arXiv:2302.05126v1 [math.FA] 10 Feb 2023

分数阶修订的对数 SOBOLEV 不等式

MARIANNA CHATZAKOU 和 MICHAEL RUZHANSKY

ABSTRACT. 在这篇简短的注记中，我们证明了 $\mathbb{R}^n$ 上具有分数阶导数的对数 Sobolev 不等式，并给出了常数的显式表达式。具体而言，我们证明，对于所有 $0 < s < \frac{n}{2}$ 和 $a > 0$，均有如下不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) dx + \frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,s,a)\|(-\Delta)^{s/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

其中显式常数 $C(n,s,a)$ 取决于 a、阶数 s 和维数 n；我们还研究了当 n 较大时，$C(n,s,a)$ 的变化情况。值得注意的是，当 n 较大且 $s = 1$ 时，常数 $C(n,1,a)$ 渐近地等于 Lieb 和 Loss 在 [LL01] 中计算出的最佳常数。此外，对于函数 $f \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap W^1$，只要 $1 < p < n$ 且 $p < q \leq {}^{p}\!/_{(n-1)\,n-p}$，我们也证明了类似类型的不等式 ${}^{p}\!/\!(\mathbb{R}^n)$。

1. INTRODUCTION

本文的主要目的是推广 Lieb 和 Loss 的对数 Sobolev 不等式，见 [LL01], 该不等式指出，对于 $a > 0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) dx + n(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{a^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2\, dx\,, \tag{1.1}$$

其中，dx表示 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度。只有当函数 f是函数 $\exp\left(-\frac{\pi|x|^2}{2a^2}\right)$的倍数时，不等式（1.1）才取等号。

特别地，在定理 1.1中，我们通过考虑 $f \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ 阶导数，将对数 Sobolev 不等式（1.1）推广至 $0 < s < \frac{n}{2}$ 阶；在定理1.2 中，则考虑函数 $f \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 < p < n$，且$p < q \leq {}^{p}\!/_{(n-1)\,n-p}$。

此处我们要指出，过去有其他作者曾试图将 Lieb 和 Loss 的分数阶导数锐对数 Sobolev 不等式（1.1）推广至分数阶导数。具体而言，在 [CT05，定理 2。1] 作者声称已建立了 $\mathbb{R}^n$ 上高阶导数的锐对数 Sobolev 不等式。然而，在证明中，他们使用豪斯多夫–杨不等式估计应用杨不等式后出现的一项，而

2010 年数学主题分类：45N05。关键词与短语：对数 Sobolev 不等式；高阶导数。作者得到 FWO Odysseus 1 项目 G.0H94.18N：分析与偏微分方程，以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem 计划（项目编号 01M01021 ）的资助。M. Chatzakou 是弗兰德斯研究基金会（FWO）博士后研究员，获得博士后项目编号 12B1223N 的资助。M. Ruzhansky 还获得了英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/R003025/2 的资助。

看起来，出现的范数中各指标的取值无法同时满足这两个不等式的假设。

对数 Sobolev 不等式（1.1）与 Gross 提出的原始对数 Sobolev 不等式有关[Gr75]

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(d\mu)}}\right) d\mu \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \, d\mu\,, \tag{1.2}$$

其中 $d\mu = e^{-\pi|x|^2}\,dx$ 是高斯测度，而这里的 L^2 范数相应地是在空间 $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ 中考虑的。对数 Sobolev 不等式及其 Gross 对应形式也已在李群的一般框架下得到研究，参见 [CKR21]，其中还对相关文献作了更详细的综述。

现在我们来引入对本文讨论有意义的函数空间：设 $\widehat{f}$ 是 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶变换，定义

$$\widehat{f}(\xi) =: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\,dx\,.$$

函数 $-\Delta f$ 有唯一的表示形式 $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{-\Delta f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi$，因此我们可以写成

$$\widehat{-\Delta f}(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)\widehat{f}(\xi)\,.$$

根据函数演算，算子 $(-\Delta)^{s/2}$ 可以在傅里叶侧定义为乘以 $(2\pi|\xi|)^s$，即有

$$\widehat{(-\Delta)^{s/2} f}(\xi) = (2\pi|\xi|)^s \widehat{f}(\xi)\,.$$

对于 $s > 0$，Sobolev 空间 $W^{s,\,2}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中满足以下条件的函数所构成的子空间

$$\|f\|^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 (4\pi^2|\xi|^2)^s\,d\xi < \infty\,,$$

或者，等价地，

$$\|f\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty\,.$$

更一般地，对于 $p \ge 1$，Sobolev 空间 $W^{s,\,p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中满足以下条件的函数所构成的子空间

