arXiv:2302.05147v1 [math.AP] 10 Feb 2023

黎曼轨形上的非线性椭圆问题解的多重性

GUSTAVO DE PAULA RAMOS

Abstract. 我们采用摄影方法，根据局部群阶最大的点所构成子流形的 Lusternik–Schnirelmann 类别，获得黎曼轨形上非线性椭圆问题解的数量下界。

关键词：非线性椭圆方程、黎曼轨形、Lusternik–Schnirelmann 类别

1. Introduction

主要结果。设 (O $\mathfrak{g}$) 是一个 n 维、可定向、紧致且连通的黎曼轨形，其中 $n \geq 3$。我们关注次临界非线性问题的弱解的多重性

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2 \Delta^{(\mathcal{O},\mathfrak{g})} u + u = u|u|^{p-2} \text{ and} \\ u > 0 \end{cases}$$

当 $\epsilon \in]0,1[$ 足够小时，其中 $2 < p < 2n/(n-2)$。

已知（[BBM07，定理 A]），紧致连通黎曼流形 M 上的类似问题（不要求可定向）至少有 cat(M) 个 $+1$ 不同的非恒定解，其中 cat 表示 Lusternik–Schnirelmann 范畴（见定义 1.2）。

受该定理启发，我们的主要结果是，可以根据拓扑估计方程 (P_ϵ) 的解的数量

$$\mathrm{Z}^{\mathcal{O}} := \left\{ x \in \mathcal{O} : |\Gamma^{\mathcal{O}}(x)| = \max_{y \in \mathcal{O}} |\Gamma^{\mathcal{O}}(y)| =: \zeta^{\mathcal{O}} \right\},$$

其中 $\Gamma^{\mathcal{O}}(x)$ 表示 $x \in$O 的局部群（见定义 2.16）。我们指出，这一估计与在 (O $\mathfrak{g}$) 上积分的规范方式密切相关（见定义 3.3 ）。下面更精确地陈述我们的主要结果。

定理 1.1. 若 $\epsilon \in]0,1[$ 足够小，则 (P_ϵ) 至少存在 cat(Z$^{\mathcal{O}}$)$+1$ 个不同的非恒定弱解。

由于轨形 O 当且仅当 Z$^{\mathcal{O}}$ =O 时是流形，定理 1.1 蕴含了 [BBM07，定理 A] 的较弱形式，该形式仅涉及可定向流形。事实上，O 的可定向性仅用于应用索伯列夫嵌入，因此，如果能够证明索伯列夫嵌入在这种情况下仍然成立，该结果便可轻易推广到不可定向轨形。

变分框架。若 $1 \leq q < \infty$，则我们将勒贝格空间L^q(O $\mathfrak{g}$)定义为 C^∞(O)在该范数下的完备化

$$\|u\|_{L^q(\mathcal{O},\mathfrak{g})} := \left[\int_{\mathcal{O}} |u|^q \mathrm{d}\mu^{(\mathcal{O},\mathfrak{g})} \right]^{1/q},$$

Date: 2023年2月13日。

其中，我们在第 2 节中定义了实值奥比折映射空间 C^∞(O)。类似地，索伯列夫空间 H^1(O $\mathfrak{g}$)定义为 C^∞(O)在该内积下完备化得到的希尔伯特空间

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})} := \int_{\mathscr{O}} \mathfrak{g}(\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u), \mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v)) + uv \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}.$$

在此情形下，索伯列夫嵌入成立（见 [Far01, 定理 2.3]），因此我们将方程 (P_ϵ) 的弱解定义为满足下述条件的 $u \in H^1$(O $\mathfrak{g}$):

对于给定的 $v \in C^\infty$(O),

$$\epsilon^2 \langle u, v\rangle_{H^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})} + (1-\epsilon^2)\langle u, v\rangle_{L^2(\mathscr{O},\mathfrak{g})} + \langle i^*(u(u^+)^{p-2}), v\rangle_{H^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})} = 0,$$

其中 i: H^1(O $\mathfrak{g}$) $\to L^p$(O $\mathfrak{g}$) 是一个索伯列夫嵌入。与文献中的惯例相同，我们将采用一种宽泛的表述方式，将上述条件写作

(1.1)
$$\text{given } v \in C^\infty(\mathscr{O}),\ \int_{\mathscr{O}} \epsilon^2 \mathfrak{g}(\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u), \mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v)) + uv - u(u^+)^{p-2} v \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} = 0.$$

在我们的情形下，散度定理成立（见 [Chi90, 第 320-321 页），因此我们的弱解概念与黎曼流形（无边界）上的相应概念类似。事实上，我们有一个定义良好的泛函 J_ϵ: H^1(O $\mathfrak{g}$) $\to \mathbb{R}$，其定义为

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathscr{O}} \frac{\epsilon^2}{2}\mathfrak{g}(\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u), \mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u)) + \frac{u^2}{2} - \frac{(u^+)^p}{p}\mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} \tag{1.2}$$

可以常规地证明它属于 $C^2(H^1$(O $\mathfrak{g}$)$)$。因此可以推出变分刻画： $u \in H^1$(O $\mathfrak{g}$) 满足 (1.1) 当且仅当 $\mathrm{d}_u J_\epsilon = 0$。

我们还可以利用索伯列夫嵌入证明

$$m(J_\epsilon) := \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} J_\epsilon > 0,$$

其中

$$\mathcal{N}_\epsilon := \{u \in H^1(\mathscr{O}, \mathfrak{g}) \setminus \{0\} : \mathrm{d}_u J_\epsilon(u) = 0\}$$

是与 J_ϵ 相关联的 Nehari流形，它是 J_ϵ 的自然约束（见 [AM07，第 6.4] 节）。我们还指出，Rellich–Kondrakov 定理在此情形下成立（见 [Far01，定理 2.4]），因此 $J_\epsilon|_{\mathcal{N}_\epsilon}$ 满足 Palais–Smale 条件。最后，我们规定 $\mathcal{N}_\epsilon$ 与 J_ϵ 的子水平集之间（可能为空的）交集的记号，

$$\Lambda_{\epsilon,\alpha} := \{u \in \mathcal{N}_\epsilon : J_\epsilon(u) < \alpha\}$$

