arXiv:2302.05106v1 [math.RA] 10 Feb 2023

矩阵代数的华林问题（二）

MATEJ BREŠAR[1,2,3] 和 PETER ŠEMRL[1,3]

摘要。设 f 是代数闭域 F 上的一个次数为 $m \geq 1$ 的非交换多项式，且 F 的特征为零。若 $n \geq m-1$ 和 α_1、 α_2、 α_3 是来自 F 的非零元素，并满足 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$，那么 F 上的每个迹为零的 $n \times n$ 矩阵，都可以写成 $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ 的形式，其中某个 A_i 属于 $M_n(F)$ 中 f 的像。

1. 引言

2011 年，Larsen、Shalev 和 Tiep [5] 证明：给定一个词 $w = w(x_1,\ldots,x_m) \neq 1$，则任意阶充分大的有限非阿贝尔单群 G 中的每个元素，都可以表示为来自 $w(G)$ 的两个元素之积，其中 $w(G)$ 是由 w 诱导的词映射的像。这一结果彻底解决了有限单群的华林问题，并涵盖了此前获得的若干部分结果。特别地，2009 年，Shalev [6] 证明，在相同假设下， G 中的每个元素都是来自 $w(G)$ 的三个元素之积。

在近期的论文 [1, 2], 中，作者们开始研究代数中的各种类似华林型问题。本文篇幅较短，重点讨论其中一个似乎与群论中的华林问题尤为接近的问题。该问题在 [2] 中被提出为问题 4.8，内容如下：给定一个系数取自域 F 的非恒定非交换多项式 f，那么对于任意充分大的 n，每个迹为零的 $n \times n$ 上的矩阵 T 是否都是来自 $f(M_n(F))$的两个元素之差，其中 $f(M_n(F))$是 f 在矩阵代数 $M_n(F)$中的像？遗憾的是，我们无法给出确定的答案，但会向解决这一问题迈进一步。具体而言，在 F是特征零代数闭域且 f 的次数不超过 $n+1$的假设下，我们将证明 T 是来自 $f(M_n(F))$的三个元素的线性组合；事实上，对于满足 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$的$F$中的任意非零元素 α_1、 α_2、 α_3，都存在 A_1、 A_2、 $A_3 \in f(M_n(F))$，使得

$$T = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

（例如， T等于某个 $A_i \in f(M_n(F))$ 的 $A_1 + A_2 - 2A_3$。）

证明将在第3节给出，届时我们还会提供理解该问题所需的所有必要定义及其他信息。第2节专门介绍一个将在证明中用到、但本身也具有独立价值的线性代数结果。其余两个要素是

2020 数学主题分类。16R10、16S50。关键词和短语。华林问题、非交换多项式、矩阵代数。由 ARRS 资助项目 P1-0288 和 J1-2454 提供支持。

关于 [2] 上多项式在 $M_p(F)$ 中的像的一个结果，其中 p 为素数，以及伯特兰公设。

2. 一个线性代数结果

我们用 $M_n(F)$ 表示域 F 上所有 $n \times n$ 矩阵所构成的代数，并用 $\mathrm{sl}_n(F)$ 表示 $M_n(F)$ 中所有迹为零矩阵构成的子空间。本节的目标是证明以下定理。

定理 2.1。设 F 是特征为 0 的域，设 n 和 q 为满足 $n \geq 2$ 和 $\frac{n}{2} \leq q \leq n$ 的正整数，设 $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_q$ 是来自 F 的互不相同的非零元素，并设 $D \in M_n(F)$ 是对角矩阵，其前 q 个对角元为 $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_q$，其余所有对角元均为零。设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是来自 F 的非零元素，满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$。那么每个 $T \in \mathrm{sl}_n(F)$ 都可以写成

$$T = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

对于某些矩阵 A_1, A_2, A_3 它们与 D相似。

证明需要几个引理。下文中，F、n、q、λ_1、……、λ_q和 D与定理 2.1 中相同。我们还用 D_q表示对角元为 λ_1、……、λ_q的 $q \times q$对角矩阵。按照惯例，I_m表示单位 $m \times m$ 矩阵。

前两个引理可由对角元互不相同的三角矩阵可对角化这一事实轻易得出，因此省略证明。

引理 2.2. 设 L 是一个对角元为 λ_1、……、λ_q的下三角 $q \times q$ 矩阵，且 W是任意的$(n-q) \times q$矩阵。那么矩阵

