $\mathcal{B}''^{op}\otimes\mathcal{B}$-模 $\sim U$和一个 $\mathcal{B}^{op}\otimes\mathcal{B}'$-模 $\sim V$，其定义分别为 $\sim U(B'',B)=\mathcal{B}(B,T_U(B''))$ 和 $\sim V(B,B')=\mathcal{B}'(B',T_V(B))$。

对于任意 $\mathrm{p}S''\in\mathcal{B}''$，我们有 $T_U\circ\mathrm{L}T_{X''}((\mathrm{p}S'')^\wedge)=T_U(\mathrm{p}S'')$，且 $\mathrm{L}T_X\circ\mathrm{L}T_{\widetilde{U}}((\mathrm{p}S'')^\wedge)=\mathrm{L}T_X((T_U(\mathrm{p}S''))^\wedge)=T_U(\mathrm{p}S'')$。因此 $T_U\circ\mathrm{L}T_{X''}=\mathrm{L}T_X\circ\mathrm{L}T_{\widetilde{U}}$。类似地， $T_V\circ\mathrm{L}T_X=\mathrm{L}T_{X'}\circ\mathrm{L}T_{\widetilde{V}}$。于是我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{D}\mathcal{A}' & \xleftarrow{T_V} & \mathscr{D}\mathcal{A} & \xleftarrow{T_U} & \mathscr{D}\mathcal{A}'' \\
{\scriptstyle \mathbf{L}T_{X'}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_X}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{X''}}\uparrow \\
\mathscr{D}\mathcal{B}' & \xleftarrow{\mathbf{L}T_{\widetilde{V}}} & \mathscr{D}\mathcal{B} & \xleftarrow{\mathbf{L}T_{\widetilde{U}}} & \mathscr{D}\mathcal{B}''.
\end{array}\tag{6.3}$$

我们将证明，上述图表的底行可以扩展为一个再拼接。注意到 $\mathrm{L}T_{\widetilde{U}}(\mathrm{per}\ \mathcal{B}'')\subset\mathrm{per}\ \mathcal{B}$以及 $\mathrm{L}T_{\widetilde{V}}(\mathrm{per}\ \mathcal{B})\subset\mathrm{per}\ \mathcal{B}'$，根据 [20,引理 6.4],$\mathrm{R}H_{\widetilde{U}}=\mathrm{L}T_{\widetilde{U}^T}$，$\mathrm{R}H_{\widetilde{V}}=\mathrm{L}T_{\widetilde{V}^T}$，因此存在如下三角函子图表：

$$\begin{array}{ccccc}
 & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{\widetilde{V}}}\curvearrowright & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{\widetilde{U}}}\curvearrowright & \\
\mathscr{D}\mathcal{B}' & {\scriptstyle \mathbf{R}H_{\widetilde{V}}=\mathbf{L}T_{\widetilde{V}^T}}\longrightarrow & \mathscr{D}\mathcal{B} & {\scriptstyle \mathbf{R}H_{\widetilde{U}}=\mathbf{L}T_{\widetilde{U}^T}}\longrightarrow & \mathscr{D}\mathcal{B}'' \\
 & {\scriptstyle \mathbf{R}H_{\widetilde{V}^T}}\curvearrowright & & {\scriptstyle \mathbf{R}H_{\widetilde{U}^T}}\curvearrowright &
\end{array}\tag{6.4}$$