对任意 $\alpha > 0$。

定理 1.1 的证明概要。我们先回顾 Lusternik–Schnirelmann 类别的定义。

定义 1.2。设 X 是一个拓扑空间。若 $\emptyset \neq A \subset X$，则我们将 A 在 X 中作为子集的 Lusternik–Schnirelmann 类别定义为

$\mathrm{cat}_X(A)$ = 最小值 $\{n \in \mathbb{N}$: A 包含于以下集合的并集中:
n 可缩闭子集的 $X\}$

并且我们设 $\mathrm{cat}_X(\emptyset) = 0$。此外，我们定义 $\mathrm{cat}(X) := \mathrm{cat}_X(X)$。

以下著名结果表明，Lusternik–Schnirelmann 类别可用于估计临界点的数量。

定理 1.3（[BBM07，定理 3.3]）。设 $\mathcal{N}$ 为 $C^{1,\ 1}$-Banach 流形，且$J \in C^1(\mathcal{N})$。若 J 下有界并满足 Palais–Smale 条件，则其在 $J^d := \{u \in \mathcal{N} : J(u) < d\}$中至少有 cat($J^d$) 个临界点。此外，若$\mathcal{N}$ 可缩且 cat(J^d) > 1，则 J 在J^d之外至少有一个临界点。

在前述定理的背景下，摄影方法是一种技术（在 [Ben+22 的第 4] 节中有详细描述），当 J^d 是索伯列夫空间的子流形时，该方法可以帮助我们估计 Lusternik–Schnirelmann 类别。

回到我们的问题，我们实际上可以按照 [BBM07 第 6] 节中的论证来证明 $\mathcal{N}_\epsilon$ 是可缩的，因此，为了由定理 1.3 推出定理 1.1，我们只需证明 cat($\Lambda_{\epsilon,m(J_\epsilon)+\delta}$) $\geq$ cat(Z^ϕ)。下面的引理是我们用来获得这一估计的关键结果。

引理 1.4（[BBM07，注记 2.2]）。设 X、Y 为拓扑空间，并设 $f\colon X \to Y$、 $g\colon Y \to X$ 为连续映射，满足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$。我们得出 cat($X$) $\leq$ cat(Y)。

因此，本文的目标是证明以下结果。

定理 1.5. 若 $\epsilon \in]0,1[$ 足够小，则存在 $\delta > 0$，使得我们可以构造连续映射 $Z^\phi \to \Lambda_{\epsilon,\ m(J_\epsilon)+\delta}$ 和 $\Lambda_{\epsilon,\ m(J_\epsilon)+\delta} \to O$，其复合映射与 id_{Z^ϕ}同伦。

论文结构。第 2 节通过介绍基本定义、确定记号并回顾相关结果，阐述轨形的背景知识。与第 2 节类似，第 3 节的大部分内容致力于介绍黎曼轨形的基础知识；本节最后则引入弱凸性的概念，并证明黎曼质心也可在此背景下加以考察。第 4 节介绍技术性预备知识，以便在第 5 节证明定理 1.5。

记号与术语。若 (X,dist) 是一个度量空间，或具有自然诱导的度量空间结构（如内积空间或黎曼流形），则定义

$$\mathrm{B}^{(X,\mathrm{dist})}(Y,r) = \left\{ x \in X : \inf_{y \in Y} \mathrm{dist}(x,y) < r \right\}$$

对于任意 $Y \subset X$和 $r \in]0,\ \infty[$。若 (M, $\mathfrak{g}$) 是一个黎曼流形，则当给定 $x, y \in A$ 时，我们称 $A \subset M$ 在 (M, $\mathfrak{g}$) 上强凸，

(i) 在忽略参数化的情况下，存在唯一一条连接 x 和 y 的极小测地线，其位于 (M, $\mathfrak{g}$) 上；(ii) 若 $\gamma\colon [0,1] \to (M, \mathfrak{g})$ 是一条连接 x 和 y 的极小测地线，则 $\gamma([0,1]) \subset A$。

致谢。本研究部分由高等教育人员培训协调局——巴西（CAPES）资助，财政代码 001。具体而言，获得了 CAPES 资助 88887.614697/2021-00 和 88887.715990/2022-00。作者感谢 Francisco Caramello 和 André Magalhães de Sá Gomes 就（黎曼）轨形问题进行了富有帮助的讨论。

2. Orbifolds

本节遵循经典方法，通过局部图和图册介绍（光滑）轨形，与 [Car19; Alf21] 中的做法类似。

轨形结构。设 X 为一个拓扑空间。

定义 2.1. 给定 $x \in X$，若三元组 (U, G, ϕ) 是 X 上 x 周围的 n 维轨形图，则称其为

(i) $\widetilde{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的连通开子集，称为图册的定义域；(ii) G 是一个在 U 上光滑且有效作用的有限群，称为图册的结构群；(iii) 图映射 $\phi: U \to X$ 是一个连续的 G-不变映射，它诱导一个同胚 $U/G \to \phi(U)$，并且 (iv) $\phi^{-1}(x)$ 是酉的。

设 (U, G, ϕ) 是 X 上的一个轨形图。在这种情况下，我们称 $\widetilde{U} := \phi(U) \subset X$ 是 X 的一个基本开子集，并用 $\Phi_g: U \to U$ 表示由 $g \in G$ 的作用所诱导的微分同胚。

定义 2.2. 设 (U, G, ϕ)、(V, H, ψ) 是 X 上的 n 维轨形图。若 $\lambda: U \to V$ 是一个光滑嵌入且 $\psi \circ \lambda = \phi$，则称 λ 为将 (U, G, ϕ) 轨形嵌入到 (V, H, ψ) 中的轨形嵌入。

我们引入轨形图册的概念。

定义 2.3. 集合 $\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ 称为 X 的 n维轨形图册，当

(i) 给定 $i \in I$，(U_i, G_i, ϕ_i) 是 X 上的 n维轨形图；(ii) $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的开覆盖；(iii) 若 $i, j \in I$ 满足 $U_i \subset U_j$，则存在一个轨形嵌入 $\widetilde{}$，将 (U_i, G_i, ϕ_i) 嵌入 (U_j, G_j, ϕ_j)；(iv) 给定 $x \in X$ 和 i，对于满足 $x \in U_i \cap U_j$的 $j \in I$，存在 $k \in I$ 使得$U_k \subset U_i \cap U_j$。

若 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 是 X的 n维轨形图册，则称它们相容，当且仅当 $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ 包含于 X的一个 n维轨形图册中。

