arXiv:2302.05127v1 [math.CA] 10 Feb 2023

超越笛卡尔符号法则

弗拉基米尔·彼得罗夫·科斯托夫

Abstract. 我们研究所有根均为实数的实一元多项式。若此类多项式的系数数列中有 c 次符号变化和 p 次符号保持，则该多项式有 c个正根和 p 个负根（按重数计）。假设所有根的模互不相同；我们将它们按大小排列在正半轴上。我们提出这样一个问题：如果已知符号变化的位置，那么负根的模可能位于哪些位置？我们证明了若干新结果，揭示了这个问题的答案远非显而易见。

关键词：实一元多项式；双曲多项式；符号模式；笛卡尔符号法则

AMS 分类：26C10

1. Introduction

本文研究一个与 [5] 中提出的笛卡尔符号法则推广相关的问题。关于该法则，参见 [1], [2], [3], [4], [7], [9], [10], [15] 或 [16]。关于其热带类比，参见 [6]。

若一个次数为 d 的实多项式 $Q := \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ 的所有根均为实数，则称其为双曲的。假设所有系数 a_j 均非零。对于这样的多项式，笛卡尔符号法则意味着它有 c 个正根和 p 个负根（按重数计，因此 $c + p = d$），其中 c 是 Q 的系数数列中的符号变化数， p 是符号保持数。这些系数的符号定义了符号模式 (sgn(a_d), sgn(a_{d-1}), . . ., sgn(a_0))。我们主要讨论首一多项式，在这种情况下，符号模式以 $+$ 开头。此时，我们可以用对应的变化—保持模式代替符号模式，且二者等价。该模式是一个 d 维向量，并且（略作记号上的滥用）其第 j 个分量在 $a_{d-j+1}a_{d-j} < 0$ 时等于 c，在 $a_{d-j+1}a_{d-j} > 0$ 时等于 p。

我们还可以考察定义给定符号模式的双曲多项式的根的模。我们研究所有模互不相同的一般情形。一个自然的问题是：

问题1。当这些模按次序排列在实数正半轴上时，负根的模可以位于哪些位置?

笛卡尔符号法则无法为这个问题提供任何线索。本文回顾已有成果，并介绍我们在这一方向上的新结果，揭示了情况远非显而易见。

记号1。(1) 我们用 $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_c$ 表示正的，用 $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_p$ 双曲多项式的负根的模。我们通过一个例子说明这些模在正半轴上的次序记号。

假设 $d=6$、 $c=2$、 $p=4$ 和

$$\alpha_1<\gamma_1<\gamma_2<\alpha_2<\gamma_3<\gamma_4\ .$$

因此，对于模的次序，我们记作 $PNNPNN$，即字母 P和 N表示正根和负根的模的相对位置。

(2) 以 i_1 个符号 $+$ 开头，接着是 i_2 个符号 $-$，再接着是i_3 个符号 $+$，依此类推的符号模式记作 $\Sigma_{i_1,i_2,i_3,\dots}$。

下文中，对于每个给定的次数 d，我们考虑形式为（变号保持模式，模的次序）的相容对（简称相容对）。如果变号保持模式的分量数 c （分别为 p）等于模的次序的分量数 P （分别为N），则该相容对与笛卡尔符号法则相容。若存在一个多项式，其符号模式定义了该相容对的变号保持模式，且其根的模定义了给定的次序，则称该相容对可实现。

注1. 对于固定的 d 和 c，有 $\binom{d}{c}$ 种变号保持模式和 $\binom{d}{c}$种模的次序，因此有 $\binom{d}{c}^2$ 个相容对。因此，对于给定的次数 d，相容对的总数为

$$\chi(d):=\sum_{c=0}^{d}\binom{d}{c}^2=\sum_{c=0}^{d}\binom{d}{c}\binom{d}{d-c}=\binom{2d}{d}\ . \tag{1.1}$$

这是多项式 $(x+1)^d(x+1)^d=(x+1)^{2d}$ 中 x^d 的系数。利用斯特林公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$，可得 $\chi(d)\sim 2^{2d}/\sqrt{\pi d}$。

例 1. (1) 对于 $d=1$，唯一的相容对是 $(c,\ P)$ 和 $(p,\ N)$。它们分别可由多项式 $x-1$ 和 $x+1$ 实现。

(2) 对于 $d=2$，有 $\binom{4}{2}=6$ 个相容对。其中，对 $(cp,\ PN)$ 和 $(pc,\ NP)$ 不可实现。事实上，对于双曲多项式 x^2-ux-v （分别为 x^2+ux-v）， $u>0$, $v>0$，模的次序为 NP（分别为 PN）。其余 4 个对均可实现。为此，可以考察多项式族 $x^2+a_1x+a_0$。在变量 (a_1,a_0) 所在的平面上，双曲多项式的定义域是抛物线 $\mathcal{P}$ 下方的区域： $a_0=a_1^2/4$。我们列出可实现对及其可实现的开域:

$$(cc,\ PP)\quad \{a_1<0,\ 0<a_0<a_1^2/4\}\ ,\quad (pp,\ NN)\quad \{a_1>0,\ 0<a_0<a_1^2/4\}\ ,$$

$$(cp,\ NP)\quad \{a_1<0,\ a_0<0\}\ ,\qquad\qquad (pc,\ PN)\quad \{a_1>0,\ a_0<0\}\ .$$

我们可以将问题1表述得更精确:

问题 2. 给定次数 d，哪些相容对是可实现的?