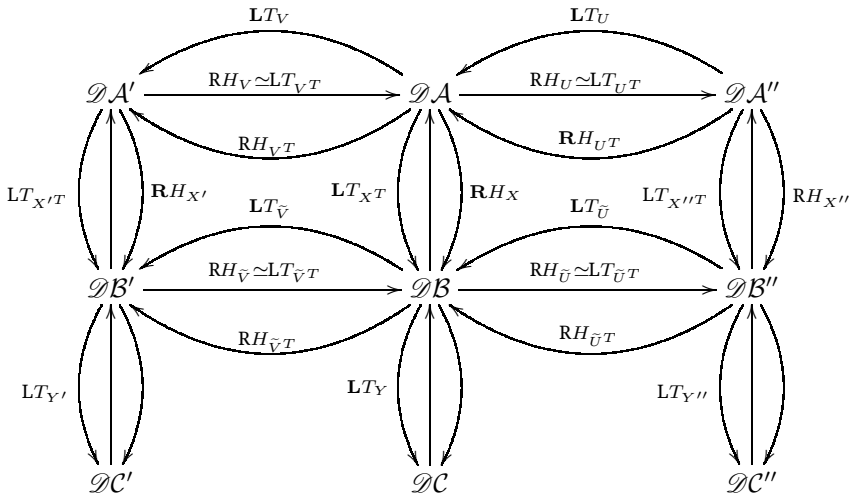
命题 6.8。 图表 (6.4) 是一个再拼接。

证明。根据 $\mathcal{B}'$、 $\mathcal{B}$、 $\mathcal{B}''$ 的构造，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}' & \xleftarrow{T_V} & \mathcal{S} & \xleftarrow{T_U} & \mathcal{S}'' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{thick}(\mathcal{S}') & \xleftarrow{T_V} & \mathrm{thick}(\mathcal{S}) & \xleftarrow{T_U} & \mathrm{thick}(\mathcal{S}'') \\
{\scriptstyle \mathbf{L}T_{X'}}\uparrow\simeq & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_X}\uparrow\simeq & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{X''}}\uparrow\simeq \\
\mathrm{per}\mathcal{B}' & \xleftarrow{\mathbf{L}T_{\widetilde{V}}} & \mathrm{per}\mathcal{B} & \xleftarrow{\mathbf{L}T_{\widetilde{U}}} & \mathrm{per}\mathcal{B}''
\end{array}\tag{6.5}$$

由于第一行除直和项外是一个短正合列，因此根据引理6.6，第三行也具有同样性质。于是所需结果由引理 6.3 立即得到。□

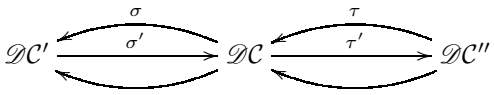
B由命题 6.4 和 6.8，我们得到一个行和列均为拼接函子的图表：



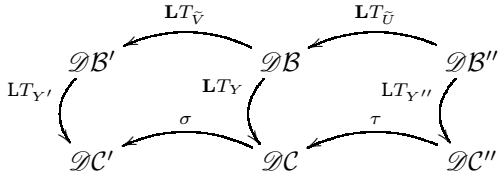
(6.6)

这里，$\mathrm{L}T_Y$由 dg 函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 导出。$\mathrm{L}T_{Y'}$和 $\mathrm{L}T_{Y''}$也以类似方式导出。下面的命题蕴含我们的主定理。