定义 2.4. 当满足以下条件时，我们称 $\mathcal{A}$ 为 X 的 n维轨形结构：

(i) $\mathcal{A}$ 是 X 的 n维轨形图册，并且；(ii) 如果 $\mathcal{A}$ 是 X 的 n维轨形图册，且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}$相容，则 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$。

最后，我们定义轨形的概念。

定义 2.5. 当 $\mathrm{X}^{\mathcal{O}}$ 是仿紧豪斯多夫空间，且 $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}$ 是 $\mathrm{X}^{\mathcal{O}}$的 n维轨形结构时，称二元组 $\mathrm{O} = (\mathrm{X}^{\mathcal{O}}, \mathcal{A}^{\mathcal{O}})$ 为 n 维轨形。

设 O 为一个轨形。在此语境下，

- $\mathcal{B}$ 称为 O 的轨形图册，当它是 $\mathrm{X}_{\mathcal{O}}$ 的轨形图册且 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$O</style}；
- $(\widetilde{U}, G, \phi)$ 被称为 O 上的轨形图，当 $(\widetilde{U}, G, \phi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ 且
- 我们用 $x \in$O（分别用 $U \subset$ O）表示 $x \in \mathrm{X}_{\mathcal{O}}$（分别表示 $U \subset \mathrm{X}_{\mathcal{O}}$）。

我们以引入轨形可定向性的概念来结束本节。

定义 2.6. 若可选定 $\mathcal{B}$，即 O 的一个轨形图册，使得.....则称轨形 O 是可定向的。

(i) 如果 $(U, G, \phi) \in \mathcal{B}$，那么 G 通过保定向微分同胚作用于 U；(ii) $\mathcal{B}$ 各图册之间的轨形嵌入均保定向。

轨形映射。设 O、P 为轨形，并设 $f: \mathrm{X}^{\mathscr{O}} \to \mathrm{X}^{\mathscr{P}}$ 是连续映射。

定义 2.7。给定 $x \in \mathrm{O}$，若光滑函数 $f_x: U_x \to V_{f(x)}$，则称其为 f 在 x 处的局部提升，当

(i) (U_x, G_x, ϕ_x) 是 O 上 x 附近的轨形图；(ii) $(V_{f(x)}, H_{f(x)}, \psi_{f(x)})$ 是 P 上 $f(x)$ 附近的轨形图；(iii) $f(U_x) \subset V_{f(x)}$；(iv) $\psi_{f(x)} \circ f_x = f \circ \phi_x$，以及 (v) 给定 $g \in G_x$，存在 $h_g \in H_{f(x)}$ 使得 $f_x \circ \Phi_g = \Phi_{h_g} \circ f_x$。

存在 f 在轨形 O 处的局部提升之间的同构概念。

定义 2.8。固定 $x \in \mathrm{O}$，并设 $f_x^1: U_x^1 \to V_{f(x)}^1$、$f_x^2: U_x^2 \to V_{f(x)}^2$ 是 f 在 x 处的局部提升。若存在光滑的微分同胚 $\psi^{\mathscr{O}}: U_x^1 \to U_x^2$、$\psi^{\mathscr{P}}: V_{f(x)}^1 \to V_{f(x)}^2$，使得 $\psi^{\mathscr{P}} \circ f_x^1 = f_x^2 \circ \psi^{\mathscr{O}}$，则称 f_x^1 和 f_x^2 同构。

局部提升之间的这一同构概念引出了局部提升的等价概念。

定义 2.9. 设 $f^1: U^1 \to V^1$，$f^2: U^2 \to V^2$ 是 f 的局部提升。给定 $x \in U^1 \cap U^2$，若存在一个包含 x 的轨形图 (U^3, G^3, ϕ^3)，使得 $U^3 \subset U^1 \cap U^2$，且提升 f^1, f^2 在 U^3 上诱导出同构的提升，则称 f^1 与 f^2 在 x 处等价，记作 $f^1 \sim_x f^2$。

令 $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{O}, \mathrm{P})$ 表示由元素 $(f, \{\widetilde{f}_x\}_{x \in \mathscr{O}})$ 构成的集合，其中 $f: \mathrm{X}^{\mathscr{O}} \to \mathrm{X}^{\mathscr{P}}$ 连续，并且对于给定的 $x \in \mathrm{O}$，f_x 是 f 在 x 处的局部提升。我们在 $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{O}, \mathrm{P})$ 上引入等价关系 $\sim$：若对于给定的 $x \in \mathrm{O}$，$f_y^1 \sim_x f_z^2$ 对任意 $y, z \in \mathrm{O}$ 均成立，则令 $(f^1, \{f_x^1\}_{x \in \mathscr{O}}) \sim (f^2, \{f_x^2\}_{x \in \mathscr{O}})$。

定义 2.10. 若 f 满足 $\mathrm{f} \in C^\infty(\mathrm{O}, \mathrm{P}) := \mathrm{C}^\infty(\mathrm{O}, \mathrm{P})/\sim$，则称 f 是从 O 到 P 的轨形映射，记作 $\mathrm{f}: \mathrm{O} \to \mathrm{P}$。

由于我们尤其关注实值奥比折映射，因此设 $C^\infty(\mathrm{O}) = C^\infty(\mathrm{O}, \mathbb{R})$。

轨形丛与切轨形丛。设 P 是轨形 O 上的一个轨形丛，即

(i) P 是一个轨形；(ii) 给定 $x \in \mathrm{O}$，存在 (a) (U_x, G_x, ϕ_x)，它是 O 上 x 处的一个轨形图；(b) (V_x, G_x, ψ_x)，它是 P 上的一个轨形图；(c) 一个光滑丛映射 $\widetilde{\pi_x}: V_x \to U_x$；并且 (iii) 若 (a) (U_1, G_1, ϕ_1) 和 (U_2, G_2, ϕ_2) 是 O 上的轨形图；(b) (V_1, G_1, ψ_1) 和 (V_2, G_2, ψ_2) 是 P 上的轨形图；(c) $\widetilde{\pi_1}: V_1 \to U_1$ 和 $\widetilde{\pi_2}: V_2 \to U_2$ 是光滑丛映射；且 (d) $\lambda^{\mathscr{O}}: U_1 \to U_2$ 是将 (U_1, G_1, ϕ_1) 嵌入 (U_2, G_2, ϕ_2) 的轨形嵌入，则存在 $\lambda^{\mathscr{P}}: \widetilde{V_1} \to \widetilde{V_2}$，它是将 $(\widetilde{V_1}, H_1, \psi_1)$ 嵌入 $(\widetilde{V_2}, H_2, \psi_2)$ 的轨形嵌入，并满足 $\widetilde{\pi_2} \circ \lambda^{\mathscr{P}} = \lambda^{\mathscr{O}} \circ \widetilde{\pi_1}$。