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\,.$$

和通常一样，我们假设 $f \neq 0$。

现在我们来介绍本文的两个主要结果。

定理 1.1。设 $f \in W^{s,\,2}(\mathbb{R}^n)$，其中 $0 < s < \frac{n}{2}$，且令 $a > 0$ 为任意实数。则有以下不等式：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) dx + \frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \le \frac{nea^2}{2s} C(n,s)\|(-\Delta)^{s/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中

$$C(n,s)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-2s}{2}\right)}{2^{2s}\pi^{s}\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}\left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\frac{2s}{n}}. \tag{1.4}$$

为了说明右侧常数的渐近行为，在注记 2.1 中，利用斯特林公式，我们证明当 $n\gg 1$ 较大时，估计式（ 1.3 ）可写为

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)dx+\frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \frac{2^{s-1}a^2}{s\pi^s}e^{1-s}n^{1-s}\|(-\Delta)^{s/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.5}$$

特别地，当 $s=1$ 时，渐近而言，右侧的常数与 Lieb 和 Loss 的不等式（$\frac{a^2}{\pi}$ （1.1）中的最佳常数相同。

证明定理 1.1 时，我们将使用欧几里得空间中的经典 Sobolev 不等式。具体而言，分数阶 Sobolev 不等式的最佳形式由 [CT04] 证明，并指出对于 $0<s<\frac{n}{2}$ 和 $q=\frac{2n}{n-2s}$，有

$$\|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C(n,s)\|u\|^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.6}$$

其中 $u\in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$，最佳常数 $C(n,s)$ 由（1.4）给出。整数阶的等式（1.6）由 [Sw92]证明。

不等式 (1.6) 成立为等式，当且仅当 u 是函数 $(c^2+(x-d)^2)^{-(n-2s)/2}$的倍数，其中 $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $d\in\mathbb{R}$。最佳常数$C(n,s)$先前已在特殊情形 $s=1$, $s=1/2$ 和 $s=2$ 下分别由 [Au98、Au76、Ta76], [LL01] 以及 [DHM00、Vo93],给出。我们的第二个结果是前一个结果在 $f\in L^q(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 情形下的变体，表述如下:

定理 1.2. 假设 $1<p<n$ 且 $p<q\le \frac{p(n-1)}{n-p}$。设 $a>0$ 为任意实数。那么对于 $f\in L^q(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)dx+(1+\log a)\frac{p(q-1)}{q-p}\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le a\frac{p(q-1)}{q-p}\mathfrak{S}(n,p,q)\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.7}$$

其中

$$\theta=\frac{(q-p)n}{(q-1)(np-(n-p)q)}, \tag{1.8}$$

and

$$\mathfrak{S}(n,p,q)=\left(\frac{q-p}{p\sqrt{\pi}}\right)^{\theta}\left(\frac{pq}{n(q-p)}\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\frac{\delta}{pq}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\Gamma\left(q\frac{p-1}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\frac{\delta}{q-p}\right)\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right)^{\frac{\theta}{n}}, \tag{1.9}$$

其中 $r = p\frac{q-1}{p-1}$ 和 $\delta = np - q(n-p) > 0$。

定理 1.2 的证明对定理 1.1的证明中所用的论证稍作修改即可。在此情形下，我们使用 [DD03] 中给出的下列不等式：

对于 $1 < p < n$ 和 $p < q \leq {}^{p}{}_{(n-1)\ n-p}$，我们有

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \mathfrak{S}(n,p,q)\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{1.10}$$

w这里 $r = p\frac{q-1}{p-1}$，而 θ和 $\mathfrak{S}(n,\ p,\ q)$ 分别由 (1.8) 和 (1.9) 给出。

需要指出的是，不等式 (1.10) 是尖锐的，因为函数 $(1 + c|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{p-1}{q-p}}$ 的倍数取等号，其中 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

注 1.3. 还需指出，当 $q = {}^{p}{}_{(n-1)\ n-p}$ 时，我们有 $\theta = 1$且r 取值 $r = \frac{np}{n-p}$。此时，不等式 (1.10) 变为尖锐 Sobolev 不等式 (1.6)（当 $s = 1$ 时），该结果由 Aubin [Au98、Au76] 和 Talenti [Ta76]分别独立证明。

作者感谢 Roberto Bramati 和 Aidyn Kassymov 与他们进行讨论。

2. Proofs

In 本节中，我们给出主要结果的证明。与通常一样，我们假设 $f \neq 0$。

定理的证明 *1.1*。 不等式（1.3）左边的第一项可改写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) dx &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon} dx \\ &= \frac{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon} dx\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 稍后将具体说明。根据凹非线性函数的詹森不等式，并取概率测度 $\frac{|f\ x\ |^2}{\|f\|^2_{L^2\ \mathbb{R}^n}}()()dx$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon} dx \leq \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^{2\varepsilon+2}}{\|f\|^{2\varepsilon+2}_{L^2(\mathbb{R}^n)}} dx\right)\,, \tag{2.2}$$