命题 6.9. 存在一个再拼接

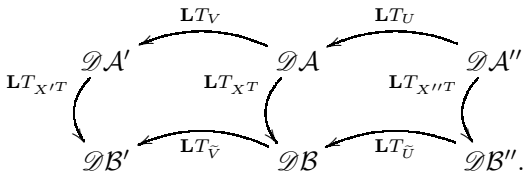


使得下图



可交换。

证明。我们首先证明下图可交换：



根据提升的定义，$\mathrm{L}T_X$ 在$\mathrm{per}\mathcal{B}$ 与$\mathrm{thick}(\mathcal{S})$之间诱导出一个等价，其拟逆等价由$\mathrm{R}H_X$ 给出（见 [20, 第 7.3]节）。对于任意 $A'' \in \mathcal{A}''$，有$\mathrm{L}T_{X^T} \circ \mathrm{L}T_U(A''^\wedge) = \mathrm{R}H_X(T_U(A''^\wedge)) = (T_U(A''^\wedge))^\wedge$，因为根据 [20,引理 6.4]，$\mathrm{L}T_{X^T}|_{\mathrm{per}\mathcal{A}''} = \mathrm{R}H_X|_{\mathrm{per}\mathcal{A}''}$。类似地，$\mathrm{L}T_{\tilde{U}} \circ \mathrm{L}T_{X''^T}(A''^\wedge) = \mathrm{L}T_{\tilde{U}} \circ \mathrm{R}H_{X''}(A''^\wedge) = \mathrm{L}T_{\tilde{U}}((A''^\wedge)^\wedge) = (T_U(A''^\wedge))^\wedge$。于是 $\mathrm{L}T_{X^T} \circ \mathrm{L}T_U = \mathrm{L}T_{\tilde{U}} \circ \mathrm{L}T_{X''^T}$。因此，上述图表的右半部分是交换的，左半部分的交换性可类似证明。由伴随关系，我们得到如下新的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{D}\mathcal{A}' & \xrightarrow{\mathbf{R}H_V} & \mathscr{D}\mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{R}H_U} & \mathscr{D}\mathcal{A}'' \\
{\scriptstyle \mathbf{L}T_{X'}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{X}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{X''}}\uparrow \\
\mathscr{D}\mathcal{B}' & \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{V}}} & \mathscr{D}\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{U}}} & \mathscr{D}\mathcal{B}''.
\end{array}$$

结合该图表与（6.3），我们得到如下左再拼接

$$\mathsf{Ker}(\mathbf{L}T_{X'}) \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{V}}} \mathsf{Ker}(\mathbf{L}T_{X}) \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{U}}} \mathsf{Ker}(\mathbf{L}T_{X''}). \tag{6.7}$$

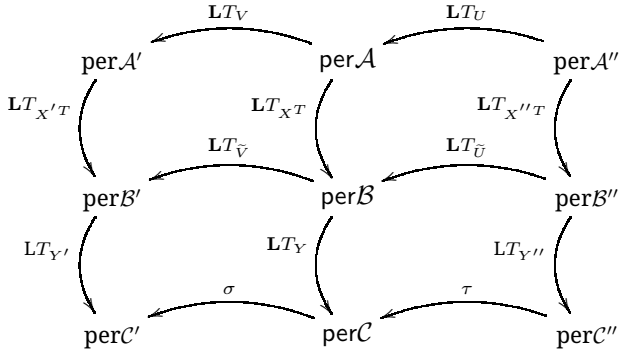
注意，$\mathsf{Ker}(\mathrm{L}T_X)$、$\mathsf{Ker}(\mathrm{L}T_{X'})$ 和 $\mathsf{Ker}(\mathrm{L}T_{X''})$ 分别与 $\mathscr{D}\mathcal{C}$、$\mathscr{D}\mathcal{C}'$ 和 $\mathscr{D}\mathcal{C}''$ 三角等价。由于 $\mathrm{R}H_{\widetilde{V}} \cong \mathrm{L}T_{\widetilde{V}T}$ 和 $\mathrm{R}H_{\widetilde{U}} \cong \mathrm{L}T_{\widetilde{U}T}$ 与无限直和可交换，根据引理 2.10，$\mathrm{R}H_{\widetilde{V}}|_{\mathsf{Ker}(\mathbf{L}T_{X'})}$ 和 $\mathrm{R}H_{\widetilde{U}}|_{\mathsf{Ker}(\mathbf{L}T_{X})}$ 存在右伴随。因此，根据命题 2.9，(6.7) 可扩展为一个再拼接。它等价于一个以 $\mathscr{D}\mathcal{C}'$ 和 $\mathscr{D}\mathcal{C}''$ 表示的 $\mathscr{D}\mathcal{C}$ 的再拼接，正如所期望的。第二个断言由以下交换图得到

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{D}\mathcal{B}' & \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{V}}} & \mathscr{D}\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{R}H_{\widetilde{U}}} & \mathscr{D}\mathcal{B}'' \\
{\scriptstyle \mathbf{L}T_{Y'T}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{YT}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}T_{Y''T}}\uparrow \\
\mathscr{D}\mathcal{C}' & \xrightarrow{\sigma'} & \mathscr{D}\mathcal{C} & \xrightarrow{\tau'} & \mathscr{D}\mathcal{C}''.
\end{array}$$

