arXiv:2302.05072v1 [math.LO] 10 Feb 2023

粘合极限及其拓扑解释

J¨org Brendle*神户大学信息系统
研究生院，Rokko-dai 1-1,
Nada-ku，神户 657-8501，日本 电
子邮箱：brendle@kobe-u.ac.jp

2023年2月13日

摘要
本文综述了强迫理论中针对完备布尔代数的 [Br6], a 极限构造所产生的粘合极限。该构造同时推广了直接极限和两步粘合。我们尤其关注文献中粘合极限的实例，以及紧豪斯多夫空间上的拓扑粘合极限。

引言

完备布尔代数（简称 cBa）的极限构造在强迫理论中发挥着根本作用，因为建立迭代强迫构造离不开它们。最重要的极限无疑是直接极限和逆极限，数十年来，它们都被用于大量相容性证明。本文讨论一种构造，它推广了直接极限和两步粘合：粘合极限。 [Br6] 最初引入这种构造，是为了在极限阶段为加入随机实数而非科恩实数的可数链条件迭代构造定义粘合极限；这类迭代称为破碎迭代（见第2节中的例 5）。不过，至少在隐含意义上，She-lah 的工作早已用到了粘合极限（[Sh2], 另见 [Br4], [Br5，第 1], 节及第2节中的例 4）。粗略地说，系统 $(\mathrm{A}_i\colon i \in I)$ 的粘合极限 $\mathrm{A}_\ell = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathrm{A}_i$，是一个自然的“最小”完备布尔代数，所有 A_i 都能完全嵌入其中，其中 I 是分配几乎格（形式化定义见第1节）；后者可以是相当一般的结构，但在应用中，可以把 I 看作由序数对组成的集合。这里不妨注意它与直接极限的相似之处：当 I 是一个格——甚至只需是一个有向集——时，直接极限是完全嵌入所有 A_i 的最小完备布尔代数。还要注意，分配几乎格本质上是二维对象，因此粘合极限与矩阵迭代密切相关；第2节中的例3将对此作出精确说明。然而，由于矩阵迭代采用有限支撑（即处处取直接极限），粘合极限框架对它们并非必需，在某种意义上反而徒增复杂。

本文是一篇关于粘合极限的综述。这里介绍的大部分内容已经（或即将）发表于其他地方，主要见 [Br6], ，少部分见 [Br5]。因此，我们不提供证明，只介绍主要概念和思想。第1节介绍基础内容：回顾正确性（最初见于 [Br3], ，另见 [Br6，第 1] 节和 [Br5]），定义粘合极限，并阐述其最重要的性质（尤其是完全可嵌入性，定理 3）。这些内容

*部分研究经费由日本学术振兴会科学研究补助金（C类）18K03398资助。本综述与作者在2021年10月RIMS研讨会 *Recent Developments in Set Theory of the Reals* 上开设的短期课程 *Recent forcing techniques: Boolean ultrapowers* 有关。他感谢京都大学数学科学研究所（RIMS）的支持，并感谢Masaru Kada邀请他。*2020 Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：03E40；次要分类号：03E17、03E35、54B10、54D30*Keywords.* 迭代强迫，完备布尔代数，合并，直接极限，矩阵迭代，紧豪斯多夫空间

均已陈述。我们将本节写得较为简短，因为所有内容都可以在 [Br6] 中找到。第 2 节介绍我们所知的最重要的例子，这些例子散见于相关文献。同样，我们不提供具体而详细的证明（因为这些证明可以在其他地方找到），而是介绍构造的主要思想，并解释为何可以将它们视为粘合极限。最后，第 3 节是唯一包含全新内容的一节：根据斯通对偶，粘合极限可以推广到完全布尔代数的对偶——实际上也可以推广到一般的布尔代数——从而得到一种针对紧致零维豪斯多夫空间的极限构造。结果表明，零维性在这里并不重要，这种构造甚至适用于一般的紧豪斯多夫空间。极限空间 X_ℓ 是 X_i、$i \in I$ 的乘积空间的一个子空间，其中 I 再次是一个分配几乎格，且投影映射为开映射（见定理 6）。后者对应于定理 3 中完全布尔代数情形下的完全可嵌入性，是关键所在。我们在最后一节给出详细证明。

我们假设读者熟悉强迫理论，尤其是迭代强迫构造以及通过完全布尔代数处理强迫的方法。基础内容可参见标准文献，例如 [Je], [Ku], and [Ha]。此外，文中还会提及若干标准的连续统的基数不变量而不加定义，参见 [BJ], [Bl], or [Ha]。

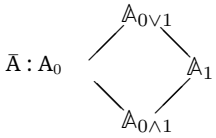
1 粘合极限

对于完备布尔代数 $\mathrm{A}_i \subseteq \mathrm{A}_j$，我们用 $\mathrm{A}_i <\circ \mathrm{A}_j$ 表示“A_i 完全嵌入于 A_j”。请回忆，这等价于说投影映射 $h^j_i : \mathrm{A}_j \to \mathrm{A}_i$ 由下式给出

$$h^j_i(a_j) = \prod\{a_i \in \mathbb{A}_i : a_i \geq a_j\}$$

对所有 $a_j > \mathbb{0}$ 都满足 $h^j_i(a_j) > \mathbb{0}$。我们需要以下来自 [Br3] 的基本定义（另见 [Br5] 或 [Br6, 定义 1]）。

定义1. A 假设我们有完全布尔代数 $\mathrm{A}_{0\wedge 1} <\circ \mathrm{A}_i <\circ \mathrm{A}_{0\vee 1}$, $i \in \{0,1\}$。我们称图中的投影



在以下三个等价条件中，任一条件成立时，均称其正确：

对于所有 $a_0 \in \mathrm{A}_0$，$\bullet$ $h^{0\vee 1}_1(a_0) = h^0_{0\wedge 1}(a_0)$，

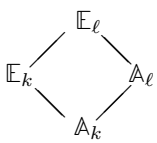
对于所有 $a_1 \in \mathrm{A}_1$，$\bullet$ $h^{0\vee 1}_0(a_1) = h^1_{0\wedge 1}(a_1)$，

每当 $h^0_{0\wedge 1}(a_0) = h^1_{0\wedge 1}(a_1)$ 时，a_0 与 a_1 在 $\mathrm{A}_{0\vee 1}$ 中相容。 ⊣

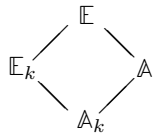
请注意，这意味着（但并不等价于）$\mathrm{A}_{0\wedge 1} = \mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1$。一个具有正确投影的图的典型例子是令 $\mathrm{A}_{0\wedge 1} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ 和 $\mathrm{A}_{0\vee 1}$ 为通常的乘积强迫，即 $(\mathrm{A}_0 \setminus \{\mathbb{0}\}) \times (\mathrm{A}_1 \setminus \{\mathbb{0}\})$ 的完备化。另一个重要例子是令 $\mathrm{A}_{0\wedge 1} <\circ \mathrm{A}$. . ^{0} 为任意强迫概念，并设 $\mathrm{A}_1 := \mathrm{A}_{0\wedge 1} \star \mathrm{Q}$ 且 $\mathrm{A}_{0\vee 1} := \mathrm{A}_0 \star \mathrm{Q}$，其中 Q 是一个 Suslin ccc 强迫概念（见 [Br6, 例 3]）。在这两种情况下，正确性都显而易见。关于一个满足 $\mathrm{A}_{0\wedge 1} = \mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1$ 的非正确图的例子，见 [Br6, 反例 4]。关于正确性的更多内容可见该文的第1节。

由于处理极限构造是本文的主要目标之一，我们在此回顾：

引理 1（直极限的可嵌入性，参见 [Br5, 引理 4] 和 [Br6, 引理 4]）。设 K 是一个有向指标集。假设 $(\mathrm{A}_k : k \in K)$ 和 $(\mathrm{E}_k : k \in K)$ 是完全布尔代数系统，且对于任意 $k \leq \ell$，$\mathrm{A}_k <\circ \mathrm{A}_\ell$、$\mathrm{E}_k <\circ \mathrm{E}_\ell$，并且 $\mathrm{A}_k <\circ \mathrm{E}_k$。进一步假设，所有形如以下形式的图中的投影



对 $k \leq \ell$ 都是正确的。那么，$\mathrm{A} := \lim \mathrm{dir}_{k\in K}\mathrm{A}_k$ 完全嵌入 $\mathrm{E} := \lim \mathrm{dir}_{k\in K}\mathrm{E}_k$。此外，正确性以如下意义得以保留：所有形如以下形式的图中的投影