上述例子回答了 $d=1$ 和 2 的情况。对于 $d=3$、4 和 5，详尽的答案见第3节。

注 2. 在次数为 d 的非零系数多项式集合上，存在两个可交换的对合，分别为

$$i_m\ :\ Q(x)\mapsto(-1)^dQ(-x)\quad\text{and}\quad i_r\ :\ Q(x)\mapsto x^dQ(1/x)/Q(0)\ .$$

因子 $(-1)^d$ 和 $1/Q(0)$ 的作用是保持首一多项式集合不变。作用于一对向量时，对合 i_m 会交换分量 c 与 p、P 与 N，反之亦然；而对合 i_r 则从右向左读取给定向量对中的向量。给定向量对是否可实现，与其在 i_m 和 i_r 作用下轨道中的所有其他向量对同时可实现或不可实现。一个轨道由四对或两对向量组成。

记号 2. 对于符号模式 σ，我们用 $k^*(\sigma)$ 表示使 σ 可实现的模的次序数。对于模的次序 Ω，我们用 $l_*(\Omega)$ 表示在 Ω 下可实现的符号模式数。对于给定的 d，我们用 $\tilde{r}^*(d)$ 表示可实现的相容对数与所有相容对数之比。

例 2. (1) 对于符号模式 $\Sigma_{3,3,1}$，有 $k^*(\Sigma_{3,3,1}) = 6$。事实上，考虑多项式

$$(x-1)(x+1)^4(x-b) = x^6+(3-b)x^5+(2-3b)x^4+(-2b-2)x^3+(2b-3)x^2+(3b-1)x+b\,.$$

当 $b > 0$ 充分小时，它定义了符号模式 $\Sigma_{3,3,1}$。可以扰动它在 -1 处的 4 重根，从而得到具有相同符号模式的多项式，且其负根的模中恰有 k 个为 > 1，另有 $4-k$ 个为 < 1，其中 $k = 0$，1，.....，4；这些模都接近 1。另一方面，具有该符号模式的唯一其他可实现次序是

$$\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 \ , \ \text{i. e. } NPPNNN \ ,$$

见 [11, 定理 3 和 4], ，这使得总共有 6 种模的次序可由 $\Sigma_{3,3,1}$ 实现。

(2) 对于 $m \geq 1$，$n \geq 1$，有 $k^*(\Sigma_{m,n}) = 2\min(m,n) - 1$，见 [11, 定理 1 和推论 1]。

我们的第一个结果是以下定理：

定理 1. (1) 对于 $d \geq 1$，所有相容的符号变化保持模式均可实现的次序只有 $PP\ldots P$和 $NN\ldots N$。相应的符号变化保持模式为 $cc\ldots c$和 $pp\ldots p$。

(2) 对于任意 $d \geq 1$，都存在可由所有相容序列实现的符号模式。对于 $d \geq 5$，存在具有 $c = 2$ 的符号模式，它们可由所有 $\binom{d}{2}$相容序列实现。

(3) 不存在满足 $k^*(\sigma) = 2$ 的符号模式 σ。(4) 满足 $k^*(\sigma) = 3$ 的唯一符号模式 σ 是如下形式：$\Sigma_{2,\ d-1}$,$i_r(\Sigma_{2,\ d-1})$、$i_m(\Sigma_{2,\ d-1})$ 和 $i_r i_m(\Sigma_{2,\ d-1})$。(5) 对于任意 $\ell \in \mathbb{N}^*$，都存在一个次数 d 和一个次序 Ω，使得 $l_*(\Omega) = \ell$。

该定理将在第4节证明。第2节回顾一些概念和已知结果，并继续阐述新的概念。特别地，对于第2节中介绍的6类不可实现的配对，我们比较其中包含的配对数量与所有相容对的数量，见（1.1）。在这6种情形下，当 $d \to \infty$ 时，它们的比值极限均为0（见注记1的第（2）部分、注记2的第（2）部分、注3、注4、注5以及定理3的第（4）部分）。另一方面，在第3节考察 $d = 3$、4和5这些情形时，我们得出的结论是，$\lim_{d\to\infty} \tilde{r}^*(d) = 0$似乎成立（见记号 2）。然而，这无法用那6类不可实现的配对来解释

，因此目前还不清楚问题 2的完整答案是什么。

我们用一个几何性质的结果来结束本节。考虑系数空间 $Oa_{d-1}\cdots a_0 \cong \mathbb{R}^d$。双曲性区域是使相应首一多项式 Q 为双曲多项式的 $(a_{d-1},\dots,a_0)$ 的取值集合。结式 $R := \mathrm{Res}(Q(x),(-1)^dQ(-x)\ x)$ 当且仅当 Q 有两个相反的根或一个零根时为零。当系数 a_j 为实数时，多项式 $Q(x)$ 和$Q(-x)$ 有一个公共根，当且仅当 $Q(0) = 0$，或者 Q 有两个相反的非零实根，或者 Q 有一对纯虚根。

例 3。对于 $d = 1$、2 和 3，分别得到 $R = -2a_0$、 $R = 4a_0a_1^2$ 和 $R =-8a_0(a_2a_1 - a_0)^2$。

我们用 $[.]$ 表示整数部分，并令

$$Q^1 := x^{[d/2]} + a_{d-2}x^{[d/2]-1} + a_{d-4}x^{[d/2]-2} + \cdots ,$$

$$Q^2 := a_{d-1}x^{[(d-1)/2]} + a_{d-3}x^{[(d-1)/2]-1} + a_{d-5}x^{[(d-1)/2]-2} + \cdots \quad \text{and}$$

$$R_0 := \mathrm{Res}(Q^1(x),Q^2(x),x)) .$$

定理 2. (1) 有 $R = (-1)^{[d/2]+1}2^{d-[(d+1)/2]+1}a_0R_0^2$。

(2) 量 R_0 是变量 a_j 的不可约多项式。

该定理在第 5 节中证明。集合 $\{R_0 = 0\}$ 的性质及其在 $d \le 4$ 下的图像可见 [8]。

2. Canonical sign patterns, rigid orders of moduli and furtherresults

定义 1. 对于给定的变号保持模式，从右向左读取该模式，并将每个分量 c（分别为 p）替换为 P（分别替换为 N），即可得到相应的典范序。例如，与模式 $ccpcp$ 相对应的典范序为 $NPNPP$。此定义可用于定义每个以 $+$ 开头的给定符号模式所对应的典范序。