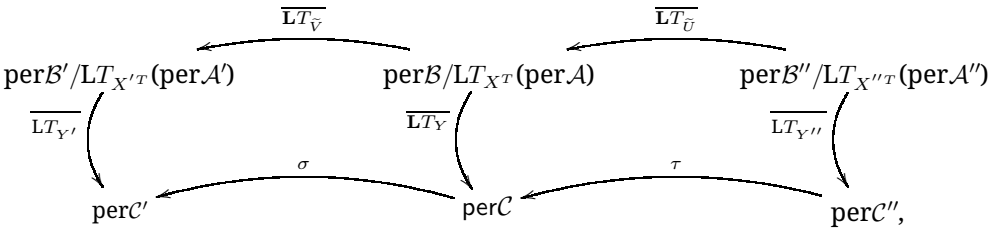
□

现在我们准备证明定理 6.5。

定理 *6.5* 的证明。根据命题6.9，我们有以下交换图



该图表导出一个交换图



其中，诱导函子 $\mathrm{L}T_Y$、$\mathrm{L}T_{Y'}$ 和 $\overline{\mathrm{L}T_{Y''}}$ 是全忠实的，并且在直和项意义下稠密。下行是直和项意义下的正合列，因此上行也是如此，因为

引理 6.6。交换图（6.5）诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{per}\mathcal{B}'/\mathbf{L}T_{X'T}(\mathsf{per}\mathcal{A}') & \xleftarrow{\overline{\mathbf{L}T_{\widetilde{V}}}} & \mathsf{per}\mathcal{B}/\mathbf{L}T_{XT}(\mathsf{per}\mathcal{A}) & \xleftarrow{\overline{\mathbf{L}T_{\widetilde{U}}}} & \mathsf{per}\mathcal{B}''/\mathbf{L}T_{X''T}(\mathsf{per}\mathcal{A}'') \\
\uparrow{\scriptstyle \mathbf{L}T_{X'T}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{L}T_{XT}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{L}T_{X''T}} \\
\mathcal{S}'/\mathsf{per}\mathcal{A}' & \xleftarrow{i^*} & \mathcal{S}/\mathsf{per}\mathcal{A} & \xleftarrow{j_!} & \mathcal{S}''/\mathsf{per}\mathcal{A}''
\end{array}$$

其中，竖直函子在相差直和项的意义下都是三角等价。由引理 6.6可知，底行在相差直和项的意义下是正合列。□

7. An application to algebraic geometry

本节中，我们给出一个在代数几何中的应用。

设 X是一个概形。记 O_X-Mod（分别为 Qcoh(X)）为 O_X-模（分别为拟凝聚层）在 X上的范畴。当 X 是诺特的，Coh(X) 表示凝聚层范畴。我们将 $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}_{\mathrm{Qcoh}}(O_X\text{-Mod})$ 记作 O_X-Mod 的无界导出范畴，其中上同调为拟凝聚层；仅当 $\mathscr{D}(\mathrm{Qcoh}(X))$ 为拟凝聚层的无界导出范畴时，两者才等价，此时 X 是拟紧且分离的 [1, 6, 21]。

回顾一下，对于诺特概形 X，若凝聚层的有界复形局部拟同构于有限型局部自由层的有界复形，则称其为完美复形。用 per(X) 表示 $\mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$ 中由完美复形构成的满子范畴。

遵循 [34], ，我们称域 k 上的概形 X 满足条件（ELF），如果它是分离的、诺特的、克鲁尔维数有限，且凝聚层范畴 Coh(X) 有足够多的局部自由层。

定义 7.1（[34]）。设 X 是满足（ELF）的概形。X 的有界奇点范畴定义为

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X) = \mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(X))/\mathsf{per}(X).$$

设 $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ 为一个开子概形，并记 $Z = X\backslash U$。令

$$\mathscr{D}^b_Z(\mathrm{Coh}(X)) = \{C \in \mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(X)) \mid H^i(C) \text{ has its support in } Z, \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

并令 per$_Z(X)$ 为 per(X) 中由支集包含于 Z 的完美复形构成的满三角子范畴。根据定义，支集包含于 Z 的 X 的有界奇点范畴是 Verdier 商

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg},Z}(X) := \mathscr{D}^b_Z(\mathrm{Coh}(X))/\mathsf{per}_Z(X).$$