当 (ii) 中的丛映射定义秩为 k 的向量丛，且 (iii) 中的映射为向量丛态射时，称轨形丛 P 为秩为 k 的锥轨形丛。此外，P 上的轨形丛结构典范地诱导出唯一的满射轨形映射 $\pi^{\mathscr{P}}: \mathrm{P} \to \mathrm{O}$，使得给定 $x \in \mathrm{O}$ 及相应的

(ii) 中的信息，有 $\pi^{\mathscr{P}} \circ \psi_x = \phi_x \circ \widetilde{\pi_x}$。当 $\sigma \in C^\infty(\mathsf{O}, \mathsf{P})$ 且 $\pi^{\mathscr{P}} \circ \sigma = \mathrm{id}^{\mathscr{O}}$ 时，我们称 σ 为 P 的一个轨形截面。最后，为了完成关于轨形丛的讨论，我们将 P 在 $x \in$O 上的纤维定义为集合 $\mathsf{P}_x := (\pi^{\mathscr{P}})^{-1}(x) \subset \mathsf{P}$；给定$U \subset \mathsf{O}$，我们定义 $\mathsf{P}|_U = (\pi^{\mathscr{P}})^{-1}(U)$。

现在来构造 O 上最简单且可能最重要的锥轨形丛——切轨形丛 TO。假设 O 的维数为 n，并设 $\mathcal{B} = \sim\{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ 是 O 的一个轨形图册。给定 $i \in I$，令 $\widetilde{\pi}_i = \mathrm{pr}_1 : U_i \times \mathbb{R}^n \to U_i$；考虑 G_i 在 $V_i := U_i \times \mathbb{R}^n$ 上的作用，定义如下

$$g(\widetilde{x}, v) := (g\widetilde{x}, \mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_g(v)) \in \widetilde{U_i} \times \mathbb{R}^n$$

对每个 $(g, \widetilde{x}, v) \in G_i \times U_i \times \mathbb{R}^n$ 均成立，并定义商拓扑空间 $Y_i = \widetilde{V_i}/G_i$。现在，定义积拓扑空间 $Y_{\mathrm{TO}} = \prod_{i\in I}(\{i\} \times Y_i)$。给定$\sim i, j \in I$；$(\widetilde{x_i}, v_i) \in V_i$ 和 $(\widetilde{x_j}, v_j) \in V_j$，当且仅当 $(i, G_i(\widetilde{x_i}, v_i)) \sim (j, G_j(\widetilde{x_j}, v_j))$

(i) $\phi_i(\widetilde{x_i}) = \phi_j(\widetilde{x_j}) =: y \in U_i \cap U_j$;
(ii) we can fix $\lambda\colon \widetilde{U_i} \to \widetilde{U_j}$, an orbifold embedding of $(\widetilde{U_i}, G_i, \phi_i)$ into $(\widetilde{U_j}, G_j, \phi_j)$ such that $\mathrm{d}_{\widetilde{x_i}}\lambda(v_i) = v_j$.

我们将商拓扑空间记为 $\mathsf{X}^{\mathrm{TO}} = Y^{\mathrm{TO}}/\sim$。构造切轨形丛 TO 的最后一步是为 X^{TO}定义一个轨形图册。令 $\mathrm{d}\phi_i\colon \widetilde{V}_i \to \mathsf{X}^{\mathrm{TO}}$ 定义为 $\mathrm{d}\phi_i(\widetilde{x}, v) = [i, G_i(\widetilde{x}, v)]$，其中任意 $(\widetilde{x}, v) \in \widetilde{V}_i$ 且 $i \in I$。

定义 2.11。O 的切轨形丛是 O 上秩为 n 的锥轨形丛，定义为 $\mathrm{TO} = (\mathsf{X}^{\mathrm{TO}}, \mathcal{A}^{\mathrm{TO}})$，其中 $\mathcal{A}^{\mathrm{TO}}$ 由轨形图册$\sim\{(V_i, G_i, \mathrm{d}\phi_i)\}_{i\in I}$生成。

子轨形与典范分层。设 O 是一个 n 维轨形。我们首先介绍 O 上一种特殊的轨形图。

引理 2.12。给定 $x \in$O，存在一个以 x 为中心的线性图，即一个 $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$，它是 O 上 x 附近的轨形图，并满足 $\phi^{-1}(x) = 0$，且 G是 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ 的子群，在 $\mathbb{R}^n$上典范地作用。

证明。设 $(\widetilde{V}, H, \psi)$ 是 O 上 x 附近的一个轨形图，并令 $\widetilde{x} = \phi^{-1}(x)$。设 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 是 V 上一个 G- 等变的黎曼度量，并固定 $\epsilon > 0$，使得

$$\mathbb{R}^n \supset B^{(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{x}})}(0, \epsilon) \ni u \mapsto \exp_{\widetilde{x}}^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})}(u) \in B^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \epsilon) \subset \widetilde{V}$$

是一个光滑微分同胚。特别地，我们可以定义如下光滑微分同胚:

$$\mathbb{R}^n \ni u \mapsto \eta(u) := \exp_{\widetilde{x}}^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})}\left(\frac{\epsilon|u|^2}{1+|u|^2}u\right) \in B^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \epsilon) \subset \widetilde{V}.$$

黎曼度量 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 是 G-等变的，因此

$$\exp_{\widetilde{x}}^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})} \circ \mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_g = \Phi_g \circ \exp_{\widetilde{x}}^{(\widetilde{V}, \widetilde{\mathfrak{g}})}$$

对任意 $g \in G$ 均成立。最后，$(\mathbb{R}^n, G, \phi := \psi \circ \eta)$ 是一个满足引理结论的轨形图，其中 $G := \{\eta^* \mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_h : h \in H\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$。□