对于 $k \in K$ 是正确的。

正确性在这里至关重要。关于一个（不正确的）反例，见 [Br6, 反例 5]。正确性这一概念最初由作者 [Br3] 提出，当时他正致力于研究 Shelah 沿模板进行的迭代理论（[Sh2], 另见 [Br1] 和 [Br2]）。关于如何在正确性框架中优雅地描述模板迭代，见 [Br3] 或 [Br5] 。

W接下来定义粘合极限所依据的结构（见下文定义 3）

定义 2（见 [Br6, 定义 2]）。设 $\langle I, \leq\rangle$ 是一个偏序。若 I 满足以下条件，则称其为分配几乎格：

(i) 任意两个元素 $i, j \in I$ 都有一个最大下界 $i \wedge j$，即 i 和 j的交，

(ii) 若 i 和 j 有上界，则它们有一个最小上界 $i \vee j$，即 i 和 j的并，

(iii) 若 $i_0, i_1, i_2 \in I$，则存在 $j \neq k$，使得 i_j 和 i_k 有上界（因此 $i_j \vee i_k$ 存在）；也就是说，任意给定三个元素，其中两个有上界，

(iv) 对于 $\wedge$ 和 $\vee$，分配律成立（只要所讨论的律两边都有定义），

(v) 若 i 和 j 没有上界，且 j' 任意，则 i, j' 与 $i, j \wedge j'$ 要么都没有上界，要么 $i \vee j' = i \vee (j \wedge j')$，并且

(vi) 若 j, j' 没有上界，则对任意 i，$(i \wedge j) \vee (i \wedge j') = i$。 ⊣

以下结论显而易见：

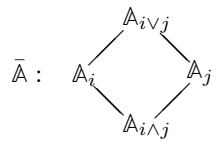
引理 2（参见 [Br6, 观察 5]）。假设 $\langle I, \leq\rangle$ 满足 (i) 至 (iv)。另假设 I 没有极大元，令 $\ell \notin I$, $L = I \cup \{\ell\}$，并规定对所有 $i \in I$都有 $i \leq \ell$。那么以下条件等价：

- I 满足 (v) 和 (vi)。
- L中分配律成立，也就是说，L是一个格。

事实上，在定义 2 中加入条件 (v) 和 (vi) 的唯一原因，是我们希望在给分配几乎格添加顶元后，仍能保持分配性。

现在可以给出粘合极限的定义了。

定义 3（参见 [Br6, 定义 3]）。给定一个分配几乎格 $\langle I, \leq\rangle$ 以及一个由完全布尔代数组成的系统 $(\mathrm{A}_i : i \in I)$，其完全嵌入为 $id : \mathrm{A}_i <_{\circ} \mathrm{A}_j$（对 $i < j$），并且所有如下形式的图中的投影



是正确的，我们如下定义粘合极限 $\mathrm{A}_\ell = \mathrm{A}_{\mathrm{amal}} = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathrm{A}_i$。首先令 $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i \setminus \{\mathbb{0}\}$。

- 非零条件的集合 D 由无序对 $(p, q) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ 组成（因此 $(p, q) = (q, p)$），满足存在 $i, j \in I$，使得 $p \in \mathrm{A}_i$, $q \in \mathrm{A}_j$，并且 $h_{i,\ i\wedge j}(p) = h_{j,\ i\wedge j}(q)$。
- 通过规定以下条件来定义序关系：若满足下列任一条件，则 $(p', q') \leq (p, q)$:

- $h^{i'}_{i'\wedge i}(p') \leq_i p$ and $h^{j'}_{j'\wedge j}(q') \leq_j q$ or
- $h^{j'}_{j'\wedge i}(q') \leq_i p$ and $h^{i'}_{i'\wedge j}(p') \leq_j q$ or
- $h^{i'}_{i'\wedge i}(p') \leq_i p$ and $h^{i'}_{i'\wedge j}(p') \leq_j q$ or
- $h^{j'}_{j'\wedge i}(q') \leq_i p$ and $h^{j'}_{j'\wedge j}(q') \leq_j q$

其中，(i', j') 是 $(p', q') \in D$ 的见证。

$\mathbf{A}_\ell$ 是由 D生成的完全布尔代数，即 $\mathbf{A}_\ell = \mathrm{r.o.}(D)$。 ⊣

当然，我们的意图是，$\mathbf{A}_\ell$ 在某种意义上比所有 $\mathbf{A}_i$ 都“更大”：它们都完全嵌入到 $\mathbf{A}_\ell$ 中，因此我们可以利用这一概念来定义一种迭代强迫构造。事实确实如此，见下文的定理 3。可以说，D 的定义——以及其完备化 $\mathbf{A}_\ell$ 的定义——看起来相当复杂，尤其是在序关系方面。不过，其定义中需要考虑若干种情形，简单来说是因为我们的条件是无序对。此外，该定义中使用投影，是因为我们考虑的是条件 (p, q) 和 (p', q') 的见证者所遵循的最一般模式。在实际应用中，当 $(p', q') \leq (p, q)$ 成立时，如果我们处于上述定义序关系的四种情形中的第一种，我们将有 $i' \geq i$ 和 $j' \geq j$，其中 (i, j) 和 (i', j') 分别见证 $(p, q) \in D$ 以及 $(p', q') \in D$。注意，此时 $(p', q') \leq (p, q)$ 等价于

- $p' \leq_{i'} p$ and $q' \leq_{j'} q$

因为 $h^{i'}_i(p') \leq_i p$ 和 $p' \leq_{i'} p$ 显然等价（j 和 j'同理）。类似地，我们可以简化另外三种情形。

首先需要检查的一点是，序 $\leq$ 在 D上具有传递性；这很容易验证，详情见 [Br6，观察 6] 。然而，D 上的序通常不是分离的，也就是说，D 中的不同元素可能作为完备化 $\mathbf{A}_\ell$ 中的条件彼此等价（关于这种情况何时发生的几种情形，见 [Br6，观察 9] ）。此外，我们通过映射 $p \mapsto (p, p)$，将每个 $\mathbf{A}_i$ 视为 D 的一个子集，进而视为 $\mathbf{A}_\ell$ 的一个子代数。注意，在此背景下，对于任意条件 $(p, q) \in D$，根据定义 3，我们总有 $(p, q) \leq (p, p) = p$ 且 $(p, q) \leq (q, q) = q$。

定理 3（参见 [Br6、主要引理 7 和引理 8]）。若 $\langle I, \leq \rangle$ 和 $(\mathbf{A}_i : i \in I)$ 如定义 3 中所述，则所有 $\mathbf{A}_i$、$i \in I$ 都完全可嵌入粘合极限 $\mathbf{A}_\ell = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathbf{A}_i$。此外，扩展系统 $(\mathbf{A}_i : i \in I \cup \{\ell\})$ 的所有图中的投影仍然正确。

此处不提供证明，因为参考文献 [Br6] 中对此已有详细说明。不过，稍后我们将在拓扑背景下证明一个更一般的定理，即第 3 节中的定理 6，并可由此推出定理 3。

定义 2 中的条件 (iii) 看起来相当严格，因此人们可能会想，放宽这一条件后是否仍能进行粘合。[Br6] 中的反例 8 表明，一般情况下并非如此，不过在某些情形下或许可以做到。当然，我们仍然可以在这样一个更一般的背景下定义 $\mathbf{A}_\ell$，但完全可嵌入性（定理 3）可能不再成立，因此该定义对迭代理论也就毫无用处。

2 粘合极限的例子

在通过两个基本例子（例 1 和例 2）说明粘合极限在何种意义上推广了两步粘合和直接极限之后，我们将在例 3 至例 5 中强调文献中三种截然不同的构造之间的相似性，即矩阵迭代 [BS], 迭代超幂 [Sh2], 和破碎迭代 [Br6], ，方法是将它们全部纳入粘合极限框架。

例 1（两步粘合，见 [Br6，例 2 和 6]）。设 $I = \{0, 1, 0 \wedge 1\}$ 为三元素分配几乎格。设 $\mathbf{A}_i$ 与 $i \in I$ 为完全布尔代数，且 $\mathbf{A}_{0\wedge 1} <_\circ \mathbf{A}_i$ 满足 $i \in \{0, 1\}$。我们考虑 $\mathrm{amal}_{\mathbb{A}_{0\wedge 1}}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) := \mathbf{A}_\ell = \lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathbf{A}_i$，即在 $\mathbf{A}_{0\wedge 1}$上合并 $\mathbf{A}_0$与 $\mathbf{A}_1$。根据粘合极限的定义，我们看到，$\mathbf{A}_\ell$ 的一个稠密子集由形如 (p, q) 的有序对组成，其中 $p \in \mathbf{A}_0$, $q \in \mathbf{A}_1$且 $h^0_{0\wedge 1}(p) = h^1_{0\wedge 1}(q) \in \mathbf{A}_{0\wedge 1}$；序关系定义为：若 $p' \leq p$ 且 $q' \leq q$，则 $(p', q') \leq (p, q)$。