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ W & 0 \end{bmatrix}$$

与 D相似。

引理 2.3. 设 M是一个对角元为 λ_1、……、λ_q的上三角 $q \times q$ 矩阵，且 V是任意的 $q \times (n-q)$ 矩阵。那么矩阵

$$\begin{bmatrix} M & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

与 D 相似。

引理 2.4. 设 $k \geq 2$，且 Z 是一个非数量 $k \times k$ 矩阵。那么存在 $k \times k$ 矩阵 W 和 X，使得 $WX = Z$，且 XW 不是对角矩阵。

证明。我们只需找到一个可逆矩阵 X，使得 XZX^{-1} 不是对角矩阵。事实上，取任意一个可逆 $k \times k$ 矩阵 X，并令 $W = ZX^{-1}$。于是 $WX = Z$，且 $XW = XZX^{-1}$。

我们可以假设 Z 是对角矩阵。由于 Z 是非数量矩阵，我们还可以不失一般性地假设 Z的第一和第二个对角元不相等。考虑形如

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & I_{k-2} \end{bmatrix}$$

的可逆矩阵 2×2 以及矩阵 XZX^{-1} 的左上角部分，我们将问题化归为 Z 是一个非数量对角矩阵的情形，这很容易证明。□

引理 2.5. 设 k,l 为正整数，满足 $l>k$，且 Z 是任意 $k\times k$ 矩阵。那么存在一个 $k\times l$ 矩阵 W 和一个 $l\times k$ 矩阵 X，使得 $WX=Z$，并且 $l\times l$ 矩阵 XW 不是对角矩阵。

证明。 取任意非零的 $k\times(l-k)$ 矩阵 Y，并令

$$W=\begin{bmatrix}Z & Y\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad X=\begin{bmatrix}I_k\\0\end{bmatrix}.$$

显然， $WX=Z$，且 XW 不是对角矩阵。 □

引理 2.6. 设 $n>2$，且令 Z 为一个 $(n-q)\times(n-q)$ 矩阵。若 n 为偶数，并且 $q=\frac{n}{2}$，我们还假设 Z 不是数量矩阵。那么存在一个非数量 $q\times q$ 矩阵 U、一个 $q\times(n-q)$ 矩阵 V，以及一个 $(n-q)\times q$ 矩阵 W，使得

$$\begin{bmatrix}U & V\\W & Z\end{bmatrix}$$

与 D 相似。

证明。 当 $n=q$ 时，结论显然成立，因此假设 $q<n$。

若 $q>n-q$，我们可以应用引理 2.5，找到一个 $(n-q)\times q$ 矩阵 W 以及一个 $q\times(n-q)$ 矩阵 X，使得 $WX=Z$，且 XW不是对角矩阵。在剩下的情形中，即 $q=n-q$，由引理 2.4 可知存在这样的矩阵 W和 X。

Set

$$U=D_q-XW \quad \text{and} \quad V=UX+XWX-XZ.$$

由此可知 U 不是对角矩阵，因此 U 不是数量矩阵。此外，

$$\begin{bmatrix}I_q & X\\0 & I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U & V\\W & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & -X\\0 & I_{n-q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_q & 0\\W & 0\end{bmatrix},$$

结合引理 2.2，即完成证明。 □

引理 2.7。 如果一个 $q\times q$ 矩阵 T不是数量矩阵，那么存在一个可逆的 $q\times q$ 矩阵 R，使得 $RTR^{-1}-T$不是对角矩阵。

证明。 首先注意，如果 P是一个 $q\times q$ 置换矩阵，那么一个 $q\times q$矩阵 W 是对角矩阵，当且仅当 PWP^{-1}是对角矩阵。由于

$$P(RTR^{-1}-T)P^{-1}=(PRP^{-1})PTP^{-1}(PRP^{-1})^{-1}-PTP^{-1}$$

我们可以用 PTP^{-1}替换 T，其中 P是任意一个置换矩阵。由于 T不是数量矩阵，因此对于某个置换矩阵 P， PTP^{-1}的左上角 2×2块不是数量矩阵。接着考虑可逆矩阵