引入线性图的概念后，我们可以定义 O 的嵌入子轨形的含义。

定义 2.13. 当满足以下条件时，我们称 P 是 O 的一个 k 维嵌入子轨形

(i) P 是一个 k 维轨形；(ii) $\mathsf{X}^{\mathscr{P}}$ 是 $\mathsf{X}^{\mathscr{O}}$ 的一个拓扑子空间;

(iii) 若 $x \in \mathsf{P}$，则存在 $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$，这是一个以 x 为中心、适配于 P 的线性图，即 $(\mathbb{R}^k, H, \psi := \phi \circ \mathrm{pr}_1)$ 是 P 上的轨形图，且 $\psi(\mathbb{R}^k) = \phi(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}) = \phi(\mathbb{R}^n) \cap \mathsf{P}$，其中 H 是 G 的某个子群。

现在，我们来介绍 O 的典范分层。回顾以下简单结果。

~引理 2.14（[MM03，引理 2.10]）。若（U， G， ϕ）是 O 上 x 处的一个轨形图，则 $G \ni g \mapsto \mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ 是一个单态射，其中 $\widetilde{x} := \phi^{-1}(x)$。

根据前述引理，定义为以下形式的 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ 的子群

$$\mathrm{d}_x G = \{\mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_g : g \in G\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

与 G 同构。因此，O 周围轨形图的结构群均彼此同构。

~ ~引理 2.15（见 [MM03，第 39–40] 页）。若 $x \in \mathsf{O}$ 和（U， G， ϕ）、（V， H， ψ）是 O 上 x 处的轨形图，则

$$\mathrm{d}_x G = k^{-1}(\mathrm{d}_x H)k = \{k^{-1}hk : h \in H_x\}$$

对于某个 $k \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$。

由于前面的引理，我们可以在轨形上引入局部群和层的概念。

定义 2.16. 给定 $x \in \mathsf{O}$，我们将其局部群定义为

$$\Gamma^{\mathscr{O}}(x) = \{h^{-1}(\mathrm{d}_x G)h : h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)\}$$

并设 $|\Gamma^{\mathscr{O}}(x)| := |G|$，其中 G 是 O 上 x 附近任一轨形图的结构群。层 $\Sigma^{\mathscr{O}}(x)$ 定义为 $\{y \in \mathsf{O} : \Gamma^{\mathscr{O}}(x) = \Gamma^{\mathscr{O}}(y)\}$ 的连通分支，其中包含 x。

我们来证明，O 的层从轨形结构中自然地继承了流形结构。

引理 2.17. 如果 Σ 是 O 的一个层，那么 Σ 具有自然的流形结构，使得 Σ 是 O 的一个嵌入子流形。

证明。固定 $x \in \Sigma$，令 $(\mathbb{R}^n, G_x, \phi_x)$ 为 O 上以 x 为中心的线性图，并设

$$V_x = \{u \in \mathbb{R}^n : gu = u \text{ for any } g \in G_x\}.$$

由于 V_x 是 $\mathbb{R}^n$ 的向量子空间，我们可以固定一个线性同构 $\Psi_x \colon \mathbb{R}^{k_x} \to V_x$，其中 $k_x \in \{0, \ldots, n\}$ 为某个自然数集。

我们要证明，对于任意 x_1、$x_2 \in \Sigma.$，都有 $k := k_{x_1} = k_{x_2}$。设 $(\mathbb{R}^n, G_{x_1}, \phi_{x_1})$ 和 $(\mathbb{R}^n, G_{x_2}, \phi_{x_2})$ 分别为 O 上以 x_1 和 x_2 为中心的线性图。根据 V_{x_1} 和 V_{x_2} 的定义，它们是同构的向量空间，因此 $k_{x_1} = k_{x_2}$。

我们得出，$\{(\mathbb{R}^k, \phi_x \circ \Psi_x)\}_{x \in \Sigma}$ 是 Σ 的光滑图册，它诱导出引理陈述中的结构。□

我们根据 O 中各点的局部群对 O 进行分解。O 的正则轨迹定义为

$$\mathscr{O}^{\mathrm{reg}} = \{x \in \mathscr{O} : \Gamma^{\mathscr{O}}(x) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}\}$$

我们称其补集 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}} = \mathsf{O} \setminus \mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$ 为 O 的奇异轨迹。事实上，$\mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$是 O 的稠密开子集（见 [MM03, 引理 2.10]），因此由前述引理可知，若 Σ 是 O 的一个奇异层，则它是 O 的闭子流形。

3. Riemannian orbifolds

本节主要参考 [BB08, 第 6]节，旨在介绍黎曼轨形的概念及其背景下的常见构造。作为创新之处，我们引入弱凸子集的概念，并说明黎曼质心也可用于黎曼轨形。

黎曼轨形结构。设 O 是一个 n 维轨形。给定 $x \in \mathsf{O}$，若存在

(i) (U, G, ϕ)，这是 O 上 x 附近的一个轨形图；以及
(ii) $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{x}}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，一个 $(G \times G)$-不变的内积

使得 $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{x}} = (\mathrm{d}_{\widetilde{x}}\phi)^* \mathfrak{g}_x$，其中 $\widetilde{x} := \phi^{-1}(x) \in \widetilde{U}$，且 $G \times G$ 通过下式作用于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$(g_1, g_2)(v_1, v_2) := (\mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_{g_1}(v_1), \mathrm{d}_{\widetilde{x}}\Phi_{g_2}(v_2))$$

对任意 $g_1, g_2 \in G$ 和 $u, v \in \mathbb{R}^n$。在此背景下，若 $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{g}_x\}_{x \in \mathscr{O}}$ 是 O 上的黎曼度量，即，(O $\mathfrak{g}$) 就称为黎曼轨形

(i) 给定 $x \in \mathsf{O}$ $\mathfrak{g}_x\colon T_x\mathsf{O} \times T_x\mathsf{O} \to \mathbb{R}$ 是一个内积，并且 (ii) 若 $\sigma, \tau \in \mathfrak{X}(\mathsf{O})$，则

$$\mathscr{O} \ni x \mapsto \mathfrak{g}(\sigma, \tau)(x) := \mathfrak{g}_x(\sigma_x, \tau_x) \in \mathbb{R}$$