如果 $\mathrm{A}_{0\wedge 1}=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$ 是平凡强迫，那么 A_ℓ 就是两个强迫概念 A_0 和 A_1的乘积。此外，在一般情形下，我们可以将 A_ℓ 理解为先用 $\mathrm{A}_{0\wedge 1}$ 进行强迫，然后再用商 $\mathrm{A}_0/G_{0\wedge 1}$ 和 $\mathrm{A}_1/G_{0\wedge 1}$ 的乘积进行强迫，其中 $G_{0\wedge 1}$ 是 $\mathrm{A}_{0\wedge 1}$-泛滤子。

合并在强迫理论中并不常用。涉及合并的最著名构造，是 Shelah 基于 ZFC [Sh1] 的相容性所作的射影贝尔性质相容性证明。⊣

例 2（直接极限，见 [Br6，例 7]）。设 I 是一个分配格（因此， I 中的任意两个元素i 和 j 都有一个最小上界 $i\vee j$）。设 $(\mathrm{A}_i:\ i\in I)$ 是一族具有完全嵌入和正确投影的完全布尔代数（其含义见定义 3）。容易看出，$\mathrm{A}_\ell=\lim \mathrm{amal}_{i\in I}\mathrm{A}_I$就是通常的直接极限 $\lim \mathrm{dir}_{i\in I}\mathrm{A}_i$。关键在于，若 (p,q) 属于粘合极限定义中的稠密集，且见证条件为 i 和 j ——这意味着 $p\in \mathrm{A}_i$、 $q\in \mathrm{A}j$，并且$h^i_{i\wedge j}(p)=h^j_{i\wedge j}(q)\in \mathrm{A}_{i\wedge j}$——那么根据正确性， $p\cdot q\in \mathrm{A}_{i\vee j}$是一个非零条件；显然，配对 $(p\cdot q,p\cdot q)$（它在 A_ℓ中与 $p\cdot q$等同）是一个强于 (p,q) 的条件（事实上，它甚至是 A_ℓ中的一个等价条件，见 [Br6，观察 9 (iv)]）。因此，后一类条件在 A_ℓ 中稠密——它们恰好构成直接极限的标准稠密子集。

注意，在特殊情形下， I 有最大元 i_0时，A_ℓ 与 A_{i_0}相同。

直接极限的构造在迭代强迫理论中发挥着基础性作用，可追溯到 Solovay 和 Tennenbaum 关于马丁公理与 Souslin 假设 [ST] 的相容性证明。⊣

例3（矩阵迭代）。粗略地说，矩阵迭代由一个良序的平行有限支撑迭代（有限支撑迭代）系统构成；因此，可以将其视为一个由完全嵌入连接的完全布尔代数二维系统。此类例子有很多，但一般模式如下。设

λ μ $\alpha\le\lambda$ $\mathcal{P}^\gamma=$ γ γ $\alpha\le$ 和 是序数。

λ

通过对 进行同时递归，定义可数链条件强迫的有限支撑迭代 $(\mathrm{P}_\cdot,\dot{\mathrm{Q}}_\cdot:\beta<\lambda)$， $\gamma\le\mu$，使得

(⋆) 对每个 α 和 $\gamma<\delta\le\mu$，P^δ_α 强迫 $\dot{\mathrm{Q}}^\gamma_\alpha$ 是 $\dot{\mathrm{Q}}^\delta_\alpha$ 的子集，并且每个属于 $V^{\mathbb{P}^\gamma_\alpha}$ 的 $\dot{\mathrm{Q}}^\gamma_\alpha$ 极大反链仍是 $\dot{\mathrm{Q}}^\delta_\alpha$ 的极大反链。

接着，对 $\alpha\le\lambda$ 进行归纳可证：对于任意 $\gamma<\delta\le\mu$，$\mathrm{P}^\gamma_\alpha<\circ\,\mathrm{P}^\delta_\alpha$ （并且，当然，对于任意 $\gamma<\delta$ 和 $\alpha\le\beta$，$\mathrm{P}^\gamma_\alpha<\circ\,\mathrm{P}^\delta_\beta$）。事实上，在基本步骤 $\alpha=0$ 中这显然成立（因为所有强迫 P^γ_0 都是平凡的）。在后继步骤 $\beta=\alpha+1$中，由归纳假设 $\mathrm{P}^\gamma_\alpha<\circ\,\mathrm{P}^\delta_\alpha$ 和 (⋆)，很容易推出 $\mathrm{P}^\gamma_\beta<\circ\,\mathrm{P}^\delta_\beta$。若 α 是一个极限序数，则由归纳假设和引理 1 可得 $\mathrm{P}^\gamma_\alpha<\circ\mathrm{P}^\delta_\alpha$。关键在于，根据有限支撑迭代的定义，正确性显然成立，因此可以应用该引理。（事实上，若 $\alpha<\beta$ 和 $\gamma<\delta$，且若 $p^\gamma_\beta=(p^\gamma_\alpha,\dot{q}^\gamma_{[\alpha,\beta)})\in \mathrm{P}^\gamma_\beta=\mathrm{P}^\gamma_\alpha\star\dot{\mathrm{P}}^\gamma_{[\alpha,\beta)}$（其中 $\dot{\mathrm{P}}^\gamma_{[\alpha,\beta}$是余 forcing 的 P^γ_α-名称），那么 $h^{\beta,\alpha}{}^\gamma{}_\gamma(p^\gamma_\beta)=p^\gamma_\alpha$；若现在有一个条件 $p^\delta_\alpha\in \mathrm{P}^\delta_\alpha$，满足 $h^{\alpha,\alpha}{}^\delta{}_{,\gamma}(p^\delta_\alpha)=p^\gamma_\alpha$，那么 $(p^\delta_\alpha,\dot{q}^\gamma_{[\alpha,\beta)})\in \mathrm{P}^\delta_\beta$ 显然是一个公共扩展，正如所需。）

现在让我们转换一下视角：设 $\beta\le\lambda$ 是一个极限序数，且 $\delta\le\mu$ 是任意的。假设对于满足至少一个不等式为严格不等式的 $\gamma\le\delta$ 和 $\alpha\le\beta$，所有 P^γ_α 均已定义，而我们希望定义 P^δ_β。注意，

$$I=\{(\alpha,\gamma):\gamma\le\delta\text{ and }\alpha\le\beta\text{ and (either }\gamma<\delta\text{ or }\alpha<\beta)\}$$

是一个分配几乎格。另请回顾前一段，所有投影都是正确的。因此，我们可以令

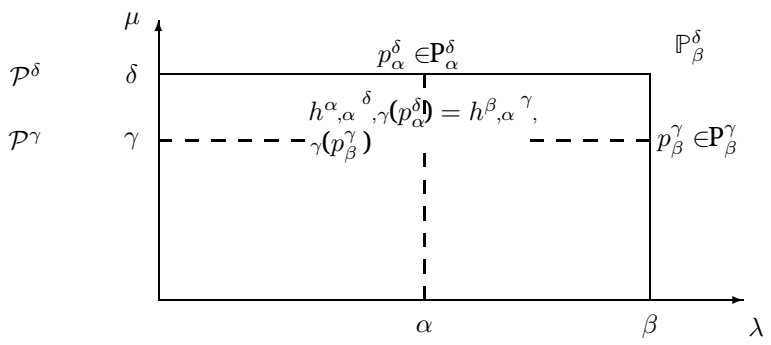
$$\mathbb{P}^\delta_\beta=\lim\mathrm{amal}_{(\alpha,\gamma)\in I}\mathbb{P}^\gamma_\alpha.$$

虽然这在形式上不同于 P^δ_β的标准定义，即

$$\mathbb{P}^\delta_\beta=\lim\mathrm{dir}_{\alpha<\beta}\mathbb{P}^\delta_\alpha,$$

