arXiv:2302.05069v1 [math.LO] 10 Feb 2023

碎裂迭代

J¨org Brendle*系统信息学研究生院 神户大学 六甲台1-1，滩区，神户市657-8501，日本 邮箱: brendle@kobe-u.ac.jp

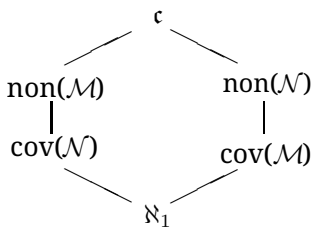
2023年2月13日

摘要

我们发展了与有限支撑迭代相对偶的迭代强迫构造，其特点是在极限步骤中添加随机实数，而不是科恩实数。鉴于其有用的应用，我们尤其关注二维"随机"迭代，并将其称为 *shattered iterations*。作为这类迭代的基本工具，我们研究了若干本身也颇有意义的概念。具体而言，我们讨论正确图，引入完备布尔代数的粘合极限——一种同时推广完备布尔代数直极限与两步 amalgamation 的构造；详细介绍带有有限可加严格正测度的完备布尔代数；并证明这类完备布尔代数在粘合极限下的一般保持定理。作为应用，我们在西乔斯基图表中得到了关于基数不变量的新一致性结果。例如，我们证明了 $\aleph_1 < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$的一致性，从而回答了 A. Miller [Mi]提出的一个老问题。

引言

勒贝格可测性和贝尔纲在数学的诸多领域中发挥着基础性作用：前者为积分和概率论奠定了基础，后者对于泛函分析的基本理论至关重要。关于这两个概念的基础性问题展现出重要的相似性 [Ox]，并极大地推动了集合论的发展（例如参见 [So、Sh1、BJ2]）；而我们将在这里讨论的，正是这类基础性问题的某些方面。令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 分别表示实数 R 上无处稠密集和零测集所构成的理想。$\mathcal{M}$ 的覆盖数 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ 是覆盖整个实线的无处稠密集族的最小基数，$\mathcal{M}$ 的一致性数 $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ 是实数中非无处稠密集的最小基数，而 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ 和 $\mathrm{non}(\mathcal{N})$ 对零测理想作类似定义。所有这些基数不变量都是不可数的，并且小于连续统 $\mathfrak{c}$ 的基数（命题 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \geq \aleph_1$ 正是经典的贝尔纲定理）。此外，利用 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的正交性（即存在一个余无处稠密 G_δ 零测集），以及两个理想的平移不变性，很容易证明不等式 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$（这就是 Rothberger定理，参见 [BJ2，第 2.1.7] 定理）。在 ZFC 中无法证明更多不等式。



事实上，令 $\mathcal{B}_\kappa$、$\mathcal{M}_\kappa$ 和 $\mathcal{N}_\kappa$ 分别表示 2^κ 上的贝尔集、瘦集理想和零测理想，其中 κ 是任意基数，我们定义 Cohen 代数 $\mathrm{C}_\kappa = \mathcal{B}_\kappa/\mathcal{M}_\kappa$ 和随机代数 $\mathrm{B}_\kappa = \mathcal{B}_\kappa/\mathcal{N}_\kappa$。对于

*部分研究由日本学术振兴会科研费补助金（C）18K03398资助。*2020 Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E35；次要分类：03E17、03E40*Keywords.* 勒贝格测度、贝尔纲、基数不变量、科恩强迫、随机强迫、迭代强迫

$\kappa=\omega$，我们将博雷尔集简记为 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_\omega$，并将 $\mathsf{C}=\mathsf{C}_\omega$ 以及 $\mathsf{B}=\mathsf{B}_\omega$。这些强迫概念对测度与范畴的影响，最早由 Solovay 在开创性工作 [So], 中加以研究。结果表明，假设 $\kappa^\omega=\kappa$，用 C_κ 强迫可得到一个模型，使得 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\aleph_1$，且 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\kappa=\mathfrak{c}$；而用 B_κ 强迫则得到 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\aleph_1$，且 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\kappa=\mathfrak{c}$（详情见 [Ku1]）。此外，众所周知，$\mathrm{cov}(\mathcal{N})<\mathrm{non}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})<\mathrm{non}(\mathcal{N})$ 在 [BJ2 第 7] 章中是一致的。

我们将探讨这些基数不变量在多大程度上可以取任意值。近年来，这类问题受到了广泛关注（特别参见 [GKS、GKMS、KST、KTT]）。设 $\kappa<\lambda$为正则基数。利用可数链条件强迫的有限支撑迭代（简称 fsi），这种方法由 Solovay 和 Tennenbaum 在其开创性工作 [ST], 中提出，要得到一个满足 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\kappa$ 且 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\lambda$的模型并不困难。具体来说，为简单起见，假设基模型满足广义连续统假设；通过对大小为 $<\kappa$ 的 B 的子代数进行 λ 阶段的 fsi，并利用账目管理论证确保所有这类子代数都得到处理，即可实现这一点（参见 [Mi] 和 [BJ2，模型 7.5.1]）。其对偶一致性，即 CON($\aleph_1<\kappa=\mathrm{cov}(\mathcal{M})<\lambda=\mathrm{non}(\mathcal{M})$），则是 A. Miller [Mi 的一个长期问题，见问题 (11)，第 348] 页。为什么这要困难得多得多？原因是，标准的强迫迭代技巧——上面提到的 fsi，以及 Shelah [Sh2], 创立的适当强迫的可数支撑迭代——都行不通：前者会在极限阶段添加科恩实数，因此必然强迫 $\mathrm{non}(\mathcal{M})\leq\mathrm{cov}(\mathcal{M})$；后者则只能得到关于 $\mathfrak{c}\leq\aleph_2$ 的模型。

为了理解如何解决这个问题，让我们尝试将上面提到的 $\mathrm{non}(\mathcal{M})=\kappa$ 与 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\lambda$ 的一致性证明对偶化，互换测度与范畴的角色。由此得到的启发是：我们应当建立一个迭代强迫构造，使其经过大小为 $<\kappa$ 的 C 的子代数，并在极限阶段添加随机实数，而不是添加科恩实数。前一种设想显然是荒谬的，因为 C 是可数的，因此它的所有子代数也是可数的，而它们又都同构于 C；至于后一种设想究竟意味着什么，起初并不清楚，但事实证明，这类“随机”迭代的构造将成为我们工作的主要内容之一。那么，让我们转换一下视角。注意，C_λ 完全嵌入 fsi P 强迫$\kappa=\mathrm{non}(\mathcal{M})<\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\lambda$ 中。也就是说，我们可以将 P 写成两步迭代 $\mathsf{C}_\lambda\star\dot{\mathsf{Q}}$，其中余强迫 Q 本身就是一种添加部分随机实数的迭代。因此，修正后的启发是：我们应当从 B_λ 开始，迭代地加入一些实数，使得它们仅在 B_λ—扩张的一个小片段上是科恩实数。正如我们将看到的，这确实可行：

主定理 A。设 $\kappa<\lambda$ 为任意正则不可数基数。则存在一个满足 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\kappa$ 以及 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\lambda$的可数链条件强迫扩张。

证明需要相当多的预备工作，而这些工作本身也颇为有趣。特别是，我们将在第 1 节详细讨论正确图；在处理非线性迭代时，正确图是一项基础工具。第 2 节介绍并发展粘合极限的基本理论；粘合极限是一种新颖的迭代强迫极限构造，将直极限和两步 amalgamation 作为特殊情形囊括其中。在第 3 节中，我们利用完备布尔代数（完备布尔代数）上的有限可加严格正测度，建立粘合极限构造的一般保持定理。借助这些工具，我们在第 4 节证明主定理 A。由于我们所使用的迭代类型通过不断引入更多部分科恩（或其他）泛型，逐渐破坏初始 B_λ-扩张的齐次性，因此我们称这类迭代为碎裂迭代。在第 7 节中，我们简要讨论碎裂迭代在何种程度上可以被视为在极限阶段添加随机实数的二维迭代。

集合论及其应用中还有许多其他值得关注的基数不变量，其中最重要、最有用的两个是非有界数 $\mathfrak{b}$ 和支配数 $\mathfrak{d}$。对于贝尔空间 ω^ω 中的函数 f,g，如果除有限多个n之外，对所有n都有 $f(n)\leq g(n)$，就称 g 最终支配 f（简记为 $f\leq^* g$）。若没有任何 $g\in\omega^\omega$ 能最终支配 $\mathcal{F}$中的所有元素，则称族 $\mathcal{F}\subseteq\omega^\omega$ 为无界族；若对所有 $g\in\omega^\omega$，都存在一个最终支配 g的 $f\in\mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$ 为支配族。$\mathfrak{b}$（分别为 $\mathfrak{d}$）是无界族（分别为支配族）的最小基数。容易看出，$\mathfrak{b}\leq\mathfrak{d}$ 是小于 $\mathfrak{c}$的不可数基数；又因为贝尔空间 ω^ω 的非贫乏子集都是无界的，所以可得 $\mathfrak{b}\leq\mathrm{non}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})\leq\mathfrak{d}$（详见 [Bl，命题 5.5]）。遗憾的是，我们不知道主定理 A 的模型中 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$ 的值（不过我们强烈猜测它们分别是 $\aleph_1$ 和 $\mathfrak{c}$，参见猜想 4 及第 5 节后续讨论）。通过修改主定理 A 的模型，我们在第 6 节证明：

主定理 B。设 $\kappa<\lambda$ 为任意的正则不可数基数。那么存在一个 ccc 强迫扩张，使得 $\mathfrak{b}=\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\kappa$且 $\mathfrak{d}=\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\lambda$。

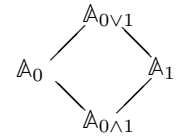
第 5 节包含一个　　关于碎裂迭代保持结果的简短且仍不尽如人意的讨论　　.

记号。我们假定读者熟悉集合论的基本技巧 [Je、Ku2] and，尤其是强迫理论。关于基数不变量，参见 [BJ2、Bl]。出于技术原因，我们将用完备布尔代数（简称 cBa）的语言表述大多数强迫理论结果 $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$。在偏序（简称 p.o.）或完备布尔代数中，$\perp$ 表示迫使条件不相容。对于偏序 P，r.o.(P)（即 P 的正则开代数）是与 P 相关联的完备布尔代数（因此 P 与 r.o.(P) 强迫等价）。在完备布尔代数的迫使语言中，我们用 $[\![\varphi]\!]$ 表示公式 φ的布尔值。给定完备布尔代数 A_0 和 A，映射$e : A_0 \to A$ 若为单射，并且除保持布尔运算外还保持任意多个元素的上确界与下确界，则称为完全嵌入。我们通常假定 e 是恒等映射 id。此时，我们写作 $A_0 <\circ A$，表示"A_0 完全嵌入于 A"。若 A_0 是完备布尔代数，而 A_1 是一个以 A_0为名称的完备布尔代数，则 $A := A_0 \star A_1$ 表示两步迭代。在这种情形下，$A_0 <\circ A$。另一方面，若 $A_0 <\circ A$，则存在一个以 A_0为名称的完备布尔代数 A_1，使得 $A = A_0 \star A_1$；具体而言，令 G_0 为基模型 V上的 A_0-泛型，我们便可在 $V[G_0]$ 中定义商完备布尔代数（亦称余 forcing）A/G_0，从而得到 $A_1[G_0] = A/G_0$。若 $\langle A_i : i \in I\rangle$是由完备嵌入 $id : A_i <\circ A_j$ 组成的完备布尔代数系统，其中 $i < j$ 满足 $\langle I, \text{且} \leq\rangle$ 是有向偏序，则令 $\lim\operatorname{dir}_{i\in I} A_i := \text{r.o.}(\bigcup_{i\in I} A_i)$ 表示其直极限。

1 正确图

设 $I = \{0 \wedge 1, 0, 1, 0 \vee 1\}$ 为一个四元格，其最大元为 $0 \vee 1$，最小元为 $0 \wedge 1$，中间为 0 和 1。假设给定了 cBa's A_i for $i \in I$ 以及完全嵌入 $e_{ij} : A_i \to A_j$ for $i \leq j$ from I，也就是说，我们考虑 cBa's 的图表

$\bar{\mathbb{A}}:$



。e_{ij} 自然地引出投影映射 $h_{ji} : A_j \to A_i$，定义如下

$$h_{ji}(a_j) = \prod\{a \in \mathbb{A}_i : e_{ij}(a) \geq a_j\}$$

为简化问题，假设 $A_i \subseteq A_j$ for $i \leq j$，且 e_{ij} 为恒等映射。在这种情况下，$A_{0\wedge1} = A_0 \cap A_1$ 是一个自然要求，但我们还需要更强的性质。

定义 1。如果对于所有 $a_0 \in A_0$ 和 $a_1 \in A_1$，，当 $h_{0,\ 0\wedge1}(a_0) \cdot h_{1,\ 0\wedge1}(a_1) \neq \mathbb{0}$ 时，$a_0 \cdot a_1 \neq \mathbb{0}$ 属于 $\mathbb{A}_{0\vee1}$，则图表 $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_i : i \in I)$ 是正确的。⊣

例 1。（积）令 $A_{0\wedge1} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ 为平凡代数，并令 $A_{0\vee1}$ 为由乘积强迫 $(A_0 \setminus \{\mathbb{0}\}) \times (A_1 \setminus \{\mathbb{0}\})$ 生成的完备布尔代数。显然，所得图表是正确的。⊣

例 2。（粘合）令 $A_{0\vee1} = \operatorname{amal}_{\mathbb{A}_{0\wedge1}}(A_0, A_1)$ 为 A_0 和 A_1 在 $A_{0\wedge1}$ 上的粘合。条件是满足 $h_{0,0\wedge1}(a_0) \cdot h_{1,0\wedge1}(a_1) \neq \mathbb{0}$ 的有序对 $(a_0, a_1) \in (A_0 \setminus \{\mathbb{0}\}) \times (A_1 \setminus \{\mathbb{0}\})$，并赋予逐坐标序：若 $a_0' \leq a_0$ 且 $a_1' \leq a_1$，则 $(a_0', a_1') \leq (a_0, a_1)$。$A_{0\vee1}$ 是这个条件集的完备化。将 A_0 与 $\{(a_0, 1) : a_0 \in A_0\}$ 等同；A_1 也类似；因此 $A_0, A_1 \subseteq A_{0\vee1}$，且众所周知，这些嵌入是完备的。根据粘合的定义，该图表是正确的：若 $h_{0,0\wedge1}(a_0) \cdot h_{1,0\wedge1}(a_1) \neq \mathbb{0}$，则 $(a_0, a_1) \neq \mathbb{0}$ 是一个公共扩张。

注意到，如此定义的条件集合 (a_0, a_1) 并不具有分离性。然而，只考虑满足 a_0 的对 (a_1)，$h_{0,\ 0\wedge1}(a_0) = h_{1,\ 0\wedge1}(a_1)$，我们便得到一个等价的分离性重述（我们将在下面的定义 3 中充分利用这一事实；另见观察 10 (iii)）。

注意，积是粘合在 $A_{0\wedge1} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ 下的一个特例。事实上，还可以从另一种角度看待粘合：用 $\operatorname{amal}_{\mathbb{A}_{0\wedge1}}(A_0, A_1)$ 进行强迫，等价于先用 $A_{0\wedge1}$ 进行强迫，然后再用商的乘积 $A_0/G_{0\wedge1}$ 和 $A_1/G_{0\wedge1}$ 进行强迫，其中 $G_{0\wedge1}$ 是 $A_{0\wedge1}$-泛滤子。⊣

到目前为止，糊合在强迫理论中的应用并不多，最突出的例子是 Shelah 在以 ZFC [Sh1] 的相容性为基础证明射影贝尔性质的一致性证明中所使用的那些糊合。

例 3。（可定义强迫的两步迭代）回顾一下，Hechler 强迫 D 由满足 $\in \omega^{<\omega} \times \omega^\omega$ 的有序对 (s, f) 构成。序关系定义为：若 $t \supseteq s$ 且对所有 $n \in \omega$，$g(n) \geq f(n)$，则 $(t, g) \leq (s, f)$。Hechler 强迫是 σ-中心的，并且泛型地添加一个实数 $d \in \omega^\omega$，该实数最终支配所有基模型实数（也就是说，对所有 $f \in \omega^\omega \cap V$，除有限多个 n 外，均有 $d(n) > f(n)$）。令 $A_0 = A_1 = \text{r.o.}(D)$，即由 D 生成的完备布尔代数，并设

$\mathrm{A}_{0\vee1}=\mathrm{A}_0\star\dot{\mathrm{A}}_1$, 两步迭代（其中 $\dot{\mathrm{A}}_1$ 是 A_0-名称，表示 r.o.($\dot{\mathrm{D}}$)，即 $V_{\mathbb{A}^0}$ 意义下的 Hechler 强迫），并令 $\mathrm{A}_{0\wedge1}=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$ 为平凡的。与前面一样，将 A_0 与 $\{(a_0,1):a_0\in\mathrm{A}_0\}$ 等同；A_1 也类似。

于是所有嵌入都是完备的，唯一非平凡的情形是 $\mathrm{A}_1<\circ\mathrm{A}_{0\vee1}$：我们需要证明，每个极大反链 $A\subseteq\mathrm{A}_1$ 在 $\mathrm{A}_0\star\mathrm{A}_1$中仍然是极大反链。根据上述识别，这显然等价于说，基模型 V中的每个极大反链 $A\subseteq\mathrm{D}$，在 $V[G_0]$ 的意义下，对于任意泛型 $G_0\subseteq\mathrm{A}_0$，仍然是 D 的极大反链。（注意，D^V是 $\mathrm{D}^{V[G_0]}$的真子集。）然而，由于 D 是博雷尔可数链条件（D、序关系及不相容关系都是博雷尔的），在 D 中为极大反链这一性质是一个 Π^1_1陈述，因此是绝对的。因此，正确性显而易见。⊣

请注意，在这个例子中，绝对性只与两步迭代 $\mathrm{A}_{0\vee1}=\mathrm{A}_0\star\mathrm{A}_1$ 的第二步有关。也就是说，A_0 可以替换为任意完备布尔代数，而 A_1 可以是任何足够可定义的强迫，例如随机强迫 B 或大型随机代数 B_κ。在我们关于博雷尔可数链条件强迫概念的整个研究中，都会用到这类绝对性考量。

观察 1（正确图表的基本性质）。

(i) 图表 A 正确，当且仅当对所有 $a_1\in\mathrm{A}_1$, $h_{0\vee1,0}(a_1)=h_{1,0\wedge1}(a_1)$。

(ii) A 正确，当且仅当对每个 $\mathrm{A}_{0\wedge1}$-泛型滤子 $G_{0\wedge1}$ where $\mathrm{E}_i=\mathrm{A}_i/G_{0\wedge1}$ （因此 $\mathrm{E}_{0\wedge1}=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$），E 都正确。

(iii) 若 A 正确，$\mathrm{A}_{0\vee1}<\circ\mathrm{A}'_{0\vee1}$，且 A′ 由 A 替换 $\mathrm{A}_{0\vee1}$ 为 $\mathrm{A}'_{0\vee1}$ 并保留其他完备布尔代数得到，则 A′ 也正确。

(iv) 若 A 正确，则 $\mathrm{A}_{0\wedge1}=\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1$。

证明。(i) 首先，假设$h_{0\vee1,0}(a_1)<h_{1,0\wedge1}(a_1)$，其中某个 $a_1\in\mathrm{A}_1$。那么存在一个与$h_{0\vee1,0}(a_1)$ 不相容的 $a_0\in\mathrm{A}_0$，使得 $h_{0,0\wedge1}(a_0)\leq h_{1,0\wedge1}(a_1)$。因此，$h_{0,0\wedge1}(a_0)\cdot h_{1,0\wedge1}(a_1)\neq\mathbb{0}$，但 $a_0\cdot a_1=\mathbb{0}$ 属于 $\mathrm{A}_{0\vee1}$。反过来，假设对所有 $a_1\in\mathrm{A}_1$，都有 $h_{0\vee1,0}(a_1)=h_{1,0\wedge1}(a_1)$。若 $h_{0,0\wedge1}(a_0)\cdot h_{1,0\wedge1}(a_1)$ 属于 $\mathrm{A}_{0\wedge1}$，则$a_0\cdot h_{0\vee1,0}(a_1)=a_0\cdot h_{1,0\wedge1}(a_1)$ 属于 A_0，，因此 $a_0\cdot a_1\neq\mathbb{0}$ 属于 $\mathrm{A}_{0\vee1}$。

(ii) 确实，如果 $a_0\cdot a_1=\mathbb{0}$ 但 $p=h_{0,\,0\wedge1}(a_0)\cdot h_{1,\,0\wedge1}(a_1)\neq\mathbb{0}$，取一个包含 p 的泛型 $G_{0\wedge1}$，可知 $e_0\cdot e_1=\mathbb{0}$ 其中 $e_i=a_i/G_{0\wedge1}\neq\mathbb{0}$。另一方面，如果存在一个泛型 $G_{0\wedge1}$ 和 $e_0\in\mathrm{E}_0$、$e_1\in\mathrm{E}_1$，$e_i\neq\mathbb{0}$使得 $e_0\cdot e_1=\mathbb{0}$ $p\in G_{0\wedge1}$ $p\Vdash_{\mathbb{A}_{0\wedge1}}\dot{e}_i\neq\mathbb{0}$ $\dot{e}_0\cdot\dot{e}_1=\mathbb{0}$ $a_i=p\,\dot{e}_i\in{}_i=$，那么，对于某个，“，”。因此，令(，)A $\mathrm{A}_{0\wedge1}\star\mathrm{E}_i$，我们得到 $h_{0,\,0\wedge1}(a_0)=h_{1,\,0\wedge1}(a_1)=p\neq\mathbb{0}$，然而 $a_0\cdot a_1=\mathbb{0}$。

(iii) 显然。

(iv) 若 A′ 是 $\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1$，的严格完备子代数，则存在不相容的 a、$a'\in\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1$，它们投影到 A′ 中的同一个元素。□

自然出现且满足 (iv) 的图表是正确的，但正确性比仅仅声称 $\mathrm{A}_{0\wedge1}$ 是 $\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1$ 更强。

反例4。设 $\mathrm{A}_{0\vee1}$ 是添加两个两两不相交的科恩实数的强迫。因此 $\mathrm{A}_{0\vee1}$ =r.o.(P)，其中 P 由满足 $s^{-1}(\{1\})\cap t^{-1}(\{1\})=\emptyset$ 的对 $(s,t)\in(2^{<\omega})^2$ 组成。令 $\mathrm{A}_0=\mathrm{A}_1=\mathrm{C}$ 和 $\mathrm{A}_{0\wedge1}=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$。注意 $\mathrm{A}_0<\circ\,\mathrm{A}_{0\vee1}$，$\mathrm{A}_1$ 也类似。（为证明这一点，令 $A\subseteq\mathrm{A}_0$ 为一个极大反链，并令 $(s,t)\in\mathrm{A}_{0\vee1}$。如有必要，可通过扩张不失一般性地假设 $|s|\geq|t|$。选取与 s 相容的 $s_0=(s_0,\emptyset)\in A$。那么 $(s\cup s_0,t)$ 是 s_0 和 (s,t) 的公共扩张。）

接下来我们论证 $\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$。假设 $a\in\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1$ 非平凡。存在 s_n、$t_n\in2^{<\omega}$，使得$a=\sum_n(s_n,\emptyset)=\sum_n s_n=\sum_n(\emptyset,t_n)=\sum_n t_n$。选取一个与所有 s_n 都不相容的 $s\in2^{<\omega}$。因此，$s\in\mathrm{A}_0$ 与所有 t_n 都不相容，也就是说，对所有 n，存在 $i\in|s|\cap|t_n|$ 使得 $s(i)=t_n(i)=1$。于是定义 t 为$|t|=|s|$，并且对所有 $i\in|t|$，$t(i)=0$，则 $t\in\mathrm{A}_1$ 与所有 t_n 都不相容。然而，t 与 A_0，中的所有条件都相容，这就产生了矛盾。

最后请注意，令 $t=\{\langle0,1\rangle\}\in\mathrm{A}_1$、$h_{1,\,0\wedge1}(t)=\mathbb{1}$，而 $h_{0\vee1,\,0}(t)<\mathbb{1}$，因为 t 与 $s=\{\langle0,1\rangle\}\in\mathrm{A}_0$ 不相容。因此，这个图表不正确。⊣

正确性的一项重要性质是它在可定义强迫的迭代下仍能保持。例如 :

引理 2（Hechler 强迫 D 的两步迭代中正确性的保持，[Br5，引理 28]）。假设 $\dot{\mathrm{A}}$ 正确。那么 E 也正确，其中 $\mathrm{E}_i=\mathrm{A}_i\star$r.o.(D)。

我们省略证明，因为我们不会用到它。不过，我们将需要以下 g:

引理 3（随机强迫 B 的两步迭代中正确性的保持）。假设 A 是正确的。那么 E 也正确，其中 $\mathrm{E}_i=\mathrm{A}_i\star\mathrm{B}$ 或 $\mathrm{E}_i=\mathrm{A}_i\star\mathrm{B}_\kappa$。

证明。再次假设 $\mathbf{A}_{0\wedge 1}=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$（观察 1 (ii)）。我们只证明第一部分（事实上，完全不必考虑 κ，因为 $\mathbf{B}_\kappa$ 中的任何条件都是某个可数 $C\subseteq\kappa$的 $\mathbf{B}_C$ 中的条件）。因此 $\mathbf{E}_{0\wedge 1}=\mathbf{B}$。

令 $e_0=(p_0,\dot b_0)\in\mathbf{E}_0=\mathbf{A}_0\star\dot{\mathbf{B}}$ 且 $e_1=(p_1,\dot b_1)\in\mathbf{E}_1=\mathbf{A}_1\star\dot{\mathbf{B}}$，使得 $h^{\mathbb{E}}_{0,0\wedge1}(e_0)\cdot h^{\mathbb{E}}_{1,0\wedge1}(e_1)\neq\mathbb{0}$。加强 e_0 后，我们可以假设 $h^{\mathbb{E}}_{0,0\wedge1}(e_0)\leq h^{\mathbb{E}}_{1,0\wedge1}(e_1)$。根据勒贝格密度定理，并进一步加强 e_0，我们可以假设对于 $b_{0\wedge1}:=h^{\mathbb{E}}_{0,0\wedge1}(e_0)$，$p_0$ 强制在 $\mathbf{A}_0$ 中 $\mu(\dot b_0\cap b_{0\wedge1})>\frac34\mu(b_{0\wedge1})$。

同样根据勒贝格密度定理，我们可以找到条件 $c^n\in\mathbf{B}=\mathbf{E}_{0\wedge1}$, $n\in\omega$ 的一个极大反链，该反链位于 $b_{0\wedge1}$ 以下；并找到 $\mathbf{A}_1$ 中位于 p_1 以下的条件 p_1^n, $n\in\omega$，使得 p_1^n 强制在 $\mathbf{A}_1$ 中 $\mu(\dot b_1\cap c^n)\geq\frac34\mu(c^n)$。注意，必定存在 $n\in\omega$ 和 $q_0\leq p_0$，使得 $q_0\Vdash_{\mathbb{A}_0}\mu(\dot b_0\cap c^n)\geq\frac34\mu(c^n)$。因为若非如此，对所有 n 都有 $p_0\Vdash_{\mathbb{A}_0}\mu(\dot b_0\cap c^n)<\frac34\mu(c^n)$。因此 $p_0\Vdash_{\mathbb{A}_0}\mu(\dot b_0\cap b_{0\wedge1})=\sum_n\mu(\dot b_0\cap c^n)<\sum_n\frac34\mu(c^n)=\frac34\mu(b_{0\wedge1})$，这就产生了矛盾。

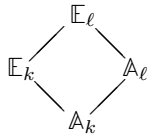
令 $q_0\leq p_0$ 和 $q_1\leq p_1^n$ 根据图表的正确性，q_0 和 q_1 在 $\mathbf{A}_{0\vee1}$ 中相容，具有公共扩张。令 $q_{0\vee1}=q_0\cdot q_1$。令 $\dot c_{0\vee1}=c^n\cap b_0\cap b_1$为一个 $\mathbf{A}_{0\vee1}$-名称，它表示 $\mathbf{B}$ 中的一个条件。我们很容易看出，$q_{0\vee1}\Vdash_{\mathbb{A}_{0\vee1}}\mu(\dot c_{0\vee1})\geq\frac12\mu(c^n)>0$。因此，$e_{0\vee1}=(q_{0\vee1},\dot c_{0\vee1})$ 属于 $\mathbf{E}_{0\vee1}\setminus\{\mathbb{0}\}$，并且是 e_0 和 e_1的公共扩张。□

实际上，我们认为这对一大类强迫概念都成立。

猜想 1（[Br3，猜想 1.5]）。设 $\mathbf{P}$ 是一个博雷尔（或苏斯林）可数链条件强迫，并假设 $\mathbf{A}$ 是正确的。那么 $\dot{\mathbf{E}}$ 也正确，其中 $\mathbf{E}_i=\mathbf{A}_i\star\mathrm{r.o.}(\mathbf{P})$。

正确性的一个重要应用是：

引理 4（直极限的可嵌入性，[Br5，引理 3]）。设 K 是一个有向指标集。假设 $\langle\mathbf{A}_k:k\in K\rangle$和 $\langle\mathbf{E}_k:k\in K\rangle$ 是完备布尔代数的系统，使得 $\mathbf{A}_k<\circ\mathbf{A}_\ell$、$\mathbf{E}_k<\circ\mathbf{E}_\ell$ 且对任意 $k\leq\ell$都有 $\mathbf{A}_k<\circ\mathbf{E}_k$。假设



此外，所有图表 对于 $k\leq\ell$ 都是正确的。于是 $\lim\mathrm{dir}_k\mathbf{A}_k<\circ\lim\mathrm{dir}_k\mathbf{E}_k$。

证明。设 $A\subseteq\bigcup_k\mathbf{A}_k$ 是 $\mathbf{A}:=\lim\mathrm{dir}_k\mathbf{A}_k$ 中的一个极大反链。取 $b\in\mathbf{E}:=\lim\mathrm{dir}_k\mathbf{E}_k$，即对某个 k，有 $b\in\mathbf{E}_k$。由 A 的极大性，存在 $a\in A$，使得 $h_{\mathbb{E}_k,\ \mathbb{A}_k}(b)\cdot h_{\mathbb{A},\ \mathbb{A}_k}(a)\neq\mathbb{0}$。找出 $\ell\geq k$，使得 $a\in\mathbf{A}_\ell$。由正确性，$b\cdot a\neq\mathbb{0}$ 属于 $\mathbf{E}_\ell$，如所需。□