每个符号模式或变号保持模式都能以其典范序实现，见 [12, 命题 1]。

定义 2. (1) 只能以其对应的典范序实现的符号模式（或等价地，变号保持模式）称为规范的。

(2) 如果所有具有给定模次序的首一双曲多项式都定义同一个符号模式，那么该次序称为刚性的。

注记1. (1) [13] 证明了，规范的符号模式恰好是那些不含四个连续相同符号的符号模式

$$(+,+,-,-,)\ ,\ (-,-,+,+)\ ,\ (+,-,-,+) \text{ or } (-,+,+,-) .$$

因此，规范的变号保持模式是不含孤立符号变化且不含孤立符号保持的模式，也就是说，不含三个连续的分量 cpc或 pcp。

(2) 在 [13] 中命题10的证明里，所有规范的变号保持模式被表示为四个子集的并集，即以单个 p 或 c开头的模式、以单个 p 或 c结尾的模式、以单个 p 或 c 开头且结尾的模式，以及前两个字母相同且最后两个字母也相同的模式。对于 $d \geq 100$，这些集合中每个集合所含模式的数量都可以用 $2 \cdot [d/2] \cdot 2^{d-[0.26d]-1}$作为上界。因此，所有规范符号保持模式的数量为 $\leq \tau(d) := 8 \cdot [d/2] \cdot 2^{d-[0.26d]-1}$，而对于较大的 d，具有规范符号保持模式的所有不可实现对的数量为

$$\leq \tau(d) \sum_{c=0}^{d} \binom{d}{c} = 8 \cdot [d/2] \cdot 2^{2d-[0.26d]-1} < 2^{2d}/\sqrt{\pi d} \sim \chi(d) \ ,$$

参见注1；我们用 $\tau(d)$ 对 (1.1) 中的一个因子 $\binom{d}{c}$ 作上界估计。

注记2。(1) 文献 [14] 证明了模的次序 $PP \dots P$、$NN \dots N$ 是刚性的（它们定义了变号保持模式 $cc \dots c$ 和 $pp \dots p$；相应的两个相容对可由任意具有互异正根或互异负根的多项式实现），并且

$$P_N := PNPNPN \dots \ , \ \ N_P := NPNPNP \dots \ . \tag{2.2}$$

后两个次序（称为标准次序）各自根据 d 的奇偶性，定义以下符号模式之一

$$\sigma_+ := (+,+,-,-,+,+,-,-,\dots) \text{ or } \sigma_- := (+,-,-,+,+,-,-,+,+,\dots) \ . \tag{2.3}$$

(2) 对于每个固定的次数 d，具有次序 P_N 的相容对有 $\binom{d}{[d/2]}$ 个，而具有次序 N_P 的相容对有 $\binom{d}{[d/2]}$ 个，参见 (2.2)。因此，模的次序为刚性（更确切地说为标准）且不可实现的相容对有 $2\binom{d}{[d/2]} - 2$ 个，并且 $\lim_{d\to\infty}(2\binom{d}{[d/2]} - 2)/\chi(d) = 0$，参见 (1.1) 并使用斯特林公式。

定义3。我们称两个根的模标准次序 Ω_1 和 Ω_2的叠加为按如下方式得到的任一序列：将 Ω_2 的分量插入 Ω_1 各分量之间的任意位置，或插在 Ω_1 第一个分量之前、最后一个分量之后，同时保持这些分量的相对次序。例：序列

$$P\bar{N}NP\bar{P}N\bar{N}\bar{P}\bar{N} \text{ is superposition of } PNPN \text{ and } NPNPN$$

（在此叠加中，我们将来自 Ω_2的模加上上划线；在这个例子中，叠加中的根的模有不止一种方式可以归属于 Ω_1 或 Ω_2；两个标准次序的叠加并非唯一确定。）

下面的命题说明，如何以标准次序为基础得到新的不可实现对的例子。

命题 1。每个两个标准次序的叠加，只有搭配如下形式的符号模式才可实现

$$(+,+,?,-,?,+,?,-,\dots) \ , \ \ (+,?,-,?,+,?,-,\dots) \text{ or } (+,-,?,+,?,-,?,+,\dots)$$

它们是符号模式 $\sigma_+\sigma_+$、 $\sigma_+\sigma_-$ 和 $\sigma_-\sigma_-$的“乘积”。

证明。事实上，假设在标准次序的叠加中，来自次序 Ω_i 的根是多项式 T_i、$i=1$ 的根，2。于是，在乘积T_1T_2 中，每隔一个的系数、首项系数和常数项，都是 T_1 的一个系数与 T_2 的一个系数之乘积之和，这些乘积的符号要么全都相反，要么全都相同，因此，“乘积”符号模式的对应分量是定义良好的。□

注3。标准次序中字母 N 的数量等于字母 P 的数量，或与后者相差 1。因此，两个标准次序叠加时，这一差值的模不超过 2。此外，系数的符号中由模的次序无法确定的至多有 $[d/2]$ 个，因此，与标准次序叠加相对应的不可实现对的数量小于

$$2\left(\binom{d}{[d/2]}+\binom{d}{[d/2]-1}+\binom{d}{[d/2]-2}\right)\cdot 2^{[d/2]}<6\binom{d}{[d/2]}\cdot 2^{(d+1)/2}$$

即 $\sim 12\cdot 2^{3d/2}/\sqrt{\pi d}$ （此处使用斯特林公式）。与此同时χ（d）$\sim 2^{2d}/\sqrt{\pi d}$（见注1）。

在其他一些情形下，模的次序也能确定多项式部分系数的符号。

例4。考虑 $d=8k+2$、$k\in\mathbb{N}^*$ 的情形，以及 $c=2$ 的情形，其模的次序为

$$\Omega\ :\ \gamma_1<\cdots<\gamma_{4k}<\alpha_1<\alpha_2<\gamma_{4k+1}<\cdots<\gamma_{8k}\ .$$

它只有在具有两次符号变化的符号模式下才可实现。记 U_1 和U_2 为首一双曲 $4k+1$ 次多项式，其根为

$$-\gamma_1\ ,\ -\gamma_2\ ,\cdots\ ,\ -\gamma_{2k}\ ,\ -\gamma_{4k+1}\ ,\ -\gamma_{4k+2}\ ,\ \cdots\ ,\ -\gamma_{6k}\ ,\ \alpha_1 \qquad \text{and}$$

$$-\gamma_{2k+1}\ ,\ -\gamma_{2k+2}\ ,\ \cdots\ ,\ -\gamma_{4k}\ ,\ -\gamma_{6k+1}\ ,\ -\gamma_{6k+2}\ ,\ \cdots\ ,\ -\gamma_{8k}\ ,\ \alpha_2$$