因此，结合（2.1）和（2.2）可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) dx &\leq \frac{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\log\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^{2\varepsilon+2}}{\|f\|^{2\varepsilon+2}_{L^2(\mathbb{R}^n)}} dx\right) \\ &= \frac{(\varepsilon+1)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\log\left(\frac{\|f\|^2_{L^{2\varepsilon+2}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

容易验证，对于任意 b、$x > 0$，以下不等式成立 :

$$\log x \leq bx - \log b - 1\,. \tag{2.4}$$

在接下来的计算中，我们选择 ε 使得 $2\varepsilon+2=\frac{2n}{n-2s}$ 对于 $0<s<\frac{n}{2}$，并对 2.4) 使用不等式 $b=ea^2$。这样的选择 ε 使我们能够像在 (1.6) 中那样应用 Sobolev 不等式，并得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)dx &\le \frac{(\varepsilon+1)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\log\left(\frac{\|f\|^2_{L^{2\varepsilon+2}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)\\ &\le \frac{(\varepsilon+1)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\left(b\frac{\|f\|^2_{L^{2\varepsilon+2}}}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}-(\log b+1)\right)\\ &= \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\left(ea^2\|f\|^2_{L^{2\varepsilon+2}(\mathbb{R}^n)}-[1+\log(ea^2)]\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\\ &\le \frac{\frac{n}{n-2s}}{\frac{2s}{n-2s}}\left(ea^2C(n,s)\|f\|^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)}-2(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\\ &= \frac{n}{2s}\left(ea^2C(n,s)\|f\|^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)}-2(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\\ &= \frac{nea^2}{2s}C(n,s)\|f\|^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)}-\frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

最后，后一个不等式可以改写为式（1.3）的形式，证明至此完成。□

如引言中所述，当 $s=1$ 时，不等式（1.1）是最佳的，因此右端的常数无法进一步改进。然而，正如我们将在下一条注释中所展示的，通过对任意 $C(n,s)$ 的常数进行渐近分析，可以恢复 s 时，式（1.1）中的最佳常数。对于 $s=1$ 且 n 足够大时，以下注释将对该常数进行渐近分析，方法类似于 [CKR22]。

注 2.1 （关于 $C(n,s)$ 在 1.3）中的常数在 n 较大时的情形）。 为了考察当 $n\gg 1$较大时不等式的表现，我们先回顾以下渐近近似：

$$\Gamma(x+\alpha)\sim\Gamma(x)x^{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{C}.$$

因此，当 n 足够大时，我们有

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-2s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n/2-s)}{\Gamma(n/2+s)}\sim\frac{\Gamma(n/2)(n/2)^{-s}}{\Gamma(n/2)(n/2)^{s}}=(n/2)^{-2s}.$$

另一方面，利用斯特林公式

$$\Gamma(x)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^{x},$$

我们可以近似得到：

$$\left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)}\right)^{2s/n}\sim\left(\frac{e^{-n}n^{n-1/2}}{e^{-n/2}(n/2)^{n/2-1/2}}\right)^{2s/n}=\left(e^{-n/2}n^{n/2}2^{(n-1)/2}\right)^{2s/n}=e^{-s}n^{s}2^{s-s/n}.$$

那么，对于足够大的 n 由（1.4）可得

$$C(n,s)\sim\frac{1}{2^{2s}\pi^{s}}(n/2)^{-2s}(e^{-s}n^{s}2^{s-s/n})=\frac{2^{s-s/n}}{\pi^{s}}e^{-s}n^{-s}.$$

因此，对于足够大的1.3），n 变为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)dx+\frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&\\ \lesssim\frac{nea^2}{2s}\left(\frac{2^{s-s/n}}{\pi^s}e^{-s}n^{-s}\right)\|(-\Delta)^{s/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&\\ =\frac{2^{s-1-s/n}a^2}{s\pi^s}e^{1-s}n^{1-s}\|(-\Delta)^{s/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.&\end{aligned}\tag{2.5}$$

因此，当 $n\gg 1$ 足够大时，我们得到估计

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)dx+\frac{n}{s}(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&\\ \lesssim\frac{2^{s-1}a^2}{s\pi^s}e^{1-s}n^{1-s}\|(-\Delta)^{s/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.&\end{aligned}\tag{2.6}$$

特别地，对于 $s=1$，且当 n 足够大时，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\log\left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right)dx+n(1+\log a)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim\frac{a^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^2\,dx\,,$$