很容易看出，这两个偏序是 forcing 等价的。显然，$\lim \mathrm{dir}^{\alpha<\beta}\mathrm{P}^\delta_\alpha$ 是

lim amal$_{(\alpha,\gamma)\in I}\mathbb{P}^\gamma_\alpha$。



另一方面，给定一个条件 $(p^\delta_\alpha, p^\gamma_\beta)$，它属于定义粘合极限的稠密集，也就是说，$p^\delta_\alpha \in \mathbb{P}^\delta_\alpha$, $p^\gamma_\beta \in \mathbb{P}^\gamma_\beta$，且 $h^{\alpha,\alpha^\delta,\gamma}(p^\delta_\alpha) = h^{\beta,\alpha^\gamma,\gamma}(p^\gamma_\beta) \in \mathbb{P}^\gamma_\alpha$，其中 $\alpha < \beta$ 和 $\gamma < \delta$。我们注意到，由于 $\mathbb{P}^\gamma_\beta$ 是 $\mathbb{P}^\gamma_{\alpha'}$, $\alpha' < \beta$的直接极限，存在 $\alpha' < \beta$，使得 $\alpha' \geq \alpha$，且 $p^\gamma_\beta \in \mathbb{P}^\gamma_{\alpha'}$。然而，这意味着乘积 $p^\delta_\alpha \cdot p^\gamma_\beta$属于 $\mathbb{P}^\delta_{\alpha'}$，而且这个乘积显然是 $(p^\delta_\alpha, p^\gamma_\beta)$ 的一个强化（事实上，根据 [Br6，观察 9 (iv)]，这两个条件等价）。

虽然这为我们提供了在并合极限框架下对矩阵迭代的自然描述，但显然这种方法也存在冗余。

矩阵迭代最初由 Blass 和 Shelah 在其工作中引入 [BS]，用于证明 $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}$ 的相容性（在此情形下，$\dot{\mathbb{Q}}^\gamma_\alpha$ 是带有某个超滤子 $\dot{\mathcal{U}}^\gamma_\alpha$ 的 Mathias 强迫，并且对 $\gamma < \delta$ 进行谨慎的扩张 $\dot{\mathcal{U}}^\delta_\alpha$ carefully extending $\dot{\mathcal{U}}^\gamma_\alpha$，从而确保完全可嵌入性（$\star$）），此后它们被用于大量相容性结果；例如，我们与 Fischer 合作的工作 [BF] 在某种程度上是 [BS]，的对偶；Dow 和 Shelah 关于奇异分裂数的相容性结果 $\mathfrak{s}$ 见 [DS]，；以及 Fischer、Friedman、Mej´ıa 和 Montoya [FFMM]，的一项构造，该构造在一个特殊情形下使用了三维矩阵。⊣

例 4（迭代的迭代，参见 [Br5，第 1] 节）。现在我们来讨论一种构造，它在某种意义上与矩阵迭代正交，并且存在一些具有非平凡粘合极限的有趣例子。回想一下，在矩阵方法中，我们使用同一个递归同时构造许多迭代，使得它们彼此完全嵌入。现在，我们改为使用递归逐步生成迭代，每一步生成一个，从而使较早的迭代嵌入较晚的迭代中。我们称这种设置为迭代的迭代。再次设 μ 和 λ 为序数。通过对 $\alpha \leq \lambda$ 作递归，定义迭代$\mathcal{P}_\alpha = (\mathbb{P}^\gamma_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}^\delta_\alpha : \gamma \leq \mu, \delta < \mu)$，使得

$(\star_1)$ for every γ and $\alpha < \beta \leq \lambda$, $\mathbb{P}^\gamma_\alpha <_\circ \mathbb{P}^\gamma_\beta$.

请注意，我们不要求 $\mathcal{P}_\alpha$ 具有直接极限；对于一般构造而言，极限情形下的 $\mathbb{P}^\delta_\alpha$ 取何值并不重要。在我们设想的应用中，lim dir$_{\gamma<\delta}\mathbb{P}^\gamma_\alpha <_\circ \mathbb{P}^\delta_\alpha$，并且根据 δ，等式可能成立（直接极限情形），也可能不成立。我们将要求

$(\star_2)$ 对于每个 γ 和 $\alpha < \beta \leq \lambda$，$\mathbb{P}^\gamma_\beta$ 强迫 $\dot{\mathbb{Q}}^\gamma_\alpha$ 是 $\dot{\mathbb{Q}}^\gamma_\beta$ 的子集，并且 $V^{\mathbb{P}^\gamma_\alpha}$ 中 $\dot{\mathbb{Q}}^\gamma_\alpha$ 的每个极大反链仍是 $\dot{\mathbb{Q}}^\gamma_\beta$ 的极大反链。

注意它与例3中的 $(\star)$ 相似。显然，$(\star_2)$ 足以保证后继步骤中的 $(\star_1)$——也就是说，如果 $\mathbb{P}^\gamma_\alpha <_\circ \mathbb{P}^\gamma_\beta$，那么 $\mathbb{P}^{\gamma+1}_\alpha <_\circ \mathbb{P}^{\gamma+1}_\beta$ 也成立，因此 $(\star_1)$ 中的问题在于 $\delta \leq \mu$ 是极限序数的情形。如果 $\beta = \alpha + 1$ 是后继，从 $\mathcal{P}_\alpha$ 中选择 $\mathcal{P}_\beta$ 将保证 $(\star_1)$，所以只需考虑极限 $\beta \leq \lambda$。

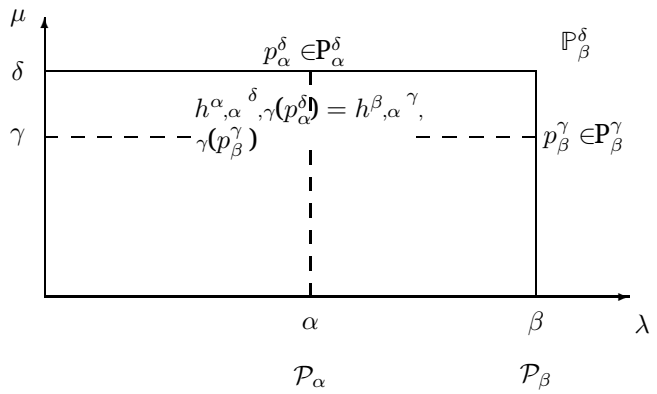
正如前面的例子一样，我们现在得到一个分配几乎格

$$I = \{(\alpha, \gamma) : \gamma \leq \delta \text{ and } \alpha \leq \beta \text{ and (either } \gamma < \delta \text{ or } \alpha < \beta)\}.$$

假设由 I 的成员索引的所有图中的投影都是正确的。那么我们可以定义粘合极限

$$\mathbb{P}^\delta_\beta = \lim \mathrm{amal}_{(\alpha,\gamma)\in I} \mathbb{P}^\gamma_\alpha$$

并且，由定理 3 可知，$(\star_1)$ 仍然成立，即对于 $\alpha<\beta$，$\mathrm{P}^\delta_\alpha <_\circ \mathrm{P}^\delta_\beta$；对于 $\gamma<\delta$，$\mathrm{P}^\gamma_\beta <_\circ \mathrm{P}^\delta_\beta$，因此 $\mathcal{P}_\beta$ 最终将成为一次迭代，并且正确性得以保留。关于这一特殊情况的直接证明（以及更多内容），请参见 [Br5，引理 13]（或者也可参见 [Br4，引理 7]„，不过遗憾的是，这篇论文存在一些小错误）。



当然，P^δ_β 的稠密子集中的条件仍然是满足 $p^\delta_\alpha \in \mathrm{P}^\delta_\alpha$、$p^\gamma_\beta \in \mathrm{P}^\gamma_\beta$，并且$h^{\alpha,\alpha^\delta,\gamma}(p^\delta_\alpha) = h^{\beta,\alpha^\gamma,\gamma}(p^\gamma_\beta) \in \mathrm{P}^\gamma_\alpha$ 的数对 $(p^\delta_\alpha, p^\gamma_\beta)$，其中 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma<\delta$。