分别。因此，它们定义了形如$\Sigma_{m_i,\ n_i}$, $i=1$、2 的符号模式。根据 [11, 定理 1], , 若 $n_i<m_i$，则多项式 U_i 的负根模为 $\leq 2n_i-2$ ，其模的次序为 $\leq\alpha_i$；若 $n_i>m_i$，则其负根模为 $\leq 2m_i-2$，其模的次序为 $\geq\alpha_i$。因此有 $n_i\geq k+1$ 和 $m_i\geq k+1$。这意味着乘积 U_1U_2 的前 $k+1$ 个系数和最后 $k+1$ 个系数均为正，也就是说，模的次序 Ω 在符号模式$\Sigma_{j_1,\ j_2,\ j_3}$ 下不可实现，因为它们不满足条件 $j_1\geq k+1$ 和 $j_3\geq k+1$。

注4。有 $\binom{d}{2}^2$ 相容对，且 $c=2$ 因此少于 $\binom{d}{2}^2$ 例4所涉及的不可实现对。利用对合 i_m （见注 2），可以给出任意多个满足 $c=d-2$的此类例子。有 $\lim_{d\to\infty}\binom{d}{2}^2/\chi(d)=0$，见（1.1）。

以下命题和定理描述了其他一些情形，在这些情形中，某些相容对不可实现。

命题2。假设 d 为偶数，首项单项式和常数项均为正（因此 c 为偶数），且所有奇次幂系数均为负

并且 $c < d$。那么，在区间 $(0, \alpha_1)$、(α_2, α_3)、...、$(\alpha_{c-2}, \alpha_{c-1})$、$(\alpha_c, \infty)$ 中，负根的模均不存在。

证明。事实上，对于满足这些条件的首一双曲多项式 Q，若 t 属于上述任一间隔，则有 $Q(t) > 0$。由于所有奇次单项式的系数均为负，因此还有 $Q(-t) > Q(t)$，由此可得该命题。□

注5。对于 d 为偶数的情形，命题2中定义的符号模式数量为$\leq 2^{d/2}$（系数中有一半的符号是固定的），因此若 d 较大，则此类不可实现对的数量为

$$\leq 2^{d/2} \sum_{c=0}^{d} \binom{d}{c} = 2^{3d/2} < \chi(d) \sim 2^{2d}/\sqrt{\pi d}\ ,$$

见注1。

定理3。(1) 假设

$$c \leq p \ \text{ and } \ \alpha_c < \gamma_p,\ \ \alpha_{c-1} < \gamma_{p-1}\ ,\ \dots\ ,\ \ \alpha_1 < \gamma_{p-c+1}\ . \tag{2.4}$$

则 $a_{d-1} > 0$。因此，具有 $a_{d-1} < 0$ 且次序满足条件(2.4)的一对不可实现。

(2) 对于固定的 d，满足条件 (2.4) 的模的次序数为

$$T_d^c := \binom{d}{c} - C_0\binom{d-1}{c-1} - C_1\binom{d-3}{c-2} - C_2\binom{d-5}{c-3} - C_3\binom{d-7}{c-4} - \cdots\ , \tag{2.5}$$

其中 $C_k := \binom{2k}{k}/(k+1)$ 是第 k 个卡特兰数。

(3) 有

$$T_d^c = \binom{d}{c}\left(1 - \frac{c}{d-c+1}\right) = \binom{d}{c}\frac{d-2c+1}{d-c+1}\ . \tag{2.6}$$

(4) 对于满足条件 (2.4) 且具有 $a_{d-1} < 0$ 的不可实现对的数量 $\nu(d)$，有 $\lim_{d\to\infty} \nu(d)/\chi(d) = 0$，见 (1.1)。

注6。数量 $T_d^c\binom{d-1}{c}$（分别为 $\binom{d}{c}\binom{d-1}{c}$）是变号保持模式以 p 开始且次序满足条件 (2.4) 的相容对数量（分别是变号保持模式以 p 开始的所有相容对数量）。对于固定的 c，有 $\lim_{d\to\infty} T_d^c/\binom{d}{c} = 1$。事实上，这是关于 d 的两个 c 次多项式之比，其首项系数均等于 $1/c!$ 。

定理3的证明。第（1）部分。事实上，$a_{d-1} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_p - \alpha_1 - \cdots - \alpha_c > 0$。

第（2）部分。式（2.5）右端的第一项是所有 c 个分量等于 P的序列的数量。第二项是以 P开头的序列数量；它们不满足条件（2.4）。第三项（分别是第四项）是以 NPP（分别以 $NPNPP$或 $NNPPP$）开头的序列数量。第五项是以 $NPNPNPP$、$NNPPNPP$、$NPNNPPP$、 $NNPNPPP$或 $NNNPPPP$等开头的序列数量。

也就是说，对于 $k \geq 2$，第 k 项是这样一些序列的数量：其前 $2k-1$ 个分量中有 k 个字母 P，且不包含在前面某一项（不包括初始的 $k \geq 2$）中。

换一种等价的说法，第 k 项包含这样一些序列：其前 $2k-2$ 个分量中恰有 $k-1$ 个字母 P ；对于 $s \le 2k-2$，其前 s 个字母中，字母 N 的数量不少于字母 P 的数量。因此，这等于平面上从 $(0,0)$ 到 $(2k-2,0)$ 且不低于横轴的格路数量，其可能的步长为 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$。这类路径的数量为 C_{k-1}。

第（3）部分。公式（2.6）可通过对 d 进行归纳法证明。对于 $d=1$ 和 2，以及对于 $c \le d$，只需直接验证。假设该结论对 $d \le d_0$ 成立。那么对于 $d = d_0+1$，将公式中的任意二项式系数应用众所周知的等式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$。因此

$$\begin{aligned} T^c_d = T^c_{d-1} + T^{c-1}_{d-1} &= \tbinom{d-1}{c}\left(1 - \tfrac{c}{d-c}\right) + \tbinom{d-1}{c-1}\left(1 - \tfrac{c-1}{d-c+1}\right) \\ &= \tbinom{d}{c}\left(1 - \tfrac{c}{d-c+1}\right) , \end{aligned}$$

最右边的等式可直接验证。

第（4）部分。假设 $d = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$。令

$$h_{k,m} := \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} , \text{ so } \binom{2k}{k-m} = \binom{2k}{k} h_{k,m} .$$