$$R=\begin{bmatrix}R_1 & 0\\0 & I_{q-2}\end{bmatrix}$$

我们将一般问题归结为 2×2情形，这很容易验证。 □

下面的引理本身或许也很有趣。

引理 2.8。设 k 为正整数，B 为任意非数量 $k \times k$ 矩阵，且μ_1，……，μ_k 是来自 F的元素，使得

$$\operatorname{tr} B = \mu_1 + \ldots + \mu_k.$$

那么，B 与一个 $k \times k$ 矩阵相似，其对角元为 μ_1，……，μ_k。

证明。在整个证明过程中，我们将 $k \times k$ 矩阵视为作用在 F^k上的线性算子。

第一步，我们将证明存在一个 $k \times k$ 矩阵 C，它与 B 相似，且其 (1, 1) 元等于 μ_1。由于 B 不是数量矩阵，因此存在一个向量 $x \in F^k$，使得 Bx 和 x 线性无关。由此可知，我们可以找到一个线性泛函 $f\colon F^k \to F$，使得 $f(x) = 1$且 $f(Bx) = \mu_1$。利用 f 的核余维数为一这一事实，可知存在一个非零向量 $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{span}\{x, Bx\}$。由$f(x) = 1$和 $f(y) = 0$，我们推知 x和 y线性无关。因此，

$$Bx = \alpha x + \beta y$$

对于某些 α、$\beta \in F$。将 f应用于上述等式，我们得到

$$\alpha = f(Bx) = \mu_1.$$

因此，若将线性无关的向量对 x、y 扩充为F^k 的一组基，并在此基下表示算子 B，则所得矩阵的第一个对角元等于 μ_1。

现在我们可以证明该引理的结论了。当 $k = 1$时，不存在非数量矩阵。第一步表明，我们的结论对于 $k = 2$成立。

我们采用归纳法。设 $k \geq 3$，并假设对于所有大小为 $(k-1) \times (k-1)$ 的矩阵，该结论均成立。设 B 是一个 $k \times k$ 矩阵，并设 μ_1、……、μ_k 是来自 F的元素，满足 $\operatorname{tr} B = \mu_1 + \ldots + \mu_k$。我们已经知道，$B$ 与矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \mu_1 & u \\ v & C_1 \end{bmatrix},$$

其中 C_1 是一个 $(k-1) \times (k-1)$矩阵。显然，

$$\operatorname{tr} C_1 = \mu_2 + \ldots + \mu_k.$$

我们区分两种情况。较容易的一种是 C_1 不是数量矩阵。此时，根据归纳法假设，存在一个可逆的 $(k-1) \times (k-1)$ 矩阵 S，使得 SC_1S^{-1} 是一个对角元为 μ_2、……、μ_k 的矩阵。因此，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & u \\ v & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & uS^{-1} \\ Sv & SC_1S^{-1} \end{bmatrix},$$

由此得到所需的结论。

剩下要考虑的是 B 与矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \mu_1 & u \\ v & \lambda I_{k-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda = (k-1)^{-1}(\mu_2 + \ldots + \mu_k).$$

我们再次区分两种情况。首先假设 $u \neq 0$ 或 $v \neq 0$。我们只考虑 $v \neq 0$ 的情形，因为在 $u \neq 0$ 的情形下，证明过程几乎完全相同。由于 v 是一个非零的（$k-1$）$\times$ 1列向量，且 $k-1 \geq 2$，我们可以找到一个 $1 \times (k-1)$ 向量 a，使得

$$av = 0 \quad \text{and} \quad va \neq 0.$$

我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & I_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & u \\ v & \lambda I_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & I_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & u + (\lambda - \mu_1)a \\ v & \lambda I_{k-1} - va \end{bmatrix}.$$

由于 $k-1 \geq 2$ 和 va 是一个非零秩一矩阵，矩阵 $\lambda I_{k-1} - va$是非数量矩阵，我们可以完全按照前一种情形中的方式完成归纳步骤。

剩下需要考虑的是 B 与矩阵相似的情形

$$C = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda I_{k-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda = (k-1)^{-1}(\mu_2 + \ldots + \mu_k) \neq \mu_1.$$