再者，直极限的可嵌入性一般而言远非成立。

反例 5。令 $\mathbf{A}_n$ 添加 n 个科恩实数，并令 $\mathbf{E}_n$ 添加 n 个科恩实数以及另一个与所有这些实数都不相交的实数。显然，对于 $m\leq n<\omega$，$\mathbf{A}_m<\circ\mathbf{A}_n$、$\mathbf{E}_m<\circ\mathbf{E}_n$，并且根据反例4，$\mathbf{A}_n<\circ\mathbf{E}_n$。另一方面，$\mathbf{A}:=\lim\mathrm{dir}_n\mathbf{A}_n\not<\circ\lim\mathrm{dir}_n\mathbf{E}_n=:\mathbf{E}$，因为若将由 $\mathbf{A}_n$'s 的序列添加的 ω 个科恩实数记为 $\langle c_n:n\in\omega\rangle$，则 $\bigcup_n c_n=\omega$ 在 A-泛型扩张中，而 $\bigcup_n c_n$ 在 E-泛型扩张中是余无限的。⊣

虽然正确性对于线性迭代并不十分重要，但在构造非线性迭代时，正确性是一个至关重要的概念。事实上，作者最初是在 [Br3] 中引入这一概念的，当时他试图理解 Shelah 的沿模板迭代技术（见 [Sh4], [Br1] 和 [Br2]）。关于使用具有正确投影的完备嵌入语言对这一技术的重新表述，结合上面的引理 2 和引理 4，参见 [Br3] 或最近的综述 [Br5]。在模板语境中，此后正确性也被用于其他工作，例如参见 [FM 的详细论述，第 2] 节。

不过应当指出，正确性在经典有限支撑迭代中也可能很有用。例如，如果所有迭代因子 $\mathbf{Q}_\alpha$ 都是苏斯林可数链条件，并且在基模型中编码（见 [BJ2，第 3 节。6]），我们便可立即从引理 4 得出，任何仅使用部分 $\mathbf{Q}_\alpha$、并在其他位置使用平凡强迫的子迭代，都完全嵌入整个迭代。

2 粘合极限

本节旨在介绍一种迭代强迫构造，它同时推广了上述例 2 中描述的直极限和（二步）粘合。

定义 2. 假设 $\langle I,\leq\rangle$ 是一个偏序。称 I 为分配几乎格，若

(i) 任意两个元素 i、$j\in I$ 都有一个最大下界 $i\wedge j$，即 i 与 j的交，

(ii) 如果 i 与 j 有上界，那么它们就有一个最小上界 $i \vee j$，即 i 与 j的并，

(iii) 若 $i_0, i_1, i_2 \in I$，则存在 $j \neq k$，使得 i_j 和 i_k 有上界（因而 $i_j \vee i_k$ 存在）；也就是说，对于任意三个元素，其中两个有上界，

(iv) 对于 $\wedge$ 和 $\vee$，分配律成立（只要所讨论的等式两边都存在[1]），

(v) 若 i和 j没有上界，且 j'任意，则要么 i, j'和 $i, j \wedge j'$都没有上界，要么 $i \vee j' = i \vee (j \wedge j')$，并且

(vi) 若 j, j' 没有上界，则对于任意 i，$(i \wedge j) \vee (i \wedge j') = i$。 ⊣

定义中包含 (v) 和 (vi) 两项的唯一原因如下：

观察 5. 假设 $\langle I, \leq \rangle$ 满足 (i) 到 (iv)。再假设 I 没有极大元，令 $\ell \notin I$, $J = I \cup \{\ell\}$，并规定对所有 $i \in I$，$i \leq \ell$。那么以下各项等价：

- I 满足 (v) 和 (vi)。
- 分配律在 J 中成立，也就是说，J 是一个格。

证明。(v) 显然保证了分配律 $i \vee (j \wedge j') = (i \vee j) \wedge (i \vee j')$ $(\star)$。另一方面，若 (v) 不成立，则要么 i, j' 在 I 中没有上界，而 $i, j \wedge j'$ 在 I 中有上界；此时 $(\star)$ 的左边属于 I，而右边是 ℓ；要么 $i \vee (j \wedge j') < i \vee j'$ 在 I 中成立；此时 $(\star)$ 的左边在 J 中仍严格小于右边。

(vi) 显然保证了分配律 $i \wedge (j \vee j') = (i \wedge j) \vee (i \wedge j')$ $(\star\star)$。另一方面，若 $(i \wedge j) \vee (i \wedge j') < i$ 对于 j, j' 在 I 中没有上界，则右边在 $(\star\star)$ 中严格小于左边。 □

典型例子包括分配格或三元素几乎格 $\{0, 1, 0 \wedge 1\}$。我们将在第 4 节遇到一个更有趣的例子。接下来的结果描述了分配几乎格的基本结构[2]。

基本引理 6. 设 $\langle I, \leq \rangle$ 是一个分配几乎格。那么存在核 $\ker(I)$，以及左部 $L = L(I)$ 和右部 $R = R(I)$，使得

(i) $i \in \ker(I)$ 当且仅当对所有 $j \in I$，$i \vee j$ 都存在，

(ii) L 和 R 都是向下封闭的，即 $i \in L$ 和 $j \leq i$ 蕴含 $j \in L$（R 同理），

(iii) 若 $i, j \in L$，则 $i \vee j$ 存在且属于 L（R 同理），

(iv) $I = L \cup R$, $\ker(I) = L \cap R$，且 $L \setminus \ker(I) \neq \emptyset$ 当且仅当 $R \setminus \ker(I) \neq \emptyset$，

(v) 若 $i \in L \setminus \ker(I)$ 且 $j \in R \setminus \ker(I)$，则 $i \vee j$ 不存在，

(vi) 若 $i \in L$ 且 $j \in R$，则 $i \wedge j \in \ker(I)$。

证明。定义 $\ker(I) := \{i : \forall j \in I\, (i \vee j \text{ 存在})\}$。那么 (i) 显然成立。若 $\ker(I) = I$，令 $L = R = I$，其余条件则显然都满足。

因此，假设 $\ker(I) \neq I$，并选取 $i_0 \in I \setminus \ker(I)$。令 $L := \{j \in I : i_0 \vee j \text{ 存在}\}$。由于 $i_0 \notin \ker(I)$，存在 $j_0 \in I$ 使得 $i_0 \vee j_0$ 不存在。因此 $j_0 \notin L$。令 $R := \{k \in I : j_0 \vee k \text{ 存在}\}$。现在假设 $i \in L$ 且$j \leq i$。那么 $i_0 \vee i$ 是 i_0 和 j 的上界，因此存在 $i_0 \vee j$，使得 $j \in L$。这就证明了 (ii)。

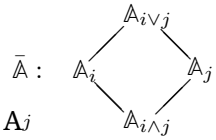
为证明 (iii)，取 i、$j \in L$。因此 $i_0 \vee i$ 和 $i_0 \vee j$ 都存在。另一方面，$(i_0 \vee i) \vee j_0$ 和 $(i_0 \vee j) \vee j_0$ 不可能同时存在。因此 $i_0 \vee i \vee j$ 必须存在，$i \vee j$ 也同样存在。R 也类似。

假设 $j \notin L$。因此 $i_0 \vee j$ 不存在。所以 $j_0 \vee j$ 必须存在，且 j 属于 R。于是 $I = L \cup R$。此外，$\ker(I) \subseteq L \cap R$ 是显然的。假设 $k \in L \cap R$，并令 $i \in I$。如果 $i \in L$，则根据 (iii)，$k \vee i$ 存在；$i \in R$ 的情形也类似。因此 $k \in \ker(I)$，从而 (iv) 得证。

令 $i \in L \setminus$ 核(I) 且令 $j \in R \setminus$ 核(I)，并假设 $i \vee j$ 存在。不失一般性（根据 (iv)），$i \vee j \in L$。根据 (ii)，$j \in L$ 成立，这就产生了矛盾。因此 (v) 成立，而根据 (ii) 和 (iv)，(vi) 显然成立。 □

[1]例如，i 和 j 可能没有上界，因此表达式 $(i \vee j) \wedge k$ 没有意义，而 $(i \wedge k) \vee (j \wedge k)$ 小于 k，所以总是存在。[2]这一结构性结果简化了下文对粘合极限的定义以及相关的若干证明。它既不属于本文的第一版，也不属于综述 [Br6], , 这也解释了后者与本文之间的差异。

定义 3. 给定一个具有最小元 0 的分配几乎格 $\langle I,\ \leq\rangle$ 以及一个由 $\langle \mathbf{A}_i$ 组成的完备布尔代数系统 $i \in I\rangle$，其中



对于 $i < j$，若 $\mathbf{A}_0 = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ 使得所有形如以下形式的图表都成立，则称完全嵌入 $id : \mathbf{A}_i <\circ \mathbf{A}_j$ 成立，我们按如下方式定义粘合极限 $\mathbf{A}_\ell = \mathbf{A}_{\mathrm{amal}} = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathbf{A}_i$。首先令 $\mathbf{A} = \bigcup_i \in I\ \mathbf{A}_i \setminus \{\mathbb{0}\}$·

- 非零条件的集合 D 由有序对 $(p, q) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ 构成，其中存在 $i \in L$ 和 $j \in R$，使得 $p \in \mathbf{A}_i$、$q \in \mathbf{A}j$ 且 $h_{i,i\wedge j}(p) = h_{j,i\wedge j}(q)$（注意，根据基本引理的 (vi)，$i \wedge j \in \ker(I)$）。
- 规定序如下：若 $h_{i',i'\wedge i}(p') \leq_i p$ 且 $h_{j',j'\wedge j}(q') \leq_j q$，其中 (i', j') 是 $(p', q') \in D$ 的见证，则 $(p', q') \leq (p, q)$。

$\mathbf{A}_\ell$ 是由 D生成的完备布尔代数，即 $\mathbf{A}_\ell$ =r.o.(D)。 ⊣

提及序关系时，我们通常省略下标，写作 $\leq$ 而不是 $\leq_i$，因为我们在哪个完备布尔代数中进行讨论总是显而易见的。不过请注意，虽然我们在上述偏序的定义中不要求 $i \leq i'$（分别为$j \leq j'$），但后一假设很自然，在具体情形中也往往成立，并且能简化序的定义：

- $(p', q') \leq (p, q)$ if $p' \leq_{i'} p$ and $q' \leq_{j'} q$

因为 $h_{i'i}(p') \leq_i p$，且 $p' \leq_{i'} p$ 显然等价。此外，请注意，D 上的序并非分离的，也就是说，D 中不同的元素在完备化 $\mathbf{A}_\ell$中等价。下文的观察 10 将对此作进一步阐明。此外，我们通过 $p \mapsto (p, 1)$ 将每个 $\mathbf{A}_i$, $i \in L$ 视为 D 的子集（因而也是 $\mathbf{A}_\ell$的子代数），其中 $\mathbb{1} \in \mathbf{A}_0$（也就是说，$(i, 0)$ 见证了 $(p, 1) \in D$），$\mathbf{A}j$, $j \in R$也同理。请注意，我们总有 $(p, q) \leq (p, 1) = p$，以及 $(p, q) \leq (1, q) = q$。最后，为避免冗长，今后我们将定义 3 中关于 $\langle \mathbf{A}_i$ 的假设 $i \in I\rangle$ 简述为："$\langle \mathbf{A}_i :\ i \in I\rangle$ 是一个由具有完全嵌入和正确投影的完备布尔代数组成的系统"。我们先来验证，D 上的 $\leq$ 确实是一个偏序。

观察 7. $\leq$在 D 上具有传递性。

证明. 假设 $(p'', q'') \leq (p', q') \leq (p, q)$，其中 (i'', j'') 是 $(p'', q'') \in D$ 的见证，并且我们有 $h_{i'',\ i''\wedge i'}(p'') \leq_{i'} p'$以及 $h_{i',\ i'\wedge i}(p') \leq_i p$，对于 j 和 q 也同理。这显然意味着

$$h_{i'',i''\wedge i}(p'') \leq_{i''\wedge i} h_{i'',i''\wedge i'\wedge i}(p'') = h_{i',i'\wedge i}(h_{i'',i''\wedge i'}(p'')) \leq_{i'\wedge i} h_{i',i'\wedge i}(p') \leq_i p,$$

其中等　　式由正确性得出，而 $h_{i'',\ i''\wedge i}(p'') \leq_i p$ 则由 $\leq_i$ 的传递性得出。 □

例 6. 令 $I = \{0, 1, 0 \wedge 1\}$ 为三元素几乎格。那么显然，$\mathbf{A}_\ell = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathbf{A}_i = \mathrm{amal}_{\mathbb{A}_{0\wedge 1}}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$，即在例 2 中研究的 $\mathbf{A}_0$ 和 $\mathbf{A}_1$ 关于 $\mathbf{A}_{0\wedge 1}$ 的粘合。如前所述，积构造（例 1）是 $\mathbf{A}_{0\wedge 1} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ 时这一构造的特例。⊣

例 7. 设 I 是一个分配格。那么 $\mathbf{A}_\ell = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathbf{A}_i = \lim \mathrm{dir}_{i\in I}\mathbf{A}_i$ 就是通常的直极限。如果 I 有一个最大元 i_0，那么 $\mathbf{A}_\ell = \mathbf{A}_{i_0}$ 就是一个特例。⊣

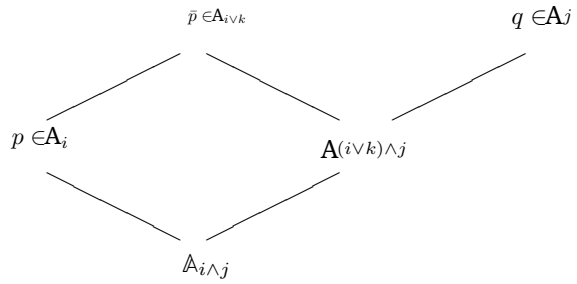
定义 3 的意义当然在于，它使我们能够定义一个迭代。为此，我们首先需要证明迭代的初始步骤完全可嵌入极限中，这也是本节的主要结果。

主引理 8（完全可嵌入粘合极限）。所有 $\mathbf{A}_k$, $k \in I$ 都完全可嵌入 $\mathbf{A}_\ell = \mathbf{A}_{\mathrm{amal}}$。

证明。固定 $k \in I$。设 $(p, q) \in D$，其见证为 (i, j)，其中 $i \in L$ 且 $j \in R$。因此 $p \in \mathbf{A}_i$, $q \in \mathbf{A}j$，并且$h_{i,\ i\wedge j}(p) = h_{j,\ i\wedge j}(q)$。我们需要定义 $h_{\ell k}(p, q)$。

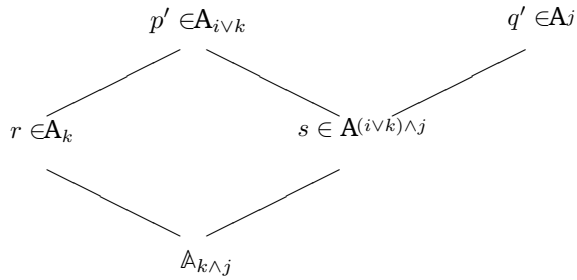
根据基本引理 6 的 (iv) 部分，不失一般性，我们可以假设 $k \in L$。（$k \in R$ 的情形类似。）于是，根据同一引理的 (iii) 部分，$i \vee k$ 存在且也属于 L。于是 $p \in \mathbf{A}_{i\vee k}$，并且根据

投影的正确性，$h_{i\vee k,\ (i\vee k)\wedge j}(p) = h_{i,\ i\wedge j}(p) = h_{j,\ i\wedge j}(q) \geq h_{j,\ (i\vee k)\wedge j}(q)$。



令 $\bar{p} = p \cdot h_{j,(i\vee k)\wedge j}(q) \in \mathbf{A}_{i\vee k}$，我们得到 $h_{i\vee k,(i\vee k)\wedge j}(\bar{p}) = h_{j,(i\vee k)\wedge j}(q)$，因此 $(i \vee k, j)$ 证明了 $(\bar{p}, q)$ 属于 D。（事实上，正如下文观察 10 (iv) 中所证明的，(p, q) 和 $(\bar{p}, q)$ 是 $\mathbf{A}_\ell$ 中的等价条件。）现在令 $h_{\ell k}(p, q) = h_{i\vee k,k}(\bar{p})$。

为检验这是否成立，令 $r \in \mathbf{A}_k$, $r \leq h_{\ell k}(p, q)$。我们需要证明 $r = (r, 1)$ 和 (p, q) 在 $\mathbf{A}_\ell$ 中相容。由于 $r \leq h_{i\vee k,k}(\bar{p})$，$r$ 和 $\bar{p}$ 在 $\mathbf{A}_{i\vee k}$ 中相容，且其公共扩张为 $p' = \bar{p} \cdot r$。



于是 $h_{i\vee k,\ (i\vee k)\wedge j}(p') \leq h_{i\vee k,\ (i\vee k)\wedge j}(\bar{p}) = h_{j,\ (i\vee k)\wedge j}(q)$，并且令 $s = h_{i\vee k,\ (i\vee k)\wedge j}(p')$ 和 $q' = q \cdot s$，我们看到 $h_{j,\ (i\vee k)\wedge j}(q') = s$，因此 $(i \vee k, j)$ 证明了 $(p', q') \in D$。由于 $p' \leq r$, $p' \leq \bar{p} \leq p$ 和 $q' \leq q$，(p', q') 是 (p, q) 和 $r = (r, 1)$ 的一个公共扩张。至此证明完成。 □

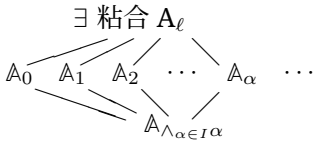
我们看到，正确性对于这个证明至关重要；而且，由于我们稍后（在第 4 节中）将使用粘合极限构造一个迭代，因此最好检查一下正确性是否在粘合极限下得以保留。

引理 9. 假设 $\mathbf{A}_\ell = \mathbf{A}_{\mathrm{amal}}$ 是 $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ 的粘合极限。那么 $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \cup \{\ell\} \rangle$ 仍具有正确投影，其中 $\ell \geq i$ 对所有 $i \in I$ 均成立。

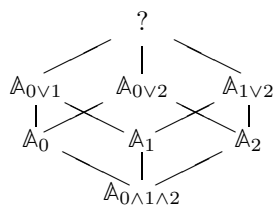
注意，根据观察 5，$I \cup \{\ell\}$ 是一个格。

证明. 我们需要验证：如果 $i \in L$ 和 $j \in R$ 在 I 中没有上界，那么对于 $q \in \mathbf{A}j$，$h_{\ell i}(q) = h_{j,i\wedge j}(q)$。也就是说，只需说明，任意给定的满足 $p \leq h_{j,i\wedge j}(q)$ 的 $p \in \mathbf{A}_i$，都与 $\mathbf{A}_\ell$ 中的 q 相容。然而，这很容易。事实上，$h_{i,i\wedge j}(p) \leq h_{j,\ i\wedge j}(q)$，因此，令 $q' = q \cdot h_{i,i\wedge j}(p)$，我们有 $h_{j,i\wedge j}(q') = h_{i,i\wedge j}(p)$。这意味着 $(p, q') \in \mathbf{A}_\ell$，而 $(p, q') \leq p, q$ 显然成立。 □

有人可能会想，为什么我们要求如此严格的条件：I 中三个元素里，任意两个都存在公共上界。当然，许多完备布尔代数可以在一个公共子代数上进行粘合：



确实，$\mathbf{A}_\ell$ 只是一个两步迭代：我们先用 $\mathbf{A}^{\wedge_{\alpha\in I}\alpha}$ 进行强迫，然后再用商的乘积 $\mathbf{A}_\beta/G_{\wedge_{\alpha\in I}\alpha}$, $\beta \in I$进行强迫。不过，下面这个图表又该如何理解呢?



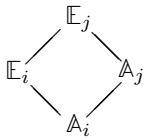
下一个例子表明，粘合一般并不存在。

反例 8。令 $\mathbf{A}_{0\wedge 1\wedge 2} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathrm{r.o.(D)}$，即 Hechler 强迫，$\mathbf{A}_{0\vee 1} = \mathbf{A}_0 \star \mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_{1\vee 2} = \mathbf{A}_1 \star \mathbf{A}_2$, 且 $\mathbf{A}_{0\vee 2} = \mathbf{A}_2 \star \mathbf{A}_0$。由例 3 可知，所有嵌入都是完备的，相应的投影也是正确的。假设存在一个代数 $\mathbf{A}_\ell$，满足 $\mathbf{A}_{0\vee 1} <\circ \mathbf{A}_\ell$、$\mathbf{A}_{0\vee 2} <\circ \mathbf{A}_\ell$ 和 $\mathbf{A}_{1\vee 2} <\circ \mathbf{A}_\ell$。那么 $\mathbf{A}_\ell$ 会添加三个实数 d_0、d_1 和 d_2，分别由 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$，添加，使得 d_1 最终支配d_0，d_2 最终支配 d_1，且 d_0 最终支配 d_2，这显然荒谬。⊣

因此，主引理 8 是最优的，这也解释了为什么我们不知道如何构造“三维”的碎裂迭代；参见第 7 节中的问题 6。

另一个自然的问题是，引理 4 能否推广到粘合极限的情形。同样，这一般是不成立的。这种多少令人遗憾的状况意味着，保持结果并不像有限支撑迭代苏斯林可数链条件强迫那样容易。我们将在第 5 节再讨论这个问题。

反例 9。设 $\mathbf{A}_{0\wedge 1} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$，$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_{0\wedge 1} = \mathrm{r.o.(D)}$，$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_0 \star \mathbf{E}_{0\wedge 1}$，且 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{0\wedge 1} \star \mathbf{A}_1$,，并设 d_0, d_1 和 d 表示相应的 Hechler 泛型。那么，所有形如



的图表都是正确的。令 $\mathbf{A}_{0\vee 1} = \mathrm{amal}_{\mathbb{A}_{0\wedge 1}}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_1$ 且 $\mathbf{E}_{0\vee 1} = \mathrm{amal}_{\mathbb{E}_{0\wedge 1}}(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1)$。因此，在 $\mathbf{A}_{0\vee 1}$-泛型扩张中，d_0和 d_1相互独立，而在 $\mathbf{E}_{0\vee 1}$-泛型扩张中，$d_0 <^* d <^* d_1$。由此更可知 $\mathbf{A}_{0\vee 1} \not<\circ \mathbf{E}_{0\vee 1}$。⊣

问题 2。找出充分条件，以保证比起分配几乎格更一般的结构存在粘合，和/或存在粘合极限。

问题 3。找出充分条件，以保证粘合极限之间的完全可嵌入性（按引理 4 的方式）。

我们汇集了一些关于粘合极限的基本事实，稍后会用到，尤其是在第 3 节中。尽管这些性质相当技术化，但都应当是显而易见的。对于 $(p, q) \in D$，称$p \cdot q$ 在某个 $\mathbf{A}_k$ 中存在，是指 p 和 q 都属于 $\mathbf{A}_k$，且它们的积 $p \cdot q$ 在 $\mathbf{A}_k$中有定义。如果 $(p, q) \in D$ 由 (i, j) 见证，这意味着 $p \in \mathbf{A}_{i\wedge k}$ 且 $q \in \mathbf{A}_{j\wedge k}$[3]。

观察 10. (i) 如果 $(p, q) \in D$ 由 (i, j) 见证，且 $i' \leq i, j' \leq j$, $p \in \mathbf{A}_{i'}$ 和 $q \in \mathbf{A}_{j'}$，那么 (i', j') 也见证 $(p, q) \in D$。

(ii) 若（p，q）$\in D$由（i，j）、$i' \geq i$和 $j' \geq j$见证，则显然 $p \in \mathbf{A}_{i'}$、$q \in \mathbf{A}_{j'}$；令$p' = p \cdot h_{j,\ i'\wedge j}$（$q$）以及$q' = q \cdot h_{i,\ i\wedge j'}$（$p$），则（$i'$，$j'$）见证（$p'$，$q'$）$\in D$。（iii）若（$p$，$q$）、（$p'$，$q'$）$\in D$均由（$i$，$j$）见证，且（$p$，$q$）和（$p'$，$q'$）在$\mathbf{A}_\ell$中等价，则 $p = p'$和 $q = q'$。（iv）若（p，q）$\in D$由（i，j）、$i' \geq i$和 $j' \geq j$见证，则存在唯一的（p'，q'）$\in D$，其见证为（i'，j'），使得（p，q）和（p'，q'）在$\mathbf{A}_\ell$中等价，且（p'，q'）$\leq$（p，q）。此外，$p' = p \cdot h_{j,\ i'\wedge j}$（$q$）以及$q' = q \cdot h_{i,\ i\wedge j'}$（$p$）。（v）若（$p$，$q$）和（$p'$，$q'$）属于 D，分别由（i，j）和（i'，j'）见证，且在$\mathbf{A}_\ell$中等价，则存在（p''，q''）$\in D$，其见证为（$i \vee i'$，$j \vee j'$），（p''，q''）$\leq$（p，q），（p'，q'），且与二者均等价。此外，$p'' = p \cdot h_{j,\ j\wedge(i\vee i')}$（$q$）$= p' \cdot h_{j',\ j'\wedge(i\vee i')}$（$q'$），以及$q'' = q \cdot h_{i,\ i\wedge(j\vee j')}$（$p$）$= q' \cdot h_{i',\ i'\wedge(j\vee j')}$（$p'$）。（vi）若（$p_m$，$q_m$）$\in D$由（$i_m$，$j_m$）、$m < n$见证，则存在（$i'$，$j'$）和（$p'_m$，$q'_m$）、$m < n$，使得（$p'_m$，$q'_m$）$\in D$由（$i'$，$j'$）见证，且（$p'_m$，$q'_m$）与（$p_m$，$q_m$）在$\mathbf{A}_\ell$中等价。（vii）若（$p$，$q$）$\in D$由（$i$，$j$）见证，且 $p \cdot q$存在于某个$\mathbf{A}_k$、$k \in I$中，则（p，q）和 $p \cdot q$在$\mathbf{A}_\ell$中等价。（viii）若（p，q）、（p'，q'）$\in D$在$\mathbf{A}_\ell$中等价，且 $p \cdot q$存在，则 $p' \cdot q'$ 也存在，并且 $p \cdot q = p' \cdot q'$ 与二者均等价。

[3]这个概念，以及观察 10 的最后两项和观察13 (iv)，在后文（第 3 节）中其实并非必需；我们仍将它们列出，因为我们认为它们有助于更好地理解粘合极限。

证明。（i）显然。

(ii) 由正确性，$h_{i',i'\wedge j}(p) = h_{i,i\wedge j}(p) = h_{j,i\wedge j}(q) \geq h_{j,i'\wedge j}(q)$，因此 $h_{i',i'\wedge j}(p') = h_{j,i'\wedge j}(q)$。再次由正确性，$h_{j',i'\wedge j'}(q) = h_{j,i'\wedge j}(q)$，因此 $h_{j',i'\wedge j'}(q) \geq h_{i',i'\wedge j'}(p')$。显然，由于 $h_{i,i\wedge j'}(p) \geq h_{i',i'\wedge j'}(p')$，可得 $h_{j',i'\wedge j'}(q') \geq h_{i',i'\wedge j'}(p')$。由对称性，它们必相等，且 (i', j') 见证了 $(p', q') \in D$。

(iii) 假设并非如此。那么，不失一般性，存在与 p' 不相容的 $p'' \in \mathrm{A}_i$, $p'' \leq p$, p''。令 $q'' = q \cdot h_{i,\ i\wedge j}(p'')$。因此 $h_{j,\ i\wedge j}(q'') = h_{i,\ i\wedge j}(p'')$，且 $(p'', q'') \in D$ 由 (i, j) 见证。由于 $(p'', q'') \leq (p, q)$，但 (p'', q'') 与 (p', q') 不相容，因此得到矛盾。

(iv) 由 (ii) 可知，(i', j') 见证了 $(p', q') \in D$。根据定义，$(p', q') \leq (p, q)$ 显然成立。唯一性由 (iii) 得出。因此，只需证明等价性。为此，设 $(p'', q'') \in D$，由 (i'', j'') 见证，且 $(p'', q'') \leq (p, q)$。我们需要证明 (p'', q'') 与 (p', q') 相容。

如有必要，利用 (ii) 将 (i'', j'') 替换为 $(i'' \vee i', j'' \vee j')$，并将 (p'', q'') 替换为 $(p'' \cdot h_{j'',(i''\vee i')\wedge j'}(q'')\ q'' \cdot h_{i'',i''\wedge(j''\vee j')}(p''))$，我们便可假设 $i'' \geq i'$ 和 $j'' \geq j'$。根据假设，$p'' \leq p$。此外，由正确性可知，$p'' \leq h_{i'',i'\wedge j}(p'') = h_{j'',i'\wedge j}(q'') \leq h_{j,i'\wedge j}(q)$。因此，$p'' \leq p \cdot h_{j,i'\wedge j}(q) = p'$。同理可知 $q'' \leq q'$，于是 $(p'', q'') \leq (p', q')$，如所需。

(v) 这由 (iv) 得出。

(vi) 只需令 $i' = \bigvee_{m<n} i_m$、$j' = \bigvee_{m<n} j_m$，然后使用 (iv)。

(vii) 不失一般性，假设 $k \in L$。那么 $i \vee k$ 存在且也属于 L，而 $j \wedge k \in$ 核(I)。条件 $p \cdot q \in \mathrm{A}_k$ 被识别为 $(p \cdot q, 1) \in D$，我们需要证明它与 (p, q) 等价。

首先假设 (p', q') 属于 D，其见证为 (i', j')，且 $(p', q') \leq (p \cdot q, 1)$。如 (iv) 的证明中那样，利用 (ii)，不失一般性地假设 $i' \geq i \vee k$ 和 $j' \geq j$。由于 $p' \leq p \cdot q$, $p' \leq p$ 是显然的。根据正确性，我们看到 $q' \leq h_{j',\ j\wedge k}(q') = h_{i',\ j\wedge k}(p') \leq h_{k,\ j\wedge k}(p \cdot q) \leq h_{k,\ j\wedge k}(q)$（其中最后一个等式成立是因为 $q \in \mathrm{A}_{j\wedge k}$）。因此 $(p', q') \leq (p, q)$。

另一方面，假设 $(p', q') \leq (p, q)$。仿照上一段的论证，并再次利用正确性，我们得到 $p' \leq p$ and $p' \leq h_{i',\ j\wedge k}(p') = h_{j',j\wedge k}(q') \leq q$，因此 $p' \leq p \cdot q$ and $(p', q') \leq (p \cdot q, 1)$ 成立，正如所需。