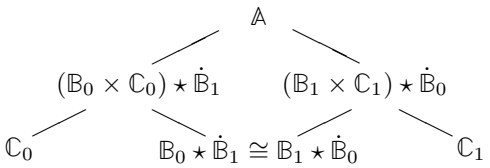
Shelah 曾使用这一构造 [Sh2]，利用可测基数的相容性来证明 $\mathfrak{d}<\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{u}<\mathfrak{a}$ 的相容性。我们简要概述 $\mathfrak{d}<\mathfrak{a}$ 的情形（细节见 [Br5，第 1] 节）：设 κ 是可测基数，设 $\mathcal{D}$ 是 κ上的 κ-完备超滤子，并设 $\lambda^\omega=\lambda>\mu>\kappa$ 是正则基数。$\mathcal{P}_0$ 是长度为 μ的 Hechler 强迫有限支撑迭代。若 $\beta=\alpha+1$ 是后继，$\mathcal{P}_\beta$ 就是 $\mathcal{P}_\alpha$ 经由 $\mathcal{D}$得到的超幂。此时，$\dot{\mathrm{Q}}^\gamma_\beta$，$\gamma<\mu$仍可视为 Hechler 强迫。对于极限 β，按以下方式处理：若 $\delta=\gamma+1$ 是后继，则 $\mathrm{P}^\delta_\beta = \mathrm{P}^\gamma_\beta \star \dot{\mathrm{Q}}^\gamma_\beta$ 是采用 Hechler 强迫的迭代；若 δ 是极限，则取前一段中描述的粘合极限。最终，我们将强迫得到$\mathfrak{b}=\mathfrak{d}=\mu$（因为 Hechler 泛对象构成一个尺度）以及 $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}=\lambda$（因为超幂会摧毁极大几乎不交族）。关于 $\mathfrak{u}<\mathfrak{a}$ 相容性（稍微复杂一些）的证明，见 [Br4]。

事实证明，在这一特定构造中，对于极限 $\delta\le\mu$ 以及任意 α，除非 $cf(\delta)=\kappa$，否则 P^δ_α 是各个 $\gamma<\delta$对应的 P^γ_α的直接极限；对于极限 $\beta\le\lambda$以及任意 γ，除非 $cf(\beta)=\omega$，否则 P^γ_β是各个 $\alpha<\beta$对应的 P^γ_α的直接极限。因此，在许多情况下，粘合极限归结为直接极限（详情见 [Br5，引理 14]）。然而，若 $cf(\delta)=\kappa$ 且 $cf(\beta)=\omega$，那么 P^δ_β就是先前强迫概念的非平凡粘合极限。我们还注意到，在这种情况下，保持可数链条件（在直接极限中这是平凡的）成为一个核心问题（同样参见 [Br5]中的引理 14），因为即使是两步粘合也远不能保证保持可数链条件（参见 [Br6，反例 10]）。⊣

例5（破碎迭代 [Br6]）。粗略地说，破碎迭代是一种矩阵式的二维迭代，在极限阶段添加随机实数，而不是科恩实数。这意味着我们将不再像例3那样使用有限支撑和直接极限，因此粘合极限就成了必需。“在极限阶段添加随机实数”在这里是指，嵌入整个迭代中的基本强迫是一个大型随机代数——这确实与有限支撑迭代的情形互为对偶：大型科恩代数（可以视为该迭代的基本步骤，尽管这并非通常的观点）嵌入其中。在迭代的后续步骤中，我们希望添加其他实数 r，使它们相对于某些随机实数是泛的，同时大多数随机实数仍然相对于 r 是随机的（而不只是相对于基模型）。这可以通过随机强迫的交换性实现。

事实证明，对于这类迭代，我们在后继步骤中也需要粘合极限——不过，如果二维系统中的两个序数都是后继序数，这就归结为上文例 1 中解释的两步粘合。看看其中的缘由颇有启发。假设

我们只有两个随机实数， b_0 和 b_1，它们由乘积测度代数 $\mathsf{B}_0 \star \mathsf{B}_1$ 添加；该代数依据交换性与 $\mathsf{B}_1 \star \mathsf{B}_0$ forcing 等价。现在，我们还想分别通过 C_0和 C_1, 添加两个科恩实数 c_0 和 c_1，使得 c_0 在 b_0 上是科恩实数，且 c_1 在 b_1 上是科恩实数，但同时——这正是关键—— b_1 在 c_0 上仍然是随机实数，且 b_0 在 c_1上仍然是随机实数。因此，一方面我们需要用 $\mathsf{B}_0 \star \mathsf{C}_0 \star \mathsf{B}_1$ 强迫（它与 $(\mathsf{B}_0 \times \mathsf{C}_0) \star \mathsf{B}_1$ forcing 等价），另一方面则需要用 $\mathsf{B}_1 \star \mathsf{C}_1 \star \mathsf{B}_0$强迫（与 $(\mathsf{B}_1 \times \mathsf{C}_1) \star \mathsf{B}_0$等价）。由此得到如下图



其中，$(\mathsf{B}_0 \times \mathsf{C}_0) \star \mathsf{B}_1$ 与 $(\mathsf{B}_1 \times \mathsf{C}_1) \star \mathsf{B}_0$ 在 $\mathsf{B}_0 \star \mathsf{B}_1$ 上的两步粘合 $\mathsf{A} = \mathrm{amal}_{\mathbb{B}_0 \star \dot{\mathbb{B}}_1}((\mathsf{B}_0 \times \mathsf{C}_0) \star \mathsf{B}_1, (\mathsf{B}_1 \times \mathsf{C}_1) \star \mathsf{B}_0)$ 自然地出现。这是破碎迭代的基本构件。

现在让我们参照前两个例子，以一种稍加简化的方式考察一般情形。再次假设 μ 和 λ 是序数。令 $\mu \dot\cup \lambda$ 表示 μ 与 λ的不交并。基本强迫 $\mathsf{B}_{\mu \dot\cup \lambda}$ 是指标集为 $\mu \dot\cup \lambda$的测度代数。此外，假设 $\delta \leq \mu$ 和 $\beta \leq \lambda$（这次我们不要求 δ 和 β 是极限序数）。再次考虑分配几乎格

$$I = \{(\alpha, \gamma) : \gamma \leq \delta \text{ and } \alpha \leq \beta \text{ and } (\text{either } \gamma < \delta \text{ or } \alpha < \beta)\}.$$

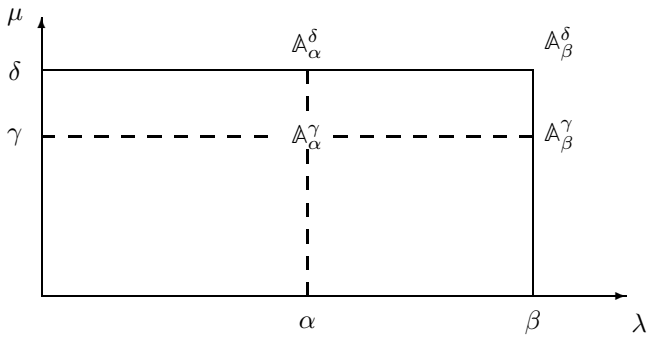
假设我们已经（通过对良基集 I 进行递归）构造了一个完全布尔代数系统 $(\mathsf{A}^\gamma_\alpha : (\alpha, \gamma) \in I)$，其中有完全嵌入 $\mathsf{A}^\gamma_\alpha \lessdot \mathsf{A}^{\gamma'}_{\alpha'}$，对应于 $\gamma \leq \gamma'$ 和 $\alpha \leq \alpha'$，使得

$$\mathbb{A}^\gamma_\alpha = \mathbb{E}^\gamma_\alpha \star \dot{\mathbb{B}}_{[\gamma,\delta) \dot\cup [\alpha,\beta)}$$

其中 E^γ_α 是某个包含 $\mathsf{B}_{\gamma \dot\cup \alpha}$ 作为完备子代数的完全布尔代数（因此 E^γ_α 会添加“第一批” $\gamma \dot\cup \alpha$ 个随机实数，也可能添加其他一些泛对象，而“接下来”的 $[\gamma, \delta) \dot\cup [\alpha, \beta)$ 个随机实数将在 E^γ_α 扩张上是泛的），并且以 I 的成员为指标的所有图中的投影都是正确的。然后我们令

$$\mathbb{A}^\delta_\beta = \lim \mathrm{amal}_{(\alpha,\gamma) \in I} \mathbb{A}^\gamma_\alpha.$$

根据定理 3，我们知道所有 A^γ_α、$(\alpha, \gamma) \in I$ 都完全嵌入到 A^δ_β 中，并且正确性得以保持。



请注意，这里我们只解释了单步 (β, δ) 中的操作。要建立整个迭代，适合采用更复杂的框架，以序数四元组而非序数对作为指标；详见 [Br6 第 4] 节。这里的正确性并非显而易见（不同于 fsi），因为我们需要证明：若一个系统具有正确投影，那么当系统中的所有完全布尔代数都用随机强迫 [Br6 引理 3] 进行迭代后，这一性质仍然成立。最后但同样重要的是，保持可数链条件是一个核心问题 [Br6 第 3] 节。

破碎迭代已用于 [Br6]，以证明疏集非数 >疏集覆盖数> $\aleph_1$ 的相容性。具体做法是采用科恩强迫的破碎迭代，也就是说，对于每一对序数（α， γ）