固定 k 后，数列 $h_{k,m}$ 随 m 递减；有 $h_{k,0} = 1$。所有相容对的和 $\sum_{c=0}^{d} \binom{d}{c}^2$ 等于 $\tilde{b} := \binom{2k}{k}^2 (1 + 2\sum_{m=1}^{k} h^2_{k,m})$。数目 $\nu(d) = \nu(2k)$ 有上界

$$\sum_{c=0}^{k} \binom{2k}{c} T^c_{2k} = \sum_{m=0}^{k} \binom{2k}{k-m} T^{k-m}_{2k} = \binom{2k}{k}^2 \sum_{m=0}^{k} \frac{2m+1}{k+m+1} h^2_{k,m}$$

（我们提醒一下，满足条件（2.4）的序列是在假设 $c \le p$ 的前提下定义的。）固定 $s \in (0,1)$。于是

$$g_1 := \sum_{m=0}^{[sk]} \frac{2m+1}{k+m+1} h^2_{k,m} \le \frac{2[sk]+1}{k+[sk]+1} \sum_{m=0}^{[sk]} h^2_{k,m} .$$

显然，$g_1 < \frac{2[sk]+1}{k+[sk]+1} \sum_{m=0}^{k} h^2_{k,\,m}$，因此

$$\binom{2k}{k}^2 g_1 < \frac{2[sk]+1}{k+[sk]+1} \tilde{b} . \tag{2.7}$$

当 k 取较大值且对于 $m \ge [sk]+1$ 时，量 $h_{k,\,m}$ 被以下式子控制：

$$\frac{(k-[sk/2])\cdots(k-m+1)}{(k+[sk/2]+1)\cdots(k+m)} \le \left(\frac{k-[sk/2]}{k+[sk/2]+1}\right)^{[sk]-[sk/2]} \left(\frac{k-[sk]+1}{k+[sk]}\right)^{m-[sk]-1} .$$

令 $u := \frac{k-[sk/2]}{k+[sk/2]+1}$ 和 $v := \frac{k-[sk]+1}{k+[sk]}$。因此

$$\begin{aligned} g_2 := \sum_{m=[sk]+1}^{k} h^2_{k,m} &< u^{[sk]-[sk/2]} \sum_{m=[sk]+1}^{\infty} v^{m-[sk]-1} \\ &= \tfrac{u^{[sk]-[sk/2]}}{1-v} = u^{[sk]-[sk/2]} \tfrac{k+[sk]}{2[sk]+1} . \end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时，后一个量趋于 0，因此 $\lim_{k\to\infty} \binom{2k}{k}^2 g_2/\tilde{b} = 0$。由于$g_3 := \sum_{m=[sk]+1}^{k} \frac{2m+1}{k+m+1} h_{k,m}^2 < g_2$，可得

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k}{k}^2 g_3/\tilde{b} = 0 \ . \tag{2.8}$$

有 $\nu(d) \le \binom{2k}{k}^2 (g_1 + g_3)$。(2.7) 中 $\tilde{b}$ 的系数可以通过将 s 取得足够小而小于任意正数。因此，不等式 (2.7) 和等式 (2.8) 意味着定理3的第（4）部分对偶数 d 成立。

若 $d = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$，则可以用大致相同的方法证明第（4）部分，因此我们只指出一些技术上的差异。令

$$h_{k,m} := \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)} \ , \ \text{so} \ \binom{2k+1}{k-m} = \binom{2k+1}{k} h_{k,m} \ ,$$

以及 $\tilde{b} = 2\binom{2k+1}{k}^2 (1+\sum_{m=1}^{k} h_{k,\,m}^2)$。量 g_1、g_2 和 g_3 的定义相同，但要依据 $h_{k,\,m}$ 的新公式。令 $u := \frac{k-[sk/2]}{k+[sk/2]+2}$ 且 $v := \frac{k-[sk]+1}{k+[sk]+1}$。不等式 (2.7) 和等式 (2.8) 保持不变。□

3. Realizable couples for $d = 3, 4$ and 5

我们给出问题 2 在 $d = 3$、4 和 5 时的完整答案；在 $d = 1$和 2 时，此答案由例 1 给出；可以发现，$\tilde{r}^*(1) = 1$ 且 $\tilde{r}^*(2) = 2/3$，见记号 2。由定理 1 的第 (1) 部分可知，对于 $d > 1$，$\tilde{r}^*(1) < 1$。我们利用对合 i_m（见注 2），只考虑满足$a_{d-1} > 0$的情形。对于 $d = 3$，我们在下表中列出符号模式以及（不可）实现的序：

符号模式	可实现序	不可 − 实现的序
$(+,+,+,-)$	PNN	$NPN,\ NNP$
$(+,+,-,-)$	$PNN,\ NPN,\ NNP$	
$(+,+,+,+)$	NNN	
$(+,+,-,+)$	PPN	$NPP,\ PNP$.

因此 $\tilde{r}^*(3) = 3/5$。这些情形的（不可）实现性可借助 [11] 中的结果加以证明。对于 $d = 4$，我们按 c 的取值列出符号模式：

c 符号模式 可实现序 不可实现序 0 $(+,+,+,+,+)$ $NNNN$1 $(+,+,+,+,-)$ $PNNN$ $NPNN$, $NNPN$, $NNNP$$(+,+,+,-,-)$ $PNNN$, $NPNN$, $NNPN$ $NNNP$$(+,+,-,-,-)$ $NPNN$, $NNPN$, $NNNP$ $PNNN$2 $(+,+,-,+,+)$ $NPPN$ $NNPP$, $NPNP$, $PNNPPNPN$, $PPNN$$(+,+,-,-,+)$ $PNPN$, $NPPN$, $NPNP$, $NNPPPPNN$, $PNNP$$(+,+,+,-,+)$ $PPNN$ $PNPN$, $NPPN$, $NPNPPNNP$, $NNPP$3 $(+,+,-,+,-)$ $PPPN$ $NPPP$, $PNPP$, $PPNP$