(viii) 再次假设 $p \cdot q$ 存在于 A_k 中，其中 $k \in L$。令 (i', j') 为 $(p', q') \in D$ 的见证。根据 (v)（另见 (ii)），不妨假设 $i' \geq i \vee k$ and $j' \geq j$。于是我们知道 $p' = p \cdot h_{j\wedge k,i'\wedge j\wedge k}(q) \in \mathrm{A}_k$ and $q' = q \cdot h_{i\wedge k,i\wedge j'\wedge k}(p) \in \mathrm{A}_k$，因此在 A_k 中，$p' \cdot q' = p \cdot h_{j\wedge k,i'\wedge j\wedge k}(q) \cdot q \cdot h_{i\wedge k,i\wedge j'\wedge k}(p) = p \cdot q$，正如所需。等价性由 (vii) 得出。 □

在第 3 节中，我们需要将粘合极限描述为如下形式的两步迭代 $\mathrm{A}_\ell \cong \dot{\mathrm{A}}_{i_0} \star \dot{\mathrm{A}}_{i_0\ell}$，其中 $i_0 \in I$，而 $\mathrm{A}_{i_0\ell}$ 是从 i_0-泛型扩张到 ℓ-泛型扩张的余 forcing 的名称。

不失一般性，设 $i_0 \in L$（$i_0 \in R$ 的情形类似）。令 G_{i_0} 为在 V 上的 A_{i_0}-泛型。暂时在 $V[G_{i_0}]$ 中进行讨论。令 D_{i_0} 为由（有序对）$(p, q) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ 组成的集合，其中存在某个 $i \in L$ 满足 $i \geq i_0$ 和 $j \in R$，使得 $p \in \mathrm{A}_i$、$q \in \mathrm{A}_j$、$h_{i,\ i\wedge j}(p) = h_{j,\ i\wedge j}(q)$ 以及 $h_{ii_0}(p) \in G_{i_0}$。其序由以下方式给出：若存在某个 $r \in G_{i_0}$ 满足 $r \leq_{i_0} h_{i'i_0}(p')$，使得 $h_{i',\ i'\wedge i}(p') \cdot r \leq_i p$ 且 $h_{j',\ j'\wedge j}(q') \cdot h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r) \leq_j q$，其中 (i', j') 见证了 $(p', q') \in D_{i_0}$，则 $(p', q') \leq_{i_0\ell} (p, q)$。$\mathrm{A}_{i_0\ell}$ 是 D_{i_0} 的完备化，$\mathrm{A}_{i_0\ell} =$相对于（r.o.）(D_{i_0})。注意，$D_{i_0} \subseteq D$ 在 $V[G_{i_0}]$中。另一方面，$(p, q) \in D \setminus D_{i_0}$ 可与 $\mathrm{A}_{i_0\ell}$中的 0 等同。

引理 11. $\mathrm{A}_\ell \cong \mathrm{A}_{i_0} \star \dot{\mathrm{A}}_{i_0\ell}$。

证明。我们定义一个稠密嵌入 e，将 D 嵌入两步迭代 $\mathrm{A}_{i_0} \star \dot{D}_{i_0}$。设 $(p, q) \in D$ 由 (i, j) 见证。于是 $i \vee i_0$ 存在且属于 L。如有必要，增大 i（见观察 10 (iv)），我们可以假设 $i \vee i_0 = i$，即 $i \geq i_0$。令 $p_0 = h_{ii_0}(p)$。那么 $p_0 \Vdash (p, q) \in \dot{D}_{i_0}$。因此令 e 将 (p, q) 映射为 $(p_0, (p, q))$。

容易（尽管有些繁琐，因为有几种情况）验证 e 是定义良好的（即 e 将中的等价条件映射为 $\mathrm{A}_{i_0} \star \dot{D}_{i_0}$中的等价条件），并且保持序和不相容性。

为证明 e 稠密，假设 $p_0 \Vdash (p, q) \in \dot{D}_{i_0}$。因此 $(p_0, q) \leq e_{ii_0}(p)$。令 $p' = p_0 \cdot p$。则 $h_{ii_0}(p') = p_0$。接下来令 $q' = h_{i,\ i\wedge j}(p') \cdot q$。则 $h_{j,\ i\wedge j}(q') = h_{i,\ i\wedge j}(p')$。因此 e 将 (p', q') 映射到 $(p_0, (p', q'))$，并且显然 $(p_0, (p', q')) \leq (p_0, (p, q))$。 □

注意，此引理涵盖了主引理 8。我们可以将 $\mathrm{A}_{i_0\ell}$ 视为这些余项的粘合极限。特别地，对于来自 L 的 $i \geq i_0$，$\mathrm{A}_{i_0 i}$ 必然规范地嵌入 $\mathrm{A}_{i_0\ell}$:

推论 12。$\Vdash_{i_0} \mathrm{A}_{i_0 i} <_\circ \mathrm{A}_{i_0\ell}$ 对于 $i_0 \leq i_\circ$

证明。两次应用前面的引理可知 $\mathrm{A}_{i_0} \star \dot{\mathrm{A}}_{i_0\ell} \cong \mathrm{A}_\ell \cong \mathrm{A}_i \star \dot{\mathrm{A}}_{i\ell} \cong \mathrm{A}_{i_0} \star \dot{\mathrm{A}}_{i_0 i} \star \dot{\mathrm{A}}_{i\ell}$。因此，$\mathrm{A}$ 强制 $\mathrm{A}_{i_0\ell} \cong \mathrm{A}_{i_0 i} \star \dot{\mathrm{A}}_{i\ell_\circ}$。特别是，它强制 $\mathrm{A}_{i_0 i} <_\circ \mathrm{A}_{i_0\ell_\circ}$。 □

我们以 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 的一些基本性质作为本节的结尾，这些性质将在第 3 节中用到。对于 $(p,q)\in D_{i_0}$，称 $p\cdot q$ 在 D_{i_0} 中存在，如果存在 $k\in I$ 和 $r\in G_{i_0}$，使得 $r\cdot p$ 和 $r\cdot q$ 都属于 $\mathbf{A}_k$，因此我们可以构造积 $r\cdot p\cdot q\in\mathbf{A}_k$。注意，如果 $(p,q)\in D_{i_0}$，且按照前文（观察 10 之前）的定义，$p\cdot q$ 在 D中存在，那么 $p\cdot q$ 在 D_{i_0}中存在。然而，反过来未必成立。（例如，可能有 $i_0\le i\in L, i_0\le j\in R$, $i\vee j$不存在；(p,q) 属于 D，其见证为 (i,j)；$p\cdot q$也不存在；$h_{ii_0}(p)=h_{ji_0}(q)\in G_{i_0}$；并且对于某个严格强于 $h_{ii_0}(p)$ 的 $r\in G_{i_0}$，$r=r\cdot p=r\cdot q$属于 $\mathbf{A}_{i_0}$。）

观察 13. 令 $i_0\in L$ 和 G_{i_0} 为 V 上的 $\mathbf{A}_{i_0}$-泛滤子，则在 $V[G_{i_0}]$ 中有以下结论：

(i) 假设 (p,q)、$(p',q')\in D_{i_0}$，它们均由满足 $i\ge i_0$ 的 (i,j) 见证，且在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中等价。那么存在$r\in G_{i_0}$ 使得 $p\cdot r=p'\cdot r$ 和 $q\cdot h_{i_0,i_0\wedge j}(r)=q'\cdot h_{i_0,i_0\wedge j}(r)$。(ii) 假设 $i'\ge i\ge i_0$ 和 $j'\ge j$，$(p,q)\in D_{i_0}$ 以及 $(p',q')\in D_{i_0}$ 分别由 (i,j) 和 (i',j') 见证，且这两个条件在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中等价。那么对某个 $r\in G_{i_0}$，有 $p'\cdot r=p\cdot h_{j,i'\wedge j}(q)\cdot r$ 以及$q'\cdot h_{i_0,i_0\wedge j'}(r)=q\cdot h_{i,i\wedge j'}(p)\cdot h_{i_0,i_0\wedge j'}(r)$。(iii) 假设 (p,q)、$(p',q')\in D_{i_0}$，分别由满足 $i,i'\ge i_0$ 的 (i,j) 和 (i',j') 见证，且它们在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中等价。那么存在 $r\in G_{i_0}$和由 $(i\vee i',j\vee j')$ 见证的 $(p'',q'')\in D_{i_0}$，它们在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中与二者均等价，使得$p''\cdot r=p\cdot h_{j,j\wedge(i\vee i')}(q)\cdot r=p'\cdot h_{j',j'\wedge(i\vee i')}(q')\cdot r$且 $q''\cdot h_{i_0,i_0\wedge(j\vee j')}(r)=q\cdot h_{i,i\wedge(j\vee j')}(p)\cdot h_{i_0,i_0\wedge(j\vee j')}(r)=q'\cdot h_{i',i'\wedge(j\vee j')}(p')\cdot h_{i_0,i_0\wedge(j\vee j')}(r)$。

(iv) 假设 (p,q)、$(p',q')\in D_{i_0}$ 在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中等价，后者由 (i',j') 见证，且满足 $i'\ge i_0$；并且 $p\cdot q$ 在 D_{i_0} 中存在，由 $k\in I$和 $r\in G_{i_0}$见证。那么对于某个满足 $r'\le r$ 的 $r'\in G_{i_0}$，有 $r'\cdot p\cdot q=r'\cdot p'\cdot q'$。

请注意，这一观察的各个部分所得出的结论实际上刻画了 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中的等价关系。例如，在 (i) 中，显然，如果对于某个 $r\in G_{i_0}$，$p\cdot r=p'\cdot r$ 和 $q\cdot h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r)=q'\cdot h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r)$，那么 (p,q) 和 (p',q') 作为 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中的条件是等价的；其他各项也类似。

证明。(i) 首先考虑 p 和 p'。在基模型 V中，令 $E=\{r\le_{i_0}h_{ii_0}(p)\colon\ r\cdot p\le_i p'$，或者存在 $p''\le_i p$使得 $h_{ii_0}(p'')=r$且 $p''\perp p'\}$，并注意到该集合在 $\mathbf{A}_{i_0}$中低于 $h_{ii_0}(p)$ 是稠密前集。因此，对于某个 $r\in G_{i_0}$，有 $r\in E$。如果 $h_{ii_0}(p'')=r$且 $p''\perp p'$，那么令 $q''=q\cdot h_{i,\ i\wedge j}(p'')$，我们看到 $(p'',q'')\in D_{i_0}$低于 (p,q)，并且在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$中与 (p',q') 不相容，这就产生了矛盾。因此 $r\cdot p\le p'$。由对称性，对于某个 $r\in G_{i_0}$，有 $r\cdot p'\le p$；由于 G_{i_0} 是一个滤子，我们得到 $r\in G_{i_0}$ 使得 $r\cdot p=r\cdot p'$，正如所需。

接下来考虑 q和 q'。再次在 V 中，令 $E=\{r\le_{i_0}h_{ii_0}(p)\colon h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r)\cdot q\le_j q'$，或者存在 $q''\le_j q$ 使得 $h_{j,\ i_0\wedge j}(q'')=h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r)$ 且 $q''\perp q'\}$。我们再次找到 $r\in G_{i_0}\cap E$；若第二种情况成立，令 $p''=p\cdot h_{j,\ i\wedge j}(q'')$，则 (p'',q'') 低于 (p,q)，且与 (p',q') 不相容，矛盾。因此 $h_{i_0,\ i_0\wedge j}(r)\cdot q\le q'$。反向蕴含仍由对称性得出。

(ii) 这与 (i) 的证明非常相似。需要考虑四个稠密集。我们先处理第一个，其余留给读者。在基模型 V 中，令 $E=\{r\le_{i_0}h_{ii_0}(p)\colon r\cdot p'\le_{i'}p\cdot h_{j,\ i'\wedge j}(q)$，或者存在$p''\le_{i'}p'$使得 $h_{i'i_0}(p'')=r$且 $p''\perp p\cdot h_{j,\ i'\wedge j}(q)\}$。再次，这个集合在 $\mathbf{A}_{i_0}$ 中于 $h_{ii_0}(p)$ 以下稠密，我们可以取 $r\in G_{i_0}\cap E$。若第二种情况成立，令 $q''=q'\cdot h_{i',\ i'\wedge j'}(p'')$，可见 (p'',q'') 属于D_{i_0}，低于 (p',q')，且与 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中的 (p,q) 不相容，矛盾。因此$r\cdot p'\le_{i'}r\cdot p\cdot h_{j,\ i'\wedge j}(q)$。其余部分类似。

(iii) 令 $p''=p\cdot h_{j,j\wedge(i\vee i')}(q)$ 且 $q''=q\cdot h_{i,i\wedge(j\vee j')}(p)$，由观察 10 (iv)（另见 (v)）可知，$(p'',q'')$ 在 $\mathbf{A}_\ell$ 中等价于 (p,q)，因此在 $\mathbf{A}_{i_0\ell}$ 中也等价。其余部分由 (ii) 得出。

(iv) 这里同样借助稠密集，利用观察 10 的 (viii) 部分即可完成。细节留给读者。 □

粘合极限的一些特殊情形已隐含地用于其他构造中，例如参见 [Br5 第 1], 节的讨论，尤其是引理13；但此前从未像本文这样以一般形式加以考察。关于粘合极限的应用，以及它在紧豪斯多夫空间语言中的拓扑解释，综述见 [Br6]。

3 测度相容系统

主要结果证明中的核心技术难题，是证明该强迫满足可数链条件，从而保留基数。要理解这一难点，请回想：可数链条件在两步迭代中以及有限支撑迭代的极限阶段都能保持，但一般而言，在

乘积下并不能保持；而那些具有可积性的可数链条件加强形式（如 Knaster 条件）在粘合下也未必能保持。

反例 10。令 $\mathsf{T}_{\dot{c}}$ 为由 C [Sh1, To] 添加的 Suslin 树的（规范）C-名称。众所周知，$\mathsf{P} = \mathsf{C} \star \mathsf{T}_{\dot{c}}$ 满足 Knaster 条件（参见 [To，第 292-293] 页中的论证）。此外，若 MA $+ \neg$ CH 成立，则 P 甚至是 σ-中心的。然而，P 的两个副本在 C 上的粘合，即 $\mathsf{C} \star (\mathsf{T}_{\dot{c}} \times \mathsf{T}_{\dot{c}})$，不满足可数链条件。⊣

这个例子表明，我们需要确保迭代中产生的商代数足够好。Knaster 条件或许是个合理的选择，但我们将采用更强的有限可加可测性。回想一下，给定一个布尔代数 A，$\mu\colon \mathsf{A} \to [0,1]$ 是一个有限可加测度，当且仅当

- $\mu(0) = 0$，$\mu(1) = 1$，
- $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$ 对于不相容的 a、$b \in \mathsf{A}$（即 $a \cdot b = \mathbb{0}$）。

μ 若还满足以下条件，则称为严格正

- $\mu(a) > 0$ 当且仅当 $a \in \mathsf{A} \setminus \{\mathbb{0}\}$ 时。

我们将要处理的所有测度都是有限可加且严格正的，因此通常不再明确说明这一点。注意，承载这种测度的代数满足可数链条件。Kamburelis [Ka] 详细研究了这类代数，下面我们先回顾他的一些工作。

首先注意，任意随机代数 B_κ 都承载一个（甚至是可数可加的）严格正测度。其次，每个 σ-中心 cBa A 都承载这样的测度，因为 A 上存在超滤子 $\mathcal{U}_n$、$n \in \omega$，使得 $\mathsf{A}\setminus\{\mathbb{0}\} = \bigcup_n \mathcal{U}_n$，于是我们可以定义 $\mu(a) = \sum\{2^{-(n+1)}\colon a \in \mathcal{U}_n\}$。严格正性显然成立，而有限可加性则由 $\mathcal{U}_n$ 是超滤子这一事实推出。接下来我们有：

引理 14（Kamburelis [Ka，命题 2.1]）。假设布尔代数 A 上有一个有限可加严格正测度 μ。那么，μ 可以扩张为 r.o.(A) 上的有限可加严格正测度。

˜Kamburelis 对这一结果的证明相当间接：将 A 典范地嵌入由 A 的 Stone 空间 X 的既开又闭子集生成的 σ-代数 A；注意，A 上的测度会在 X 的˜既开又闭子集上诱导出一个 σ-可加测度，而这个测度可以扩张为 A 上的 σ-可加测度。根据 Sikorski 延拓定理 [Ko，˜定理 5.9]，，A 到 A 的嵌入可以扩张为 r.o.(A) ˜到 A 的一个嵌入（通常并不完备），而这个嵌入会在 r.o.(A) 上诱导出一个测度。由于这种扩张（通常）并不唯一，相应的测度也不唯一。稍后我们将采用一种不同且更直接的论证（主引理 19 的证明），并为求完整而将其列出。关键在于，我们需要各种扩张后的测度彼此协调；为此，测度延拓必须采用一种非任意且统一的方法。

证明。由佐恩引理的标准应用可知，只需证明：给定 $b \in \mathsf{r.o.(A)} \setminus \mathsf{A}$，存在 $\mathsf{A}' = \langle \mathsf{A} \cup \{b\}\rangle$ 上的有限可加严格正测度 μ'，其中 $\mathsf{A}' = \langle \mathsf{A} \cup \{b\}\rangle$ 是由 A 和 b 生成的布尔代数，且该测度扩张 μ。

令 $\varepsilon = \pm 1$，并令 $(+1)b = b$、$(-1)b = -b$。对 $a \in \mathsf{A}$，定义

$$\tilde{\mu}(a \cdot \varepsilon b) = \sup\{\mu(a') : a' \in \mathbb{A}, a' \leq a \cdot \varepsilon b\}.$$

注意，由于 A 在 r.o.(A) 中稠密，$\tilde{\mu}(a \cdot \varepsilon b) = 0$ 当且仅当 $a \cdot \varepsilon b = \mathbb{0}$。接下来令

$$\mu'(a \cdot \varepsilon b) = \frac{1}{2}\Big(\mu(a) + \tilde{\mu}(a \cdot \varepsilon b) - \tilde{\mu}(a \cdot (-\varepsilon b))\Big).$$

同样，$\mu'(a \cdot \varepsilon b) = 0$ 当且仅当 $a \cdot \varepsilon b = \mathbb{0}$，这是显然的。此外，若 $a \cdot \varepsilon b \in \mathsf{A}$，则 $\mu'(a \cdot \varepsilon b) = \tilde{\mu}(a \cdot \varepsilon b) = \mu(a \cdot \varepsilon b)$。$\mathsf{A}'$ 的任意元素都可写成 $a_0 + a_1 b + a_2(-b)$ 的形式，其中 $a_i \in \mathsf{A}$ 两两不相容。定义

$$\mu'(a_0 + a_1 b + a_2(-b)) = \mu(a_0) + \mu'(a_1 b) + \mu'(a_2(-b)).$$

如果 $a_0 + a_1 b + a_2(-b) \in \mathsf{A}$，那么 $a_1 b$ 和 $a_2(-b)$ 也属于 A，并且由此可得 $\mu'(a_0 + a_1 b + a_2(-b)) = \mu(a_0) + \mu(a_1 b) + \mu(a_2(-b)) = \mu(a_0 + a_1 b + a_2(-b))$，因此 μ' 确实扩展了 μ。我们已经看到 μ' 是严格正的，并且由于我们有

$$\mu'(ab) + \mu'(a(-b)) = \mu(a)$$

以及

$$\tilde{\mu}(a \cdot \varepsilon b) + \tilde{\mu}(\bar{a} \cdot \varepsilon b) = \tilde{\mu}((a + \bar{a}) \cdot \varepsilon b) \quad \text{and} \quad \mu'(a \cdot \varepsilon b) + \mu'(\bar{a} \cdot \varepsilon b) = \mu'((a + \bar{a}) \cdot \varepsilon b)$$

对于不相容的 a、$\bar{a} \in \mathsf{A}$，简单计算表明有限可加性成立。 □

我们还需要一些基本事实，涉及将稠密子集上的测度扩展为整个代数上的测度的可能性。

预备引理 15。假设（不一定完备的）布尔代数 A 由稠密集 D and μ 生成： $D \to (0,1]$ 满足

(i) $\mathbb{1} \in D$ and $\mu(1) = 1$, (ii) D 对乘积封闭（即，若 a、$b \in D$ and $a \cdot b > \mathbb{0}$ 属于 A，则 $a \cdot b \in D$），(iii) 若 a、$b \in D$，则存在两两不相容的 $c_j \in D$、$j < n$，使得 $a - b = \sum_{j<n} c_j$（其中规定，若 $n = 0$，则 $\sum_{j<n} c_j = \mathbb{0}$），

(iv) μ 是有限可加的，也就是说，给定两两不相容的 $a_i \in D$、$i < n$，使得 $a = \sum_{i<n} a_i \in D$，我们有 $\mu(a) = \sum_{i<n} \mu(a_i)$。

那么，A 上存在一个延拓 μ 的（唯一）有限可加严格正测度 $\bar{\mu}$。

证明。首先注意到 (ii) 和 (iii) 意味着 A 是由 $D \cup \{\mathbb{0}\}$ 在不交（= 不相容）和下生成的闭包。事实上，令 C 表示这个闭包。由于 $(\sum_{i<m} a_i)(\sum_{j<n} b_j) = \sum_{i,\ j} a_i b_j$ 对 $a_i, b_j \in D$ 成立，并且若前两个和不交，则最后一个和也不交，所以由 (ii)，C 对乘积封闭。接下来，给定两两不相容的 $a_i, i < m$，以及两两不相容的 $b_{i'}, i' < m'$，由 D 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i<m} a_i - \sum_{i'<m'} b_{i'} &= \sum_{i<m} \left(a_i - \sum_{i'<m'} b_{i'} \right) = \sum_{i<m} \prod_{i'<m'} (a_i - b_{i'}) \\ &= \sum_{i<m} \prod_{i'<m'} \sum_{j<n_{ii'}} c_j^{ii'} = \sum_{i<m} \sum_{f} \prod_{i'<m'} c_{f(i')}^{ii'} \end{aligned} \tag{1}$$

其中，按照 (iii) 的规定，$c_j^{ii'} \in D, j < n_{ii'}$ 两两不相容，而和 $\sum_f$ 遍历所有满足 $\mathrm{dom}(f) = m'$ 且 $f(i') < n_{ii'}$ 的函数 f（i 固定）。由 (ii)，$\prod_{i'<m'} c_{f\ (i')}^{ii'} \in D$，并且 (1) 中的双重和两两不交，因为 $c_j^{ii'} (j < n_{ii'})$ 和 $a_i (i < m)$ 都两两不交。因此 $\sum_{i<m} a_i - \sum_{i'<m'} b_{i'} \in C$，且 C 对补封闭。最后，对乘积、补和不交和封闭也意味着对任意和封闭。因此 C 是一个布尔代数，而 $C =$A 成立。

令 $\bar{\mu}(0) = 0$。对于 $a \in \mathrm{A} \setminus \{\mathbb{0}\}$，令 $\bar{\mu}(a) = \sup\{\sum_{i<n} \mu(a_i)\colon \{a_i\colon\ i < n\} \subseteq D$ 是 $a\}$ 下方的一个反链。对于 $a \in D$, $\mu(a) \leq \bar{\mu}(a)$ 显然成立。为证明另一个不等式，设 $\{a_i : i < n\} \subseteq D$ 是 a 下方的一个反链。由 (iii) 和 (ii)，该反链在 a 中有补（见上文 (1)），再由 (iv)，可得 $\sum_{i<n} \mu(a_i) \leq \mu(a)$。由于 D 稠密，显然 $\bar{\mu}$ 是严格正的。为证明有限可加性，取不相容的 $a, b \in$ A。由定义可立即得到 $\bar{\mu}(a + b) \geq \bar{\mu}(a) + \bar{\mu}(b)$。反过来，注意若 $\{a_i \in D\colon\ i < n\}$ 是 $a + b$ 下方的有限反链，那么每个 $a_i \cdot a$ 都是 $a_{ij}^a \in D, j < n_i^a$ 的有限不交和。对于 $a_i \cdot b$，同理。因此，由 (iv) 可得 $\mu(a_i) = \sum_{j<n_i^a} \mu(a_{ij}^a) + \sum_{j<n_i^b} \mu(a_{ij}^b)$。这很容易推出 $\bar{\mu}(a + b) \leq \bar{\mu}(a) + \bar{\mu}(b)$。

为说明唯一性，注意任何扩张 μ' 都必须满足 $\mu'(a) \geq \bar{\mu}(a)$，对任意 $a \in$A 均如此。因此 $\mu'(a) = \bar{\mu}(a)$，因为 A 对补运算封闭。 □

预备引理 16。设 D 是粘合极限定义中的稠密集。

(i) D 对乘积封闭，即若 (p,q)、$(p',q') \in D$ 相容，则存在 $(p'',q'') \in D$，它与 $(p,q) \cdot (p',q') \in \mathrm{A}_\ell$ 等价。(ii) 给定 (p,q)、$(p',q') \in D$，存在（至多两个）(p_0,q_0)、$(p_1,q_1) \in D$，使得 (p,q)–(p',q') 和 (p_0,q_0)+(p_1,q_1) 在 A_ℓ 中等价，而 (p_0,q_0) 与 (p_1,q_1) 不相容。(iii) 设 $i_0 \in L$（或 R），令 G_{i_0} 在 V 上是 A_{i_0}-泛型，并令 $V[G_{i_0}]$ 中的 D_{i_0} 为余 forcing $\mathrm{A}_{i_0\ell}$ 的稠密子集（见引理 11 之前）。那么，在 $V[G_{i_0}]$ 中，D_{i_0} 也满足 (i) 和 (ii)。

证明。我们给出 (i) 和 (ii) 所需条件的构造，但将细节留给读者，因为论证与观察 10 中的类似。令 $(p,q), (p',q') \in D$。根据观察 10 (vi)，我们可以假设这一点由同一对 (i,j) 见证。

(i) 另外假设 (p,q) 和 (p',q') 相容。令 $p'' = p \cdot p' \cdot h_{j,\ i\wedge j}(q \cdot q') \in \mathrm{A}_i, q'' = q \cdot q' \cdot h_{i,\ i\wedge j}(p \cdot p') \in \mathrm{A}_j$，我们看到 (p'',q'') 属于 D，其见证为 (i,j)，因为 $h_{i,\ i\wedge j}(p'') =$

$h_{i,\ i\wedge j}(p\cdot p')\cdot h_{j,\ i\wedge j}(q\cdot q')=h_{j,\ i\wedge j}(q'')$，并验证 (p'',q'') 在 A_ℓ 中等价于 $(p,q)\cdot(p',q')$。（特别注意，根据 (p,q) 和 (p',q') 的相容性，$p''\neq\mathbb{0}$ 且 $q''\neq\mathbb{0}$。）

(ii) 令 $p_0=p-p'\in\mathrm{A}_i$, $q_0=q\cdot h_{i,i\wedge j}(p_0)\in\mathrm{A}j$, $q_1=q\cdot h_{i,i\wedge j}(p\cdot p')-q'\in\mathrm{A}j$，且 $p_1=p\cdot p'\cdot h_{j,i\wedge j}(q_1)\in\mathrm{A}_i$。现在检查 (p_0,q_0)、(p_1,q_1) 要么属于 D（由 (i,j) 见证），要么为 0；检查 $(p,q)-(p',q')$ 在 A_ℓ 中等价于 $(p_0,q_0)+(p_1,q_1)$；并检查 (p_0,q_0) 与 (p_1,q_1) 不相容。

(iii) 为了证明 D_{i_0} 的 (i)，注意到如果 (p,q)、$(p',q')\in D_{i_0}$ 在 D_{i_0} 中相容，那么它们在 V 的 D 中也相容（回忆 $D_{i_0}\subseteq D$）。因此由 (i)，存在 $(p'',q'')\in D$ 等价于 $(p,q)\cdot(p',q')\in\mathrm{A}_\ell$。显然，$(p'',q'')$ 仍等价于 $(p,q)\cdot(p',q')\in\mathrm{A}_{i_0\ell}$ 中的 $V[G_{i_0}]$；而且，由于这个积非零，我们必有 $(p'',q'')\in D_{i_0}$。(ii) 的证明类似。 □

回到 Kamburelis 的工作，我们回顾一下：带有测度的完备布尔代数类在两步迭代、乘积、有限支撑迭代的极限阶段以及（显然地）完备子代数下封闭（参见 [Ka，2.4、2.5、2.6]）。最后，事实证明，这一类以相当强的意义由 B_κ 和 σ-中心完备布尔代数生成：也就是说，每个带有测度的完备布尔代数都能完全嵌入到某个 B_κ 与一个 σ-中心完备布尔代数的两步迭代中 [Ka，命题 3.7]。

为便于后文使用，我们来较详细地回顾两步迭代上的测度构造。我们的表述仍比 Kamburelis 的原始表述更直接。首先，我们在带有有限可加测度 μ 的完备布尔代数 A 上定义一个积分。具体来说，令 $a\in\mathrm{A}$，并令 $\dot{x}$ 为一个 A-名称，表示一个满足 $a\Vdash\dot{x}\in[0,1]$ 的实数。然后定义

$$\begin{aligned}\int_a\dot{x}\,d\mu &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2^m-1}\left[\mu\left(a\cdot\left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{k}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{k}{2^m}\right]\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2^m-1}\left[\mu\left(a\cdot\left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{k}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{k+1}{2^m}\right].\end{aligned}$$

显然，这些极限序数存在且相等；事实上，第一个极限序数是上确界，第二个则是下确界。现在假设 $\mathrm{A}=\mathrm{A}_0\star\mathrm{A}_1$ 是完备布尔代数，A_0 上有一个有限可加测度 μ_0，并且 $\Vdash_{\mathbb{A}_0}$“A_1 上有一个有限可加测度 $\dot{\mu}_1$”。那么，通过规定以下内容，我们可以在 A 上自然地得到一个有限可加测度 μ

$$\mu(a)=\mu(a_0,\dot{a}_1)=\int_{a_0}\dot{\mu}_1(\dot{a}_1)d\mu_0$$

对于 $a=(a_0,\dot{a}_1)\in\mathrm{A}$。详情见 [Ka，第 2] 节。

定义4。（1）若一个分配几乎格 I 满足：只要 $i<i'$ 都属于 $I\setminus$核(I)，就存在一个与 i 不可比的 $j\in I$，使得 $i'=i\vee j$，则称其为良好分配几乎格。

（2）设 I 是一个良好分配几乎格。纯对集合 Pure(I) 是满足以下条件的$\{(i,j)$的最小子集：$i\leq j,i,j\in I\}$

(a) 对所有 $i\in I$，$(i,i)\in$ 纯(I),

(b) 若 $i,j\in I$ 不可比，则 $(i\wedge j,i)$ 和 $(i\wedge j,j)$ 属于纯(I)；若此外还存在 $i\vee j$，则 $(i,i\vee j)$ 和 $(j,i\vee j)$ 也属于纯(I),