其中 $\alpha < \lambda$ 并且 $\gamma < \mu$ 会添加一个在 $\mathrm{B}_{\alpha\cup\gamma}$ 上泛的科恩实数$c_{\alpha,\ \gamma}$——其余随机实数仍然在该科恩实数上保持随机。很容易看出，这将强迫疏集覆盖数 $=$零测集非数 $= \mu$，以及零测集覆盖数 $=$ 疏集非数 $= \lambda$，其中 $\mu < \lambda$ 是正则不可数基数 [Br6，第 4 节，事实 23 至 26]。更多结果见 [Br6，第 6] 节。⊣

3 粘合极限的拓扑解释

根据斯通对偶，关于（完全）布尔代数的所有结果都有拓扑解释，而事实证明，对于粘合极限，这种拓扑版本甚至更为一般。我们先回顾对偶性的基础知识，然后介绍与定理 3 相对应的拓扑构造。

给定一个布尔代数 A（不一定是完全的），其斯通空间 $X_{\mathbb{A}}$ 由 A 上的所有超滤子组成，拓扑由 A 的元素给出：对于每个 $a \in \mathrm{A}$，$O_a = \{x \in X_{\mathbb{A}} :\ a \in x\}$ 都是一个基本开集，并且每个开集都是此类集合的并。众所周知，$X_{\mathbb{A}}$ 是一个紧致零维（= 存在由既开又闭集构成的基）豪斯多夫空间（事实上，由于 $X_{\mathbb{A}} \setminus O_a = O_{-a}$ 所有O_a 都是既开又闭集）；反过来，给定这样的空间 X，存在一个布尔代数 A，使得 $X = X_{\mathbb{A}}$，因此布尔代数与紧致零维豪斯多夫空间之间存在一一对应关系 [Ko，第 3]章。接下来，若 $\mathrm{A}_0 \subseteq \mathrm{A}_1$ 是布尔代数，则投影映射$p = p_0^1 :\ X_{\mathbb{A}_1} \to X_{\mathbb{A}_0}$，$x \mapsto x \cap \mathrm{A}_0$ 是一个连续满射。再假设 A_0 和 A_1 是完全布尔代数。以下结果众所周知，但为求完整起见，我们仍给出证明。

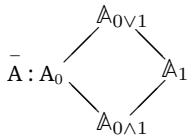
事实 4. $\mathrm{A}_0 <\circ \mathrm{A}_1$ 当且仅当 p 是开映射（即开集的像是开集）。

证明。令 $h = h_0^1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_0$ 为与该嵌入对应的投影映射。对于正向，只需证明基本既开又闭集的像是既开又闭集，这显然足够。令 $a_1 \in \mathrm{A}_1$。我们断言 $p(O_{a_1}) = O_{h(a_1)}$。事实上，令 $x \in O_{a_1}$，也就是说 $a_1 \in x$。那么，根据嵌入的完备性，$h(a_1) \in x$，因此 $p(x) = x \cap \mathrm{A}_0 \in O_{h(a_1)}$。另一方面，若 $y \in O_{h(a_1)}$，即 $h(a_1) \in y$，则 $y \cup \{a_1\}$是 A_1 上的滤子基，因此可将其扩张为超滤子 x。显然 $p(x) = y$，因此$y \in p(O_{a_1})$。

对于逆向蕴含，假设该嵌入不完备。因此存在 $a_1 \in \mathrm{A}_1 \setminus \{\mathbb{0}\}$ 使得 $h(a_1) = \mathbb{0}$。于是 $\bigvee\{a_0 \in \mathrm{A}_0 : a_0 \cdot a_1 = \mathbb{0} \text{ in } \mathrm{A}_1\} = \mathbb{1} \text{ in } \mathrm{A}_0,$，并且 $\bigcup\{O_{a_0} :\ a_0 \in \mathrm{A}_0$ 和 $a_0 \cdot a_1 = \mathbb{0} \text{in } \mathrm{A}_1\}$ 在 $X_{\mathbb{A}_0}$ 中是开稠密的。由于该集合显然与 $p(O_{a_1})$ 不相交，后者不可能在 $X_{\mathbb{A}_0}$ 中是开集。 □

接下来，我们在拓扑背景下重新解释正确性。

Fa命题 5. 假设我们有完全布尔代数 $\mathrm{A}_{0\wedge1} <\circ \mathrm{A}_i <\circ \mathrm{A}_{0\vee1}$, $i \in \{0,1\}$。图表中的投影 m



当且仅当对于所有满足 $p_{0\wedge1}^0(x_0) = p_{0\wedge1}^1(x_1)$ 的 $x_0 \in X_{\mathbb{A}_0}$ 和 $x_1 \in X_{\mathbb{A}_1}$，存在 $x_{0\vee1} \in X_{\mathbb{A}_{0\vee1}}$ 使得对于 $i \in \{0,1\}$ 有 $p_i^{0\vee1}(x_{0\vee1}) = x_i$。

证明。对于正向方向，只需验证 $x_0 \cup x_1$ 是 $\mathrm{A}_{0\vee1}$ 上的滤子基，因为这样我们就可以将其扩展为一个超滤子 $x_{0\vee1}$，而它显然具有所需的性质。为此，取 $a_i \in x_i$、$i \in \{0,1\}$。那么 $h_{0\wedge1}^i(a_i) \in p_{0\wedge1}^i(x_i)$（见前面的证明）。特别是，$h_{0\wedge1}^0(a_0)$ 和 $h_{0\wedge1}^1(a_1)$ 在 $\mathrm{A}_{0\wedge1}$ 中必定相容，因为它们属于同一个超滤子。根据正确性，a_0 和 a_1 在 $\mathrm{A}_{0\vee1}$ 中相容，证毕。

对于逆向蕴含，设 $a_i \in \mathrm{A}_i$, $i \in \{0,1\}$，使得 $a_{0\wedge1} := h_{0\wedge1}^0(a_0) = h_{0\wedge1}^1(a_1)$。根据前一个证明中的论证，任意超滤子 $x_{0\wedge1} \in O_{a_{0\wedge1}}$ 都可以扩展为 A_i 上的超滤子 $x_i \in O_{a_i}$，并且显然 $p_{0\wedge1}^i(x_i) = x_{0\wedge1}$。因此，根据假设，存在一个超滤子 $x_{0\vee1} \in X_{\mathbb{A}_{0\vee1}}$，使得$p_i^{0\vee1}(x_{0\vee1}) = x_i$。显然，$x_{0\vee1} \in O_{a_0} \cap O_{a_1}$ 属于 $X_{\mathbb{A}_{0\vee1}}$。这意味着，a_0 和 a_1 在 $\mathrm{A}_{0\vee1}$中必相容。 □

现在让我们暂且不考虑完全布尔代数，转而讨论更一般的紧豪斯多夫空间（即不再要求零维性）。于是我们得到:

定理 6。设 $\langle I、\leq\rangle$ 为一个分配几乎格，且 $(X_i:\ i\in I)$ 为非空紧豪斯多夫空间。假设对于 $i\leq j$，存在连续开满射 $p_i^j\colon X_j\to X_i$，使得

- $i\leq j\leq k$ 蕴含 $p_i^k=p_i^j\circ p_j^k$（交换性），并且

如果• 存在，那么对于所有满足 $p^i_{i\wedge j}(x_i)=p^j_{i\wedge j}(x_j)$ 的 $x_i\in X_i$ 和 $x_j\in X_j$，存在 $x_{i\vee j}\in X_{i\vee j}$，使得 $p_i^{i\vee j}(x_{i\vee j})=x_i$ 且 $p_j^{i\vee j}(x_{i\vee j})=x_j$（正确性）。

那么存在一个紧豪斯多夫空间 X_ℓ 以及连续开满射 $p_i^\ell\colon X_\ell\to X_i, i\in I$，使得

- $i\leq j$ 蕴含 $p_i^\ell=p_i^j\circ p_j^\ell$（交换性），并且
- 对于所有的 $x_i\in X_i$ 和 $x_j\in X_j$，若满足 $p^i_{i\wedge j}(x_i)=p^j_{i\wedge j}(x_j)$，则存在 $x_\ell\in X_\ell$ 使得 $p_i^\ell(x_\ell)=x_i$ 且 $p_j^\ell(x_\ell)=x_j$ (正确性)。

证明。令

$$X_\ell:=\left\{x_\ell\in\prod_{i\in I}:p_i^j(x_\ell(j))=x_\ell(i)\text{ for all }i\leq j\right\}\subseteq\prod_{i\in I}X_i$$