因此 $\tilde{r}^*$(4) $= 3/7$。这些情形的（非）可实现性可利用 [11] 中的结果证明。对合 i_m 将含有 $c = 3$ 的符号模式变换为 $(+,-,-,-,-)$。我们用以下示例说明符号模式为 $(+,+,-,-,+)$ 的情形的可实现性：

$$
\begin{aligned}
PNPN \quad & (x+1.3)(x-1.2)(x+1.1)(x-1) = \\
& x^4 + 0.2x^3 - 2.65x^2 - 0.266x + 1.716 \\
NPPN \quad & (x+2)(x-1)(x-0.9)(x+0.8) = \\
& x^4 + 0.9x^3 - 2.82x^2 - 0.52x + 1.44 \\
PPNN \quad & (x+2)(x+1.1)(x-1)(x-0.1) = \\
& x^4 + 2x^3 - 1.11x^2 - 2.11x + 0.22 \\
PNNP \quad & (x-2)(x+1.9)(x+1)(x-0.8) = \\
& x^4 + 0.1x^3 - 4.62x^2 - 0.68x + 3.04\ .
\end{aligned}
$$

对于 $d = 5$，我们对每种符号模式只列出可实现序的数量，以及与该符号模式相容的序列总数；在某些情况下，还列出可实现序。下表可由 [11] 和 [13] 中的结果加以论证。典范符号模式如下：

$c=0$ $(+,+,+,+,+,+)$ $1/1$ $\quad$ $c=1$ $(+,+,+,+,+,-)$ $1/5$

$c=2$ $(+,+,-,+,+,+)$ $1/10$ $\quad$ $c=3$ $(+,+,-,+,-,-)$ $1/10$
$(+,+,+,-,+,+)$ $1/10$ $\quad$ $(+,+,+,-,+,-)$ $1/10$
$(+,+,+,+,-,+)$ $1/10$

$c=4$ $(+,+,-,+,-,+)$ $1/5$

其余符号模式如下：

$c=1$	$(+,+,+,+,-,-)$	$PNNNN$, $NPNNN$, $NNPNN$	$3/5$
	$(+,+,+,-,-,-)$		$5/5$
	$(+,+,-,-,-,-)$	$NNPNN$, $NNNPN$, $NNNNP$	$3/5$
$c=2$	$(+,+,-,-,-,+)$	$PPNNN$, $PNPNN$, $PNNPN$, $PNNNP$, $NPPNN$	$5/10$
	$(+,+,+,-,-,+)$	$PPNNN$, $PNPNN$, $PNNPN$, $NPPNN$	$4/10$
	$(+,+,-,-,+,+)$		$10/10$
$c=3$	$(+,+,-,+,+,-)$		$5/10$
	$(+,+,-,-,+,-)$		$4/10$

因此 $\tilde{r}^*(5)=47/126$。后两个符号模式（带有 $c=3$）由两个带有 $c=2$ 的符号模式通过对合 $i_m i_r$ 得到。具有所有可能次序的符号模式（$+,+,-,-,+,+$）的可实现性可由以下内容得出

$$(x+1)^3(x-1)^2=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1\ .$$

事实上，通过扰动 -1 处的三重根以及 1 处的二重根，可以得到符号模式相同且根的模具有任意次序的多项式，参见定理 1 第 (2) 部分的证明。

注 7。我们得到量 $\tilde{r}^*(d)$ 的取值数列如下：$1,\ 2/3,\ 3/5,\ 3/7,\ 47/126,\ldots$。可以猜想该数列是递减的。对于相邻两项的比值数列，可得

$$2/3=0.66\ldots\ ,\ \ 9/10=0.9\ ,\ \ 5/7=0.71\ldots\ ,\ \ 47/54=0.87\ldots\ .$$

似乎偶数项和奇数项构成了两个相邻的数列，并且 $\lim_{d\to\infty}\tilde{r}^*(d)=0^+$。

4. Proof of Theorem 1

第（1）部分。正如已经提到的，对于序列 $PP\ldots P$和 $NN\ldots N$，与它们相容的唯一变号保持模式分别是 $cc\ldots c$和 $pp\ldots p$，且相应的对是可实现的。

假设对于给定的 $c>0$ 和 $p>0$，模的次序 Ω 对所有兼容的变号保持模式都是可实现的。那么，特别地，它也能与以下模式一起实现：

符号模式 σ' 和 σ''，其中 σ' 的所有 c 个符号变化都位于开头，随后是其 p 个符号保持；而 σ''则相反。不过，符号模式σ' 和 σ'' 是规范的，因此只能分别与其典范序 Ω' 和 Ω''一起实现，见定义 2。由于 $\Omega' \neq \Omega''$，次序 Ω 无法同时与σ' 和 σ'' 一起实现。

第（2）部分。对于 $d \geq 1$，全正符号模式可以实现，且其唯一的相容序为 $N \dots N$。为证明 $d \geq 5$ 的第（2）部分其余内容，我们构造具有 $c = 2$ 的符号模式，使其在所有相容序下均可实现。考虑多项式

$$\begin{aligned}(x+1)^{d-2}(x-1)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{d-2} \binom{d-2}{k} x^k\right)(x^2 - 2x + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{d} h_k x^k \ , \ h_k := \binom{d-2}{k} - 2\binom{d-2}{k-1} + \binom{d-2}{k-2} \ .\end{aligned}$$

它有两次符号变化（因此其符号模式的形式为 $\Sigma_{i_1,\ i_2,\ i_3}$）。要了解它们出现在哪些位置，可以观察到

$$h_k = \frac{(d-2)!}{k!(d-k)!}(4k^2 - 4dk + d(d-1)) \ ,$$

因此，当且仅当 $k = k_\pm := (d \pm \sqrt{d})/2$ 时，$h_k = 0$。如果 d 不是完全平方数，那么符号变化发生在幂 $x^{s_\pm}$ 和 $x^{s_\pm+1}$ 之间，其中 $s_\pm < k_\pm < s_\pm + 1$。如果 d 是完全平方数，那么 $x^{k_\pm}$ 的系数为 0。

假设 d 不是完全平方数。可以在保持多项式符号模式不变的情况下扰动其根。如果 d 是完全平方数，那么可以对这些根进行扰动，使所有系数都变为非零。对于根的模的任何可能序列，都可以选取这样的扰动，由此证明第（2）部分。可以观察到，当 $k_+ - k_- = \sqrt{d}$ 时，对于 $d \geq 5$，至少有两个连续的负系数（即 $i_2 \geq 2$），且符号模式不是规范的。