诱导出一个轨形映射。

轨形上的黎曼结构。让我们介绍黎曼轨形 (O $\mathfrak{g}$) 上由黎曼度量的存在而成为可能的几种运算。

定义 3.1。如果 $\phi\colon U \to \mathsf{O}$ 是一个图映射，则我们将其规范地对应于黎曼流形 $(U, \widetilde{\mathfrak{g}} := \phi^*\mathfrak{g})$。

与黎曼流形一样，我们可以定义实值奥比折映射的梯度。

定义 3.2。给定 $u \in C^\infty(\mathsf{O})$，$u$ 在 (O $\mathfrak{g}$) 上的梯度是向量场 $\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u) \in \mathfrak{X}(\mathsf{O})$，其特征由以下性质给出：若 $\phi\colon \widetilde{U} \to \mathsf{O}$ 是一个图映射，且 $\widetilde{u}\colon U \to \mathbb{R}$ 是 u 的局部提升，则

$$\widetilde{U} \ni \widetilde{x} \mapsto (\widetilde{\mathfrak{g}}^{i1}(\widetilde{x})\partial_i\widetilde{u}(\widetilde{x}), \ldots, \widetilde{\mathfrak{g}}^{in}(\widetilde{x})\partial_i\widetilde{u}(\widetilde{x})) \in \mathbb{R}^n$$

是 $\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u) \in \mathfrak{X}(\mathsf{O})$ 的局部提升，其中上述表达式采用爱因斯坦求和约定。

黎曼度量 $\mathfrak{g}$ 在 O 上诱导出一个拉东测度。

定义 3.3。我们将 $\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 定义为 O 上满足以下条件的唯一测度：若 $(\widetilde{U}, G, \phi)$ 是 O 上的轨形图，且 B 是 U 的博雷尔子集，则

$$\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(B) = \frac{1}{|G|}\int_{\widetilde{U}} \mathbb{I}_{\phi^{-1}(B)}(\widetilde{x})|\det \widetilde{\mathfrak{g}}(x)|^{1/2}\mathrm{d}\widetilde{x}$$

只要 B 是 U 的一个博雷尔子集。

长度空间结构。下面简要说明如何将连通黎曼轨形 (O, 𝔤) 规范地关联到长度空间 (O,dist$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$)（关于长度空间的相关说明，请参阅附录 A）。首先回顾以下结果。

命题 3.4（[Bor92，命题 36, 37]）。设 $\phi\colon U \to U$ 是 O 上的图映射，且 $\gamma\colon [a,b] \to U$ 是一条连续曲线，并存在一个非递减的 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset [a,b]$，使得 $t_0 = a$, $t_k \to b$ 当 $k \to \infty$ 时成立；给定$k \in \mathbb{N}_0$, γ, $]t_k, t_{k+1}[$ 包含于 O 的单个层中。在这种情况下，存在长度$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma) \in [0,\infty[$，使得若 $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \to \widetilde{U}$ 连续且 $\gamma = \phi \circ \widetilde{\gamma}$,~，则长度$^{(U,\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{\gamma}) =$ 长度$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma)$。

下面的定义受到前一结果中情形的启发。

定义 3.5（[Bor92，定义 35]）。若连续映射 $\gamma\colon [a',b'] \to$ O 满足以下蕴含关系，则称其为可容许曲线：若 U是 O 的基本开子集，且 a, b 满足 $\gamma([a,b]) \subset U$，则 $[a',b'] \ni t \mapsto \gamma(t) \in U$ 满足命题 3.4 中的假设。

仿照 [Bor92，定理 38]，，当 γ 是可容许曲线时，我们定义长度$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma)$。最后，[Bor92，定理 40] 表明该定义

$$\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y) = \inf\{\mathrm{length}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma) : \gamma \text{ is an admissible curve linking } x \text{ to } y\}$$

对任意 $x, y \in$ O 均成立，从而得到长度空间 (O, dist$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$)。

（极小）测地线和（严格）凸函数的概念自然地定义于长度空间的语境中，因此我们约定，在 (O, 𝔤) 上考察这些概念时，将其视为在 (O, dist$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$) 上相应概念的对应物。最后，我们指出，dist$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 所诱导的拓扑与底层拓扑空间 X$^{\mathscr{O}}$ 的拓扑一致；如果 (O, dist$^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$) 是完备度量空间，那么对于任意 $x, y \in$ O，存在一条极小测地线 $\gamma\colon [0,1] \to$ (O, 𝔤)，连接 x 与 y（参见 [Gro99]）。

指数映射与单射半径。设 (O, 𝔤) 是一个黎曼~轨形。若 $\phi\colon U \to$ O 是一个图映射，则我们定义

$$\widetilde{\Omega}(\widetilde{U},\phi) = \{(\widetilde{x},\widetilde{v}) \in \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n : |\widetilde{v}| < \mathrm{inj}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x})\}.$$

我们还定义

$$\Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} = \bigcup \left\{ \mathrm{d}\phi(\widetilde{\Omega}(\widetilde{U},\phi)) : \phi\colon \widetilde{U} \to \mathscr{O} \text{ is a chart map} \right\} \subset \mathrm{T}\mathscr{O}.$$

引理 3.6（[BB08，命题 6.7]）。设 $\phi_1\colon U_1 \to$ O、$\phi_2\colon U_2 \to$ O 是坐标图映射。我们得到

$$\phi_1 \circ \exp^{(\widetilde{U_1},\widetilde{\mathfrak{g}_1})}(\widetilde{x_1},\widetilde{v_1}) = \phi_2 \circ \exp^{(\widetilde{U_2},\widetilde{\mathfrak{g}_2})}(\widetilde{x_2},\widetilde{v_2})$$

只要 $(\widetilde{x_1},\widetilde{v_1}) \in \Omega(U_1,\phi_1)$、$(\widetilde{x_2},\widetilde{v_2}) \in \Omega(U_2,\phi_2)$ 满足 $\mathrm{d}\phi_1(\widetilde{x_1},\widetilde{v_1}) = \mathrm{d}\phi_2(\widetilde{x_2},\widetilde{v_2}) \in \Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$

前述引理保证下述映射是良定义的。

定义 3.7（指数映射）。给定 $v \in \Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$，我们定义

$$\exp^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v) = \phi \circ \exp^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x},\widetilde{v})$$

对于任意三元组 $(\phi,\widetilde{x},\widetilde{v})$，其中 $\phi\colon U \to$ O 是一个图映射，且 $(\widetilde{x},\widetilde{v}) \in U \times \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathrm{d}\phi(\widetilde{x},\widetilde{v}) = v$。