令 i^*: $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X) \to \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U)$ 由拉回函子 Coh$(X) \to$Coh(U) 诱导，且 $j_!$:$\mathscr{D}^b_{\mathrm{sg},Z}(X) \to \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)$ 由包含函子 $\mathscr{D}^b_Z(\mathrm{Coh}(X)) \hookrightarrow \mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$ 诱导。

以下结果将这三个奇点范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)$ $\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U)$ 和 $\mathscr{D}^b_{\mathrm{sg},Z}(X)$ 联系起来，并推广了 [34, 命题 2.7] 和 [35, 命题 2.7]。

The定理 7.2（[10, 定理 1.3]）。存在一个三角范畴的短正合列 *s:*

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U) \xleftarrow{\quad i^*\quad} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X) \xleftarrow{\quad j_!\quad} \mathscr{D}_{\mathrm{sg},Z}(X).$$

本节其余部分将利用定理 6.1证明上述结果。

设 X 是一个拟紧拟分离概形，带有一个拟紧开子概形 $i : U \hookrightarrow X$ 其闭补集为 $Z = X\backslash U$。在 [27], 中发现了一个新的再拼接，其形式为

$$\mathscr{D}(U) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}(X) \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}_Z(X), \tag{7.1}$$

其中 i^* 是拉回函子， i_* 是推前函子， $j_!$ 是包含函子，并且$\mathscr{D}_Z(X) = \{C \in \mathscr{D}(X) \mid H^i(C)$ 的支集包含于 $Z, \forall i \in \mathbb{Z}\}$。

回顾一下，当 X 是拟紧且拟分离的， $\mathscr{D}$（X）是紧生成的，其紧对象的全子范畴恰好是per（X） [7, 定理 3.1。1]。因此，上述粘合将导出一个三角范畴的短正合列：

$$\mathsf{per}(U) \xleftarrow{\quad i^* \quad} \mathsf{per}(X) \xleftarrow{\quad j_! \quad} \mathsf{per}_Z(X)\ ,$$

其中， $\mathscr{D}_Z(X)$ 中由紧对象构成的全子范畴通过定理 [38, 6.8] 与 $\mathsf{per}_Z(X)$ 等同。

现在假设我们的概形 X 满足条件（ELF）。根据 [35, 引理 2.2], , 存在一个三角范畴的短正合列：

$$\mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(U)) \xleftarrow{\quad i^* \quad} \mathscr{D}^b(\mathrm{Coh}(X)) \xleftarrow{\quad j_! \quad} \mathscr{D}^b_Z(\mathrm{Coh}(X)).$$

现在可以看出，定理 6.1 的假设成立，因此我们得到一个三角范畴的短正合列（相差直和项）：

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U) \xleftarrow{\quad i^* \quad} \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X) \xleftarrow{\quad j_! \quad} \mathscr{D}_{\mathrm{sg},Z}(X).$$

Since $i^*\colon \mathscr{D}^b(\mathsf{Coh}(X)) \to \mathscr{D}^b(\mathsf{Coh}(U))$ 是稠密的，因此 $i^*\colon \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X) \to \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U)$ 也如此，并且上述正合列 ce is a 短正合列。

我们完成了。

我们以一条注记结束本节。

注 7.3. (a) 显然， $j_!$ 的本质像：$\mathscr{D}_{\mathrm{sg},\ Z}(X) \to \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)$ 是由 $\mathsf{Coh}_Z(X)$ 生成的，其中 $\mathsf{Coh}_Z(X)$ 是支集位于 Z 中的凝聚层范畴。因此我们有如下等价：

$$\mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)/\mathrm{thick}(\mathrm{Coh}_Z(X)) \cong \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(X)/(\mathrm{Coh}_Z(X)) \cong \mathscr{D}_{\mathrm{sg}}(U),$$

这就是 [10, 定理 1。3] 的原始形式。

(b) 我们对定理 *7.2* 的证明与 [26, 命题 6。9]的思路相同。虽然 [26] 使用了“较大”奇点范畴的显式模型，但我们的证明使用 dg 提升。我们指出，如果采用适当的显式模型，那么证明定理 (6.6)中出现的图表 *6.1* 可以与 [26, Page 1149] 中的图表等同。