如果 $\mu_2 = \ldots = \mu_k = \lambda$，那么结论得证。因此，假设情况并非如此。显然，元素 μ_2、...、μ_k 中至少有一个不属于集合 $\{\mu_1, \lambda\}$。我们只考虑其中一种情形，即 $\mu_2 \notin \{\mu_1, \lambda\}$的情形。根据证明的第一步，矩阵 C 与矩阵相似

$$D = \begin{bmatrix} \mu_2 & u \\ v & D_1 \end{bmatrix},$$

其中 D_1 是一个（$k-1$）$\times$（$k-1$）矩阵。显然，

$$\operatorname{tr} D_1 = \mu_1 + \mu_3 + \ldots + \mu_k.$$

显然， D_1 是数量矩阵且 $u = 0$ 和 $v = 0$的情况不可能发生，因为此时 μ_2 将是 C的一个特征值，这与假设矛盾。因此，要么 D_1 不是数量矩阵，要么 D_1 是数量矩阵且 u 和 v 不全为零。在这两种情况下，我们都以与上文相同的方式应用归纳假设，从而得出 B 相似于一个对角元为 μ_2、μ_1、μ_3、.....、μ_k的矩阵。再应用适当的置换相似，最终得出 B 相似于一个对角矩阵，其对角元为 μ_1、μ_2、.....、μ_k。□

定理 *2.1* 的证明。设 T 是一个 $n \times n$ 迹为零矩阵。若 $T = 0$，结论显然成立，因此我们假设 $T \neq 0$。特别地， T 不是数量矩阵，且 $n \geq 2$。$n = 2$ 的特殊情形将在证明最后处理。因此，假设 $n \geq 3$。显然，对于给定的 T，所需结论成立，当且仅当对任何与 T 相似的矩阵也成立。显然，T 不是数量矩阵这一事实意味着， T 与一个右下角 2×2 不为数量矩阵的矩阵相似。因此，不妨假设 T 具有如下分块形式

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix},$$

其中 T_1 和 T_4 的大小分别为 $q \times q$ 和 $(n-q) \times (n-q)$，且 $n-q < q$ 或 $n = 2q$，并且 T_4 不是数量矩阵。由引理 2.6，存在适当大小的矩阵 U'、V'、W'，使得 U' 不是数量矩阵，并且

$$A_1' = \begin{bmatrix} U' & V' \\ W' & \alpha_1^{-1} T_4 \end{bmatrix}$$

与 D相似。如果 $T_1 - \alpha_1 U'$ 不是数量矩阵，则令

$$A_1 = A_1', \quad U = U', \quad V = V', \quad \text{and} \quad W = W'.$$

如果 $T_1 - \alpha_1 U'$是数量矩阵，那么由于 U'不是数量矩阵，我们可以使用引理 2.7 找到一个可逆的 $q \times q$矩阵 R，使得 $T_1 - \alpha_1 R U' R^{-1}$不是数量矩阵。在此情况下，令

$$U = RU'R^{-1}, \quad V = RV', \quad \text{and} \quad W = W'R^{-1},$$

and

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} U & V \\ W & \alpha_1^{-1} T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RU'R^{-1} & RV' \\ W'R^{-1} & \alpha_1^{-1} T_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix} \cdot A_1' \cdot \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于 $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} D = \lambda_1 + \ldots + \lambda_q$且 $\operatorname{tr} T = 0$，我们有

$$T - \alpha_1 A_1 = \begin{bmatrix} T_1 - \alpha_1 U & T_2 - \alpha_1 V \\ T_3 - \alpha_1 W & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & 0 \end{bmatrix}$$

with

$$\operatorname{tr} S_1 = -\alpha_1 \lambda_1 - \ldots - \alpha_1 \lambda_q.$$

此外， S_1 不是数量矩阵。

我们需要证明存在 $n \times n$ 个矩阵 A_2、A_3，它们与 D相似，使得 $T - \alpha_1 A_1 = \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$. 根据引理 2.8，我们可以看到，在施加适当的相似变换后，不失一般性地假设 S_1 的对角元为 $-\alpha_1\lambda_1$、……、$-\alpha_1\lambda_q$。令L 为下三角 $q \times q$矩阵，其对角元为 λ_1、……、λ_q，且其严格下三角部分与 $\alpha_2^{-1} S_1$的严格下三角部分重合。进一步令 M 为上三角 $q \times q$矩阵，其对角元为 λ_1、……、λ_q，且其严格上三角部分与 $\alpha_3^{-1} S_1$的严格上三角部分重合。令

$$A_2 = \begin{bmatrix} L & 0 \\ \alpha_2^{-1} S_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A_3 = \begin{bmatrix} M & \alpha_3^{-1} S_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

那么，根据引理 2.2， A_2 与 D 相似；根据引理 2.3， A_3 与 D 相似；再利用 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$，可得 $T - \alpha_1 A_1 = \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$。