与黎曼流形中一样，我们定义单射半径 $\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\colon (\mathsf{O}\ \mathfrak{g}) \to]0,\infty[$ 如下：

$$\text{(3.1)}\quad \mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x) = \text{上确界}\{\rho>0 : \mathrm{B}^{(\mathrm{T}_{x\mathscr{O}}\,\mathfrak{g}_x)}(0,\rho) \subset \Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\} =$$
$$= \sup\left\{\mathrm{inj}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}) \mid \phi\colon \widetilde{U}\to\mathscr{O} \text{ is a chart map and } \widetilde{x}\in\phi^{-1}(x)\neq\emptyset\right\} > 0.$$

事实上，$(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上半径充分小的度量球是 O 的基本开子集。

命题 3.8. 假设 $x\in\mathsf{O}$ 且 $0<\rho<\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x)$。由此可知，我们可以固定 $G\subset\mathsf{O}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\phi\colon \mathrm{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho) =: \widetilde{U}\to U := \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)$，使得 $(\widetilde{U},G,\phi)$ 成为以 x 为中心的 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上的正规坐标图；也就是说，存在一个 $\mathfrak{g}_x$- 正交规范的 $\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathrm{T}_x\mathsf{O}$，使得

$$\phi(t) = \exp_x^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(t_1v_1+\ldots+t_nv_n)$$

~对于任意 $t := (t_1,\dots,t_n)\in U$。

与黎曼流形相似的是，径向测地线是极小测地线。

引理 3.9. 若 $v\in\Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$，则 $[0,1]\ni t\mapsto\gamma(t) := \exp^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(tv)$ 是 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上的一条极小测地线。

前一个引理揭示了其与黎曼流形之间一个显著的差异。众所周知，奇异分层会妨碍长度极小化（见[Bor93，命题 15]），因此得到以下结果。

命题 3.10. 给定 $x\in\mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$，$\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x) \le \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\mathsf{O}^{\mathrm{sing}})$。特别地，不等式 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}\neq\emptyset$ 意味着 $\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 不连续且 $\inf\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} = 0$。

幸运的是，$\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 的某些限制是连续的。

注 3.11. 由于 $\mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$ 是 O 的一个开子流形，而 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 是 O 的闭子流形之并，因此我们得出 $\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\Big|_{\mathscr{O}^{\mathrm{reg}}}$ 和 $\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\Big|_{\mathscr{O}^{\mathrm{sing}}}$ 是连续的。

弱凸性。众所周知，黎曼流形上的任意一点都有一个强凸邻域。下面的例子表明，对于黎曼轨形 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 的奇异点，我们不能指望其周围存在强凸邻域。

例 3.12。设 $\mathsf{O} = \mathbb{R}^2/\{\pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$；令 $\mathfrak{g}$ 为 O 上由欧几里得内积诱导的黎曼度量，并令 $p\colon\mathbb{R}^2\to\mathsf{O}$ 为典范投影。我们断言，$(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上的 $0\in\mathsf{O}$ 不存在强凸邻域。事实上，给定 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，对每个 $t\in[0,1]$，$\mathbb{R}^2$ 上由 $\widetilde{\gamma_1}(t) = (1-t)(x,y) + tz(-y,x)$ 和 $\widetilde{\gamma_2}(t) = (1-t)(x,y) + t(y,-x)$ 给出的曲线，投影后成为 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上两条不同的极小测地线，它们连接 $p(x,y)$ 与 $p(-y,x)$。

由于黎曼轨形中的奇异点周围不存在强凸邻域，我们引入一种较弱的凸性概念。

定义 3.13. 若满足以下蕴含关系，则称集合 $A\subset\mathsf{O}$ 在 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上是弱凸的：如果 x、$y\in A$ 和 $\gamma\colon[0,1]\to(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 是连接 x 与 y 的极小测地线，那么 $\gamma([0,1])\subset A$。

事实证明，若半径足够小，$(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上的度量球是弱凸的，这与黎曼流形上半径足够小的度量球是强凸的这一事实类似。在证明这一结果之前，先考虑以下预备引理。

~引理 3.14。固定 $y \in \mathsf{O}$；设 (U, G, ϕ) 是 O 上 y 附近的一个轨形图，并令 $\widetilde{y} = \phi^{-1}(y)$。假设

~(i) $\kappa \in \mathbb{R}$ 是 $(U, \widetilde{\mathfrak{g}})$ 上的截面曲率上界，并且

(ii) $\rho_y > 0$ 满足 $\mathrm{B}^{(}_{U,\ \widetilde{\mathfrak{g}})}(y, \rho_y)$ 在 $(\widetilde{U}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ 上是强凸的，并且当 $\kappa > 0$ 时，$\rho_y < \kappa^{-1/2}\pi/4$。

我们得出，如果 $0 < \rho < \rho_y$ 且 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y, \rho)$，那么

$$(\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y, \rho), \mathfrak{g}) \ni z \mapsto \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, z)^2 \in [0, (2\rho)^2] \tag{3.2}$$

是严格凸的。

证明。首先，我们要证明

$$\text{given } \widetilde{x} \in \mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho_y), \tag{3.3}$$
$$(\mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho_y), \widetilde{\mathfrak{g}}) \ni \widetilde{z} \mapsto \mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \widetilde{z})^2 \in [0, (2\rho_y)^2[\text{ is strictly convex.}$$

为此，我们将仿照 [Kar77 中定理 1 的证明2]进行论证。固定 $\widetilde{x} \in \mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho_y)$，令 $\widetilde{\psi}$ 为由 $\exp_{\widetilde{x}}^{(U,\widetilde{\mathfrak{g}})}$ 诱导的从 $\mathbb{R}^n$ 的一个星形子集到 $\mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho)$ 的微分同胚，并令 $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to (\mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho_y)\ \widetilde{\mathfrak{g}})$ 为一条极小测地线。给定 $(s, t) \in]1-\delta, 1+\delta[\times[0,1],$，令

$$c(s,t) = \widetilde{\psi}\left(s\widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{\gamma}(t))\right) \in \mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, \rho_y)$$