References

[1] Leovigildo Alonso Tarr´ıo、Ana Jerem´ıas L´opez 和 Joseph Lipman， *Local homology and cohomology on schemes* 4 **30** 1997 1, 1 39 24 ，《Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. ( ) ( )》， 第 - 期。Claire Amiot,

[2] *Cluster categories for algebras of global dimension* 2 *and quivers with potential*，《Annal. Institut Fourier》59 (2009)，第 6 期，2525-2590。

16[3] Lidia Angeleri-H ¨ ¨ *Ladders and simplicity of derived module* ugel、

categories **472** 2017 15 66 4, 6, 7, 8, 9, 13

Steffen Konig、Qunhua Liu 和 Dong Yang， 。《J. Algebra》（ ）， - 。[4]

Aleksandr A. Beilinson、Joseph N. Bernstein 和 Pierre Deligne， *Faisceaux pervers*，《奇异空间上的分析与拓扑》I（Luminy，

1981 5 171， ´ **100**， 1982 1, 5, 6 ），- Asterisque，法国数学会，巴黎，。

[5] *Koszul duality*

Aleksandr A. Beilinson、Victor Ginzburg 和 Vadim V. Schechtman， 。《几何与物理杂志》5（1988），第 3, 317 350 6, 9 - 期。

[6] ¨

Marcel Bokstedt 和 Amon Neeman。 *Homotopy limits in triangulated categories*。《Compositio Math.》86（ 1993 2, 209 234 24 ），

[7]

第 - 期。Alexey I. Bondal 和 Michel Van den Bergh， *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry* **3** 2003 1 36 ，《Mosc. Math. J.》（ ），- 。

25

[8] Ragnar-Olaf Buchweitz,

Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology。附录及导言由 Luchezar L. Avramov、Benjamin Briggs、Srikanth B. Iyengar 和 Janina C. Letz 撰写。数学调查与专著，第 262 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2021。xii+175 页。ISBN：978- 1-4704-5340-4 1[9]

Xiao-Wu Chen， *Singularity categories Schur functors and triangular matrix rings*。《Algebr. Represent. Theory》

12 2009 2 5, 181 191 2, 15 （ ），第 - - 期。Xiao-Wu Chen， *Unifying two results of Orlov on singularity categories*。《Abh.