剩下需要考虑的情形是 $n = 2$。那么

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 I_2$$

其中 $\lambda_1 \neq 0$ 和 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。显然，矩阵 $T \in \mathsf{sl}_2(F)$ 可写为

$$T = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

当且仅当存在某些与 D 相似的矩阵 A_1、A_2、A_3，使得 T 可写为

$$T = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)B_1 + \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)B_2 + \alpha_3(\lambda_1 - \lambda_2)B_3$$

对于某些与 $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$. 相似的矩阵 B_1、B_2、B_3。因此，不失一般性，我们可以假设 $D = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$。

设 α_1、α_2、α_3 是来自 F 的非零元素，满足 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$，且 $T \in \mathrm{sl}_2(F)$ 是一个非数量矩阵。根据引理 2.8，T 与下列矩阵相似

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} & \gamma \\ \delta & \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} \end{bmatrix}$$

对于某些 γ、$\delta \in F$。很容易确定 a、$b \in F$，使得

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} & \gamma \\ \delta & \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} - (\alpha_1+\alpha_2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

证明至此完成。 □

我们通过证明定理 2.1 无法加强为如下表述来结束本节：T 是两个与 D 相似的矩阵的线性组合。

例 2.9. 令 $n \geq 6$ 和 $\frac{n}{2} \leq q < n-2$。取一个秩为一的幂等元 E，并令 $T = I_n - nE$。注意到 T 的迹为零。假设$T = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$，其中 α_1、α_2 是标量，A_1 和 A_2 是与 D相似的矩阵。因此，

$$\alpha_2 A_2 + nE = I_n - \alpha_1 A_1.$$

由于 $I_n - \alpha_1 A_1$ 与 $I_n - \alpha_1 D$相似，其秩至少为 $n-1$。另一方面，秩的次可加性表明 $\alpha_2 A_2 + nE$ 的秩至多为 $q+1 < n-1$，这就产生了矛盾。

3. 主定理

令 $F\langle\mathcal{X}\rangle$ 表示由集合 $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$在域 F上生成的自由代数。$F\langle\mathcal{X}\rangle$ 的元素称为非交换多项式。若 $f = f(X_1, \dots, X_m) \in F\langle\mathcal{X}\rangle$ 是一个非交换多项式，且$\mathcal{A}$ 是一个 F-代数，我们将集合称为

$$f(\mathcal{A}) = \{f(a_1, \dots, a_m) \mid a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}\}$$

在 $\mathcal{A}$中的 f 像。我们请读者参阅论文 [4]，该文综述了近年来非交换多项式在（主要是矩阵）代数中的像的研究。

我们只关注 $\mathcal{A} = M_n(F)$的情形。此时可能出现 $f(\mathcal{A}) = \{0\}$的情况，这时我们称 f 为 $\mathcal{A}$的多项式恒等式。也可能出现 $f(\mathcal{A})$仅由数量矩阵组成，但$f(\mathcal{A}) \neq \{0\}$的情况，这时我们称 f 为 $\mathcal{A}$的中心多项式。此外，如果 f 是 $F\langle\mathcal{X}\rangle$ 中的交换子之和以及一个多项式恒等式，那么 $f(\mathcal{A})$中的所有矩阵的迹都为零。这说明，只有当 T 的迹为零时，才有意义讨论将矩阵 T 表示为 $f(\mathcal{A})$中的矩阵的线性组合，其中f 是任意非恒定多项式。

在 [2]中，证明了如果 $F = \mathbb{C}$且 $f \in F\langle\mathcal{X}\rangle$既不是 $\mathcal{A} = M_n(F)$ 的多项式恒等式，也不是中心多项式，那么 $\mathcal{A}$ 中的每个迹为零矩阵T 都可以写成 $T = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$，其中 $A_i \in f(\mathcal{A})$。它

还证明了，对于满足这些假设的某些多项式 f，并非每个迹为零矩阵 T 都是 $f(\mathcal{A})$ 中两个元素之差。这类多项式 f 的次数必须大于某个数，该数取决于矩阵的阶数。关于多项式恒等式和中心多项式的次数，也可以作同样的说明（见下文 (I)）。这就是为什么引言中提出的问题只有在 n足够大时才有意义。