赋予积拓扑。注意，如果 $x\in\prod_{i\in I}X_i\setminus X_\ell$，那么对于某个 $i<j$，有 $p_i^j(x(j))\neq x(i)$；又由于 X_i 是豪斯多夫的，因此存在 x 的一个开邻域与 X_ℓ 不相交。因此，X_ℓ 是 $\prod_{i\in I}X_i$ 的闭子集，故其自身也是紧豪斯多夫空间。定义投影映射

$$p_i^\ell:X_\ell\to X_i,x_\ell\mapsto x_\ell(i).$$

根据积拓扑的定义，p_i^ℓ 显然是连续的。此外，根据 X_ℓ 和 p_i^ℓ 的定义，我们可知

$$p_i^\ell(x_\ell)=x_\ell(i)=p_i^j(x_\ell(j))=p_i^j(p_j^\ell(x_\ell))$$

因此交换性成立。接下来我们证明 $X_\ell\neq\emptyset$，事实上，所有的 p_i^ℓ 都是满射。为此，称 $F\subseteq I$ 是闭的，如果对于所有的 i、$j\in F$、$i\wedge j$，以及 $i\vee j$（若存在）也都属于 F。显然，如果 F 是有限的，其闭包 $\mathrm{cl}(F)$（包含 F 的最小闭集）也有限。对于有限的闭 $F\subseteq I$，令

$$Y_F=\left\{x\in\prod_{j\in F}X_j:p_k^j(x(j))=x(k)\text{ for all }k\leq j\text{ belonging to }F\right\}.$$

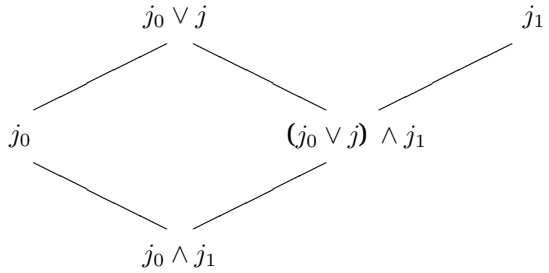
断言 6.1. 设 $F\subseteq G\subseteq I$ 是有限闭集，且设 $x\in Y_F$。那么存在 $y\in Y_G$ 扩张 x。

证明。显然，只需证明在 G 是 $F\cup\{j\}$ 的闭包且 $j\in I\setminus F$ 任意的情形下结论成立。注意，由于 I 是分配几乎格且 F 是闭的，F 要么有唯一的极大元 j_0，要么有两个顶元 j_0 和 j_1，使得 $j_0\vee j_1$ 不存在。

在前一种情形下，要么 $j_0\vee j$ 存在，此时我们令 $y(j_0\vee j)$ 满足 $p_{j_0}^{j_0\vee j}(y(j_0\vee j))=x(j_0)$，然后通过投影将 y 扩张为 G；要么 $j_0\vee j$ 不存在，并且 G 中必定有第二个顶元 j'，其中 $j'\geq j$。此时，我们选择 $y(j')$，使得 $p_{j_0\wedge j'}^{j'}(y(j'))=p_{j_0\wedge j'}^{j_0}(x(j_0))$，然后再次通过投影进行扩张。

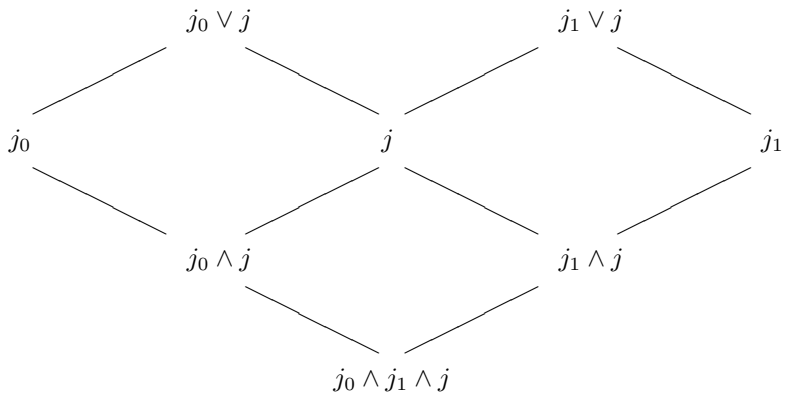
在后一种情况下，$j_0\vee j$ 或 $j_1\vee j$ 存在，或者两者都存在。如果只存在一个，比如说 $j_0\vee j$，令 $y((j_0\vee j)\wedge j_1)=p^{j_1}{}_{(j_0\vee j)\wedge j_1}(x(j_1))$，并注意到 $p^{j_0}_{j_0\wedge j_1}(x(j_0))=p^{(j_0\vee j}{}_{j_0\wedge j_1}{}^{\wedge j_1)}(y((j_0\vee j)\wedge j_1))$，因此根据正确性，存在 $y(j_0\vee j)\in X_{j_0\vee j}$ 使得 $p_{j_0}^{j_0\vee j}(y(j_0\vee j))=x(j_0)$ 且 $p^{j_0\vee j}{}_{(j_0\vee j)\wedge j_1}(y(j_0\vee j))=$

$y((j_0 \vee j) \wedge j_1)$。



然后通过投影将 y 扩展到 G 的其余部分。

如果两者都存在，首先令 $y(j_0 \wedge j) = p^{j_0}_{j_0 \wedge j}(x(j_0))$ 且 $y(j_1 \wedge j) = p^{j_1}_{j_1 \wedge j}(x(j_1))$，并注意到 $p^{j_0 \wedge j}_{j_0 \wedge j_1 \wedge j}(y(j_0 \wedge j)) = p^{j_1 \wedge j}_{j_0 \wedge j_1 \wedge j}(y(j_1 \wedge j))$，因此根据正确性，我们可以找到 $y(j) \in X_j$，使得 $p^j_{j_0 \wedge j}(y(j)) = y(j_0 \wedge j)$ 且 $p^j_{j_1 \wedge j}(y(j)) = y(j_1 \wedge j)$。接下来，再次根据正确性，找到 $y(j_0 \vee j) \in X_{j_0 \vee j}$ 和 $y(j_1 \vee j) \in X_{j_1 \vee j}$，使得 $p^{j_0 \vee j}_{j_0}(y(j_0 \vee j)) = x(j_0)$、$p^{j_0 \vee j}_{j}(y(j_0 \vee j)) = y(j)$、$p^{j_1 \vee j}_{j_1}(y(j_1 \vee j)) = x(j_1)$ 以及 $p^{j_1 \vee j}_{j}(y(j_1 \vee j)) = y(j)$。



最后，通过投影将其扩展到 G。 □

命题 6.2。设 $x_i \in X_i$。存在 $x_\ell \in X_\ell$，使得 $x_\ell(i) = x_i$。更一般地，若 $F \subseteq I$ 是闭的且 $y \in Y_F$，则存在扩展 y 的 $x_\ell \in X_\ell$。

证明。显然，第一个陈述是第二个陈述在 $F = \{i\}$ 时的特例。一般情形由前一个断言和紧致性得出：固定所需的 F 和 $y \in Y_F$。对于有限闭的 $G \supseteq F$，定义

$$Z_G = \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : y \subseteq x \text{ and } p^j_i(x(j)) = x(i) \text{ for all } i \leq j \text{ belonging to } G \right\}.$$

显然，Z_G 是乘积 $\prod_{i \in I} X_i$ 的闭子集。根据断言 6.1，所有 Z_G 都非空。因此，利用紧致性可知，$\bigcap\{Z_G :\ G \supseteq F \text{ 是有限闭的，}\}$ 非空，而且此交集中的任意 x_ℓ 都属于 X_ℓ 并扩展 y。

□

因此，所有 p^ℓ_i 都是满射。接下来我们证明正确性。设 i、$j \in I$。若 $i \vee j$ 存在，则由原系统的正确性和前一个断言可得。若 $i \vee j$ 不存在，则 $F = \{i, j, i \wedge j\}$ 是一个闭集；并且若 $x_i \in X_i$ 和 $x_j \in X_j$ 满足 $p^i_{i \wedge j}(x_i) = p^j_{i \wedge j}(x_j)$，那么通过定义 y，使得 $y(i) = x_i$、$y(j) = x_j$，以及 $y(i \wedge j) = p^i_{i \wedge j}(x_i)$，我们可知 $y \in Y_F$。根据前一个断言，存在扩展 y 的 $x_\ell \in X_\ell$，而这个 x_ℓ 便证明了正确性。