这渐近地就是1.1式 Lieb 和 Loss 的不等式。

定理 *1.2* 的证明。 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)dx&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon}dx\\ &=\frac{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon}dx\,.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由詹森不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\varepsilon}dx\le\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^{q\varepsilon+q}}{\|f\|^{q\varepsilon+q}_{L^q(\mathbb{R}^n)}}dx\right)\,.\tag{2.8}$$

结合（2.7）和（2.8），我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)dx&\le\frac{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^{q\varepsilon+q}}{\|f\|^{q\varepsilon+q}_{L^q(\mathbb{R}^n)}}dx\right)\\ &=\frac{(\varepsilon+1)\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon}\log\left(\frac{\|f\|^q_{L^{q\varepsilon+q}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right)\,.\end{aligned}\tag{2.9}$$

在以下计算中，我们将用到不等式 $\log\,x\le ax-\log a-1$它对任意 $a,x>0$ 都成立，并取 ε 为$\varepsilon=\frac{q-p}{q\,p-1}()$ 从而$q\varepsilon+q=p\frac{q-1}{p-1}$。后一种选择使我们能够应用式（1.10）中的不等式，并且

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \log\left(\frac{|f(x)|^q}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right) dx \\
&\qquad \le \frac{(\varepsilon+1)\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon} \log\left(\frac{\|f\|^q_{L^{q\varepsilon+q}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right) \\
&\qquad \le \frac{(\varepsilon+1)\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon} \left(a\frac{\|f\|^q_{L^{q\varepsilon+q}}}{\|f\|^q_{L^2(\mathbb{R}^n)}} - (\log a + 1)\right) \\
&\qquad = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\left(a\|f\|^q_{L^{q\varepsilon+q}(\mathbb{R}^n)} - (\log a+1)\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&\qquad \le \frac{p(q-1)}{q-p}\left(a\mathfrak{S}(n,p,q)\|f\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)} - (\log a+1)\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right).
\end{aligned}$$

注意到，后一个不等式可改写为（1.7）中的形式。定理1.2的证明至此完成。□

注 2.2。请注意，不等式（1.3），即使对于 $s=1$，也无法由不等式（1.7）推出，因为根据定理 1.2 中的假设，我们必须有 $p<q$。

References

[Au98] T. Aubin.《黎曼几何中的一些非线性问题》。Springer，1998 年。[Au76] T. Aubin.《等周问题与 Sobolev 空间》。J. Diff. Geom.，11，573–598，1976。[CKR21] M. Chatzakou、A. Kassymov 和 M. Ruzhansky。李群上的对数 Sobolev 不等式。arXiv:2106.15652，2021。[CKR22] M. Chatzakou、A. Kassymov 和 M. Ruzhansky。各向异性香农不等式。Osaka J. Math.，即将刊出。arXiv:2106.14182[CT04] A. Cotsiolis 和 N. Tavoularis。高阶分数阶导数的 Sobolev 不等式的最佳常数。J. Math. Anal. Appl.，295(1)，225–236，2004。[CT05] A. Cotsiolis 和 N. Tavoularis。关于高阶分数阶导数的对数 Sobolev 不等式。（英文，附法文摘要）。C. R. Math. Acad. Sci. Paris，340，第 3 期，205–208，2005。[DD03] M. Del Pino 和 J. Dolbeaut。最优的 L^p-Sobolev 对数不等式。J. Funct. Anal.，197，151–161，2003。[DHM00] Z. Djadli、E. Hebey 和 M. Ledoux。Paneitz 型算子及其应用。Duke Math. J.，104 (1)，129–169，2000。[Gr75] L. Gross。对数 Sobolev 不等式。Amer. J. Math.，97(4):1061–1083，1975[LL01] E. Lieb 和 M. Loss。《分析学》。第二版，Amer. Math. Soc.，2001。[Sw92] C. A. Swanson。最佳 Sobolev 常数。Appl. Anal.，47 (4)，227–239，1992。[Ta76] G. Talenti。Sobolev 不等式中的最佳常数。Ann. Mat. Pura Appl.，110，353–372，1976。[Vo93] R. C. A. M. van der Vorst。空间 $H^2 \cap H^1(\Omega)$ 嵌入 $L^{2n/(n-4)}(\Omega)$ 的最佳常数。Differ. Integral Equ.，2 (2)，259–270，1993。

Marianna Chatzakou:Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete MathematicsGhent University, Krijgslaan 281, Building S8, B 9000 GhentBelgium电子邮件地址
marianna.chatzakou@ugent.be

Michael Ruzhansky:

Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University, Krijgslaan 281, Building S8, B 9000 GhentBelgiumand
School of Mathematical SciencesQueen Mary University of London
United Kingdom电子邮件地址 michael.ruzhansky@ugent.be