本文的主要目标是证明以下定理。

定理 3.1. 设 F 是特征为0的代数闭域，设$f \in F\langle\mathcal{X}\rangle$ 是次数为 $m \geq 1$ 的多项式，且设 $\mathcal{A} = M_n(F)$，其中 $n \geq 2$ 且 $n \geq m-1$。此外，设 α_1，α_2，α_3 是 F中的非零元素，满足$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$。那么，每个 $\mathcal{A}$ 中的迹为零矩阵 T 都可以写成

$$T = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

对于某些 A_1，A_2，$A_3 \in f(\mathcal{A})$。

证明中我们将用到以下三个结果。

（I）设 f 是次数为 $m \geq 1$ 的非交换多项式。一个众所周知的事实是，如果 p 是满足 $m < 2p$的正整数，那么f 不可能是 $M_p(F)$的多项式恒等式。利用这一事实，可以容易地证明，在相同假设下，f 也不可能是 $M_p(F)$的中心多项式（例如，参见 [3, 推论 2.4]）。（II）设 F 是特征为 0 的代数闭域，设 p 是素数，且设 f 是既非 $M_p(F)$的多项式恒等式、也非其中心多项式的多项式。那么，$f(M_p(F))$包含一个对角矩阵 D，其对角线上的特征值互不相同。尽管没有将其表述为定理，但从 [2,定理 4.1]的证明中可以清楚看出这一点。（III）我们还将用到伯特兰公设，其内容是：对于每个整数 $r \geq 4$，都存在一个素数 p，使得 $r < p < 2r-2$。

定理 *3.1* 的证明。我们首先断言，存在一个素数 p，使得

$$\frac{n}{2} + 1 \leq p \leq n.$$

若 $n = 2$，则取 $p = 2$；若 $n = 3$ 或 $n = 4$，则取 $p = 3$。若$n \geq 5$，则 $[\frac{n+1}{2}] + 1 \geq 4$，因此由 (III) 可知，存在一个素数$p$，使得

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1 < p < 2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1\right) - 2 = 2\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

这显然意味着 p满足所需条件。

由于

$$m \leq n + 1 \leq 2(p-1) + 1 = 2p - 1$$

由（I）可知，f 既不是 $M_p(F)$的多项式恒等式，也不是其中心多项式。因此，由（II）可知，$f(M_p(F))$包含一个对角矩阵 D，其中有 p个互不相同的对角元。将每个矩阵 $A \in M_p(F)$视为矩阵$\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M_n(F)$后，我们可以把 D 视为属于 $f(\mathcal{A})$的对角矩阵。由于

$$Sf(A_1, \ldots, A_m)S^{-1} = f(SA_1S^{-1}, \ldots, SA_mS^{-1})$$

对所有满足 S可逆的 A_i、 $S \in \mathcal{A}$，上述关系均成立，因此 $f(\mathcal{A})$也包含所有与 D相似的矩阵。注意， D有 $p-1$ 个或 p 个互不相同的非零对角元，其余对角元均为0。由于

$$\frac{n}{2} \leq p-1 < p \leq n,$$

所需结论由定理 2.1（取 $q = p-1$ 或$q = p$）推出。□

致谢。作者谨向审稿人致谢，感谢其提出的富有见地的意见。

参考文献

[1] M. Brešar，交换子与非交换多项式的像，*Adv. Math.* **374** (2020)，107346，21 页。[2] M. Brešar，P. Šemrl，矩阵代数的华林问题，*Israel J. Math.*，即将出版。[3] P. S. Fagundes，T. C. de Mello，P. H. S. dos Santos，关于 Mesyan 猜想，*Turkish J. Math.* **46** (2022)，1794–1808。[4] A. Kanel-Belov，S. Malev，L. Rowen，R. Yavich，代数上非交换多项式的取值：方法与问题，以及 L'vov-Kaplansky 猜想，*SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **16** (2020)，论文编号 071，61 页。[5] M. Larsen，A. Shalev，P. H. Tiep，有限单群的华林问题，*Ann. Math.* **174** (2011)，1885–1950。[6] A. Shalev，词映射、共轭类与非交换华林型定理，*Ann. Math.* **170** (2009)，1383–1416。

[1]数学与物理学院，卢布尔雅那大学，斯洛文尼亚

[2]自然科学与数学学院，马里博尔大学，斯洛文尼亚

[3]数学、物理与力学研究所，卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮箱：matej.bresar@fmf.uni-lj.si电子邮箱：peter.semrl@fmf.uni-lj.si