[10] Math. Semin. Univ. Hambg.》80（2010），第 2 期，207-212。2, 15, 24, 25

[11] Xiao-Wu Chen, *Singular equivalences induced by homological epimorphisms*。《Proc. Amer. Math. Soc.》142（2014 8, 2633 2640 2, 15），第 – 期。Edward Cline、Brian Parshall 和 Leonard L. Scott,
[12] *Stratifying endomorphism algebras*。《Mem. Amer. Math. Soc.》 **124** 1996 591, +119 9（），第 期，viii 页。
[13] Vladimir Drinfeld, *DG quotients of DG categories* 272 2004 2, 643 691 19 。《J. Algebra》（），第 – 期。
[14] Werner Geigle 和 Helmut Lenzing, *perpendicular categories with applications to representations and sheaves*。《J. Algebra》 **144** 1991 2, 273 343 7（），第 – 期。Lingyan Guo,
[15] *Cluster tilting objects in generalized higher cluster categories*, 《J. Pure Appl. Algebra》215（2011），第 9 期，2055–2071。16
[16] Dieter Happel, *Reduction techniques for homological conjectures*, 《Tsukuba J. Math.》17（1993），第 1 期，115–130。13
[17] *Singularity categories of graded proper monomial algebras* 2 Haibo Jin 和 Sibylle
[18] *Relative singularity categories I: Auslander resolutions* **301** 2016
Schroll, ，准备中。Martin Kalck 和 Dong Yang, ，《Adv. Math.》（），973-1021。4, 10
[19] , *Relative singularity categories II: Construction of dg models*, 预印本。9, 17
[20] B. Keller, *Deriving DG categories*, 《Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)》27（1994），第 1 期，63–102。3, 4, 5, 18, 19, 20, 21, 22
[21] , *Introduction to A-infinity algebras and modules*, 《Homology Homotopy Appl.》3（2001），第 1 期，1–35（电子版）。[22] ——— , *On differential graded categories*。《国际数学家大会论文集》第二卷，151-190，欧洲数学会，苏黎世，2006。3, 19
[23] , *Calabi-Yau triangulated categories*, 《代数表示论及相关主题的发展趋势》，EMS 大会报告丛书，欧洲数学会，苏黎世，¨ 2008, 467 489 16 页 – 。Bernhard Keller、Dong Yang 和 Guodong Zhou,
[24] *The Hall algebra of a spherical object*, 《J. Lond. Math. Soc. (2 **80** 2009 3, 771 784 17)》（），第 – 期。Steffen
[25] *Tilting complexes*
Koenig, , *perpendicular categories and recollements of derived categories of rings*, 《J. Pure Appl. Algebra》 **73** 1991 211 232 5, 13（），- 。Henning Krause,
[26] *The stable derived category of a Noetherian scheme* **141** 2005 5, 。《Compos. Math.》1128 1162 25（），第 - 期。
[27] *A new recollement for schemes* **35** 2009 4, 1071 1077 24 Peter
[28] *Recollements of singularity categories and monomorphism categories*
Jørgensen, 。《Houston J. Math.》（），第 - 期。Pin Liu 和 Ming Lu, ，《Comm. Algebra》 **43** 2015 6, 2443 2456 2, 14
[29] （），第 - 期。Ming Lu,
Gorenstein defect categories of triangular matrix algebras **480** 2017 346 367 12 , 《J. Algebra》（），–
[30] *Localization of triangulated categories and derived categories* **141** 1991
。Jun-ichi Miyachi, 。《J. Algebra》（），第 2 期，463 483 6- 。
[31] Amnon Neeman, *The connection between the K–theory localisation theorem of Thomason Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, 《Ann. Sci. Ec. Norm. Sup´er.》25（1992），547-566。7, 18
[32] , *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, 《J. Amer. Math. Soc.》 **9** 1996 205 236 7（），- 。Pedro Nicolas 和 Manuel Saorın,
[33] *Parametrizing recollement data for triangulated categories*, 《J. Algebra》322（2009 4, 1220 1250 7, 8, 20），第 – 期。
[34] Dmitri O. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, 《Tr. Mat. Inst. Steklova》246（2004），第 Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh. 期，240–262；译文见《Proc. Steklov Inst. Math.》2004, 3 246 227 248 1, 12, 14, 24 第 期（），- 。Dmitri O. Orlov,
[35] *Formal completions and idempotent completions of triangulated categories of singularities*。《Adv. Math.》 **226** 2011 1, 206 217 24, 25（），第 - 期。Brian J. Parshall,
[36] *Finite dimensional algebras and algebraic groups* 82 1989 97 114 5 , 《Contemp. Math.》
[37] *Eventually homological isomorphisms in recollements of derived categories*
（），- 。Yongyun Qin, ，《J. Algebra》563（2020 53 73 2, 13, 14），- 。Raphael Rouquier,
[38] ¨ *Dimensions of triangulated categories* **1** 2008 2, 193 256 25 , 《J. K-Theory》（），第 -
[39] *Recollements from generalized tilting* **140** 2012 1, 83 91
期。Dong Yang, 。《Proc. Amer. Math. Soc.》（），第 - 期。
[40] *On stratifications of derived module categories* **34** 1991 Alfred Wiedemann,
19
《Canad. Math. Bull.》（），第 2 期，275 280 13- 。

Haibo Jin, Department of Mathematics, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany
Email address: hjin@math.uni-koeln.de

Dong Yang, Department of Mathematics, Nanjing University, 22 Hankou Road, Nanjing 210093, China
Email address: yangdong@nju.edu.cn

Guodong Zhou, School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Engineering Applications(Ministry of Education), Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal Univer-sity, Shanghai 200241, China*Email address*: gdzhou@math.ecnu.edu.cn