我们通过对 d 进行归纳法来证明定理的第（3）部分。对于 $d = 1$，2 和 3，这一论断可直接验证，见例 1 和第3节。假设 $d \geq 4$，且 σ 不是规范的。将 σ 表示为 $(\sigma_d, \sigma^\dagger, \sigma_0)$ 的形式，其中 σ_d 和 σ_0 是其首末分量。那么，符号模式 $(\sigma_d, \sigma^\dagger)$ 和 $(\sigma^\dagger, \sigma_0)$ 中至少有一个包含孤立符号变化或孤立符号保持。假设这是 $(\sigma_d, \sigma^\dagger)$。那么 $(\sigma_d, \sigma^\dagger)$ 不是规范的，因此可由多项式 P_j 实现为至少三个次序。这意味着 σ 也可由多项式 $P_j(x)(x \pm \varepsilon)$ 的根所确定的至少三个次序实现，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小；如果 σ 的最后两个分量相同，符号为 $+$（反之为 $-$）。

第（4）部分也通过对 d 进行归纳法证明。对于 $d \leq 4$，只需直接检验。假设 $d \geq 5$。如果符号模式（$\sigma_d, \sigma^\dagger$）和（$\sigma^\dagger, \sigma_0$）都不包含孤立符号变化或符号保持，那么 σ 的情形也如此，因此 σ 是规范的，并且 $k^*(\sigma) = 1$ ——矛盾。因此，这些符号模式中至少有一个不是规范的。不失一般性，假设它是（$\sigma_d, \sigma^\dagger$）（否则应用对合 i_r）。于是 $k^*((\sigma_d, \sigma^\dagger)) \geq 3$，所以 $k^*((\sigma_d, \sigma^\dagger)) = 3$；否则，类似于第（3）部分的证明，我们可得 $k^*(\sigma) > 3$。如有必要，应用对合 i_m，我们假设（$\sigma_d, \sigma^\dagger$）$= \Sigma_{2,d-2}$ 或 $\Sigma_{d-2,2}$。第一种情况下，有 $\sigma = \Sigma_{2,d-1}$。事实上，如果 $\sigma = \Sigma_{2,d-2,1}$，那么 $k^*(\sigma) > 3$，见 [11,

定理 3 和 4]。第二种情况下，要么 $\sigma = \Sigma_{d-2,\ 3}$ 且 $k^*(\sigma) = 5$ （见 [11,定理 1]），要么 $\sigma = \Sigma_{d-2,\ 2,\ 1}$ 且 $k^*(\sigma) = 4$ （见 [11, 定理 3 和 4]）。

第（5）部分。对于偶数的 d，次序 $\Omega := PNN\dots N$ 当且仅当符号模式 $\Sigma_{m,n}$, $m+n=d+1$, $n<m$ 可实现，见 [11, 定理 1],，因此 $\ell_*(\Omega) = d/2$。

5. Proof of theorem 2

第（1）部分的证明。A）对于长度为 $2d$ 的向量行 v，我们用 v_ℓ 表示将 v 向右移 ℓ 个位置后由 v 得到的向量行（此时最右边的 ℓ 个位置会丢失，最左边的 ℓ 个位置填入零）。我们将 R 表示为由多项式 $Q(x)$ 和 $(-1)^d Q(-x)$ 的 Sylvester $2d \times 2d$-矩阵构成的行列式，其第一行和第（$d+1$）行分别为

$$u := (\ 1 \quad a_{d-1} \quad a_{d-2} \quad a_{d-3} \quad a_{d-4} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ )$$

and

$$w := (\ 1 \quad -a_{d-1} \quad a_{d-2} \quad -a_{d-3} \quad a_{d-4} \quad \dots \quad (-1)^{d-1}a_1 \quad (-1)^d a_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ );$$

其第二行和第（$d+2$）行分别为 u_1 和 w_1，第三行和第（$d+3$）行分别为u_2 和 w_2，依此类推。对于 $d=2$ 和 $d=3$，我们得到行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_0 \\ 1 & -a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_0 \end{vmatrix} \text{ and } \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & -a_2 & a_1 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 & a_1 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{vmatrix}.$$

B) 对于 $j = 1, \dots, d$，我们将第 $j+d$ 行加到第 j 行。因此，行列式的第一行现在为

$$g := (\ 2 \quad 0 \quad 2a_{d-2} \quad 0 \quad 2a_{d-4} \quad \dots \quad 2a_{d-2[d/2]} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ )$$

接下来的 $d-1$ 行等于 g_j, $j = 1, \dots, d-1$。之后，将乘以 $1/2$ 的第 k 行从第 $d+k$ 行中减去，$k = 1, \dots, d$。因此，第 $d+1$ 行等于

$$h := (\ 0 \quad -a_{d-1} \quad 0 \quad -a_{d-3} \quad 0 \quad \dots \quad -a_{d-2[(d+1)/2]+1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ )$$

而接下来的 $d-1$ 行的形式为 h_j, $j = 1, \dots, d-1$。对于 $d=2$ 和 $d=3$，这给出

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2a_0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & a_0 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} \text{ and } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & -a_0 \end{vmatrix}.$$

C) 我们对行列式的行进行置换（这只会使行列式至多相差一个符号）。我们在前 $d-[d/2]$ 个位置放置第一、第三、第五等行，在接下来的 $[d/2]$ 个位置放置第 $(d+2)$、第 $(d+4)$、第 $(d+6)$ 等行，在接下来的 $[d/2]$ 个位置放置第二、第四、第六等行，并在最后 $d-[d/2]$ 个位置放置第 $(d+1)$、第 $(d+3)$、第 $(d+5)$ 等行。经过这次置换后，前 d 行仅在奇数列中有非零项，最后 d 行仅在偶数列中有非零项。

然后，我们对行列式的列进行置换，将奇数列放在前 d 个位置，将偶数列放在最后 d 个位置，同时保持奇数列和偶数列各自的相对次序。对于 $d=2$ 和 $d=3$，结果为

$$\begin{vmatrix} 2 & 2a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2a_0 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & -a_0 \end{vmatrix}.$$

对于任意 $d \geq 2$，行列式现在是分块对角形式，包含两个对角块$d \times d$。对于 $d=4$，这些块为

$$\begin{vmatrix} 2 & 2a_2 & 2a_0 & 0 \\ 0 & 2 & 2a_2 & 2a_0 \\ 0 & -a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & -a_1 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2a_2 & 2a_0 & 0 \\ 0 & 2 & 2a_2 & 2a_0 \\ -a_3 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & -a_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