接下来只需证明 p^ℓ_i 是开集。为此，令 $A = X_\ell \cap \left(\prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i \right) \subseteq X_\ell$为一个基本开集，其中 $F \subseteq I$ 是有限集，且对 $i \in F$，$U_i \subseteq X_i$ 是开集。不失一般性，我们可以假设 F 是闭集。那么 F 要么有一个极大元 i_0，要么有两个顶元 i_0 和 i_1。在第一种情况下，令

$$V_{i_0} = \bigcap_{i \leq i_0} \left(p^{i_0}_i\right)^{-1}(U_i) \subseteq U_{i_0} \text{ and } V_i = p^{i_0}_i\left(V_{i_0}\right) \subseteq U_i$$

对 $i \in F$。在第二种情况下，先对 $n \in \{0,1\}$定义 $V'_{i_n} = \bigcap_{i \le i_n} \left(p_i^{i_n}\right)^{-1}(U_i) \subseteq U_{i_n}$，然后令

$$V_{i_0 \wedge i_1} = p_{i_0 \wedge i_1}^{i_0}\left(V'_{i_0}\right) \cap p_{i_0 \wedge i_1}^{i_1}\left(V'_{i_1}\right) \subseteq U_{i_0 \wedge i_1}$$

and

$$V_{i_n} = V'_{i_n} \cap \left(p_{i_0 \wedge i_1}^{i_n}\right)^{-1}\left(V_{i_0 \wedge i_1}\right) \subseteq U_{i_n} \text{ and } V_i = p_i^{i_n}\left(V_{i_n}\right) \subseteq U_i$$

对于 $i \in F$with $i \le i_n$, $n \in \{0,1\}$ （容易验证，这对 $i \in F$with $i \le i_0 \wedge i_1$ 定义良好）。现在我们断言：

命题6.3. 所有 V_i, $i \in F$ 都是开集，并且对于所有 $i \le j$from F, $V_i = p_i^j(V_j)$。

证明。显然，开性由映射 p_i^j 的连续性和开性得出。此外，若 $j \le i_0$，则有 $V_i = p_i^{i_0}(V_{i_0}) = p_i^j(p_j^{i_0}(V_{i_0}))$ $= p_i^j(V_j)$。第二种情形下若 $j \le i_1$，同理可证。 □

命题6.4. $A = X_\ell \cap \left(\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i\right)$。

证明。由于 V_i 是 U_i 的子集，右侧的集合显然是 A 的子集。我们证明反向包含。首先考虑只有一个极大元 i_0 的情形。令$x_\ell \in A$。那么，对于任意 $i \in F$，都有 $p_i^{i_0}(x_\ell(i_0)) = x_\ell(i) \in U_i$。特别地，对于任意 $i \in F$，有 $x_\ell(i_0) \in (p_i^{i_0})^{-1}(U_i)$，并且由此可得 $x_\ell(i_0) \in V_{i_0}$。因此， $x_\ell(i) = p_i^{i_0}(x_\ell(i_0)) \in p_i^{i_0}(V_{i_0})$ $= V_i$ 也成立，且 x_ℓ 属于右侧。

当我们有两个顶元 i_0 和 i_1时，基本上可以用同样的方法进行论证。首先论证，对于 $n \in \{0,1\}$，$x_\ell(i_n)$ $\in V'_{i_n}$。于是 $x_\ell(i_0 \wedge i_1) = p_{i_0 \wedge i_1}^{i_0}(x_\ell(i_0)) = p_{i_0 \wedge i_1}^{i_1}(x_\ell(i_1)) \in V_{i_0 \wedge i_1}$，因此 $x_\ell(i_n) \in V_{i_n}$ 对于 $n \in \{0,1\}$ 成立。因此，对于 $i \le i_n$、 $n \in \{0,1\}$， $x_\ell(i) = p_i^{i_n}(x_\ell(i_n)) \in p_i^{i_n}(V_{i_n}) = V_i$ 同样成立，而 x_ℓ 属于右侧。 □

断言 6.5. 给定 $i \in F$ 和 $x_i \in V_i$，存在 $y \in Y_F \cap \left(\prod_{j \in F} V_j\right)$ 使得 $y(i) = x_i$。因此，对于所有 $i \in F$， $p_i^\ell(A) = V_i$。

证明。首先假设 F 中有一个极大元 i_0。因此 $i \le i_0$ 和 $V_i = p_i^{i_0}(V_{i_0})$。于是我们可以找到 $y(i_0) \in V_{i_0}$，使得 $p_i^{i_0}(y(i_0)) = x_i$。现在通过投影将 y 扩展到整个 Y_F。

如果 F 中有两个顶元 i_0 和 i_1，不失一般性，我们可以假设 $i \le i_0$。如前一段所述，我们找到 $y(i_0) \in V_{i_0}$，使得 $p_i^{i_0}(y(i_0)) = x_i$。令 $y(i_0 \wedge i_1) = p_{i_0 \wedge i_1}^{i_0}(y(i_0)) \in p_{i_0 \wedge i_1}^{i_0}(V_{i_0}) = V_{i_0 \wedge i_1}$。由于 $V_{i_0 \wedge i_1} = p_{i_0 \wedge i_1}^{i_1}(V_{i_1})$，我们可以找到 $y(i_1) \in V_{i_1}$，使得 $p_{i_0 \wedge i_1}^{i_1}(y(i_1)) = y(i_0 \wedge i_1)$。再次通过投影将 y 扩展到整个 Y_F。

对于第二个陈述，注意到 $p_i^\ell(A) \subseteq V_i$ 根据前一个命题（命题6.4）可立即得到，而$V_i \subseteq p_i^\ell(A)$则由第一部分和命题 6.2 得出。 □

因此，映射 p_i^ℓ 全部都是开映射，定理的证明也就完成了。 □

致谢。感谢 David Fremlin 多年前向我们指出了拓扑联系。

参考文献

[BJ] T. Bartoszyński 与 H. Judah，《集合论：实直线的结构》，A K Peters，Wellesley，1995。[Bl] A. Blass，《连续统的组合基数特征》，载于：《集合论手册》（M. Foreman 与 A. Kanamori 编），Springer，Dordrecht Heidelberg London New York，2010，395-489。[BS] A. Blass 与 S. Shelah，《具有小生成集的超滤子》，《以色列数学杂志》65（1989），259-271。[Br1] J. Brendle，《极大几乎不交族与迭代理论》，载于：《逻辑与代数》（Y. Zhang 编），Contemp. Math. 302（2002），Amer. Math. Soc.，Providence，1-31。

[Br2] J. Brendle，《几乎不交数可能具有可数余终性》，《美国数学会汇刊》355（2003），2633-2649。[Br3] J. Brendle，《模板与迭代：Luminy 2002 讲义》，RIMS K¯oky¯uroku 1423（2005），1-12。[Br4] J. Brendle，《极大几乎不交族与超滤子》，《查理大学学报——数学与物理》48（2007），19-35。[Br5] J. Brendle，《与有限支撑迭代相关的现代强迫技术：超幂、模板与子模型》，预印本，arXiv:2101.11494。[Br6] J. Brendle，《破碎迭代》，预印本。[BF] J. Brendle 与 V. Fischer，《极大几乎不交族、分裂族与大连续统》，《符号逻辑杂志》76（2011），198-208。[DS] A. Dow 与 S. Shelah，《论分裂数的余终性》，《数学探索》29（2018），382-395。[FFMM] V. Fischer、S. Friedman、D. Mej´ıa 与 D. Montoya，《有限支撑迭代的相容系统》，《符号逻辑杂志》83（2018），208-236。[Ha] L. Halbeisen，《组合集合论：强迫入门》，第2版，Springer，London，2017。[Je] T. Jech，《集合论》，第三千年版，修订扩充版，Springer，Berlin，2003。[Ko] S. Koppelberg，《布尔代数一般理论》，载于：《布尔代数手册》（J. D. Monk 与 R. Bonnet 编），第1卷，North-Holland，Amsterdam New York Oxford Tokyo，1989。[Ku] K. Kunen，《集合论》，《逻辑研究》34，College Publications，London，2011。[Sh1] S. Shelah，《能否除去 Solovay 的不可达基数？》，《以色列数学杂志》48（1984），1-47。[Sh2] S. Shelah，《连续统的两个基数不变量 $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ 以及 FS 线性有序迭代强迫》，《数学学报》192（2004），187-223。[ST] R. Solovay、S. Tennenbaum，《迭代 Cohen 扩张与 Souslin 问题》，《数学年刊》（第2辑）94（1971），201-245。