(c) 若 $i\leq j\leq j'\leq k$ 属于 I，且 $(i,k)\in$ 纯(I)，则 $(j,j')\in$ 纯(I)。 ⊣

注意，在 (1) 中，若 $i<i'$ 都属于 $I\setminus$核(I)，则根据基本引理 6 (ii)，它们要么都属于 $L\setminus$核(I)，要么都属于 $R\setminus$核(I)。因此，良好性意味着任何这样的对 (i,i') 都由 (2)(b) 保证为纯对。(2)(c) 应理解为：纯对在偏序 $\langle I,\leq\rangle$ 中定义了“较小”的区间。

观察 17. 假设 $\langle I,\leq\rangle$ 是一个良好分配几乎格。另假设 I 没有极大元，令 $\ell\notin I$, $J=I\cup\{\ell\}$ 并规定对所有 $i\in I$，$i\leq\ell$。那么 Pure(J) $=$Pure$(I)\cup\{(i,\ell):i\in I\setminus\ker(I)\}\cup\{(\ell,\ell)\}$。

注意，根据观察 5，J 是一个格，特别是 $L(J)=R(J)=\ker(J)=J$。

证明。显然，Pure$(I)\subseteq$Pure(J)；若 $i\in I\setminus\ker(I)$，设 $i\in L(I)\setminus\ker(I)$，则根据基本引理 6，存在 $j\in R(I)\setminus\ker(I)$，使得 $i\vee j$ 在 I 中不存在。因此，$i\vee j=\ell$ 属于 J，且 $(i,\ell)=(i,i\vee j)$ 属于 Pure(J)。另一方面，根据 (b)，设 $(i,\ell)\in$ Pure(J)。那么必定存在与 i 不可比的 $j\in I$，使得 $\ell=i\vee j$。因此，$i\in L\setminus\ker(I)$ 且 $j\in R\setminus\ker(I)$，或反之。接下来，若根据 (c)，$(i,\ell)\in$Pure(J)，那么事实上，根据 (b)，(i,ℓ) 已属于 Pure(J)。最后注意，若 $(i,\ell)\in$Pure(J) 且 $i\leq j<j'<\ell$，则根据良性性质，$(j,j')\in$ Pure(I)。 □

我们现在可以给出本节的主要定义了。

定义 5. 设 I 是一个良好分配几乎格，并假设 $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ 是由完备嵌入和正确投影构成的完备布尔代数系统。那么我们有一个商代数名称系统 $\langle \dot{\mathbf{A}}_{ij} : i \leq j \in I \rangle$，也就是说，$\dot{\mathbf{A}}_j$ 可分解为两步迭代 $\mathbf{A}_j \cong \mathbf{A}_i \star \dot{\mathbf{A}}_{ij}$（其中，如果 $i = j$，$\dot{\mathbf{A}}_{ij}$ 是平凡代数的名称 $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$）。称 $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ 配备了一个测度相容系统 $\langle \dot{\mu}_{ij} : (i,j) \in \text{纯}(I) \rangle$，若

(A) $\dot{\mu}_{ij}$ 被迫（由 $\mathbf{A}_i$）是 $\dot{\mathbf{A}}_{ij}$ 上的有限可加严格正测度（特别是，$\dot{\mu}_{ii}$ 是上的平凡测度 $\mathbf{A}_{ii}$），

(B)（相干性）给定 $i \leq j \leq k$，其中 $(i,k) \in \text{Pure}(I)$，且有一个 $\mathbf{A}_i$-名称 $\dot{p}_{ik}$，它是 $\mathbf{A}_{ik}$ 中某个条件的名称，并且被强制在将其视为两步迭代 $\mathbf{A}_{ij} \star \dot{\mathbf{A}}_{jk}$ 中的条件时分解为 $(\dot{p}_{ij}, \dot{p}_{jk})$，我们有

$$\Vdash_i \dot{\mu}_{ik}(\dot{p}_{ik}) = \int_{\dot{p}_{ij}} \dot{\mu}_{jk}(\dot{p}_{jk}) d\dot{\mu}_{ij},$$

(C)（正确性）给定不可比的 $i, j \in I$，使得 $i \vee j$ 存在（回忆一下，根据基本引理 6 和定义4，这意味着以下两种情况之一：$i, j, i \vee j \in L$，或 $i, j, i \vee j \in R$，并且 $(i \wedge j, i)$、$(i \wedge j, j)$、$(i, i \vee j)$、$(j, i \vee j)$ 都属于 $\text{Pure}(I)$），且 $p_i = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j, i}) \in \mathbf{A}_{i \wedge j} \star \dot{\mathbf{A}}_{i \wedge j, i} \cong \mathbf{A}_i$，这可以改写为 $p_i = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{j, i \vee j}) \in \mathbf{A}_j \star \dot{\mathbf{A}}_{j, i \vee j} \cong \mathbf{A}_{i \vee j}$，我们有

$$p_{i \wedge j} \Vdash_j \dot{\mu}_{j, i \vee j}(\dot{p}_{j, i \vee j}) = \dot{\mu}_{i \wedge j, i}(\dot{p}_{i \wedge j, i}). \quad \dashv$$

有人或许会疑惑，为什么我们只考虑纯对 (i,j) 的“小”商 $\mathbf{A}_{ij}$ 上的测度，而不考虑较大的商或整个代数上的测度。原因在于，在这个更一般的情形下，当我们将由相应稠密集 D_i 生成的布尔代数上的测度扩张到完备布尔代数 $\mathbf{A}_{i\ell}$ 时，无法证明粘合极限中相干性的保持。主引理 19 证明的最后一步及其后的讨论对此作了详细说明（尤其请参见反例 11）。另一方面，正如我们将在第 4 节中看到的，这里考虑的“小”商测度已经足够；也就是说，只要所有迭代因子都带有测度，我们就能通过递归过程在整个碎裂迭代上定义测度，参见引理 23。

关于商代数中元素及其测度的表示，有几点需要说明。若 $i < j \in I$，且 $p_j \in \mathbf{A}_j$，我们可以将此条件改写为 $p_j = (p_i, \dot{p}_{ij}) \in \mathbf{A}_i \star \dot{\mathbf{A}}_{ij} = \mathbf{A}_j$（我们此前已在一些地方这样做过）。这显然意味着 $h_{ji}(p_j) = p_i$。此外，若 G_i 是带有 $p_i \in G_i$ 的 $\mathbf{A}_i$-泛型，那么在 $V[G_i]$ 中，我们可以将条件 $p_{ij} = \dot{p}_{ij}[G_i] \in \mathbf{A}_{ij}[G_i]$ 视为与条件 $p_j \in \mathbf{A}_j/G_i$ 相同（尽管这里大多使用前一种记法，但在第 2 节引入集合 D_i——它们是粘合极限中商的稠密子集——时，我们使用了后一种记法）。因此，$\mu_{ij}(\dot{p}_{ij}[G_i])$ 和 $\mu_{ij}(p_j)$ 是同一回事（若 $(i,j) \in \text{纯}(I)$）。

接下来，令 $i, j \in I$ 使得 $i \vee j$ 存在，并且 $p_i = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j,\, i}) \in \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i \wedge j} \star \dot{\mathbf{A}}_{i \wedge j, i \vee j}$。其中 $p_{i \wedge j} = h_{i, i \wedge j}(p_i) = h_{j, i \wedge j}(p_j)$，我们有 $\dot{p}_{i \wedge j,\, i} = \dot{p}_{j,\, i \vee j}$，并且 $p_i = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j,\, i}) = (p_{i \wedge j}, \mathbb{1}_{i,\, i \vee j}) = (p_{i \wedge j}, \mathbb{1}_{i \wedge j,\, j}, \dot{p}_{j,\, i \vee j}) = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{j,\, i \vee j})$；对于最后一项，我们将 $p_{i \wedge j}$ 视为 $\mathbf{A}_j$ 中的一个条件。请特别注意，$\dot{p}_{j,\, i \vee j}$，尽管形式上是一个 $\mathbf{A}_j$-名称，但实际上是一个 $\mathbf{A}_{i \wedge j}$-名称。

根据这些评论，我们可以看出，相干性和正确性蕴含了测度系统的以下基本性质：

观察 18。设 $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ 携带一个相干测度系统 $\langle \dot{\mu}_{ij} : (i,j) \in \text{纯}(I) \rangle$。

(i) *If* $(i,k) \in \text{Pure}(I)$, $i \leq j \leq k$, *and* $\Vdash_i \dot{p}_{ij} \in \dot{\mathbb{A}}_{ij} \subseteq \dot{\mathbb{A}}_{ik}$, *then* $\Vdash_i \dot{\mu}_{ij}(\dot{p}_{ij}) = \dot{\mu}_{ik}(\dot{p}_{ij})$.

(ii) 设 $i, j \in I$ 不可比，且 $i \vee j$ 存在。再设 (p_i, p_j) 属于 D，其见证为 (i,j)；令 $p_{i \wedge j} = h_{i,\, i \wedge j}(p_i) = h_{j,\, i \wedge j}(p_j)$，并将 $p_i = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j,\, i})$、$p_j = (p_{i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j,\, j})$ 视为相应两步迭代中的元素。于是

$$p_{i \wedge j} \Vdash_{i \wedge j} \dot{\mu}_{i \wedge j, i \vee j}\,(\dot{p}_{i \wedge j, i} \cdot \dot{p}_{i \wedge j, j}) = \dot{\mu}_{i \wedge j, i}(\dot{p}_{i \wedge j, i}) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}(\dot{p}_{i \wedge j, j}).$$

(iii)（积分的相干性）若 $(i,k) \in \text{纯}(I)$，$i \leq j \leq k$，$\dot{x}$ 是一个 $\mathbf{A}_k$-名称，表示 $[0,1]$ 中的一个实数，且 $(\dot{p}_{ij}, \dot{p}_{jk})$ 是一个 $\mathbf{A}_i$-名称，表示 $\mathbf{A}_{ik}$ 中的一个条件，则

$$\Vdash_i \int_{\dot{p}_{ik}} \dot{x}\, d\dot{\mu}_{ik} = \int_{\dot{p}_{ij}} \left(\int_{\dot{p}_{jk}} \dot{x}\, d\dot{\mu}_{jk} \right) d\dot{\mu}_{ij}.$$

(iv)（积分的正确性）若 $i,j\in I$ 不可比，且 $i\vee j$ 存在，$\dot{x}$ 是一个 A_i-名称，表示 $[0,1]$，中的一个实数，并且 $p_i=(p_{i\wedge j},\dot{p}_{i\wedge j,i})\in\mathsf{A}_i$ 与 $p_i=(p_{i\wedge j},\dot{p}_{j,i\vee j})\in\mathsf{A}^{i\vee j}$ 等同，则

$$p_{i\wedge j}\Vdash_j\int_{\dot{p}_{j,i\vee j}}\dot{x}d\dot{\mu}_{j,i\vee j}=\int_{\dot{p}_{i\wedge j,i}}\dot{x}d\dot{\mu}_{i\wedge j,i}.$$

证明。(i) 确实，由相干性 (B)，$\Vdash_i\dot{\mu}_{ik}(\dot{p}_{ij})=\int_{\dot{p}_{ij}}\dot{\mu}_{jk}(\dot{\mathbb{1}}_{jk})d\dot{\mu}_{ij}=\int_{\dot{p}_{ij}}d\dot{\mu}_{ij}=\dot{\mu}_{ij}(\dot{p}_{ij})$。(

ii) 我们可以将 $\mathsf{A}^{i\wedge j}$-名称 $\dot{p}_{i\wedge j,\ i}$ 与等价的 A^j-名称 $\dot{p}_{j,\ i\vee j}$视为相同。于是得到

$$\begin{aligned}p_{i\wedge j}\Vdash_{i\wedge j}\dot{\mu}_{i\wedge j,i\vee j}\left(\dot{p}_{i\wedge j,j}\cdot\dot{p}_{j,i\vee j}\right)&=\int_{\dot{p}_{i\wedge j,j}}\dot{\mu}_{j,i\vee j}(\dot{p}_{j,i\vee j})\,d\dot{\mu}_{i\wedge j,j}\\&=\int_{\dot{p}_{i\wedge j,j}}\dot{\mu}_{i\wedge j,i}(\dot{p}_{i\wedge j,i})\,d\dot{\mu}_{i\wedge j,j}=\dot{\mu}_{i\wedge j,i}(\dot{p}_{i\wedge j,i})\cdot\dot{\mu}_{i\wedge j,j}(\dot{p}_{i\wedge j,j})\end{aligned}$$

其中，第一个等式由相干性 (B) 得出，第二个则由正确性 (C) 得出。

(iii) 在 $V[G_i]$ 中讨论，其中 G_i 是在 V 上的 A_i-泛型。于是

$$\begin{aligned}\int_{p_{ik}}\dot{x}d\mu_{ik}&=\sup_{m\to\infty}\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\left[\mu_{ik}\left(p_{ik}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{\ell}{2^m}\right]\\&=\sup_{m\to\infty}\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\left[\int_{p_{ij}}\dot{\mu}_{jk}\left(\dot{p}_{jk}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)d\mu_{ij}\cdot\frac{\ell}{2^m}\right]\\&=\sup_{m\to\infty}\int_{p_{ij}}\left[\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\dot{\mu}_{jk}\left(\dot{p}_{jk}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{\ell}{2^m}\right]d\mu_{ij}\\&\leq\int_{p_{ij}}\sup_{m\to\infty}\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\left[\dot{\mu}_{jk}\left(\dot{p}_{jk}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{\ell}{2^m}\right]d\mu_{ij}\\&=\int_{p_{ij}}\left(\int_{\dot{p}_{jk}}\dot{x}d\dot{\mu}_{jk}\right)d\mu_{ij}=\int_{p_{ij}}\inf_{m\to\infty}\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\left[\dot{\mu}_{jk}\left(\dot{p}_{jk}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{\ell+1}{2^m}\right]d\mu_{ij}\\&\leq\inf_{m\to\infty}\int_{p_{ij}}\left[\sum_{\ell=0}^{2^m-1}\dot{\mu}_{jk}\left(\dot{p}_{jk}\cdot\left[\!\!\left[\frac{\ell+1}{2^m}\geq\dot{x}>\frac{\ell}{2^m}\right]\!\!\right]\right)\cdot\frac{\ell+1}{2^m}\right]d\mu_{ij}=\int_{p_{ik}}\dot{x}d\mu_{ik}\end{aligned}$$

其中，在第一个和最后一个等式中，我们使用了积分的定义以及 $\leq$之间的那些定义；在第二个和最后一个等式中，我们使用了相干性 (B)。其余的不等式显然成立。

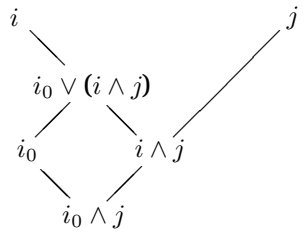
(iv) 这可以用与 (iii) 类似但简单得多的证明来证明，只需改用正确性 (C)。细节从略。

□

¯主引理 19（粘合极限中的相干性）。假设 $\mathsf{A}=\langle\mathsf{A}_i:\ i\in I\rangle$ 具有一个关于测度的相容系统$\langle\dot{\mu}_{ij}:(i,j)\ \in$纯$(I)\rangle$。那么 $\mathsf{A}\ =\langle\mathsf{A}_i:\ i\in I\cup\{\ell\}\rangle$具有一个关于测度的相容系统 $\langle\dot{\mu}_{ij}:(i,j)\ \in$纯$(I\cup\{\ell\})\rangle$，其中 $\ell>i$对所有 $i\in I$以及 $\mathsf{A}_\ell=$lim amal$_{i\in I}\mathsf{A}_i$均成立。

证明。回想观察 17，纯$(I\cup\{\ell\})$中的新元素只有形如 (i,ℓ) 的元素，其中$i\in I\setminus$核(I)（平凡的 (ℓ,ℓ) 除外）。因此，只需为这样的 i 定义 $\dot{\mu}_{i\ell}$（特别地，如果 $I=$核(I)，则无事可证）。

固定 $i_0\in I\setminus\ker(I)$，并在 A_{i_0}-泛型扩张 $V[G_{i_0}]$中工作。不失一般性 $i_0\in L$（$i_0\in R$类似）。设 $(p_i,p_j)\in D_{i_0}$，其中 $i\in L,j\in R$，且 $i\geq i_0$。这意味着 $p_{i_0}:=h_{ii_0}(p_i)\in G_{i_0}$，进而有 $p_{i_0\wedge j}:=h_{j,i_0\wedge j}(p_j)\in G_{i_0}$。按照前面的论证，将 p_i 和 p_j 分解为迭代中的条件，我们可以写成（在基模型 V 中）$p_i=(p_{i_0},\dot{p}_{i_0i})=(p_{i_0},\dot{p}_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}\ \dot{p}_{i_0\vee(i\wedge j)\ i})$，以及 $p_j=(p_{i_0\wedge j},\dot{p}_{i_0\wedge j,j})=(p_{i_0\wedge j},\dot{p}_{i_0\wedge j,i\wedge j},\dot{p}_{i\wedge j,j})$。

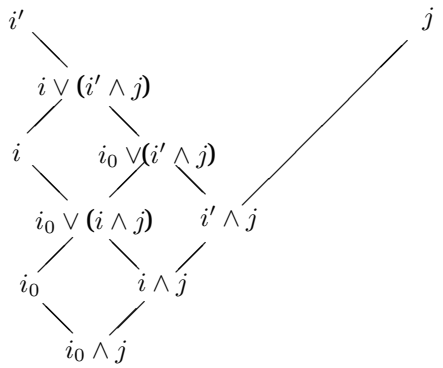


在 $V[G_{i_0}]$ 中， p_i 被识别为 $p_{i_0 i} = (p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}\ \dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j)\ i})$ 和 p_j，其中 $p_{i_0 \wedge j, j} = (p_{i_0 \wedge j, i \wedge j}, \dot{p}_{i \wedge j, j})$。因此我们定义

$$\mu_{i_0 \ell}(p_i, p_j) = \mu_{i_0 \ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0 \wedge j, j}) := \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right)\ d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}$$

注意，这些有序对 $(i_0, i_0 \vee (i \wedge j))$、$(i_0 \vee (i \wedge j)\ i)$ 和 $(i \wedge j, j)$ 确实是纯的；前两个是因为 i_0 和 i 都属于 $L \setminus$ 核(I)，后一个则由定义4中的 (2)(a) 或 (2)(b) 得出（注意， $j \leq i$ 或 i 和 j 不可比）。我们首先需要验证这个表达式是良定义的，因为 D_{i_0} 中的不同元素可能作为 $\mathbb{A}_{i_0 \ell}$ 中的条件彼此等价。 ———————

假设 $(q_{i'}, q_{j'})$ 是 D_{i_0} 中的一个条件，这由 $i' \geq i_0$ 属于 L 且 j' 属于 R 见证，而它等价于 (p_i, p_j)。根据观察 13 (iii)，我们可以假设 $i' \geq i$ 和 $j' \geq j$。根据该观察的 (ii) 部分，存在 $r \in G_{i_0}$，使得 $q_{i'} \cdot r = p_i \cdot h_{j, i' \wedge j}(p_j) \cdot r$ 且 $q_{j'} \cdot h_{i_0, i_0 \wedge j'}(r) = p_j \cdot h_{i, i \wedge j'}(p_i) \cdot h_{i_0, i_0 \wedge j'}(r)$。考虑相应的 $\mathbb{A}_{i \wedge j}$-名称 $\dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}$ 和 $\dot{q}_{i \wedge j, i \wedge j'}$，也就是说，$h_{j, i' \wedge j}(p_j) = (p_{i \wedge j}, \dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j})$ 且 $h_{i, i \wedge j'}(p_i) = (p_{i \wedge j}, \dot{q}_{i \wedge j, i \wedge j'})$，这意味着，在 $V[G_{i_0}]$ 中， $q_{i_0 i'} = (p_{i_0 i}, \dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j})$ 且 $q_{i_0 \wedge j', j'} = (p_{i_0 \wedge j, j}, \dot{q}_{i \wedge j, i \wedge j'})$。由于我们可以分两步论证，为简化起见，先考虑 $j = j'$ 的情形。因此 $q_{i_0 \wedge j, j} = p_{i_0 \wedge j, j}$。

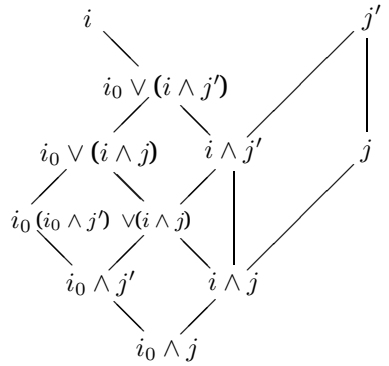


注意 $p_{i_0 \wedge j, j} = (p_{i_0 \wedge j, i \wedge j}, \dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}, \dot{q}_{i' \wedge j, j})$。我们可以将 $\dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}$ 视为一个 $\mathbb{A}_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}$-名称 $\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j)\ i_0 \vee (i' \wedge j)}$，并将 $\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j)\ i}$ 视为一个 $\mathbb{A}_{i_0, i_0 \vee (i' \wedge j)}$-名称 $\dot{q}_{i_0 \vee (i' \wedge j)\ i'}$。于是 $q_{i_0 i'} = (p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}\ \dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j)\ i}, \dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}) = (p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}\ \dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j)\ i_0 \vee (i' \wedge j)}\ \dot{q}_{i_0 \vee (i' \wedge j)\ i'})$，我们计算得

$$\begin{aligned}
& \mu_{i_0 \ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0 \wedge j, j}) = \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right)\ d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= & \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \left(\int_{\dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}} \dot{\mu}_{i' \wedge j, j}\left(\dot{q}_{i' \wedge j, j}\right)\ d\dot{\mu}_{i \wedge j, i' \wedge j} \right) d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= & \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \left(\int_{\dot{q}_{i \wedge j, i' \wedge j}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i' \wedge j, j}\left(\dot{q}_{i' \wedge j, j}\right)\ d\dot{\mu}_{i \wedge j, i' \wedge j} \right) d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= & \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \left(\int_{\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i' \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i' \wedge j), i'}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i' \wedge j), i'}\right) \cdot \dot{\mu}_{i' \wedge j, j}\left(\dot{q}_{i' \wedge j, j}\right)\ d\dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i' \wedge j)} \right) d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= & \int_{q_{i_0, i_0 \vee (i' \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i' \wedge j), i'}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i' \wedge j), i'}\right) \cdot \dot{\mu}_{i' \wedge j, j}\left(\dot{q}_{i' \wedge j, j}\right)\ d\mu_{i_0, i_0 \vee (i' \wedge j)} \quad = \quad \mu_{i_0 \ell}(q_{i_0 i'}, q_{i_0 \wedge j, j})
\end{aligned}$$

其中，第二个和第五个等号分别利用了相干性（(B) 和观察 18 (iii)），而第四个等号则依据正确性（(C) 和观察 18 (iv)）。（各位读者可自行验证，相应的各对仍然都是纯的。）

接下来考虑 $i = i'$ 的情形。因此 $q_{i_0 i} = p_{i_0 i}$。



注意，$p_{i_0 i} = (p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}\ \dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i_0 \vee (i \wedge j')}\ \dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j')\, i})$。我们可以将 $\dot{p}_{i \wedge j,\ j}$ 与一个 $\mathsf{A}_{i_0 \wedge j'}$、$_{i \wedge j'}$-名称 $\dot{q}_{i \wedge j',\ j'}$ 进行对应，然后可以写成 $q_{i_0 \wedge j',\ j'} = (p_{i_0 \wedge j,\ i \wedge j},\ \dot{p}_{i \wedge j,\ j},\ \dot{q}_{i \wedge j,\ i \wedge j'}) = (p_{i_0 \wedge j,\ i \wedge j},\ \dot{q}_{i \wedge j,\ i \wedge j',\ j'},\ \dot{q}_{i \wedge j',\ j'})$。我们计算

$$\begin{aligned}
&\mu_{i_0 \ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0 \wedge j, j}) = \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right)\, d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= &\int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \left(\int_{\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\right)\, d\dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')} \right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right)\, d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= &\int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \left(\int_{\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right)\, d\dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')} \right) d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= &\int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \left(\int_{\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j', j'}\left(\dot{q}_{i \wedge j', j'}\right)\, d\dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i_0 \vee (i \wedge j')} \right) d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
= &\int_{q_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j')}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\left(\dot{q}_{i_0 \vee (i \wedge j'), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j', j'}\left(\dot{q}_{i \wedge j', j'}\right)\, d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j')} \;=\; \mu_{i_0 \ell}(q_{i_0 i}, q_{i_0 \wedge j', j'})
\end{aligned}$$

其中第二个和第五个等号分别使用了相干性（(B) 和观察 18 (iii)），而第四个等号则依据正确性(C)。这就完成了良定义性的证明。

显然，$\mu_{i_0 \ell}$ 在 D_{i_0} 和 $\mu_{i_0 \ell}(\mathbb{1}) = 1$上严格为正。对于有限可加性，我们需要考虑 D_{i_0} 中两两不相容元素的有限和，如预备引理 15 (iv) 中所述，因为 D_{i_0} 对于两个不相容元素的和并不封闭。根据观察 10 (vi)，不妨假设这些有限多个条件具有相同的见证 $i \geq i_0$、$i \in L$ 和 $j \in R$。因此，我们有 (p_i, p_j)、$(p_i^m, p_j^m) \in D$、$m < n$，使得

$$r \Vdash \text{“}(p_i^m, p_j^m) \text{ are pairwise incompatible and } \sum_{m<n} (p_i^m, p_j^m) = (p_i, p_j)\text{”}$$

对于某个 $r \in \mathsf{A}_{i_0}$ 在具有 $r \in G_{i_0}$ 的 $V[G_{i_0}]$ 中，这意味着 $(p_{i_0 i}^m, p_{i_0 \wedge j, j}^m)$ 两两不相容，并且 $\sum_{m<n}(p_{i_0 i}^m, p_{i_0 \wedge j, j}^m) = (p_{i_0 i}, p_{i_0 \wedge j, j})$。由于 $\mathbb{1} - p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}^m \Vdash \dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i}^m = \mathbb{0}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mu_{i_0 \ell}(p_{i_0 i}^m, p_{i_0 \wedge j, j}^m) &= \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}^m} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}^m\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}^m\right)\, d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \\
&= \int_{p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}^m\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}^m\right)\, d\mu_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}.
\end{aligned}$$

断言 19.1。

$$p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \Vdash \sum_{m<n} \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}^m\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}^m\right) = \dot{\mu}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\left(\dot{p}_{i_0 \vee (i \wedge j), i}\right) \cdot \dot{\mu}_{i \wedge j, j}\left(\dot{p}_{i \wedge j, j}\right).$$

证明。为此，令 $G_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}$ 是在 $V[G_{i_0}]$ 上关于 $p_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)} \in G_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}$ 的 $\mathsf{A}_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}$-泛型，并进入泛型扩张 $V[G_{i_0}][G_{i_0, i_0 \vee (i \wedge j)}] = V[G_{i_0 \vee (i \wedge j)}]$。于是 $(p_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i}^m, p_{i \wedge j, j}^m)$ 两两不相容，其中某些可能为 0，且它们的和为 $(p_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i}, p_{i \wedge j, j})$。注意，不相容意味着其中任意两个要么在第一坐标上不相容，要么在第二坐标上不相容。这意味着我们可以找到条件 $q_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i}^k \in \mathsf{A}_{i_0 \vee (i \wedge j)\, i}$, $k < \ell$ 和 $q_{i \wedge j, j}^{k'} \in \mathsf{A}_{i \wedge j, j}$, $k' < \ell'$，以及集合 $A_m \subseteq \ell, B_m \subseteq \ell'$，

$m < n$ ，使得

(i) $q^{k}_{i_0\vee(i\wedge j)\ i}$ 两两不相容，$q^{k'}_{i\wedge j,j}$ 也两两不相容；(ii) $\sum_{k<\ell} q^{k}_{i_0\vee (i\wedge j)\ i} = p_{i_0\vee(i\wedge j)\ i}$ 和 $\sum_{k'<\ell'} q^{k'}_{i\wedge j,j} = p_{i\wedge j,j}$；(iii) 对于 $m \neq m'$，要么 $A_m \cap A_{m'} = \emptyset$，要么 $B_m \cap B_{m'} = \emptyset$；(iv) 要么 $A_m = B_m = \emptyset$，要么二者均非空；(v) $\sum_{k\in A_m} q^{k}_{i_0\vee(i\wedge j)\ i} = p^{m}_{i_0\vee(i\wedge j)\ i}$ 和 $\sum_{k'\in B_m} q^{k'}_{i\wedge j,j} = p^{m}_{i\wedge j,j}$，(

vi) 对于每一对 k, k'，都存在一个（必然唯一的） m，使得 $k \in A_m$ 且 $k' \in B_m$.