第一行和第 $(d+1)$ 行分别等于

$$\tilde{g} := (\ 2 \quad 2a_{d-2} \quad 2a_{d-4} \quad \dots \quad 2a_{d-2[d/2]} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ )$$

以及 $\tilde{g}_d$。前 $d-[d/2]$ 行等于 $\tilde{g}$、$\tilde{g}_1$、$\tilde{g}_2$、.....、$\tilde{g}_{d-[d/2]-1}$，而行号为 $d+1$、$d+2$、.....、$d+[d/2]$ 的各行分别为 $\tilde{g}_d$、$\tilde{g}_{d+1}$、.....、$\tilde{g}_{d+[d/2]-1}$。第 $(d-[d/2]+1)$ 行等于

$$\tilde{h} := (\ 0 \quad -a_{d-1} \quad -a_{d-3} \quad -a_{d-5} \quad \dots \quad -a_{d-2[(d+1)/2]+1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ ).$$

~接下来的 $[d/2]-1$ 行分别为 h_j, $j=1,\dots,[d/2]-1$。最后的 $d-[d/2]$ 行等于~ h_k, $k=d-1,\dots,2d-[d/2]-2$。

行和列的对换总次数为偶数，因此行列式的符号不变。

D) 按所得行列式的第一列展开，然后再按最后一列展开。对于 d 偶数（对于 d 奇数），这分别得到 $-4a_0\Delta$ （分别为 $-2a_0\Delta$），其中 $(2d-2) \times (2d-2)$ 阶行列式 Δ 为分块对角矩阵，包含两个对角块 $(d-1) \times (d-1)$，每个对角块都是多项式$2Q^1$ 和 $-Q^2$的西尔维斯特矩阵。这说明了定理的第 (1) 部分。□

（2）的证明。可以为变量 a_j 赋予如下拟齐次权：a_{d-1}的权为 0，a_{d-2} 和 a_{d-3}的权为 1，a_{d-4} 和 a_{d-5}的权为 2，a_{d-6} 和 a_{d-7} 的权为 3，依此类推；这是因为 $a_{d-2}, a_{d-4}, \dots$ 和 $a_{d-3}/a_{d-1}, a_{d-5}/a_{d-1}, \dots$ 分别是 Q^1 和 Q^2的根的初等对称多项式（至多相差一个符号）。因此，R_0 是权为 d_0 的拟齐次多项式：$= [(d-1)/2][d/2]$。对于 d 为偶数的情形

（对于 d 为奇数的情形），它包含单项式 $\alpha a_0^{[(d-1)/2]}a_{d-1}^{[d/2]}$ 和 $\beta a_1^{[d/2]}$，$\alpha \neq 0 \neq \beta$（对于 $\gamma a_1^{[(d-1)/2]}a_{d-1}^{[d/2]}$ 和 $\delta a_0^{[d/2]}$，$\gamma \neq 0 \neq \delta$），其他所有单项式中，因子 a_0^k 和 a_1^s 仅与 $k < [(d-1)/2]$ 及 $s < [d/2]$（分别与 $k < [d/2]$和 $s < [(d-1)/2]$）一起出现。因此， R_0 不可能是权分别为 b_1 和 b_2, $0 < b_1, b_2 < d_0$的两个拟齐次多项式的乘积。

□

References

[1] Cajori, F.：《单变量数值方程根的近似算术方法史》。Colo. Coll. Publ. Sci. Ser. 12-7, 171-215 (1910)。[2] Curtiss, D.R.：《笛卡尔符号法则的近期扩展》，《数学年刊》。19 (4), 251-278 (1918)。[3] de Gua de Malves, J.-P.：《笛卡尔法则的证明：用于确定无虚根方程中正根与负根的数目》，Memoires de Math´ematique et de Physique tir´es des registres de l' Acad´emie Royale des Sciences 72-96 (1741)。[4] 《勒内·笛卡尔几何学》，附第一版影印本，D. E. Smith 和 M.L. Latham 译，纽约，多佛出版社，1954。[5] J. Forsg˚ard, V. P. Kostov 和 B. Shapiro：勒内·笛卡尔可能知道这件事吗？Exp. Math. 24 4 2015 438 448 1326 26027, 3383475 J. Forsgard, D. [6] ˚Novikov 和 B. Shapiro，《笛卡尔符号法则的热带类比》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2017, no. 12, 3726–3750。arXiv:1510.03257 [math.CA]。[7] J. Fourier：《论在求根的界限时笛卡尔定理的应用》。巴黎爱好科学学会科学通报 (1820) 156–165, 181–187；《著作集》2, 291–309, Gauthier-Villars, 1890。[8] Y. Gati, V. P. Kostov 和 M. C. Tarchi，《符号模式与刚性模数序》，《研究生数学杂志》，第 6 卷第 1 期 (2021), 60-72, arXiv:2012.04299。[9] Gauss, C.F.：一个代数定理的证明。J. Reine Angew. Math. 3, 1-4 (1828)；Werke 3, 67–70, G¨ottingen, 1866。[10] Jensen, J.L.W.：《方程理论研究》，《数学学报》36, 181-195 (1913)。[11] V. P. Kostov，《笛卡尔符号法则与根的模》，《德布勒森数学出版物》96/1-2 (2020) 161-184, DOI: 10.5486/PMD.2020.8640。[12] V. P. Kostov，《双曲多项式与典范符号模式》，Serdica Math. J. 46 (2020) 135-150, arXiv:2006.14458。[13] V. P. Kostov，哪些符号模式是典范的? Results Math 77 (2022) No 6, paper 235。[14] Kostov, V.P.：双曲多项式与刚性模数序，《德布勒森数学出版物》100 (1-2) 119-128 (2022), DOI: 10.5486/PMD.2022.9068。[15] Laguerre, E.：《数值方程理论》，Journal de Math´ematiques pures et appliqu´ees, s. 3, t. 9, 99-146 (1883)；《著作集》1, 巴黎, 1898, 切尔西, 纽约, 1972, pp. 3–47。[16] Meserve, B.E.：《代数基本概念》，纽约，多佛出版社，1982。

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, France
Email address: vladimir.kostov@unice.fr