现在，利用测度$\mu_{i_0\vee(i\wedge j)\ i}$ 和 $\mu_{i\wedge j,j}$的有限可加性，我们可知

$$\begin{aligned}
\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(p_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\mu_{i\wedge j,j}\left(p_{i\wedge j,j}\right) &\overset{\text{(i),(ii)}}{=} \left(\sum_{k<\ell}\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(q^{k}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\right)\cdot\left(\sum_{k'<\ell'}\mu_{i\wedge j,j}\left(q^{k'}_{i\wedge j,j}\right)\right)\\
&= \sum_{k<\ell}\sum_{k'<\ell'}\left(\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(q^{k}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\mu_{i\wedge j,j}\left(q^{k'}_{i\wedge j,j}\right)\right)\\
&\overset{\text{(vi)}}{=} \sum_{m<n}\sum_{k\in A_m}\sum_{k'\in B_m}\left(\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(q^{k}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\mu_{i\wedge j,j}\left(q^{k'}_{i\wedge j,j}\right)\right)\\
&\overset{\text{(v)}}{=} \sum_{m<n}\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(p^{m}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\mu_{i\wedge j,j}\left(p^{m}_{i\wedge j,j}\right).
\end{aligned}$$

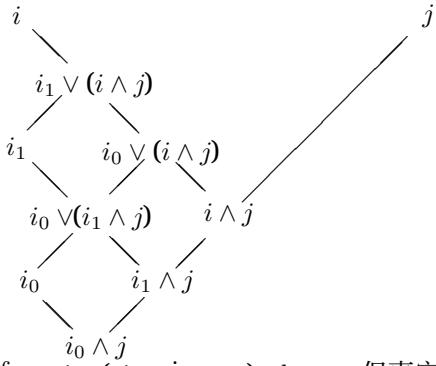
至此，断言的证明结束。 □

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mu_{i_0\ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0\wedge j,j}) &= \int_{p_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}}\dot{\mu}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(\dot{p}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\dot{\mu}_{i\wedge j,j}\left(\dot{p}_{i\wedge j,j}\right)\ d\mu_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}\\
&= \int_{p_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}}\left(\sum_{m<n}\dot{\mu}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(\dot{p}^{m}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\dot{\mu}_{i\wedge j,j}\left(\dot{p}^{m}_{i\wedge j,j}\right)\right)\ d\mu_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}\\
&= \sum_{m<n}\left(\int_{p_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}}\dot{\mu}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(\dot{p}^{m}_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot\dot{\mu}_{i\wedge j,j}\left(\dot{p}^{m}_{i\wedge j,j}\right)\ d\mu_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}\right) = \sum_{m<n}\mu_{i_0\ell}(p^{m}_{i_0 i}, p^{m}_{i_0\wedge j,j})
\end{aligned}$$

有限可加性的证明至此完成。

为证明这些测度的相干性 (B)，令 $i_0 < i_1$ 为 $L \setminus \ker(I)$ 的元素，并在 $V[G_{i_0}]$ 中进行讨论（i_0、$i_1 \in R \setminus \ker(I)$ 的情形类似）。我们有一个条件 $(p_{i_0 i}, p_{i_0\wedge j,j}) \in D_{i_0}$，其见证为 $i \geq i_1$、$i \in L$ 和 $j \in R$。我们可以写成 $p_{i_0 i} = (p_{i_0 i_1}, \dot{p}_{i_1 i})$ 和 $p_{i_0\wedge j,j} = (p_{i_0\wedge j,i_1\wedge j}, \dot{p}_{i_1\wedge j,j})$。进一步的分解也可类似地以直接明了的方式定义。



我们需要证明 $\mu_{i_0\ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0\wedge j,\ j}) = \int_{p_{i_0 i_1}}\dot{\mu}_{i_1\ell}(\dot{p}_{i_1 i}, \dot{p}_{i_1\wedge j,\ j})\ d\mu_{i_0 i_1}$。但事实上，反复应用原系统的相干性

（(B) 和观察 18 (iii)），我们得到

$$\begin{aligned}
\mu_{i_0\ell}(p_{i_0 i}, p_{i_0\wedge j,j}) &= \int_{p_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}} \dot\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i}\left(\dot p_{i_0\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot \dot\mu_{i\wedge j,j}\left(\dot p_{i\wedge j,j}\right)\, d\mu_{i_0,i_0\vee(i\wedge j)}\\
&= \int_{p_{i_0,i_0\vee(i_1\wedge j)}}\left[\int_{\dot p_{i_0\vee(i_1\wedge j),i_0\vee(i\wedge j)}}\left(\int_{\dot p_{i_0\vee(i\wedge j),i_1\vee(i\wedge j)}} \dot\mu_{i_1\vee(i\wedge j),i}\left(\dot p_{i_1\vee(i\wedge j),i}\right)\, d\dot\mu_{i_0\vee(i\wedge j),i_1\vee(i\wedge j)}\right)\right.\\
&\qquad\left. \dot\mu_{i\wedge j,j}\left(\dot p_{i\wedge j,j}\right)\, d\dot\mu_{i_0\vee(i_1\wedge j),i_0\vee(i\wedge j)}\right] d\mu_{i_0,i_0\vee(i_1\wedge j)}\\
&= \int_{p_{i_0,i_0\vee(i_1\wedge j)}}\left(\int_{\dot p_{i_0\vee(i_1\wedge j),i_1}}\int_{\dot p_{i_1,i_1\vee(i\wedge j)}} \dot\mu_{i_1\vee(i\wedge j),i}\left(\dot p_{i_1\vee(i\wedge j),i}\right)\right.\\
&\qquad\left. \dot\mu_{i\wedge j,j}\left(\dot p_{i\wedge j,j}\right)\, d\dot\mu_{i_1,i_1\vee(i\wedge j)}\, d\dot\mu_{i_0\vee(i_1\wedge j),i_1}\right) d\mu_{i_0,i_0\vee(i_1\wedge j)}\\
&= \int_{p_{i_0 i_1}}\int_{\dot p_{i_1,i_1\vee(i\wedge j)}} \dot\mu_{i_1\vee(i\wedge j),i}\left(\dot p_{i_1\vee(i\wedge j),i}\right)\cdot \dot\mu_{i\wedge j,j}\left(\dot p_{i\wedge j,j}\right)\, d\dot\mu_{i_1,i_1\vee(i\wedge j)}\, d\mu_{i_0 i_1}\\
&= \int_{p_{i_0 i_1}} \dot\mu_{i_1\ell}(\dot p_{i_1 i}, \dot p_{i_1\wedge j,j})\, d\mu_{i_0 i_1}
\end{aligned}$$

如所需。

为了证明正确性 (C) 得以保留，只需考虑这样的情况：$i, j \in I$，使得 $i\vee j$ 在 I 中不存在，从而 $i\vee j = \ell$ 属于 $I\cup\{\ell\}$（参见观察 5）。因此，根据基本引理 6，不失一般性，$i \in L\setminus \ker(I)$ 且 $j \in R\setminus \ker(I)$。我们需要证明，若将 $p_j = (p_{i\wedge j}, \dot p_{i\wedge j,\ j})$ 重写为 $(p_{i\wedge j}, \dot p_{i\ell})$，则有 $p_{i\wedge j} \Vdash_i \dot\mu_{i\ell}(\dot p_{i\ell}) = \dot\mu_{i\wedge j,\ j}(\dot p_{i\wedge j,\ j})$。在 $V[G_i]$ 中处理 $p_{i\wedge j}\in G_i$。注意，$p_{i\ell}$ 被视为有序对 $(\mathbb{1}_{ii}, p_{i\wedge j,\ j})$；并且鉴于我们处于 $\mu_{i\ell}$ 定义中的特殊情况 $i_0 = i$，可知

$$\mu_{i\ell}(p_{i\ell}) = \mu_{i\ell}(\mathbb{1}_{ii}, p_{i\wedge j,j}) = \int_{\mathbb{1}_{ii}} \dot\mu_{ii}(\dot{\mathbb{1}}_{ii})\cdot \dot\mu_{i\wedge j,j}(\dot p_{i\wedge j,j})\, d\mu_{ii} = \mu_{i\wedge j,j}(p_{i\wedge j,j}),$$

按要求，这是因为这些名称是实际对象，并且 $\mu_{ii}(\mathbb{1}_{ii}) = 1$。注意，扩张测度时我们不再需要处理正确性，因为它所指的元素必然属于D_i。

现在讨论测度延拓。首先，这些测度在 D_i上满足所有所需性质，而且我们可以将它们延拓到由这些集合生成的布尔代数 $\langle D_i\rangle$。事实上，根据预备引理 16 (iii) 以及上文证明的有限可加性，D_i 满足预备引理 15 在 $V[G_i]$中的假设。因此，我们得到定义在 $\langle D_i\rangle$上的有限可加测度，并仍以 $\mu_{i\ell}$表示。我们需要证明相干性 (B) 得以保持。

假设 $i<j<\ell$ 属于 $I\setminus\ker(I)$，并在 $V[G_i]$中进行讨论。令 $a_{i\ell} = (a_{ij}, \dot a_{j\ell}) \in \langle D_i\rangle = \mathbf{A}_{ij}\star\langle D_j\rangle$。根据预备引理 15 的证明，我们知道 $a_{i\ell}$ 是 D_i中有限多个元素的不交和，$a_{i\ell} = \sum_{m<n} b^m_{i\ell}$且 $b^m_{i\ell}\in D_i$。记作 $b^m_{i\ell} = (b^m_{ij}, \dot b^m_{j\ell})$。那么

$$\begin{aligned}
\mu_{i\ell}(a_{i\ell}) &= \sum_{m<n}\mu_{i\ell}\left(b^m_{i\ell}\right) = \sum_{m<n}\left(\int_{b^m_{ij}} \dot\mu_{j\ell}\left(\dot b^m_{j\ell}\right) d\mu_{ij}\right)\\
&= \int_{a_{ij}}\left(\sum_{m<n}\dot\mu_{j\ell}\left(\dot b^m_{j\ell}\right)\right) d\mu_{ij} = \int_{a_{ij}} \dot\mu_{j\ell}\left(\dot a_{j\ell}\right) d\mu_{ij}
\end{aligned}$$

其中，第二个等号源于上文确立的 D_i 相干性，而第三个等号使用了 $\mathbb{1} - b^m_{ij} \Vdash \dot b^m_{j\ell} = \mathbb{0}$。

最后，我们需要将这些测度扩展到 $\mathbf{A}_{i\ell}$。设 $\mathbf{E}_\ell$ 是一个布尔代数，其中 $\langle D\rangle \subseteq \mathbf{E}_\ell \subseteq \mathrm{r.o.}(D) = \dot{\mathbf{A}}_{\mathrm{amal}}$。于是，对于 $i<j\in I$，我们令 $\mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i$ 以及 $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$。此外，如果 G_i 在 V 上对于 $i\in I$是 $\mathbf{E}_i$-泛型的，则定义商布尔代数 $\mathbf{E}_{i\ell} = \mathbf{E}_\ell/G_i = \{[a_\ell]:\ a_\ell\in\mathbf{E}_\ell\}$，其中 a_ℓ 与 $b_\ell\in\mathbf{E}_\ell$ 等价，当且仅当$\mathbb{1} - h_{\ell i}(a_\ell\triangle b_\ell)\in G_i$，而 $[a_\ell]$ 是 a_ℓ 的等价类。这里，$\triangle$ 表示对称差：$a_\ell\triangle b_\ell = (a_\ell - b_\ell) + (b_\ell - a_\ell)$。注意，由于后者是完备布尔代数，$h_{\ell i}(a_\ell\triangle b_\ell)\in \mathbf{E}_i$。还要注意，$[a_\ell] = \mathbb{0}$ 属于 $\mathbf{E}_{i\ell}$ 当且仅当$h_{\ell i}(a_\ell)\notin G_i$。记 $a_\ell = (a_i, \dot a_{i\ell})$，其中 $h_{\ell i}(a_\ell) = a_i$，我们可以将 $[a_\ell]\in \mathbf{E}_{i\ell}$ 与 $a_{i\ell} = \dot a_{i\ell}[G_i]$等同起来。因此，由 $\dot{\mathbf{E}}_\ell$，我们得到一个系统 $\langle \mathbf{E}_{ij}:\ i<j\le\ell\rangle$ 个布尔代数。

通过标准地应用佐恩引理（另见引理 14 及其证明），只需证明以下命题：如果 $\bar{\mathbf{E}} = \langle \mathbf{E}_i : \ i \in I \cup \{\ell\}\rangle$ 如前一段所述，并带有一个相容系统 $\langle \dot{\mu}_{ij} = \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}} : \ (i,j) \in \bar{}\text{纯}(I \cup \{\ell\})\rangle$ 的测度；且如果 $b_\ell \in \mathbf{A}_\ell \setminus \mathbf{E}_\ell$，那么令 $\mathbf{E}'_\ell = \langle \mathbf{E}_\ell \cup \{b_\ell\}\rangle$、$\mathbf{E}' = \langle \mathbf{E}'_i : \ i \in I \cup \{\ell\}\rangle$ 带有一个相容系统 $\langle \dot{\mu}'_{ij} = \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}'} : \ (i,j) \in \text{纯}(I \cup \{\ell\})\rangle$ 的测度，该系统扩展了原系统。（这里请注意，对于 $i < \ell$，$\mathbf{E}'_i = \mathbf{E}_i$。）

固定 $i \in I \setminus \ker(I)$，并不失一般性地假设 $i \in L \setminus \ker(I)$（$i \in R \setminus \ker(I)$ 的情形类似）。对于 $\varepsilon = \pm 1$，记 $\varepsilon b_\ell = (c_i^\varepsilon, \varepsilon \dot{b}_{i\ell}) \in \mathbf{E}_i \star \dot{\mathbf{E}}'_{i\ell}$，其中 $h_{\ell i}(\varepsilon b_\ell) = c_i^\varepsilon$。显然 $c_i^1 + c_i^{-1} = \mathbb{1}$，但 c_i^1 和 c_i^{-1} 是相容的（否则 b_ℓ 将属于 $\mathbf{E}'_i = \mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{E}_\ell$，矛盾）。令 G_i 为 $\mathbf{E}_i$-泛型。（我们可以假设 $c_i^1 \cdot c_i^{-1} \in G_i$，因为在 $c_i^1 \cdot c_i^{-1}$ 之外，$\dot{b}_{i\ell}$ 不是 0 就是 1，因而 $\dot{\mathbf{E}}'_{i\ell} = \dot{\mathbf{E}}_{i\ell}$ 将被迫成立，尽管这实际上并不相关。）令 $a_{i\ell} \in \mathbf{E}_{i\ell}$ 任意。按照引理 14 的证明，在 $V[G_i]$ 中定义

$$\tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \sup\{\mu_{i\ell}(a') : a' \in \mathbb{E}_{i\ell}, a' \leq a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}\}.$$

接下来令 $i < j < \ell$，$i, j \in$ 核(I)，并仍在 $V[G_i]$ 中工作。将 $a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell} \in \mathbf{E}'_{i\ell}$ 分解为 $(c_{ij}^\varepsilon, \dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) \in \mathbf{E}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{E}}'_{j\ell}$，其中 $c_{ij}^\varepsilon = h_{\ell j}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) \in \mathbf{E}_{ij}$。我们先证明：

断言 19.2。

$$\tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) \leq \int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\tilde{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij}.$$

证明。令 $\delta > 0$，取 $a'_{i\ell} = (a'_{ij}, \dot{a}'_{j\ell}) \in \mathbf{E}_{i\ell}$，使得 $a'_{i\ell} \leq a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}$ 满足 $\tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) < \mu_{i\ell}(a'_{i\ell}) + \delta$。因此 $a'_{ij} \leq c_{ij}^\varepsilon$。由于 $a'_{ij} \Vdash \dot{a}'_{j\ell} \leq \dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon b_{j\ell}$，我们看到 $a'_{ij} \Vdash \dot{\mu}_{j\ell}(\dot{a}'_{j\ell}) \leq \tilde{\mu}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon b_{j\ell})$。因此，利用 $\bar{\mathbf{E}}$ 的相干性，我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) - \delta \ &< \ \mu_{i\ell}(a'_{i\ell}) = \int_{a'_{ij}} \dot{\mu}_{j\ell}(\dot{a}'_{j\ell}) d\mu_{ij} \leq \int_{a'_{ij}} \dot{\tilde{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \\ &\leq \ \int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\tilde{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij}. \end{aligned}$$

由于这对每个 δ都成立，因此断言得证。 □

遗憾的是，这里的等式未必成立（参见本证明结束后紧接着的反例 11）。因此，对 $\alpha < \omega_1$ 递归定义

$$\begin{aligned} \mu_{i\ell}^0(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) &= \tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) \\ \mu_{i\ell}^{\alpha+1}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) &= \sup_{i \leq j < \ell} \int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j\ell}^\alpha(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \\ \mu_{i\ell}^\alpha(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) &= \lim_{\gamma < \alpha} \mu_{i\ell}^\gamma(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) \qquad \text{for limit } \alpha. \end{aligned}$$

断言 19.3. 对所有 $\alpha < \omega_1$：

(i) 对于 $i \leq j < \ell$，

$$\mu_{i\ell}^\alpha(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) \leq \int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j\ell}^\alpha(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \leq \mu_{i\ell}^{\alpha+1}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}),$$

(ii)（单调性）对于 $i \leq j \leq j' < \ell$，

$$\int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j\ell}^\alpha(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \leq \int_{c_{ij'}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j'\ell}^\alpha(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\mu_{ij'}.$$

证明。对 α 进行归纳法。对于任意 α，(i) 中的第二个不等式根据定义显然成立。对于任意 α，(ii) 中的单调性由下式得到

$$\int_{c_{ij}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j\ell}^\alpha(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \leq \int_{c_{ij}^\varepsilon} \int_{\dot{c}_{jj'}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j'\ell}^\alpha(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\dot{\mu}_{jj'} \, d\mu_{ij} = \int_{c_{ij'}^\varepsilon} \dot{\mu}_{j'\ell}^\alpha(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\mu_{ij'}$$

其中，不等式由 α 的 (i) 得出，而等式则是积分的相干性（观察 18 (iii)）。 $\alpha = 0$ 的 (i) 中的第一个不等式即为断言 19.2。对于极限序数 α，根据归纳假设可由下式得出

$$\lim_{\gamma<\alpha} \mu^{\gamma}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \lim_{\gamma<\alpha} \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \dot{\mu}^{\gamma}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} \leq \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \lim_{\gamma<\alpha} \dot{\mu}^{\gamma}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij}.$$

因此，考虑一个后继序数 $\alpha + 1$。令 $i \leq j < \ell$，并固定 $\delta > 0$。固定 $j' \geq i$ 使得

$$\mu^{\alpha+1}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) < \int_{c^{\varepsilon}_{ij'}} \dot{\mu}^{\alpha}_{j'\ell}(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\mu_{ij'} + \delta.$$

回想一下，由于 $j, j' \in L$，它们有一个公共上界 $j \vee j' \in L$。由 α (ii) 的单调性，我们因此可以假设 $j' = j \vee j'$，即 $j' \geq j$。根据定义以及积分的相干性（观察 18 (iii)），我们于是得到

$$\begin{aligned} \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \dot{\mu}^{\alpha+1}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} &\geq \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \int_{c^{\varepsilon}_{jj'}} \dot{\mu}^{\alpha}_{j'\ell}(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\mu_{jj'}\, d\mu_{ij} \\ &= \int_{c^{\varepsilon}_{ij'}} \dot{\mu}^{\alpha}_{j'\ell}(\dot{a}_{j'\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j'\ell}) d\mu_{ij'} > \mu^{\alpha+1}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) - \delta \end{aligned}$$

由于这对每个 δ 都成立，我们得到这个不等式，断言的证明也就完成了。 □

因此，存在一个序数 $\alpha_0 = \alpha_0(a_{i\ell}, \varepsilon) < \omega_1$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，都有 $\mu^{\alpha}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \mu^{\alpha_0}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell})$。根据断言， c^{ε}_{ij} 必然推出 $\dot{\alpha}_0(\dot{a}_{j\ell}, \varepsilon) \leq \alpha_0$。定义

$$\bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \mu^{\alpha_0}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}).$$

那么根据断言

$$\bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon b_{j\ell}) d\mu_{ij} \tag{$\star$}$$

对于所有 j，其中有 $i \leq j < \ell$。

接下来令

$$\mu'_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \frac{1}{2}\Big(\mu_{i\ell}(a_{i\ell}) + \bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) - \bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot (-\varepsilon b_{i\ell}))\Big)$$

and

$$\mu'_{i\ell}\left(a^0_{i\ell} + a^1_{i\ell} b + a^2_{i\ell}(-b_{i\ell})\right) = \mu_{i\ell}\left(a^0_{i\ell}\right) + \mu'_{i\ell}\left(a^1_{i\ell} b_{i\ell}\right) + \mu'_{i\ell}\left(a^2_{i\ell}(-b_{i\ell})\right)$$

其中 $a^0_{i\ell} + a^1_{i\ell} b_{i\ell} + a^2_{i\ell}(-b_{i\ell})$ 是 $\mathsf{E}'_{i\ell}$ 中的任意元素，且 $a^k_{i\ell} \in \mathsf{E}_{i\ell}$ 两两不相容。注意，如果 $a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell} \in \mathsf{E}_{i\ell}$，那么

$$\mu'_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \tilde{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \mu_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell})$$

其中第一个和最后一个等式是显然的，而第二个等式则由原系统 $\bar{}\mathsf{E}$ 的相干性推出。此外

$$\mu'_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot b_{i\ell}) + \mu'_{i\ell}(a_{i\ell}(-b_{i\ell})) = \mu_{i\ell}(a_{i\ell}) \quad \text{and} \quad \mu'_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) + \mu'_{i\ell}(\bar{a}_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) = \mu'_{i\ell}((a_{i\ell} + \bar{a}_{i\ell}) \cdot \varepsilon b_{i\ell})$$

对于不相容的 $a_{i\ell}$、$\bar{a}_{i\ell} \in \mathsf{E}_{i\ell}$，其中第二个等式首先对 $\tilde{\mu}_{i\ell}$ 和 $\bar{\mu}_{i\ell}$ 得到证明。现在，证明引理 14 的论证表明，$\mu'_{i\ell}$ 是 $\mathsf{E}'_{i\ell}$ 上延拓测度 $\mu_{i\ell}$ 的有限可加严格正测度。

$\bar{}$最后，利用上面的（$\star$）以及 E 的相干性，我们计算得出

$$\begin{aligned} \mu'_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) &= \frac{1}{2}\Big(\mu_{i\ell}(a_{i\ell}) + \bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot \varepsilon b_{i\ell}) - \bar{\mu}_{i\ell}(a_{i\ell} \cdot (-\varepsilon b_{i\ell}))\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{a_{ij}} \dot{\mu}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell}) d\mu_{ij} + \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} - \int_{c^{-\varepsilon}_{ij}} \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot (-\varepsilon \dot{b}_{j\ell})) d\mu_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{a_{ij}} \dot{\mu}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell}) d\mu_{ij} + \int_{a_{ij}} \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} - \int_{a_{ij}} \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot (-\varepsilon \dot{b}_{j\ell})) d\mu_{ij}\right) \\ &= \int_{a_{ij}} \frac{1}{2}\Big(\dot{\mu}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell}) + \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) - \dot{\bar{\mu}}_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot (-\varepsilon \dot{b}_{j\ell}))\Big) d\mu_{ij} \\ &= \int_{a_{ij}} \dot{\mu}'_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij} = \int_{c^{\varepsilon}_{ij}} \dot{\mu}'_{j\ell}(\dot{a}_{j\ell} \cdot \varepsilon \dot{b}_{j\ell}) d\mu_{ij}. \end{aligned}$$

¯至此，E 的相干性′ 以及主引理 19 的证明均告完成。 □

以下说明断言 19.2 为何是最优的。

反例 11. 假设 A_0 和 A_1 是分别带有有限可加严格正测度 μ_0 和μ_1的完备布尔代数。令 $\mathrm{A} = \langle \mathrm{A}_0 \setminus \{\mathbb{0}\} \times \mathrm{A}_1 \setminus \{\mathbb{0}\}\rangle$为由积生成的代数，令 $\mathrm{A} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{A}_0 \setminus \{\mathbb{0}\} \times \mathrm{A}_1 \setminus \{\mathbb{0}\})$为由积生成的完备布尔代数。再假设 A_0 中存在一个极大反链 $(a_n\colon\ n \in \omega)$，使得 $\sum_n \mu_0(a_n) \leq \frac{1}{4}$（例如，当 A_0 是 Cohen代数 C 时，这一条件成立）；并且存在 $(b_n\colon\ n \in \omega)$，使得 $\mu_1(b_n) \geq \frac{1}{2}$，且只要 $c' \leq \sum_n (a_n, b_n) \in \bar{}\mathrm{A}$ 属于 A，就存在 n_0，使得 $c' \leq \sum_{n<n_0} (a_n, b_n)$（例如，若随机代数 $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}$ 中的 b_n 是测度为 1 2 的独立元素，这一条件就成立）。特别地，$c \coloneqq \sum_n (a_n, b_n) \in \bar{}\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}$。令 μ 为由 μ_0 和 μ_1 诱导的 A 上的（唯一）测度。那么 $\tilde{\mu}(c) \leq \frac{1}{4}$，其中 $\tilde{\mu}$ 按引理 14 或主引理 19 的证明中的方式由 μ 定义。

¯另一方面，如果我们将 A 看作两步迭代，先添加 A_0-泛型，再添加 A_1-泛型，那么 c 可以识别为形如 $(1, \dot{b})$ 的条件（其中 $a_n \Vdash \dot{b} = b_n$），显然 $\int_{\mathbb{1}} \dot{\tilde{\mu}}_1(\dot{b}) d\mu_0 \geq \frac{1}{2}$。因此 $\tilde{\mu}(c) < \int_{\mathbb{1}} \dot{\tilde{\mu}}_1(\dot{b}) d\mu_0$。

¯此外，如果我们反过来将 A 看作两步迭代，先添加 A_1-泛型，再添加 A_0-泛型，那么 c形如 $(b, \dot{a})$，其中 $b = \sum_n b_n$，显然 $\int_b \dot{\tilde{\mu}}_0(\dot{a}) d\mu_1 \leq \frac{1}{4}$。特别是，如果我们将 $\tilde{\mu}(c)$ 调整为 $\bar{\mu}(c) = \int_{\mathbb{1}} \dot{\tilde{\mu}}_1(\dot{b}) d\mu_0$（正如我们在主引理 19 的证明中所做的那样），就会失去另一侧的相干性。⊣

最后这个论证说明，在主引理 19 的证明中，我们只能希望对满足 $i \vee j$ 存在于 I 中的成对对象 i、$j \in I$ 保持相干性，例如 i、j 都来自 $L \setminus$ 核 (I)，或 i、j 都来自 $R \setminus$ 核 (I)（参见断言 19.3 证明中的单调性论证）；这也是我们只对纯对考虑商测度的原因。

¯主引理 20（带 B 的迭代中的相干性）。假设 $\mathrm{A} = \langle \mathrm{A}_i\colon\ i \in I\rangle$ 携带一个相干系统$\langle \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{A}}\colon\ (i,j) \in$纯$(I)\rangle$ 的测度。则 $\bar{}\mathrm{E} = \langle \mathrm{E}_i\colon\ i \in I\rangle$ 携带一个相干系统 $\langle \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\colon\ (i,j) \in$纯$(I)\rangle$ 的测度，其中我们令 $\mathrm{E}_i = \mathrm{A}_i \star \mathrm{B}_\kappa$。若将 B 替换为 B_κ，这仍然成立。

证明。设 $i < j$是 I的元素，且 $(i,j) \in$纯(I)。假设我们有条件 $q_i = (p_i, b_i) \in \mathrm{A}_i \star \mathrm{B} = \mathrm{E}_i$和 $q_j = (p_j, \dot{b}_j) \in \mathrm{A}_j \star \mathrm{B} = \mathrm{E}_j$，使得 $h_{ji}^{\mathbb{E}}(q_j) = q_i$，特别是 $h_{ji}^{\mathbb{A}}(p_j) = p_i$。（照例，我们在此要求使得 $p_i \Vdash \mu(b_i) > 0$，从而有 $h_{\mathbb{E}_i}\mathrm{A}_i(q_i) = p_i$。用 j 代替 i时同理。）于是我们也有 $\dot{p}_{ij} \in \mathrm{A}^{ij}$和 $\dot{q}_{ij} \in \mathrm{E}^{ij}$，使得 $p_j = (p_i, \dot{p}_{ij})$ 且 $q_j = (q_i, \dot{q}_{ij})$。我们定义

$$\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) = \lim_{\dot{c}_i \leq \dot{b}_i, \dot{\mu}^{\mathbb{B}}(\dot{c}_i) \to 0, \dot{c}_i \in \dot{G}_i^{\mathbb{B}}} \int_{\dot{p}_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap \dot{c}_i\right)}{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{c}_i\right)} d\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{A}}$$

其中 $\dot{\mu}^{\mathbb{B}}$ 表示随机代数上的标准测度（的名称）。也就是说，我们沿着 A_i-泛型扩张中的 B-泛型滤子 $\dot{G}_i^{\mathbb{B}}$取极限。当然，在这个扩张中，这个表达式会更清楚，p_i 属于泛型；从现在起我们就这样做。

我们首先需要论证这一定义良好，也就是说，极限存在。

命题 20.1。 给定任意 $c_i \leq b_i$、$\epsilon > 0$ 和 $r \in [0,1]$，存在 $d_i \leq c_i$，使得要么对所有 $e_i \leq d_i$，

$$\int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(e_i)} d\mu_{ij}^{\mathbb{A}} \leq r + \epsilon$$

要么对所有 $e_i \leq d_i$，

$$\int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(e_i)} d\mu_{ij}^{\mathbb{A}} \geq r - \epsilon.$$

证明。假设这不成立。那么存在 $c_i \leq b_i$、$\epsilon > 0$ 和 $r \in [0,1]$，使得对于所有 $d_i \leq c_i$，都存在 e_i、$e_i' \leq d_i$，满足

$$\int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(e_i)} d\mu_{ij}^{\mathbb{A}} > r + \epsilon$$

and

$$\int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e'_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(e'_i)} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} < r - \epsilon.$$

因此，我们得到 c_i 下方的极大反链 $\{e_{i,n} : n \in \omega\}$ 和 $\{e'_{i,n} : n \in \omega\}$，满足这些不等式。于是我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap c_i\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} &= \int_{p_{ij}} \left(\sum_n \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right)\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_n \left(\int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij}\right) \\
&> \sum_n \mu^{\mathbb{B}}(e_{i,n})(r+\epsilon) = \mu^{\mathbb{B}}(c_i)(r+\epsilon)
\end{aligned}$$

and

$$\int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap c_i\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} = \int_{p_{ij}} \sum_n \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e'_{i,n}\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} < \mu^{\mathbb{B}}(c_i)(r-\epsilon),$$

一个矛盾。

不过，有必要对上一段中关于交换 $\sum$ 和 $\int$ 的等式 (1) 作一点说明。当然，对于 σ-可加测度，这一点是成立的；但对于一般的有限可加测度，这并不成立，只能证明不等式 $\geq$ 成立[4]。要看出反向不等式 $\leq$ 在上文中也成立，可按如下步骤进行。

固定 m_0 和 $k_0 < 2^{m_0}$，并考虑

$$p = p_{ij} \cdot \left[\!\!\left[\frac{k_0+1}{2^{m_0}} \geq \sum_n \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{k_0}{2^{m_0}} \right]\!\!\right].$$

只需证明

$$\sum_n \int_p \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \geq \mu^{\mathbb{A}}_{ij}(p) \cdot \frac{k_0}{2^{m_0}}. \tag{2}$$

设 $\epsilon > 0$。则存在 n_0 使得

$$p \Vdash_{ij} \sum_{n<n_0} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{k_0}{2^{m_0}} - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

这由测度 $\mu^{\mathbb{B}}$ 在 B 上的 σ-可加性以及 $e_{i,\ n}$ 不是名称这一事实得出。取$m_1 \geq m_0$ 使得 $\frac{n_0}{2^{m_1}} < \frac{\epsilon}{2}$。我们将证明

$$\sum_{n<n_0} \sum_{k<2^{m_1}} \left[\mu^{\mathbb{A}}_{ij}\left(p \cdot \left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^{m_1}} \geq \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{k}{2^{m_1}} \right]\!\!\right]\right) \cdot \frac{k}{2^{m_1}}\right] \geq \left(\mu^{\mathbb{A}}_{ij}(p) \cdot \frac{k_0}{2^{m_0}}\right) - \epsilon \tag{4}$$

这就推出（2），因为 ϵ 是任意的。对于 $f : n_0 \to 2^{m_1}$ 令

$$p_f = p \cdot \prod_{n<n_0} \left[\!\!\left[\frac{f(n)+1}{2^{m_1}} \geq \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{f(n)}{2^{m_1}} \right]\!\!\right]. \tag{5}$$

显然

$$\sum_{n<n_0} \sum_{k<2^{m_1}} \left[\mu^{\mathbb{A}}_{ij}\left(p \cdot \left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^{m_1}} \geq \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{k}{2^{m_1}} \right]\!\!\right]\right) \cdot \frac{k}{2^{m_1}}\right] = \sum_{f:n_0 \to 2^{m_1}} \left(\mu^{\mathbb{A}}_{ij}(p_f) \sum_{n<n_0} \frac{f(n)}{2^{m_1}}\right). \tag{6}$$

[4] 要理解这一点，请注意，若 $a \in \mathrm{A}$ 和 $\dot{x}_n$ 是实数的 A-名称，且满足 $a \Vdash$ “$0 \leq \dot{x}_n, \sum_n \dot{x}_n \leq 1$”，那么

$$\sum_{k<2^m} \left[\mu\left(a \cdot \left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^m} \geq \sum_n \dot{x}_n > \frac{k}{2^m} \right]\!\!\right]\right) \cdot \frac{k}{2^m}\right] \geq \sum_n \sum_{k<2^m} \left[\mu\left(a \cdot \left[\!\!\left[\frac{k+1}{2^m} \geq \dot{x}_n > \frac{k}{2^m} \right]\!\!\right]\right) \cdot \frac{k}{2^m}\right]$$

对所有 m。

然而，根据 (3) 和 (5)，

$$p_f \Vdash_{ij} \frac{\left(\sum_{n<n_0} f(n)\right)+n_0}{2^{m_1}} \geq \sum_{n<n_0} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap e_{i,n}\right) > \frac{k_0}{2^{m_0}} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Thus

$$\sum_{n<n_0} \frac{f(n)}{2^{m_1}} > \frac{k_0}{2^{m_0}} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{n_0}{2^{m_1}} > \frac{k_0}{2^{m_0}} - \epsilon$$

and

$$\sum_{f:n_0\to 2^{m_1}} \left(\mu_{ij}^{\mathbb{A}}(p_f) \sum_{n<n_0} \frac{f(n)}{2^{m_1}}\right) > \sum_{f:n_0\to 2^{m_1}} \mu_{ij}^{\mathbb{A}}(p_f)\cdot\left(\frac{k_0}{2^{m_0}}-\epsilon\right) = \mu_{ij}^{\mathbb{A}}(p)\left(\frac{k_0}{2^{m_0}}-\epsilon\right)$$

正如所要求的（见 (4) 和 (6)）。

这就完成了命题 20.1 的证明。 □

我们继续证明主引理 20。

将 $[0,1]$ 划分为有限个足够小的区间，并反复应用该断言，我们可知，对所有 $c_i \leq b_i$ 和所有 $\epsilon>0$，都存在 $d_i \leq c_i$ 和 $r\in[0,1]$，使得对所有 $e_i \leq d_i$,

$$\left|\int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\cap e_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(e_i)} d\mu_{ij}^{\mathbb{A}} - r\right| < \epsilon.$$

然而，由稠密性可知，这仅意味着沿泛型滤子 $\dot{G}_i^{\mathbb{B}}$的极限序数存在 .

Befor在继续证明之前，我们来确认交换性成立，即

$$\int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\right) d\mu_{ij}^{\mathbb{A}} = \int_{b_i} \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}}$$

. . 其中 $(p_{ij}, b_j) = (b_i, \dot{q}_{ij})$。注意，$\mathbf{A}_{ij}\star\mathbf{B} \cong \mathbf{B}\star \dot{\mathbf{E}}^{ij}$。（我们仍在 $\mathbf{A}_i$-扩张中。）根据上文，给定 $\epsilon>0$ 和 $c_i\leq b_i$，存在 $d_i\leq c_i$ 使得

$$d_i \Vdash_{\mathbb{B}} \left|\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) - \int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\cap d_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(d_i)} d\mu_{ij}^{\mathbb{A}}\right| < \epsilon$$

这意味着

$$\left|\int_{d_i} \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}} - \int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\cap d_i\right) d\mu_{ij}^{\mathbb{A}}\right| < \epsilon\cdot\mu^{\mathbb{B}}(d_i).$$

令 $\{d_{i,n}:\ n\in\omega\}$ 为 b_i 下具有此性质的条件的极大反链。那么

$$\begin{aligned}
\left|\int_{b_i} \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}} - \int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\right) d\mu_{ij}^{\mathbb{A}}\right| &= \left|\sum_n \int_{d_{i,n}} \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}} - \int_{p_{ij}} \left(\sum_n \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\cap d_{i,n}\right)\right) d\mu_{ij}^{\mathbb{A}}\right| \\
&\leq \sum_n \left|\int_{d_{i,n}} \dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}} - \int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j\cap d_{i,n}\right) d\mu_{ij}^{\mathbb{A}}\right| \\
&< \sum_n \epsilon\cdot\mu^{\mathbb{B}}(d_{i,n}) = \epsilon\cdot\mu^{\mathbb{B}}(b_i) \leq \epsilon
\end{aligned}$$

这里我们再次利用在该断言的证明中确立的事实：可以在右侧项中互换 $\sum$ 和 $\int$。由于这对每个 ϵ都成立，交换性便得证。

显然，$\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}(0)=0$ 和 $\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}(1)=1$ 是必然成立的，我们来证明测度 $\dot{\mu}_{ij}^{\mathbb{E}}$ 是有限可加的。（我们仍在 $\mathbf{A}_i$-扩张中工作，并像之前一样使用 $\mathbf{B}\star\dot{\mathbf{E}}_{ij}\cong\mathbf{A}_{ij}\star\dot{\mathbf{B}}$。）令 $b_i\in\mathbf{B}$ 和 $\dot{q}_{ij}^{\ell}\in\dot{\mathbf{E}}^{ij}$, $\ell=0,1$，使得 $b_i\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\dot{q}_{ij}^0$ 和 $\dot{q}_{ij}^1$ 不相容。”令 $p_{ij}^{\ell}\in\mathbf{A}^{ij}$ 和 $\dot{b}_j^{\ell}\in\dot{\mathbf{B}}$，使得 $(b_i,\dot{q}_{ij}^{\ell}) = (p_{ij}^{\ell},\dot{b}_j^{\ell})$。由于

$(b_i, \dot{q}^\ell_{ij})$ 不相容，因此 $(p^\ell_{ij}, \dot{b}^\ell_j)$ 也不相容。因此 $p^0_{ij} \cdot p^1_{ij} \Vdash_{ij} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}(\dot{b}^0_j \cap \dot{b}^1_j) = 0$。此外，我们自然也有 $\mathbb{1} - p^\ell_{ij} \Vdash_{ij} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}(\dot{b}^\ell_j) = 0$。于是

$$p^0_{ij} + p^1_{ij} \Vdash_{ij} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^0_j \cup \dot{b}^1_j\right) = \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^0_j\right) + \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^1_j\right)$$

以及, cl 早期, $(b_i, \dot{q}^0_{ij} + \dot{q}^1_{ij}) = (p^0_{ij} + p^1_{ij}, \dot{b}^0_j \cup \dot{b}^1_j)$。令 $p_{ij} = p^0_{ij} + p^1_{ij}$和 $\dot{b}_j = \dot{b}^0_j \cup \dot{b}^1_j$。因此 e

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}\left(\dot{q}^0_{ij} + \dot{q}^1_{ij}\right) &= \lim_{c_i \le b_i, \mu^{\mathbb{B}}(c_i) \to 0, c_i \in \dot{G}^{\mathbb{B}}_i} \int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap c_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(c_i)} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \\
&= \lim \int_{p_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^0_j \cap c_i\right) + \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^1_j \cap c_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(c_i)} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \\
&= \lim \int_{p^0_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^0_j \cap c_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(c_i)} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} + \lim \int_{p^1_{ij}} \frac{\dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}^1_j \cap c_i\right)}{\mu^{\mathbb{B}}(c_i)} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \\
&= \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}\left(\dot{q}^0_{ij}\right) + \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}\left(\dot{q}^1_{ij}\right).
\end{aligned}$$

为说明严格正性，我们再次取一个条件 $(b_i, \dot{q}_{ij}) = (p_{ij}, b_j) \in \mathrm{B} \star \mathrm{E}^{ij} = \mathrm{A}_{ij} \star \mathrm{B}$。特别是，这种表示意味着我们假设 $h^{\mathbb{E}}_{ji}(p_{ij}, \dot{b}_j) = h^{\mathbb{E}}_{ji}(b_i, \dot{q}_{ij}) = b_i$，因为 $b_i \Vdash_{\mathbb{B}} \dot{q}_{ij} > \mathbb{0}$。反设对于某个 $c_i \le b_i$, $c_i \Vdash_{\mathbb{B}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}(\dot{q}_{ij}) = 0$。根据交换性,

$$\int_{p_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_j \cap c_i\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} = \int_{c_i} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}\left(\dot{q}_{ij}\right) d\mu^{\mathbb{B}} = 0$$

因此 $p_{ij} \Vdash_{ij} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}(\dot{b}_j \cap c_i) = 0$, 这与 $h^{\mathbb{E}}_{ji}(p_{ij}, \dot{b}_j) = b_i$ 矛盾。

接下来我们证明相干性 (B)。假设 $i < j < k$ 是 I 中的元素，且 $(i,k) \in$ 纯(I)。（我们仍在 中工作，即 A_i-扩张。）我们有 $b_i \Vdash_{\mathbb{B}} \dot{q}_{ik} = (\dot{q}_{ij}, \dot{q}_{jk}) \in \mathrm{E}_{ik} = \mathrm{E}_{ij} \star \mathrm{E}^{jk}$。存在 p_{ik}, p_{ij} 和 b_k, b_j，使得 $(p_{ik}, b_k) = (b_i, \dot{q}_{ik})$，且 $(p_{ij}, b_j) = (b_i, \dot{q}_{ij})$。此外，还存在 $\dot{p}_{jk}$，使得 $p_{ik} = (p_{ij}, \dot{p}_{jk})$。现在，对于任意 $c_i \le b_i$，由交换性,

$$\int_{p_{ik}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_k \cap c_i\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ik} = \int_{c_i} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ik}\left(\dot{q}_{ik}\right) d\mu^{\mathbb{B}}$$

以及

$$\begin{aligned}
\int_{p_{ik}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_k \cap c_i\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{ik} &= \int_{p_{ij}} \int_{\dot{p}_{jk}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_k \cap c_i\right) d\dot{\mu}^{\mathbb{A}}_{jk} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} \\
&= \int_{p_{ij}} \int_{\dot{b}_j \cap c_i} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{jk}\left(\dot{q}_{jk}\right) d\dot{\mu}^{\mathbb{B}} d\mu^{\mathbb{A}}_{ij} = \int_{c_i} \int_{\dot{q}_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{jk}\left(\dot{q}_{jk}\right) d\dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij} d\mu^{\mathbb{B}}
\end{aligned}$$

其中，第一个等式是将系统 A 的相干性应用于积分（观察 18 (iii)）得到的，另外两个等式则仍由交换性得出。由于这对任意 $c_i \le b_i$ 都成立，我们得到

$$b_i \Vdash_{\mathbb{B}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ik}(\dot{q}_{ik}) = \int_{\dot{q}_{ij}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{jk}(\dot{q}_{jk}) d\dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{ij}$$

正如所需。

最后，我们证明正确性（C）。设 i、$j \in I$ 不可比，且存在 $i \vee j$，并在 $\mathrm{A}_{i\wedge j}$-扩张中进行讨论。令 $b_{i\wedge j} \in \mathrm{B}$，并令 $\dot{q}_{i\wedge j}$、$_i$ 为 $\mathrm{E}_{i\wedge j}$、$_i$ 中某个条件的 B-名称。置 $b_j = b_{i\wedge j}$，并将其 视为 $\mathrm{A}_{i\wedge j}$、$_j \star \mathrm{B} = \mathrm{B} \star \mathrm{E}_{i\wedge j}$、$_j$ 中的一个条件，同时将 $\dot{q}_{i\wedge j}$、$_i$ 与一个 $\mathrm{A}_{i\wedge j}$、$_j \star$ B-名称 $\dot{q}_j$、$_{i\vee j} \in \mathrm{E}_j$、$_{i\vee j}$ 视为相同。存在一个条件 $p_{i\wedge j}$、$_i = p_j$、$_{i\vee j} \in \mathrm{A}_{i\wedge j}$、$_i$ 以及一个 $\mathrm{A}_{i\wedge j}$、$_i$-名称 $b_i = b_{i\vee j}$，使得 $(p_{i\wedge j}$、$_i$、$b_i) = (b_{i\wedge j}$、$\dot{q}_{i\wedge j}$、$_i)$，且 $(p_j$、$_{i\vee j}$、$b_{i\vee j}) = (b_j$、$\dot{q}_j$、$_{i\vee j})$。对于任意 $c_{i\wedge j} \le b_{i\wedge j}$，由交换性可得,

$$\int_{p_{i\wedge j,i}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_i \cap c_{i\wedge j}\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{i\wedge j,i} = \int_{c_{i\wedge j}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{i\wedge j,i}\left(\dot{q}_{i\wedge j,i}\right) d\mu^{\mathbb{B}}$$

and

$$\int_{p_{j,i\vee j}} \dot{\mu}^{\mathbb{B}}\left(\dot{b}_{i\vee j} \cap c_{i\wedge j}\right) d\mu^{\mathbb{A}}_{j,i\vee j} = \int_{c_{i\wedge j}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{j,i\vee j}\left(\dot{q}_{j,i\vee j}\right) d\mu^{\mathbb{B}}.$$

然而，根据系统 $\bar{}$A 的积分正确性（观察 18 (iv)），左侧的两个积分相同，因此右侧的两个积分也相同。由于这对任意 $c_{i\wedge j} \leq b_{i\wedge j}$ 都成立，我们得到

$$b_{i\wedge j} \Vdash_{\mathbb{B}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{j,i\vee j}(\dot{q}_{i,i\vee j}) = \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{i\wedge j,i}(\dot{q}_{i\wedge j,i})$$

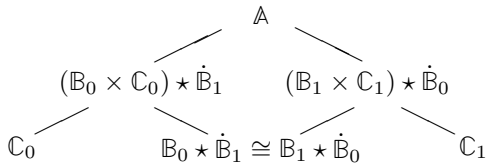
如所要求的。

这就完成了主引理 20 的证明。 □

4 科恩强迫的碎裂迭代

本节我们证明主定理 A。设 $\kappa < \lambda$ 是不可数正则基数。我们将它们视为彼此不相交，并用 $\kappa \dot{\cup} \lambda$ 表示它们的不交并。对于序数 $\zeta < \xi$、$[\zeta, \xi) = \{\zeta' : \zeta \leq \zeta' < \xi\}$ 表示相应的序数区间。

首先介绍一些启发性想法，说明为什么在我们的语境中要使用粘合（以及粘合极限）。为了保证 cov($\mathcal{N}$) $= \lambda$，我们计划添加 λ 个随机实数，出于技术原因由 $\mathrm{B}_{\kappa \dot{\cup} \lambda}$ 添加入，这可以看作我们迭代的基本步骤。为了将 cov($\mathcal{M}$) 增大到 κ，我们接着会开始添加 κ 个科恩实数 $c_{\zeta,\eta}$，对任意一对 $(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$ 都如此；添加过程将以这样的方式进行：由 $\mathrm{C}_{\zeta,\eta}$ 添加的 $c_{\zeta,\eta}$ 在 $V\mathrm{B}^{\zeta \dot{\cup} \eta}$ 上是科恩实数，也就是说，它们是在随机实数的某个初始段上添加的；与此同时，其余的随机实数，即由 $\mathrm{B}_{[\zeta,\kappa) \dot{\cup} [\eta,\lambda)}$ 添加的那些，在 $V\mathrm{B}_{\zeta \dot{\cup} \eta} * \dot{\mathrm{C}}_{\zeta,\eta}$ 上仍然是随机的。请注意，形如 $\zeta \dot{\cup} \eta$ 和 $\zeta' \dot{\cup} \eta'$ 的集合一般互不包含，因此我们将遇到的基本构造块如下：有随机实数 b_0、b_1 和科恩实数 c_0、c_1，使得 c_i 在 b_i 上是科恩实数，而 b_i 在 c_{1-i} 上是随机实数。将 B_i 和 C_i 记作相应的强迫概念，我们得到如下图表



其中粘合 $\mathrm{A} = \mathrm{amal}_{\mathbb{B}_0 * \dot{\mathbb{B}}_1}((\mathrm{B}_0 \times \mathrm{C}_0) * \mathrm{B}_1, (\mathrm{B}_1 \times \mathrm{C}_1) * \mathrm{B}_0)$ 自然地产生。为了理解这张图表，请回想随机性具有可交换性；也就是说，如果 b_1 在 $V[b_0]$上是随机的，那么 b_0 在 $V[b_1]$ [Ku1], 上也是随机的；并且，由于科恩强迫就是使用有限部分函数进行的强迫，使用迭代 $\mathrm{P} * \mathrm{C}$ 进行强迫等价于使用积 $\mathrm{P} \times \mathrm{C}$ 进行强迫。

积 $\kappa \times \lambda$ 自然地带有偏序，定义为：若 $\zeta \leq \xi$ 且 $\eta \leq \theta$，则 $(\zeta, \eta) \leq (\xi, \theta)$。因此，$(\zeta, \eta) < (\xi, \theta)$ 意味着 $\zeta \leq \xi$, $\eta \leq \theta$，并且 $\zeta < \xi$ 或 $\eta < \theta$。注意，该偏序的交和并分别为 $(\zeta, \eta) \wedge (\xi, \theta) = (\zeta \cap \xi, \eta \cap \theta)$ 和 $(\zeta, \eta) \vee (\xi, \theta) = (\zeta \cup \xi, \eta \cup \theta)$。另请注意，$\leq$ 在 $\kappa \times \lambda$上是良基的。这一点至关重要，因为我们使用这一序关系来递归定义迭代。若一对 $((\zeta, \eta), (\xi, \theta))$ 满足 $(\zeta, \eta) \leq (\xi, \theta)$，且 $\zeta = \xi$ 或 $\eta = \theta$，则称其为纯。对于 $(\xi, \theta) \in \kappa \times \lambda$，令

$$\begin{aligned} I_{\xi,\theta} &= \{(\zeta, \eta) : (\zeta, \eta) < (\xi, \theta)\}, \\ J_{\xi,\theta} &= \{(\zeta, \eta) : (\zeta, \eta) \leq (\xi, \theta)\}. \end{aligned}$$

观察 21。（i）所有 $J_{\xi,\,\theta}$ 以及 $I_{\xi,\,\theta}$（其中 $\xi = 0$ 或 $\theta = 0$）都是格。此外，Pure($J_{\xi,\,\theta}$) $=\{((\zeta, \eta), (\zeta', \eta')) : (\zeta, \eta), (\zeta', \eta') \in J_{\xi,\,\theta}$，且该对对于 $\xi > 0$ 和 $\theta > 0$ 是纯的$\}$。

（ii）对于 $\xi > 0$ 和 $\theta > 0$，$I_{\xi,\theta}$ 是良好分配几乎格，且其 ker($I_{\xi,\theta}$) $= \{(\zeta, \eta) : \zeta < \xi$ 和 $\eta < \theta\}$, $L(I_{\xi,\theta}) = \{(\zeta, \eta) : \zeta < \xi$ 和 $\eta \leq \theta\}$，并且 $R(I_{\xi,\theta}) = \{(\zeta, \eta) : \zeta \leq \xi$ 和 $\eta < \theta\}$。此外，Pure($I_{\xi,\theta}$) $= \{((\zeta, \eta), (\zeta', \eta')) : (\zeta, \eta), (\zeta', \eta') \in I_{\xi,\theta}$，且该对是纯的$\}$。

证明. (i) 很容易看出这些集合是格。要证明任意来自 $J_{\xi,\theta}$ 的纯对都属于 Pure($J_{\xi,\theta}$)，注意根据定义4中的 (2)(a)，对于形如 $((\zeta, \eta), (\zeta, \eta))$ 的纯对，这显然成立。假设 $((\zeta, \eta), (\zeta', \eta))$ 是满足 $\zeta < \zeta'$ 的纯对。若 $\eta = 0$，注意 (ζ, θ) 和 $(\zeta', 0)$ 不可比，且 $(\zeta, 0) = (\zeta, \theta) \wedge (\zeta', 0)$。若 $\eta > 0$，注意 $(\zeta', 0)$ 和 (ζ, η) 不可比，且 $(\zeta', \eta) = (\zeta', 0) \vee (\zeta, \eta)$。因此，根据 (2)(b)，$((\zeta, \eta), (\zeta', \eta)) \in$ Pure($J_{\xi,\theta}$)。对于形如 $((\zeta, \eta), (\zeta, \eta'))$ 的纯对，证明类似。另一方面，若 $((\zeta, \eta), (\zeta', \eta')) \in$ Pure($J_{\xi,\theta}$)，根据 (2)(a)、(b) 或 (c)，必有 $\zeta = \zeta'$ 或 $\eta = \eta'$，或者二者皆有。

(ii) 显然，$I_{\xi,\,\theta}$ 是一个分配几乎格，而 ker、L 和 R 的刻画也很明显。为说明其良好性，设 $(\zeta, \eta) < (\zeta', \eta')$ 都来自 $I_{\xi,\theta} \setminus$ ker($I_{\xi,\theta}$)，不失一般性，(ζ, η)、$(\zeta', \eta') \in L(I_{\xi,\theta}) \setminus$ker($I_{\xi,\theta}$)。因此，$\eta = \eta' = \theta$ 且 $\zeta < \zeta' < \xi$。于是我们看到，$(\zeta', 0)$ 与 (ζ, θ) 不可比，且 $(\zeta, \theta) \vee (\zeta', 0) = (\zeta', \theta)$。关于 Pure($I_{\xi,\theta}$) 的论证与 Pure($J_{\xi,\theta}$) 的论证完全相同。 □

我们注记，对于 $I_{0,\theta}$ 和 $I_{\xi,0}$，纯对的集合是平凡的；相应的 J's 也同样如此。

定义 6. 通过对 $(\zeta,\eta) \in \kappa\times\lambda$ 进行递归，我们定义强迫概念 $\left\langle \dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\eta}\colon \zeta<\kappa, \eta<\lambda\right\rangle$ 的碎裂迭代 $\left\langle \mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta\ \eta},,: \zeta\le\xi<\kappa, \eta\le\theta<\lambda\right\rangle$ 如下：

(i) $\mathrm{E}_{0,0}$ 是基模型中的完备布尔代数，且 $\mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{0\ \ 0},,0 = \mathrm{E}_{0,0}\star \dot{\mathrm{B}}_{\xi\dot\cup\theta}$。

(ii) 对于 $(\zeta,\eta) > (0,0)$，我们先令 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}\,\mathrm{amal} = \mathrm{limamal}_{(\zeta_0,\eta_0)<(\zeta,\eta)}\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta_0\ \eta_0}$；$\dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\eta}$ 是一个完备布尔代数的 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ 名称，并令 $\mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta\ \ \eta},,\eta = \mathrm{A}^{\zeta,\eta}\,\mathrm{amal}\star \dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\eta}\star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta,\xi)\dot\cup[\eta,\theta)}$。

$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\lim} = \lim\mathrm{dir}_{(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda}\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta\ \eta}$，是碎裂迭代的直极限。 ⊣

首先，我们需要确认这个定义是合理的。事实上，要定义粘合极限，就需要相应的完备布尔代数系统具有完备嵌入和正确投影。因此，上述定义通过递归归纳给出，并同时对以下引理进行归纳证明。

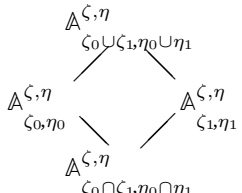
引理 22。 (i) 对于任意 $\zeta_0\le\zeta\le\xi$，$\zeta_0\le\xi_0\le\xi$，$\eta_0\le\eta\le\theta$，以及 $\eta_0\le\theta_0\le\theta$，我们有 $\mathbb{A}^{\xi_0,\eta_0}_{\zeta_0\ \ \eta_0,\eta_0} <\circ \mathbb{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta\ \eta},,$。

(ii) 系统 $\left\langle \mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta_0\ \eta_0}\colon (\zeta_0,\eta_0) < (\zeta,\eta)\right\rangle$ 和 $\left\langle \mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta_0\ \eta_0}\colon (\zeta_0,\eta_0) \le (\zeta,\eta)\right\rangle$ 具有正确投影。

证明。（i）和（ii）通过对 $(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda$ 进行同时归纳来证明。这里的每个阶段 (ζ,η) 都对应于定义 6 中的阶段 (ζ,η)。

$\underline{(\zeta,\eta) = (0,0)}$。无需证明。

$\underline{(\zeta,\eta) > (0,0)}$。根据归纳假设，我们假设对于任意 $(\zeta',\eta') < (\zeta,\eta)$，(i) 和 (ii) 的所有情形都成立。我们首先证明 (ii) 的前半部分。注意，根据 (i) 的归纳假设，系统 $\left\langle \mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta_0\ \eta_0}\colon (\zeta_0,\eta_0) < (\zeta,\eta)\right\rangle$具有完备嵌入。现在，设 (ζ_0,η_0)、(ζ_1,η_1) 满足 $(\zeta_0\cup\zeta_1,\eta_0\cup\eta_1) < (\zeta,\eta)$，并考虑图表



若将上标 (ζ,η) 替换为 $(\zeta_0\cup\zeta_1,\eta_0\cup\eta_1)$，则根据 (ii) 的归纳假设，我们有正确投影。不过请注意，对于任意下标 $(\zeta',\eta')\le(\zeta_0\cup\zeta_1,\eta_0\cup\eta_1)$，$\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta',\ \eta'} = \mathrm{A}^{\zeta_0\cup\zeta_1\ \eta_0\cup\eta_1}_{\zeta'\ \ \ ,,\eta'}\star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta_0\cup\zeta_1,\zeta)\dot\cup[\eta_0\cup\eta_1,\eta)}$。因此，上述图表的正确性可由引理 3 得出。

由此，$\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}\,\mathrm{amal}$ 以及所有 $\mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta\ \ \eta},,$确实都可以根据定义 6 来定义。

接下来证明 (i)。首先注意到，由于 $\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta\ \ \eta},\eta = \mathrm{limamal}_{(\zeta_0,\eta_0)<(\zeta,\ \eta)}\mathrm{A}^{\zeta,\ \eta}_{\zeta_0\ \eta_0}\star \dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\ \eta}$，根据主引理 8，

$$\mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta_0,\eta_0} <\circ \mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta,\eta} \tag{7}$$

对所有 $(\zeta_0,\eta_0) < (\zeta,\eta)$ 均成立。对于任意情形，请注意

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{\xi_0,\theta_0}_{\zeta_0,\eta_0} &\overset{(\mathrm{def})}{=} \mathbb{A}^{\zeta_0,\eta_0}_{\zeta_0,\eta_0}\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta_0,\xi_0)\dot\cup[\eta_0,\theta_0)} <\circ \mathbb{A}^{\zeta_0,\eta_0}_{\zeta_0,\eta_0}\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta_0,\xi)\dot\cup[\eta_0,\theta)}\\
&= \left(\mathbb{A}^{\zeta_0,\eta_0}_{\zeta_0,\eta_0}\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta_0,\zeta)\dot\cup[\eta_0,\eta)}\right)\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta,\xi)\dot\cup[\eta,\theta)} \overset{(\mathrm{def})}{=} \mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta_0,\eta_0}\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta,\xi)\dot\cup[\eta,\theta)}\\
&\overset{(7)}{<\circ} \mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta,\eta}\star\dot{\mathbb{B}}_{[\zeta,\xi)\dot\cup[\eta,\theta)} \overset{(\mathrm{def})}{=} \mathbb{A}^{\xi,\theta}_{\zeta,\eta},
\end{aligned}$$

如所需。

最后，注意到 (ii) 的后半部分现在可由引理 9 和观察 1 的 (iii) 得出。 □

引理 23。假设在定义 6 中，对于所有 $(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda$，$\mathrm{A}^{\zeta,\eta}\,\mathrm{amal}$ 强迫 $\dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\eta}$ 带有一个有限可加严格正测度（其中 $\mathrm{A}^{0,0}$ amal 是平凡迫迫）。那么，对于任意 $(\xi,\theta)\ge(\zeta,\eta)$，系统 $\left\langle \mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta_0\ \ \ ,,\eta_0}\colon (\zeta_0,\eta_0) < (\zeta,\eta)\right\rangle$ and $\left\langle \mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta_0\ \ \ ,,\eta_0}\colon (\zeta_0,\eta_0)\le(\zeta,\eta)\right\rangle$ 携带相容测度系 $\left\langle \dot\mu^{\xi,\theta}_{(\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1)}\colon((\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1))\in\text{纯}(I_{\zeta,\eta})\right\rangle$and $\left\langle \dot\mu^{\xi,\theta}_{(\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1)}\colon((\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1))\in\text{纯}(J_{\zeta,\eta})\right\rangle$。此外，所有 $\mathrm{A}^{\xi\ \theta}_{\zeta\ \ \eta},,$ 都携带有限可加严格正测度。

证明。对 (ζ,η) 进行归纳法。

$(\zeta,\eta) = (0,0)$。由于 $\mathrm{E}^{0,0}$ 具有有限可加严格正测度，因此两步迭代 $\mathrm{A}_0^{\xi\ \theta}{}_{,\ 0} = \mathrm{E}_{0,\ 0} \star \dot{\mathrm{B}}_{\xi\cup\theta}$ 也具有这种测度。

$(\zeta,0)$ 和 $(0,\eta)$，其中 $\zeta,\eta>0$。根据观察 21 的证明之后的注记，纯对的集合是平凡的。因此，我们只需证明 $\mathrm{A}_{\zeta\ 0}^{\xi\ \theta}$、$\mathrm{A}_{0}^{\xi\ \theta}{}_{\ \eta}$ 具有有限可加严格正测度。这可通过对 ζ（分别对 η）使用归纳法完成。$\zeta=0$ 是前一种情形。若 $\zeta=\zeta_0+1$ 是后继序数，则 $\mathrm{A}_{\zeta}^{\xi\ \theta}$、$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_{\zeta_0}^{\zeta\ 0}$、$\mathrm{E}_{\zeta,0} \star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta,\xi)\cup\theta}$；若 ζ 是极限序数，则 $\mathrm{A}_{\zeta}^{\xi\ \theta}$、$_0 = \Big(\mathrm{li}$ $\mathrm{m\ dir}_{\zeta_0<\zeta}\mathrm{A}_{\zeta_0}^{\zeta\ 0}$、$\mathrm{E}_{\zeta,0} \star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta,\xi)\cup\theta}$，于是我们便可根据归纳假设、$\mathrm{E}_{\zeta,0}$ 和 $\mathrm{B}_{[\zeta,\xi)\cup\theta}$ 上的测度，以及带有测度的完备布尔代数的直极限仍具有测度这一事实，得到该测度 [Ka, 2.6]。

$(\zeta,\eta) = (1,1)$。I_1,1 中的非平凡纯对是 $((0,0),(0,1))$ 和 $((0,0),(1,0))$。注意，$\mathrm{A}1\ 0\ 1,\ _0 = \mathrm{A}1\ 0\ 0,\ _0 \star \dot{\mathrm{E}}^{1,0}$ 因此 $\dot{\mathrm{A}}^{1,0}\ (0,0),(1,0) = \dot{\mathrm{E}}^{1,0}$，它在 $\dot{\mu}^1$,0 $(0,0),(1,0)$ 上给出一个测度。类似地，对于 $\dot{\mu}^0$,1 $(0,0),(0,1)$。主引理 20 为我们给出测度 $\dot{\mu}^1$,1 $(0,0),(1,0)$ 和 $\dot{\mu}^1$,1 $(0,0),(0,1)$。由主引理 19，我们得到测度 $\dot{\mu}^1$,1 $(0,1)$,amal 和 $\dot{\mu}^1$,1 $(1,0)$,amal，它们满足正确性 (C)；随后在 $\dot{\mathrm{A}}^{1,1}\ (0,1),(1,1) = \dot{\mathrm{A}}^{1,1}\ (0,1),\mathrm{amal} \star \dot{\mathrm{E}}^{1,1}$ 上得到测度 $\dot{\mu}^1$,1 $(0,1),(1,1)$，以及在 $\dot{\mathrm{A}}^{1,1}$ $(1,0),(1,1) = \dot{\mathrm{A}}^{1,1}\ (1,0),\mathrm{amal} \star \dot{\mathrm{E}}^{1,1}$ 上得到测度 $\dot{\mu}^1$,1 $(1,0),(1,1)$，因此正确性 (C) 得以平凡地保持。最后，再次应用主引理 20，为我们给出满足正确性 (C) 的测度 $\dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (0,1),(1,1)$ 和 $\dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (1,0),(1,1)$。例如，通过对 $\mathrm{A}_{1\ 0}^{\xi\ \theta}{}_{,\ ,}$ 上的测度进行迭代，并结合 $\dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (1,0),(1,1)$，我们可以在 $\mathrm{A}_{1\ 1}^{\xi\ \theta}{}_{,\ ,}$ 上得到一个测度。

$(\zeta,\eta) > (1,1)$。根据归纳假设，我们已经有了系统 $\left\langle \dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1) : ((\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1)) \in \text{纯}(I_{\zeta,\eta}) \right\rangle$ 测度，并且由于相干性 (B) 和正确性 (C) 是局部性质，该系统显然是相干且正确的。接下来，对于带有 $\zeta_0=\zeta$ 或 $\eta_0=\eta$ 的 $(\zeta_0,\eta_0) < (\zeta,\eta)$，我们从主引理 19 得到商代数 $\dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta_0)$,amal 上的测度 $\dot{\mu}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta_0)$,amal（满足 $\mathrm{A}^{\zeta}{}_{,\eta}$ amal $= \mathrm{A}^{\zeta}{}_{,\zeta_0}{}^{\eta}{}_{,\eta_0} \star \dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta_0)$,amal，见引理 11），从而保持相干性 (B) 和正确性 (C)。接下来，我们有 $\dot{\mathrm{E}}_{,\zeta}$ 上的测度 $\dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{\zeta,\eta}$。现在，对于两步迭代 $\dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta_0)$,amal $\star \dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\eta},\ \zeta_0=\zeta$ or $\eta_0=\eta$ 中的条件名称 $(\dot{p},\dot{q})$，只需定义

$$\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta_0),(\zeta,\eta)}(\dot{p},\dot{q}) = \int_{\dot{p}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{\zeta,\eta}(\dot{q})\ d\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta_0),\mathrm{amal}}.$$

这显然是一个有限可加严格正测度。为验证相干性 (B)，注意，对于 $(\zeta_0,\eta) < (\zeta_1,\eta) < (\zeta,\eta)$，现在记 $\dot{p}_{0,\mathrm{amal}} = (\dot{p}_0,1,\dot{p}_{1,\mathrm{amal}}) \in \dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta),\mathrm{amal} = \dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta),(\zeta_1,\eta) \star \dot{\mathrm{A}}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_1,\eta),\mathrm{amal}$，则有

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta),(\zeta,\eta)}(\dot{p}_{0,\mathrm{amal}},\dot{q}) &= \int_{\dot{p}_{0,\mathrm{amal}}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{\zeta,\eta}(\dot{q})\ d\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta),\mathrm{amal}} = \int_{\dot{p}_{0,1}} \left(\int_{\dot{p}_{1,\mathrm{amal}}} \dot{\mu}^{\mathbb{E}}_{\zeta,\eta}(\dot{q})\ d\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_1,\eta),\mathrm{amal}} \right) d\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta),(\zeta_1,\eta)} \\
&= \int_{\dot{p}_{0,1}} \dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_1,\eta),(\zeta,\eta)}(\dot{p}_{1,\mathrm{amal}},\dot{q})\ d\dot{\mu}^{\zeta,\eta}_{(\zeta_0,\eta),(\zeta_1,\eta)},
\end{aligned}$$

根据积分的相干性（观察 18 (iii)），这正是所需的。情形 $(\zeta,\eta_0) < (\zeta,\eta_1) < (\zeta,\eta)$ 类似。正确性的保持 (C) 是平凡的。因此，我们得到相容系统 $\left\langle \dot{\mu}^{\zeta}{}_{,\eta}\ (\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1) : ((\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1)) \in \text{纯}(J_{\zeta,\eta}) \right\rangle$；对于任意 $(\xi,\theta) > (\zeta,\eta)$，由主引理 20 的一次应用，现在可得相容系统 $\left\langle \dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1) : ((\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1)) \in \text{纯}(J_{\zeta,\eta}) \right\rangle$。通过对 $\mathrm{A}_{\zeta\ 0}^{\xi\ \theta}{}_{,\ ,}$ 上的测度进行迭代，并结合 $\dot{\mu}^{\xi}{}_{,\theta}\ (\zeta,0),(\zeta,\eta)$，我们得到 $\mathrm{A}_{\zeta\ \eta}^{\xi\ \theta}{}_{,\ ,}$ 上的一个测度。

□

推论 24。在引理 23 的假设下，$\mathrm{A}_{\lim}$ 具有有限可加严格正测度，因此满足可数链条件。

我们简单讨论一下迭代中某个坐标为 0 的部分是什么样的。设为 $\eta=0$。于是我们有 $\mathrm{A}^{\zeta}{}_{,\ 0\text{的合并}} =$ 极限序数 合并 $_{\zeta_0<\zeta}\mathrm{A}_{\zeta_0\ 0}^{\zeta\ 0}{}_{,\ ,}$。现在，如果 ζ 是极限序数，这就是直极限，

$$\mathbb{A}^{\zeta,0}_{\mathrm{amal}} = \lim \mathrm{dir}_{\zeta_0<\zeta} \mathbb{A}^{\zeta,0}_{\zeta_0,0} = \lim \mathrm{dir}_{\zeta_0<\zeta} \left(\mathbb{A}^{\zeta_0,0}_{\zeta_0,0} \star \dot{\mathbb{B}}_{[\zeta_0,\zeta)} \right),$$

且如果 $\zeta=\zeta_0+1$ 是后继序数，那么

$$\mathbb{A}^{\zeta,0}_{\mathrm{amal}} = \mathbb{A}^{\zeta,0}_{\zeta_0,0} = \mathbb{A}^{\zeta_0,0}_{\mathrm{amal}} \star \dot{\mathbb{E}}_{\zeta_0,0} \star \dot{\mathbb{B}}_{\{\zeta_0\}}.$$

因此我们可以看到，这与交替添加 $E_{\zeta,\,0}$-泛型和随机实数的有限支撑迭代有些相似；不同之处在于，在极限阶段，我们不取迭代初始阶段的直极限，而是取初始阶段的两步迭代与随机代数组合后的直极限。这是一个根本性的差异，因为这意味着，在具有可数余终性的极限阶段，将添加一个在所有初始扩张上均为随机的实数，而标准的随机强迫有限支撑迭代不会添加这样的实数 [BJ2, 定理 3.2。27]。当然，沿两个方向进行的迭代更加复杂，而且在这个一维迭代之上仍然存在许多随机实数，即在第二坐标中添加的那些实数 η。

我们已经可以证明主定理 A。我们采用碎裂迭代，其中所有迭代因子 $E_{\zeta,\,\eta}$ 都是科恩强迫 C。科恩强迫是可数的，因此特别是 σ-中心的，因而带有有限可加严格正测度，使得此前的所有结果都适用，并且该迭代确实满足可数链条件（推论 24）。此外，由于科恩强迫是绝对的，采用 C 的迭代与采用 C 的积相同，也就是说，我们有

$$\mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta,\eta} = \mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\mathrm{amal}} \star \dot{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\mathrm{amal}} \times \mathbb{C}$$

对任意 $(\zeta,\eta) \in \kappa\times\lambda$。我们用 $\dot{c}_{\zeta,\,\eta}$ 表示在阶段 (ζ,η) 添加的科恩实数的名称。类似地，阶段 $\zeta<\kappa$ （分别为 $\eta<\lambda$）的随机实数的名称为 $\dot{r}_\zeta$ （分别为 $\dot{r}_\eta$）。

我们需要计算与 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 相关的基数，但与第 2 节和第 3 节中的技术工作相比，这相当简单；其内容由以下四个事实给出，它们的证明都类似。

事实 25。在 A-泛型扩张中，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \geq \kappa$。

证明。令 $\nu<\kappa$，并假设 $\dot{B}_\alpha, \alpha<\nu$ 是 Borel 瘦集的 A-名称。由于 $\mathrm{A} = \operatorname{lim\,dir}_{(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda} \mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta}$，根据可数链条件，对于所有 $\alpha<\nu$，存在 $(\zeta_\alpha,\eta_\alpha)\in\kappa\times\lambda$，使得 $\dot{B}_\alpha$ 是一个 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}_{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}$-名称。由于 $\nu<\kappa, \lambda$ 以及后者都是正则的，我们可以找到 $\zeta>\zeta_\alpha$，并且对所有 $\alpha<\nu$ 都有 $\eta>\eta_\alpha$。因此，所有 $\dot{B}_\alpha$ 都是 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal-名称。由于 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta} = \mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal$\star\,\dot{\mathrm{C}}$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal-扩张之上添加了科恩实数 $\dot{c}_{\zeta,\eta}$，我们看到 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta}$，强迫对所有 $\alpha<\nu$，$\dot{c}_{\zeta,\eta} \notin \dot{B}_\alpha$。因此，瘦集理想不存在大小为 $<\kappa$ 的覆盖族。 □

事实 26。在 A-泛型扩张中，$\mathrm{non}(\mathcal{N}) \leq \kappa$。事实上，A 强制 $\{\dot{r}_\zeta\colon\ \zeta<\kappa\} \notin \mathcal{N}$。

证明。设 B 是一个博雷尔零测集的 A-名称。如同前一个证明，存在 $(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda$，使得 B 是一个 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta}$-名称。由于 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta}\star \mathrm{B}_{[\zeta,\kappa)\cup[\eta,\lambda)} <^\circ \mathrm{A}$，我们看到 A 强制 $\dot{r}_\zeta$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\zeta,\,\eta}$-扩张上是随机的，并且因此 $\dot{r}_\zeta \notin B$。 □

事实 27。在 A-泛型扩张中，$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \geq \lambda$。

证明。设 $\nu<\lambda$，并假设 B_α、$\alpha<\nu$是博雷尔零测集的 A-名称。同样，我们可以找到 $(\zeta_\alpha,\eta_\alpha)\in\kappa\times\lambda$、$\alpha<\nu$，使得 $\dot{B}_\alpha$ 是一个 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}_{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}$-名称。由 λ的正则性，存在 $\eta<\lambda$，使得对所有 $\alpha<\nu$都有 $\eta_\alpha<\eta$。如同前一个证明，这意味着 A 强制 $\dot{r}_\eta$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}_{\zeta_\alpha,\,\eta_\alpha}$-扩张上是随机的，并且因此，对于任意 $\alpha<\nu$，$\dot{r}_\eta \notin \dot{B}_\alpha$。所以，零测理想的任何覆盖族都不可能具有 $<\lambda$的大小。 □

事实 28. 在 A-泛型扩张中，$\mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq \lambda$。事实上，A 强迫 $\{\dot{c}_{\zeta,\eta}\colon\ \zeta<\kappa, \eta<\lambda\} \notin \mathcal{M}$。

证明。令 $\dot{B}$ 为一个 Borel 瘦集的 A-名称。再一次，存在 $(\zeta,\eta)\in\kappa\times\lambda$，使得 $\dot{B}$ 是一个 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\mathrm{amal}}$-名称；我们看到，A 强迫 $\dot{c}_{\zeta,\,\eta}$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\mathrm{amal}}$-扩张上是科恩泛型，因此强迫 $\dot{c}_{\zeta,\,\eta} \notin \dot{B}$。 □

利用 ZFC 不等式 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$（[BJ2，定理 2.1。7], 另见引言），我们推得 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \kappa$，且 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) = \lambda$，主定理 A 的证明至此完成。

5 碎裂迭代的保持结果

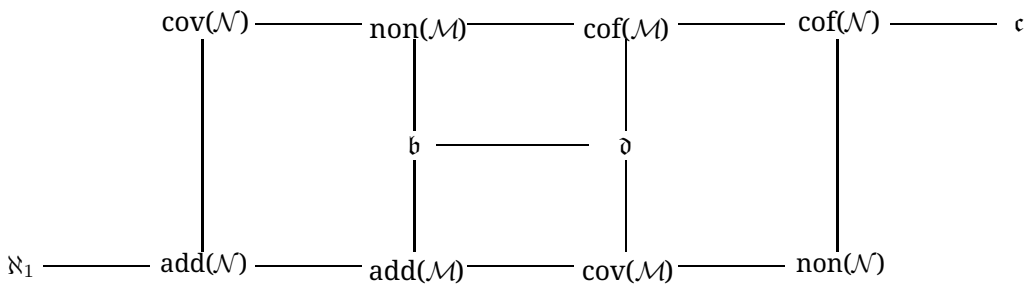
迭代强迫构造的保持结果，是指这样的定理：如果迭代的初始阶段或其商满足某种性质，那么整个迭代也满足该性质。关于经典迭代技巧（如有限支撑迭代和可数支撑迭代），已有大量保持结果（尤其参见 [BJ2，第 6], [Go], 和 [Sh2] 章），其中最初的结果分别是对前者可数链条件的保持，以及对后者适当性的保持。遗憾的是，关于碎裂迭代的保持性质，我们所知甚少，这与粘合极限构造有关（参见第 3 节开头的讨论）。

一个重要结果是有限可加可测性的保持；与其他保持定理一样，这一结果的影响不止于可数链条件的保持，正如我们接下来将看到的。

设 $\mathcal{I}$ 是实数集上的一个非平凡 σ-理想（“非平凡”是指对于所有 $x \in \mathrm{R}$ 和 $\mathrm{R} \notin \mathcal{I}$，都有 $\{x\} \in \mathcal{I}$）。定义

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ 和 $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}\}$，即 $\mathcal{I}$ 的可加性，以及
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) := \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$，且对于所有 $A \in \mathcal{I}$，都存在 $B \in \mathcal{F}$ 使得 $A \subseteq B\}$，即 $\mathcal{I}$ 的共尾性。

显然，对于任意非平凡 σ-理想，都有 $\aleph_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I})$,$\mathrm{non}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$；此外，$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M})\ \mathfrak{b}\}$，且 $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M})\ \mathfrak{d}\}$ [BJ2，推论 2.2.9 和定理 2.2.11],；还有 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$，以及 $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N})$ [BJ2，定理 2.3.7],，这就是著名的 Bartoszyński-Raisonnier-Stern 定理。与测度和范畴相关的基数不变量，以及 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$，通常显示在 Cichoń 图表中（详情见 [BJ2，第 2] 章，或 [Bl，第 5] 节），基数会随着向上或向右移动而增大。



设 $g \in \omega^\omega$。函数 $\varphi \in ([\omega]^{<\omega})^\omega$ 是一个 g-斜线，如果对于所有 n，都有 $|\varphi(n)| \leq g(n)$。若对于除有限多个 $n \in \omega$ 外的所有情况，都有 $f(n) \in \varphi(n)$，则称 φ 局部化 $f \in \omega^\omega$。以下结论隐含于 Kamburelis 的工作中。

命题 29（Kamburelis [Ka，命题 1.1]）。设 A 是一个带有有限可加严格正测度 μ 的完备布尔代数。设 $g \in \omega^\omega$，令 $\dot{\varphi}$ 为一个表示 g-斜线的 A-名称，并且对所有 n，都有 $h(n) = n \cdot g(n)$。那么存在一个h-斜线 ψ，使得对于所有 $f \in \omega^\omega$，若 ψ 不局部化 f，则 $\Vdash$“$\dot{\varphi}$ 不局部化 f”。

证明。显然，对于每个 n，$\sum_k \mu([\![k \in \dot{\varphi}(n)]\!]) \leq g(n)$，因此，令 $\psi(n) = \left\{k : \mu([\![k \in \dot{\varphi}(n)]\!]) \geq \frac{1}{n}\right\}$，我们看到 $|\psi(n)| \leq n \cdot g(n) = h(n)$。假设 ψ 不局部化 $f \in \omega^\omega$。那么对于无穷多个 n，都有 $\mu([\![f(n) \in \dot{\varphi}(n)]\!]) < \frac{1}{n}$，因此，给定任意 n_0和任意 $p \in \mathrm{A}$，我们可以找到 $n > n_0$，使得 $\mu([\![f(n) \in \dot{\varphi}(n)]\!]) < \mu(p)$，从而 $q := p - [\![f(n) \in \dot{\varphi}(n)]\!] > \mathbb{0}$。显然，$q$迫使 $f(n) \notin \dot{\varphi}(n)$。因此 $\Vdash$“$\dot{\varphi}$不局部化 f”。 □

回顾：

定理 30（Bartoszyński，参见 [Ka，命题 1.4] 以及 [BJ2，定理 2.3.9]）。固定 $g \in \omega^\omega$，使得 $\lim_n g(n) = \infty$。那么

- $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ 且没有任何 g-slalom 能局部化 $\mathcal{F}\}$ 的所有元素，并且
- $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \min\{|\Phi| :$ Φ 是一个由 g-slalom 组成的集合，并且对所有 $f \in \omega^\omega$，存在 $\varphi \in \Phi$ 使得 φ 局部化 $f\}$。

推论 31。假设 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ 且 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \nu$。设 A 是一个带有有限可加严格正测度 μ 的完备布尔代数，其大小为 ν。那么在 A-泛型扩张中，我们仍有 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ 且 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \nu$。

注意到，无限完备布尔代数 A 的基数至少为 $\mathfrak{c}$。如果它更大，那么用 A 进行强迫可能会增大$\mathfrak{c}$的基数。这解释了对基数的限制。还要注意，可以先在一个模型（例如满足广义连续统假设 [BJ2，模型 7.5.8] 的模型）上添加 $\nu = \nu^\omega$ 个科恩实数，从而强迫出该假设。

证明。由于 A 是基数为 $\mathfrak{c}$ 的 ccc，$\mathfrak{c} = \nu$ 得以保持。我们使用前一个定理中对 $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和 $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ 的刻画。任取一个满足 $\lim_n g(n) = \infty$ 的 $g \in \omega^\omega$，并令对所有 n，$h(n) = n \cdot g(n)$。

为证明 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$，取一个大小为 $\aleph_1$ 的族 $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$，它不能被任何 h-斜线局部化。根据命题 29，扩张中的 $\mathcal{F}$ 不能被任何 g-斜线局部化，证毕。

为证明 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \nu$，令 $\nu' < \nu$，并令 $\{\dot{\varphi}_\alpha : \alpha < \nu'\}$ 为 g-斜线的 A-名称。根据命题 29，我们可以找到满足该命题结论的 h-斜线 ψ_α、$\alpha < \nu'$。由基模型中的 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$，存在一个 $f \in \omega^\omega$，它不被任何 ψ_α局部化。因此，f 被强迫不被任何 $\dot{\varphi}_\alpha$局部化。 □

推论 32。假设 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$、$\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \nu$，并令 κ、λ 为满足 $\aleph_1 \leq \kappa < \lambda \leq \nu$ 的正则基数。在第 4 节的科恩强迫碎裂迭代所产生的扩张中，我们仍有 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ 和 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \nu$。

在第 4 节的原模型中，我们没有说明基模型中 $\mathfrak{c}$ 的取值。这是因为它的取值与计算零测理想和瘦集理想的一致性数及覆盖数无关。如果广义连续统假设成立，或者仅仅 $\lambda^\omega = \lambda$，那么就会强迫得到 $\mathfrak{c} = \lambda$。但我们也可以从一个 $\mathfrak{c}$ 大于 λ 的模型开始，这正是我们在这里所做的。

证明。由推论 24 和 31 得出。（注意，A 是由长度为 $\kappa \times \lambda$、添加单个实数的强迫概念迭代生成的可数链条件完备布尔代数，因此其大小为 $\lambda^\omega = \nu$。）□

接下来，我们考察第 4 节模型中 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{d}$ 的取值（以及 $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$）。我们确实相信它们也会得到保留，但无法证明这一点。

猜想 4。假设 $\mathfrak{b} = \aleph_1$、$\mathfrak{d} = \mathfrak{c} = \nu$，并令 κ、λ 为满足 $\aleph_1 \leq \kappa < \lambda \leq \nu$ 的正则基数。在科恩强迫的碎裂迭代所给出的扩张中，仍有 $\mathfrak{b} = \mathrm{add}(\mathcal{M}) = \aleph_1$，且 $\mathfrak{d} = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c} = \nu$。

要证明这一点，有两种自然的方法：

- 证明基模型中大小为 $\aleph_1$ 的无界族得以保留。[BJ 第 1] 节中的技巧或许与此相关。

- 证明“最先出现的” $\aleph_1$ 个科恩实数，也就是 $\{c_{\zeta,0} : \zeta < \aleph_1\}$，在整个扩张中仍然无界。

我们确实知道，在我们的模型中 $\mathfrak{b} \leq \kappa$ 且 $\mathfrak{d} \geq \lambda$；而且，由于下一节的结果也需要这一论证，我们就在此给出。不过，这显然不是最优的方法。

We 先给出中间扩张上的无界实数的一个有用刻画。

引理 33。设 $\mathrm{A}_0 <_\circ \mathrm{A}$ 是完备布尔代数。令 $\dot{f} \in \omega^\omega$ 为一个 A-名称。那么，以下各项等价：

(i) A 的平凡条件迫使 $\dot{f}$ 在 $V^{\mathbb{A}_0} \cap \omega^\omega$ 上无界。

(ii) 对任意 $p \in \mathrm{A}$，都存在 $q \leq_{\mathbb{A}_0} h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p)$ 和 n，使得对所有 k 以及所有 $q' \leq_{\mathbb{A}_0} q$，q' 和 $p \cdot [\![\dot{f}(n) \geq k]\!]$ 都相容。

注意，(ii) 的结论可以改写为：“对所有 k，$h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}\left(p \cdot [\![\dot{f}(n) \geq k]\!]\right) \geq_{\mathbb{A}_0} q$”。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)。假设存在 $p \in \mathrm{A}$，使得对所有 $q \leq_{\mathbb{A}_0} h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p)$ 和所有 n，都存在 k 和 $q' \leq_{\mathbb{A}_0} q$，使得 q' 和 $p \cdot [\![\dot{f}(n) \geq k]\!]$ 不相容。注意，后者等价于说 $q' \cdot p \Vdash_{\mathbb{A}} \dot{f}(n) < k$。对于 $n \in \omega$，令 $D_n = \{q' \leq_{\mathbb{A}_0} h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p) : \exists k (q' \cdot p \Vdash_{\mathbb{A}} \dot{f}(n) < k)\}$，并注意，根据假设，所有 D_n 在 A_0 中都在 $h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p)$ 以下稠密。因此，取一个满足 $h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p) \in G_0$ 的 A_0-泛型滤子 G_0，便存在 $q_n \in D_n \cap G_0$ 和数 $h(n)$ 作为 $q_n \in D_n$ 的见证（即 $q_n \cdot p \Vdash_{\mathbb{A}} \dot{f}(n) < h(n)$）。现在，对于所有 n，$h \in V[G_0] \cap \omega^\omega$ 且 $p \Vdash_{\mathbb{A}/G_0} \dot{f}(n) < h(n)$，这就产生了矛盾。

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 假设存在一个 A_0-名称 $\dot{h} \in \omega^\omega$ 以及一个条件 $p \in \mathrm{A}$，使得 $p \Vdash_{\mathbb{A}} \dot{f}(n) < h(n)$ 对所有 n 都成立。设 $q \leq_{\mathbb{A}_0} h_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(p)$ 和 n 如 (ii) 中所述。选择 $q' \leq_{\mathbb{A}_0} q$ 来确定 $h(n)$ 的值，设为 $q' \Vdash_{\mathbb{A}_0} \dot{h}(n) = k$。根据假设，$q'$ 与 $p \cdot [\![\dot{f}(n) \geq k]\!]$ 相容，而某个公共扩张强迫 $\dot{f}(n) \geq k = h(n)$，这就产生了矛盾。□

引理 34. 设 $\left\langle \mathrm{A}^{\xi\,\theta}_{\zeta\,\eta} : \zeta \leq \xi < \kappa, \eta \leq \theta < \lambda \right\rangle$ 是由强迫概念 $\left\langle \dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\,\eta} : \zeta < \kappa, \eta < \lambda \right\rangle$ 组成的碎裂迭代，并且每个 $\dot{\mathrm{E}}_{\zeta,\,\eta}$ 都会在 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta}_{\mathrm{amal}}$ 上添加一个无界实数 $\dot{e}_{\zeta,\,\eta}$。那么：

(i) 对于所有 η 和所有 $\xi < \zeta$，$\Vdash_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta}_{\eta}}$“$\dot{e}_{\zeta,0}$ 在 $V^{\mathbb{A}^{\zeta,\xi}_{\eta}} \cap \omega^\omega$”上无界。

(ii) 对于所有 ζ 和所有 $\theta < \eta$，$\Vdash_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta}_{\eta}}$“$\dot{e}_{0,\eta}$ 在 $V^{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta}_{\eta}} \cap \omega^\omega$”上无界。

请注意，根据第 4 节中推论 24 后的讨论，$\dot{e}_{\zeta,0}$ 是通过交替添加无界实数和随机实数的迭代加入的。$\dot{e}_{0,\eta}$ 的情况也类似。

证明。显然，这两个陈述是对称的，因此只需证明第一个。我们通过对η使用归纳法来证明，并更一般地说明：对于任意 $\theta \geq \eta$，$\Vdash_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta}_{\eta}}^{\theta}$“$\dot{e}_{\zeta,0}$ 在 $V\mathbb{A}^{\zeta}_{\xi}{}^{\theta}{}_{,,\eta} \cap \omega^{\omega}$ 上无界”。

$\underline{\eta = 0}$。由于 $\dot{e}_{\zeta,\,0}$ 在 $V\mathbb{A}^{\zeta,\,0\,\mathrm{amal}} \cap \omega^{\omega}$ 中在 $V\mathbb{A}^{\zeta}_{\zeta}{}^{0}{}_{0,\,,}$ 上无界，因此它在 $V\mathbb{A}^{\zeta}_{\xi}{}^{0}{}_{,\,,\,0} \cap \omega^{\omega}$ 上也无界。此外，由于 $\mathrm{A}^{\zeta}_{\zeta'}{}^{\theta}{}_{,\,,\,0} = \mathrm{A}^{\zeta}_{\zeta'}{}^{0}{}_{,\,,\,0} \star \dot{\mathrm{B}}_{\theta}$ 对于 $\zeta' \leq \zeta$成立，且随机强迫是 ω^{ω}-有界的，$\dot{e}_{\zeta,\,0}$ 在 $V^{\mathbb{A}^{\zeta}_{\xi}{}^{\theta}{}_{,\,0}} \cap \omega^{\omega}$ 中相对于$V\mathbb{A}^{\zeta}_{\zeta}{}^{\theta}{}_{0,\,,}$ 仍然无界。

$\underline{\eta > 0}$。我们假设该命题对所有 $\eta' < \eta$ 均已证明，并证明它对 η成立。如上一段所述，将上标 η 增加到 θ，根据随机强迫的 ω^{ω}-有界性质，不会影响该命题的正确性，因此只需证明它对 $\theta = \eta$成立。此外，由于 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\zeta}{}^{\eta}_{0}$，和 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\xi}{}^{\eta}_{\eta}$，都完全嵌入 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta\,\mathrm{amal}} <_{\mathrm{o}} \mathrm{A}^{\zeta,\,\zeta}{}^{\eta}_{\eta}$，，只需证明该命题可由 $\mathrm{A}^{\zeta,\,\eta\,\mathrm{amal}}$强迫。

我们验证引理 33 中的 (ii)。为此，取 $(p, q) \in D$，其中 D 是粘合极限定义中的稠密集，也就是说，$\mathrm{A}^{\zeta,\eta}{}_{\mathrm{amal}} = \mathrm{r.o.}(D)$。不失一般性（如有必要，交换 p 和 q 的角色），我们可以假设 $p \in \mathrm{A}^{\zeta,\zeta}{}^{\eta}{}_{,\eta'}$ 对某个 $\eta' < \eta$ 成立，并且 $q \in \mathrm{A}^{\zeta,\zeta'}{}^{\eta}{}_{,\eta}$ 对某个 $\zeta' < \zeta$ 成立。我们还可以假设 $\xi \leq \zeta'$。于是，根据 D 的定义，有 $h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta,\eta'),(\zeta',\eta')}(p) = h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta',\eta),(\zeta',\eta')}(q) \in \mathrm{A}^{\zeta,\zeta'}{}^{\eta}{}_{,\eta'}$。另请注意，$(p, q)$ 到 $\mathrm{A}^{\zeta,\xi}{}^{\eta}_{\eta}$ 的投影是 $h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta',\eta),(\xi,\eta)}(q)$。

由关于 η' 的归纳假设应用于 $\zeta', \Vdash_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta}{}^{\eta}{}_{,\eta'}}$“$\dot{e}_{\zeta,0}$ 在 $V\mathrm{A}^{\zeta,\zeta'}{}^{\eta}{}_{,\eta'} \cap \omega^{\omega}$ 上无界”。因此，由引理 33，存在 $r \leq_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta'}{}^{\eta}{}_{,\eta'}} h^{\zeta,}{}_{\xi\,\eta\,(\zeta,\eta'),(\zeta',\eta')}(p)$ 和 n，使得对所有 k，都有 $h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta,\eta'),(\zeta',\eta')}(p \cdot [\![\dot{e}_{\zeta,0}(n) \geq k]\!]) \geq_{\mathbb{A}^{\zeta,\zeta'}{}^{\eta}{}_{,\eta'}} r$。现在令 $s = h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta',\eta),(\xi,\eta)}(r \cdot q) \in \mathrm{A}^{\zeta,\xi}{}^{\eta}_{\eta},$。令 k 和 $s' \leq_{\mathbb{A}^{\zeta,\xi}{}^{\eta}{}_{,\eta}} s$ 为任意对象。由于

$$h^{\zeta,\eta}_{(\zeta',\eta),(\zeta',\eta')}(s' \cdot r \cdot q) \leq_{\mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta',\eta'}} r \leq_{\mathbb{A}^{\zeta,\eta}_{\zeta',\eta'}} h^{\zeta,\eta}_{(\zeta,\eta'),(\zeta',\eta')}(p \cdot [\![\dot{e}_{\zeta,0}(n) \geq k]\!]),$$

$\left(h^{\zeta,\eta}_{\zeta'}{}_{(\,,\eta),(\zeta',\eta')}(s' \cdot r \cdot q) \cdot p \cdot [\![\dot{e}_{\zeta,0}(n) \geq k]\!], s' \cdot r \cdot q\right)$ 属于 D，其见证为 $h^{\zeta,}{}_{\eta\,(\zeta',\eta),(\zeta',\eta')}(s' \cdot r \cdot q)$，并且是 $s', (p, q)$ 和 $[\![\dot{e}_{\zeta,0}(n) \geq k]\!]$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$amal 中的公共扩张；因此这些条件相容，正如所需。这就完成了归纳步骤和该引理的证明。 □

推论 35. 在推论 32 的模型中，$\mathfrak{b} = \mathrm{add}(\mathcal{M}) \leq \kappa$ 且 $\mathfrak{d} = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \geq \lambda$。

证明。由引理 34 (i)，$\{\dot{c}_{\zeta,0} : \zeta < \kappa\}$ 在 A-泛型扩张中必定是无界的，因此我们得到$\mathfrak{b} \leq \kappa$。由同一引理的 (ii) 部分，$\{\dot{c}_{0,\eta} : \eta < \lambda\}$ 证明了 $\mathfrak{d} \geq \lambda$；因为若 $\nu' < \lambda$ 且 $\{f_\alpha : \alpha < \nu'\} \subseteq \omega^{\omega}$，那么对每个 $\alpha < \nu'$，我们都能找到 η_α，使得所有 $\dot{c}_{0,\,\eta}$ 对于 $\eta \geq \eta_\alpha$ 都在 f_α 之上无界，并且令 $\eta = \sup\{\eta_\alpha : \alpha < \nu'\} < \lambda$，则 $\dot{c}_{0,\,\eta}$ 在所有 f_α 之上无界，因此 $\{f_\alpha : \alpha < \nu'\}$ 不是支配的。 □

6 其他强迫概念的碎裂迭代

我们介绍通过另外两种著名强迫概念的碎裂迭代得到的模型。我们从主定理 B 的证明开始。Hechler 强迫的定义见第 1 节中的例 3。

定理 36. 假设 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$，$\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \mu$，且 κ、λ 为满足 $\aleph_1 \leq \kappa < \lambda \leq \mu$ 的正则基数。设 $\left\langle \mathrm{A}^{\xi}_{\zeta}{}^{\theta}{}_{\eta,,} : \zeta \leq \xi < \kappa, \eta \leq \theta < \lambda \right\rangle$ 是 Hechler 强迫的碎裂迭代，即对所有 $(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$，$\mathrm{A}^{\zeta,}{}_{\eta\,\mathrm{amal}}$ 强迫 $\mathrm{E}_{\zeta,\eta} = \mathrm{D}_{\circ}$ 那么，在 A-泛型扩张中，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$，$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{b} =$，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) =$，$\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \kappa$，$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) =$，$\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d} =$，$\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \lambda$，且 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \mu_{\circ}$

证明。首先注意，由于 Hechler 强迫是 σ-中心的，根据第 3 节引理 14 之前的讨论，它带有有限可加严格正测度。特别地，根据推论 24，A 满足可数链条件。

非$(\mathcal{N}) \leq \kappa$ 和 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \geq \lambda$ 的证明可从第 4 节的事实 26 和 27 推出，因为这些证明使用了随机泛型 r_ζ，$\zeta < \kappa$，以及 $r_\eta, \eta < \lambda$。接下来，回想一下，若 $d \in \omega^{\omega}$ 在 V上是 D-泛型，那么由 c定义的 $c \in 2^{\omega}$$(n) = d(n) \bmod 2$ 是在 V上的 C-泛型。因此，借助 E_ζ 和 D 添加的 Hechler 泛型 $d_{\zeta,\,\eta}$、$(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$，我们可以解码出 Cohen 泛型 $\dot{c}_{\zeta,\,\eta}$，并像事实 25 和 28 中那样用它们证明 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \geq \kappa$ 和非$(\mathcal{M}) \leq \lambda_{\circ}$

使用 $d_{\zeta,\eta}$ 的类似论证可得 $\mathfrak{b} \geq \kappa$ 和 $\mathfrak{d} \leq \lambda$：令 $\nu < \kappa$，并令 $f_\alpha, \alpha < \nu$ 为 ω^{ω} 中实数的 A-名称。存在 $(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$，使得所有 $\dot{f}_\alpha$ 都是 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal-名称。由于 $\mathrm{A}^{\zeta,\zeta}{}^{\eta}{}_{,\eta} = \mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal $\star \dot{\mathrm{D}}$ 在 $\mathrm{A}^{\zeta,\eta}$ amal-扩张之上添加了 Hechler 实数$\dot{d}_{\zeta,\eta}$，$\mathrm{A}^{\zeta,\zeta}{}^{\eta}_{\eta}$ 强迫对所有 $\alpha < \nu$ 都有 $\dot{f}_\alpha \leq^{*} \dot{d}_{\zeta,\eta}$。因此 $\{\dot{f}_\alpha : \alpha < \nu\}$ 有界，

由此可得 $\mathfrak{b} \geq \kappa$。同样的论证表明，$\{d_{\zeta,\eta} : \zeta < \kappa, \eta < \lambda\}$ 被强迫成为一个支配族，从而得到 $\mathfrak{d} \leq \lambda$。

接下来，$\mathfrak{b} \leq \kappa$ 和 $\mathfrak{d} \geq \lambda$ 的证明与第 5 节中利用引理 34 证明推论 35 的方式完全相同。

最后，由于根据推论 24，A 上存在有限可加测度，因此 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ 和 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mu = \mathfrak{c}$ 可由第 5 节中的推论 31 得出。□

我们再来考察一些连续统的基数不变量。对于集合 A、$B \in [\omega]^\omega$，若 A 和 B 的交集 $B \cap A$ 以及 $B \setminus A$ 都为无限集，则称 A 分裂 B。若族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 中的每个 $B \in \omega^\omega$ 都被 $\mathcal{A}$ 中的某个成员分裂，则称 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 为分裂族。与此对偶地，若没有任何 $A \in [\omega]^\omega$ 能分裂 $\mathcal{B}$ 中的所有成员，则称 $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ 为不可收割族。利用这些概念，我们定义：

- $\mathfrak{s} := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 是一个分裂族$\}$，即分裂数；以及
- $\mathfrak{r} := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ 是一个不可收割族$\}$，即收割数。

众所周知，$\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$、$\mathrm{non}(\mathcal{M})$、$\mathrm{non}(\mathcal{N})$，以及对偶地，$\mathfrak{r} \geq \mathfrak{b}$、$\mathrm{cov}(\mathcal{M})$、$\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ [Bl，定理 3.3、3.8 和 5.19]。

设 $\mathcal{U}$ 是自然数 ω 上的一个非主超滤子。Mathias 强迫 $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$（其中 $\mathcal{U}$）由满足 $s \in \omega^{<\omega}$ 且 $A \in \mathcal{U}$ 的序对 (s, A) 组成，其中 $\max(s) < \min(A)$。序关系定义为：当且仅当 $t \supseteq s$、$B \subseteq A$，并且 $t \setminus s \subseteq A$ 时，$(t, B) \leq (s, A)$。带有 $\mathcal{U}$ 的 Mathias 强迫是 σ-中心的，并且泛型地添加一个集合 $M \in [\omega]^\omega$，该集合将超滤子 $\mathcal{U}$ 对角化，即对于所有 $A \in \mathcal{U}$ 都有 $M \subseteq^* A$。事实上，$M = \bigcup\{s :$ 存在 $A \in \mathcal{U}$，使得 $(s, A) \in G\}$，其中 G 是在 V 上的 $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-泛滤子。显然，M 不会被任何基模型集合分裂，因此 $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ 是一种用于摧毁分裂族的自然强迫；在迭代时，它还能增大分裂数 $\mathfrak{s}$。此外，如果 $\mathcal{U}$ 不是 P 点，那么 $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ 会添加一个支配实数 [Ca，见引理 4]。

定理 37. 假设 $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$，$\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \mu$，并且 κ、λ 是满足 $\aleph_1 \leq \kappa < \lambda \leq \mu$ 的正则基数。令 $\left\langle \mathbb{A}^{\xi\,\theta}_{\zeta\,\eta}, \ , : \zeta \leq \xi < \kappa, \eta \leq \theta < \lambda \right\rangle$ 为 Mathias 强迫的碎裂迭代，其使用非 P 点超滤子 $\dot{\mathcal{U}}_{\zeta,\eta}$；也就是说，对所有 $(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$，$\dot{\mathcal{U}}_{\zeta,\eta}$ 都是 $\mathbb{A}^{\zeta,\eta}$ 的名称，并且 $\mathbb{A}^{\zeta,\eta}$ 强迫 $\dot{\mathbb{E}}_{\zeta,\eta} = \mathbb{M}\,\dot{u}_{\zeta,\eta}$。那么，在 A-泛型扩张中，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$，$\mathfrak{s} = \mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{b} = \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \kappa$，$\mathfrak{r} = \mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d} = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \lambda$，且 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \mu$。

证明。除了 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{r}$ 的取值外，证明与定理 36 的证明完全相同。特别地，由于 $\mathbb{M}\,\dot{u}_{\zeta的\eta}$ 的 σ-中心性，A 带有一个有限可加严格正测度，且满足可数链条件。此外，由于在 ZFC 中 $\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$ 和 $\mathfrak{r} \geq \mathrm{cov}(\mathcal{N})$，因此可得 $\mathfrak{s} \leq \kappa$ 和 $\mathfrak{r} \geq \lambda$。

因此，我们只需证明 $\mathfrak{s} \geq \kappa$ 和 $\mathfrak{r} \leq \lambda$，而这正是 Mathias 泛型所能做到的。事实上，假设 $\nu < \kappa$ 和 A_α，$\alpha < \nu$ 是 ω 的无限子集的 A-名称。那么存在 $(\zeta, \eta) \in \kappa \times \lambda$，使得所有 $\dot{A}_\alpha$ 都是 $\mathbb{A}^{\zeta,\eta}$ amal-名称。由于 $\mathbb{A}^{\zeta,\zeta\ \ \eta}$，$_\eta = \mathbb{A}^{\zeta,\eta}$ amal $\star\ \mathbb{M}\dot{u}_{\zeta,\eta}$ 对超滤子 $\dot{\mathcal{U}}_{\zeta,\eta}$ 进行对角化，泛型 Mathias 实数 $M_{\zeta,\eta}$ 不会被任何 A_α 分裂，因此它们无法在最终扩张中构成分裂族。这表明 $\mathfrak{s} \geq \kappa$。对于 $\mathfrak{r} \leq \lambda$，只需注意，同样的论证表明 $\{M_{\zeta,\eta} : \zeta < \kappa, \eta < \lambda\}$ 必然是一个不可收割族，定理的证明至此完成。□

除了平凡的 $\mathfrak{s} \leq \kappa$ 和 $\mathfrak{r} \geq \lambda$ 之外，我们不知道推论 32 和定理 36 中模型里的 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{r}$ 的取值。

猜想 5。在由 Cohen 强迫或 Hechler 强迫的碎裂迭代得到的模型中，$\mathfrak{s} = \aleph_1$ 和 $\mathfrak{r} = \mathfrak{c} = \mu$。

提出这一猜想的原因是，这些迭代只涉及苏斯林可数链条件强迫概念 B、C 或 D；而众所周知，在满足连续统假设的模型上进行苏斯林可数链条件强迫的有限支撑迭代会保持 $\mathfrak{s} = \aleph_1$ [BJ2，定理 3.6。21]。

7 前景与问题

基于第4至第6节的工作，我们可以更精确地说明，我们的构造在极限阶段添加随机泛型的意义；与之相对，有限支撑迭代在极限阶段添加 Cohen 泛型。

令 κ 为任意无限基数，A 为一个完备布尔代数。若 $\mathbb{C}_\kappa <\circ \mathbb{A}$，且对于所有由 $\mu < \kappa$ 的子集的某个名称生成的完备布尔代数 $\mathbb{A}' <\circ \mathbb{A}$，都存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $\mathbb{A}' \star \mathbb{C}_{[\alpha,\kappa)} <\circ \mathbb{A}$（也就是说，$\mathbb{C}_\kappa$-泛型的一个共尾片段在 $\mathbb{A}'$-扩张上仍然是泛型），则称 A 为 κ-Cohen 迭代。当然，$\mathbb{A}' \star \mathbb{C}_{[\alpha,\kappa)} \cong \mathbb{A}' \times \mathbb{C}^{[\alpha,\kappa)}$。显然，我们有：

观察 38. 假设 A 是长度为 κ 的可数链条件强迫的有限支撑迭代，其中 κ 是正则的。那么 A 是一个 κ-Cohen 迭代。

类似地，将前一定义中的 C 替换为 B，即可得到 κ-随机迭代：若 $\mathrm{B}_\kappa <\circ \mathrm{A}$，且对于所有由一个关于 $\mu<\kappa$ 子集的名称生成的完备布尔代数 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}$，都存在 $\alpha<\kappa$ 使得 $\mathrm{A}'\star \mathrm{B}_{[\alpha,\kappa)} <\circ \mathrm{A}$，则 A 是 κ- 随机迭代。显然，对于每个满足 $\mu\leq\kappa$ 的正则μ，C_κ（分别地，B_κ）都是 μ-Cohen（分别地，μ-随机）迭代。此外：

观察 39. 假设 κ 不可数。

(i) 如果 A 是一个 κ-Cohen 迭代，那么在 A-泛型扩张中，$\mathrm{non}(\mathcal{M})\leq\kappa$，且 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})\geq\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_\kappa}\geq\kappa$ $n.$

(ii) 如果 A 是一个 κ-随机迭代，那么在 A-泛型扩张中，$\mathrm{non}(\mathcal{N})\leq\kappa$，且 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})\geq\mathfrak{m}_{\mathbb{B}_\kappa}\geq\kappa$。

这里，对于偏序 P，$\mathfrak{m}_{\mathbb{P}}$ 表示使得 Martin 公理 MA$_\mu$ 对 P 不成立的最小基数 μ。众所周知（且容易看出），$\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$，并且 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathfrak{m}_{\mathbb{B}}$ [BJ2，定理 3.1。8] 更一般地，$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_\kappa}$ =cov($\mathcal{M}_\kappa$) 和 $\mathfrak{m}_{\mathbb{B}_\kappa}=\mathrm{cov}(\mathcal{N}_\kappa)$，其中 $\mathcal{M}_\kappa$ 和 $\mathcal{N}_\kappa$ 分别表示空间 2^κ上的疏理想和零测理想。显然，对于 $\lambda\geq\kappa$，$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_\lambda}\leq\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_\kappa}$ 且 $\mathfrak{m}_{\mathbb{B}_\lambda}\leq\mathfrak{m}_{\mathbb{B}_\kappa}$，并且该不等式在一致性意义下可以是严格的（相关模型见 [Br4，第 5 节和附录 B] ）。

证明。根据 Cohen 强迫与随机强迫的类比，只需证明 (i)。首先注意，C 添加的 Cohen 实数$\{c_\alpha:\ \alpha<\kappa\}$ 构成一个非瘦集，因此是 $\mathrm{non}(\mathcal{M})\leq\kappa$ 的见证。事实上，如果 A 是一个 A-名称，表示某个 Borel 瘦集，那么存在一个可数生成完备布尔代数 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}$，使得 A 是一个 A′-名称。由于$\mathrm{A}'\star\mathrm{C}_{[\alpha,\kappa)} <\circ \mathrm{A}$ 对某个 $\alpha<\kappa$成立，带有 $\alpha\leq\beta<\kappa$ 的 c_β 在 A′-泛型扩张上仍是 Cohen 实数，因此避开了 A的解释。

另一方面，设 $\mu<\kappa$，并令 A_α、$\alpha<\mu$为 2^κ空间中的闭无处稠密 Baire 子集。由于是 Baire 的，A_α 具有可数支撑；也就是说，存在可数的 $C_\alpha\subseteq\kappa$ 和闭无处稠密的 $A'_\alpha\subseteq 2^{C_\alpha}$，使得 $A_\alpha=A'_\alpha\times 2^{\kappa\setminus C_\alpha}$ （见 [Ku1]）。因此存在一个 μ-生成的完备布尔代数 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}$，使得 A'_α、 以及由此得到的 A_α都属于 A′-泛型扩张。由于 $\mathrm{A}'\star\mathrm{C}_{[\alpha,\kappa)} <\circ \mathrm{A}$ 对某个 $\alpha<\kappa$成立，$[\alpha,\kappa)$ 与 κ 之间的典范双射给出一个 A-泛型扩张中的泛型 Cohen 函数 $f\in 2^\kappa$，它避开所有A_α。因此，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}_\kappa)\geq\kappa$，证毕。 □

引理 40. 设 $\kappa\leq\lambda$ 为正则不可数。第4至第6节中考察的碎裂迭代 A 既是 κ-随机迭代，也是 λ-随机迭代。

证明. 根据构造，$\mathrm{B}_\kappa <\circ \mathrm{A}$，并且如果 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}$ 由一个表示 $\mu<\kappa$ 子集的名称生成，那么由 ccc性质，存在 $\zeta<\kappa$ 和 $\eta<\lambda$，使得 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}^{\zeta,\ \zeta}{}^{\eta},\circ$。由于 $\mathrm{A}'\star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta,\kappa)} <\circ \mathrm{A}^{\zeta,\ \zeta^{\eta},\ \eta}\star \dot{\mathrm{B}}_{[\zeta,\kappa)} <\circ \mathrm{A}$ 是根据构造得到的，A 确实是一个 κ-随机迭代。

$\mathrm{B}_\lambda <\circ \mathrm{A}$ 也显而易见。假设 $\mathrm{A}' <\circ \mathrm{A}$ 由一个表示 $\mu<\lambda$ 子集的名称生成。由 ccc性质，A′（包含于完备布尔代数中）由某个 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\ \zeta_\alpha}{}^{\eta_\alpha}{}_{\eta_\alpha,}$，$\alpha<\mu$ 生成。设 $\eta<\lambda$ 满足对所有 $\alpha<\mu$ 都有 $\eta_\alpha<\eta$。我们断言 $\mathrm{A}'\star\mathrm{B}_{[\eta,\lambda)} <\circ \mathrm{A}$。为此，只需证明泛随机函数 $f_{[\eta,\lambda)}$ 避开在 A′-扩张中编码的所有贝尔零集。然而，我们可以假设这样的贝尔零集编码于某个 $\alpha<\mu$ 对应的 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\ \zeta_\alpha}{}^{\eta_\alpha}{}_{\eta_\alpha,}$-扩张中。由于 $\mathrm{A}^{\zeta_\alpha,\ \zeta_\alpha}{}^{\eta_\alpha},\ \eta_\alpha\star \dot{\mathrm{B}}_{[\eta,\lambda)} <\circ \mathrm{A}$，断言得证，由此也证明了 A 是一个 λ-随机迭代。 □

请注意，鉴于观察 39（ii），这涵盖了第 4 节中的事实 26 和 27 .

有限支撑迭代通常只是针对某个正则基数 κ 的 κ-科恩迭代，而人们可能会想知道针对某个 κ 的 κ-随机迭代会是什么样。事实上，我们已经遇到过这类迭代：它们是一维子迭代，来自我们的二维碎裂迭代；参见第 4 节中推论 24 后的讨论。遗憾的是，我们不知道这些一维碎裂迭代是否对任何一致性结果有用。

另一方面，二维有限支撑迭代通常称为矩阵迭代，在文献中已被广泛研究，其历史至少可以追溯到20世纪80年代 Blass 和 Shelah 的工作 [BS] 。不过，值得一提的是，它们大多数并不是针对两个不同 μ的 μ-Cohen 迭代，但也有一些是。我们把证明以下相容性留给读者：对于任意正则$\kappa<\lambda$，利用沿着 $\kappa\times\lambda$-矩阵进行的有限支撑迭代，可以得到 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\mathrm{non}(\mathcal{M})=\kappa$ 以及 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})=\mathrm{non}(\mathcal{N})=\lambda$；该迭代同时是 κ-Cohen 迭代和 λ-Cohen 迭代（关于这一点的另一种证明思路，见引言）。构造高维（至少三维）矩阵迭代的问题虽已有人研究，但会遇到与第 2 节中的问题 2 非常相似的困难：极限步中如何证明完全可嵌入性并不清楚。 [FFMM]在一个特殊情形下解决了这个问题。对于碎裂迭代，我们提出：

问题 6. 我们能否构造一个非平凡的碎裂迭代 A，使其对于三个不同的 μ是一个 μ-随机迭代?

这里的“非平凡”是指 A 不是测度代数。一个相关的问题是：

问题 7. S 如何对任意正则不可数 $\kappa < \lambda$使 $\mathfrak{b} = \lambda$ 与 cov($\mathcal{M}$) $= \kappa$ 相容 *!*

在所有已知满足 $\mathfrak{b} >$ cov($\mathcal{M}$) 的模型中，cov($\mathcal{M}$) $= \aleph_1$ 都成立。要解决这个问题，就必须以某种方式将一个长度为 λ 的 Hechler 强迫有限支撑迭代嵌入碎裂迭代框架中，特别参见第 6 节中主定理 B 的证明。这将涉及一般情况下并不存在的三重粘合（见第 2 节中的反例 8），但在与该构造相关的情形下或许存在。

问题 8. 我们能否在碎裂迭代模型中分离更多基数?

到目前为止，我们至多得到四种取值，$\aleph_1 < \kappa < \lambda < \mathfrak{c} = \mu$。在有限支撑迭代语境中，称为 Cicho ´n 最大值的不同取值的最大数量，已由 Goldstern、Kellner、Mej´ıa、Shelah 等人在近期的突破性工作中实现（特别参见 [GKS、GKMS、KST、KTT]）。问题 8 的一个具体实例是：

问题 9。 $\aleph_1 <$ cov($\mathcal{M}$) $<$ non($\mathcal{N}$) $<$ cov($\mathcal{N}$) $<$ non($\mathcal{M}$) 是否相容?

我们不知道当 κ 或 λ 是奇异基数时会发生什么。

问题 10。假设 $cf(\kappa) < \kappa < \lambda$或 $\kappa \leq cf(\lambda) < \lambda$。cov($\mathcal{M}$) $=$non($\mathcal{N}$) $= \kappa$以及 cov($\mathcal{N}$) $=$non($\mathcal{M}$) $= \lambda$ 是否相容?

注意，对任意理想 $\mathcal{I}$，cof($\mathcal{I}$) $=$ cov($\mathcal{I}$) 蕴含 non($\mathcal{I}$) $\leq cf$(cof($\mathcal{I}$))（这是 Fremlin 的一项早期观察）。因此，若在本问题的第二部分中 cof($\mathcal{N}$) $= \lambda$，则必有 $\kappa \leq cf(\lambda)$。让 κ或 λ成为奇异基数，似乎也需要在比分配几乎格更复杂的结构上进行糊合。第一部分的肯定解或许能成为迈向以下问题肯定解的第一步：

问题 1 1（Bartoszy´nski-Judah，参见 [BJ1] 或 [Sh3, 2.10]）。add($\mathcal{M}$) $> cf$(cov($\mathcal{M}$)) 是否相容? *?*

参考文献

[BJ1] T. Bartoszy´nski 和 H. Judah，《无处稠密集所构成的实线最小覆盖的共尾性》，符号逻辑杂志 54 (1989), 828-832.[BJ2] T. Bartoszy´nski 和 H. Judah，《集合论：论实线的结构》，A K Peters，韦尔斯利，1995.[Bl] A. Blass，《连续统的组合基数特征》，载于《集合论手册》（M. Foreman 和 A. Kanamori 编），Springer，多德雷赫特、海德堡、伦敦、纽约，2010，395-489.[BS] A. Blass 和 S. Shelah，《具有小生成集的超滤子》，以色列数学杂志 65 (1989), 259-271.[Br1] J. Brendle，《极大几乎不交族与迭代理论》，载于《逻辑与代数》（Y. Zhang 编），Contemp. Math. 302 (2002)，美国数学学会，普罗维登斯，1-31.[Br2] J. Brendle，《几乎不交数可能具有可数共尾性》，美国数学会汇刊 355 (2003), 2633-2649.[Br3] J. Brendle，《模板与迭代：吕米尼 2002 讲义》，RIMS K¯oky¯uroku 1423 (2005), 1-12.[Br4] J. Brendle，《连续统的基数不变量与不可数基数上的组合学》，纯粹与应用逻辑年刊 144 (2006), 43-72.[Br5] J. Brendle，《与有限支撑迭代相关的现代强迫技术：超幂、模板与子模型》，载于《逻辑中的景观》（A. S. Daghighi 等编），College Publications，伦敦，即将出版。arXiv:2101.11494.[Br6] J. Brendle，《粘合极限及其拓扑解释》，RIMS K¯oky¯uroku 2213 (2022), 1-13.[BJ] J. Brendle 和 H. Judah，《随机实数的完美集》，以色列数学杂志 83 (1993), 153-176.

[Ca] R. M. Canjar, 《不添加支配实数的 Mathias 强迫》, 美国数学会会刊 104 (1988), 1239-1248.[FFMM] V. Fischer、S. Friedman、D. Mej´ıa 和 D. Montoya, 《有限支撑迭代的相容系统》, 符号逻辑杂志 83 (2018), 208-236.[FM] V. Fischer 和 D. Mej´ıa, 《分裂、有界性与几乎不交性可能大不相同》, 加拿大数学杂志 69 (2017), 502-531.[Go] M. Goldstern, 《强迫构造工具》, 载于《实数集合论》（H. Judah 编）, 以色列数学会议论文集, 第 6 卷, 1993, 305-360.[GKS] M. Goldstern、J. Kellner 和 S. Shelah, 《Cicho ´n 的最大值》, 数学年刊 (2) 190 (2019), 113-143.[GKMS] M. Goldstern、J. Kellner、D. Mej´ıa 和 S. Shelah, 《无需大基数的 Cicho ´n 最大值》, 欧洲数学学会杂志 24 (2022), 3951-3967.[Je] T. Jech, 《集合论：第三千年版》, 修订扩充版, Springer, 柏林, 2003.[Ka] A. Kamburelis, 《带测度的布尔代数迭代》, 数学逻辑档案 29 (1989), 21-28.[KST] J. Kellner、S. Shelah 和 A. T˘anasie, 《Cicho ´n 图表中十个基数特征的另一种排序》, 卡罗林大学数学评论 60 (2019), 61-95.[KTT] J. Kellner、A. T˘anasie 和 F. Tonti, 《紧基数与 Cicho ´n 图表中的八个取值》, 符号逻辑杂志 83 (2018), 790-803.[Ko] S. Koppelberg, 《布尔代数一般理论》, 载于《布尔代数手册》（J. D. Monk 和 R. Bonnet 编）, 第 1 卷, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1989.[Ku1] K. Kunen, 《随机实数与科恩实数》, 载于《集合论拓扑手册》（K. Kunen 和 J. Vaughan 编）, North-Holland, 阿姆斯特丹 (1984), 887-911.[Ku2] K. Kunen, 《集合论》, 逻辑研究 34, College Publications, 伦敦, 2011.[Mi] A. Miller, 《测度与范畴的一些性质》, 美国数学会汇刊 266 (1981), 93-114, 271 (1982), 347-348.[Ox] J. Oxtoby, 《测度与范畴》, 第二版, 数学研究生教材 2, Springer, 柏林, 1980.[Sh1] S. Shelah, 《能否去掉 Solovay 不可达基数? 》, 以色列数学杂志 48 (1984), 1-47.[Sh2] S. Shelah, 《适当与不适当强迫》, Springer, 柏林, 1998.[Sh3] S. Shelah, 《论我不理解的事（以及我有话要说的事）》, Fund. Math. 166 (2000), 1-82.（出版物编号 666）[Sh4] S. Shelah, 《连续统的两个基数不变量与有限支撑线性序迭代强迫》, 数学学报 192 (2004), 187-223.[So] R. Solovay, 《一个所有实数子集均为勒贝格可测的集合论模型》, 数学年刊 (2) 92 (1970), 1-56.ST R. Solovay、S. Tennenbaum, 《迭代 Cohen 扩张与 Souslin 问题》, 数学年刊 (2) 94 (1971), 201-245.[To] S. Todor˘cevi´c, 《可数序数对的分割》, 数学学报 159 (1987), 261-294.