且 $J_t(s) = \partial_2 c(s, t) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\delta > 0$ 充分小。固定 $t \in [0,1]$。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \widetilde{\gamma}(\tau))^2\bigg|_{\tau=t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\widetilde{\mathfrak{g}}(\partial_1 c(1,\tau), \partial_1 c(1,\tau))\bigg|_{\tau=t};\\
&= 2\widetilde{\mathfrak{g}}\left(\nabla^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}_{\widetilde{\gamma}'(t)}\partial_1 c(1,t), \partial_1 c(1,t)\right);\\
&= 2\int_0^1 \widetilde{\mathfrak{g}}\left(\nabla^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}_{J_t(s)}\partial_2 c(s,t), \partial_1 c(s,t)\right)\mathrm{d}s;\\
&= 2\widetilde{\mathfrak{g}}(\partial_2 c(s,t), \partial_1 c(s,t))
\end{aligned}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \widetilde{\gamma}(\tau))^2\bigg|_{\tau=t} = 2\widetilde{\mathfrak{g}}(\partial_2 c(1,t), \partial_1\partial_2 c(1,t)) = 2\widetilde{\mathfrak{g}}(J_t(1), J_t'(1)),$$

~，因为 $\widetilde{\gamma} = \partial_2 c(1, \cdot)$ 是 $(U, \widetilde{\mathfrak{g}})$ 上的一条测地线。映射 J_t 是一个雅可比场，因此由关于雅可比场的经典估计可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \widetilde{\gamma}(\tau))^2\bigg|_{\tau=t} \geq \widetilde{\mathfrak{g}}(\widetilde{\gamma}'(t), \widetilde{\gamma}'(t))$$

如果 $\kappa \leq 0$ 且

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}, \widetilde{\gamma}(\tau))^2\bigg|_{\tau=t} \geq \frac{2\rho_y\sqrt{\kappa}}{\tan(2\rho_y)}\widetilde{\mathfrak{g}}(\widetilde{\gamma}'(t), \widetilde{\gamma}'(t))$$

如果 $\kappa > 0$ （参见 [Kar77，附录 A]）。

下面证明，若 $0 < \rho < \rho_y$ 且 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y, \rho)$，则 (3.2) 是严格凸的。只需证明：若 $\gamma\colon [0,1] \to (\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y, \rho)\ \mathfrak{g})$ 是一条非常值的极小测地线，则

$$[0,1] \ni t \mapsto \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, \gamma(t))^2 \in [0, (2\rho)^2]$$

是严格凸的。我们有 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho) \subset U$，因此可以固定一条极小测地线 $\widetilde{\gamma}$: $[0,1] \to (\mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y},\rho)\ \widetilde{\mathfrak{g}})$，使得 $\phi\circ\widetilde{\gamma} = \gamma$且对每个 $t\in[0,1]$，$\mathrm{dist}_{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x},\widetilde{\gamma}(t)) = \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\gamma(t))$。由 (3.3) 可得

$$[0,1]\ni t\mapsto \mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x},\widetilde{\gamma}(t))^2\in[0,(2\rho)^2]$$

是严格凸的，因此结论得证。 □

现在，我们可以证明半径足够小的度量球是弱凸的。

命题 3.15. 若 $y\in$O、 $\rho_y>0$ 满足引理 3.14 的结论且 $0<\rho<\rho_y$，则 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho/3)$ 在 (O $\mathfrak{g}$) 上是弱凸的。

证明。我们沿用 [Lee18，第 186 页，问题 6-5] 中的论证思路。固定$x,z\in\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho/3)$，并设 $\gamma:[0,1]\to$O 是连接 x与 z的极小测地线。我们有 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,z)<2\rho/3$，因此 $\mathrm{length}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma)<2\rho/3$。由于 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y)<\rho/3$，我们得到 $\gamma([0,1])\subset\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)$。根据假设，

$$[0,1]\ni t\mapsto \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\gamma(t))^2\in[0,\rho^2]$$

是严格凸的，因此其最大点位于 $\{0,1\}$ 中，从而

$$\max_{0\le t\le 1}\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\gamma(t))<\rho/3,$$

这意味着 $\gamma([0,1])\subset\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho/3)$。 □

黎曼质心。设 $(M,\mathfrak{g})$ 是一个完备的黎曼流形，且 $\mathrm{inj}(M,\mathfrak{g}):=\inf\mathrm{inj}^{(M,\mathfrak{g})}>0$，并且 $\kappa\in\mathbb{R}$ 是 $(M,\mathfrak{g})$ 的截面曲率的一个上界。根据 [Afs11，定理 2.1]，如果 $y\in M$, $\rho\in]0,\ \mathrm{inj}(M,\mathfrak{g})/2[$ 满足 $\rho<\kappa^{-1/2}\pi/2$，且 $\kappa>0$，并且 ν 是 M 上的一个概率测度，且 $\mathrm{supp}\,\nu\subset\mathrm{B}^{(M,\mathfrak{g})}(y,\rho)$，那么

$$M\ni x\mapsto\int_{\mathrm{B}^{(M,\mathfrak{g})}(y,\rho)}\mathrm{dist}^{(M,\mathfrak{g})}(x,z)^2\mathrm{d}\nu(z)$$

存在唯一的最小点 $x_\nu\in\mathrm{B}^{(M,\mathfrak{g})}(y,\rho)$，我们称其为 ν的黎曼质心。

我们的目标是证明，在与上一段中类似的假设下，我们可以为完备黎曼奥比弗尔德（O $\mathfrak{g}$）上的概率测度定义黎曼质心。假设我们可以固定 $\kappa\in\mathbb{R}$，使得

~(3.4) 如果 $\phi\colon U\to$ O 是一个图映射，那么 κ 是（U，$\widetilde{\mathfrak{g}}$）上截面~曲率的上界

并且我们可以固定 $\rho>0$，使得

(3.5) $3\rho<\kappa^{-1/2}\pi/4$ 如果 $\kappa>0$ 且~(3.6) 给定 $y\in$O，存在 $\phi\colon U\to U$，这是 O 上围绕 y 的一个图映射，使得 $\mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y},3\rho)$ 在（$\widetilde{U}$，$\widetilde{\mathfrak{g}}$）上是强凸的，其中 $\widetilde{y}:=\phi^{-1}(y)$。

在此背景下，以下命题是本节的主要结果。

命题 3.16。如果 $y\in$O 且 ν 是 O 上支集包含于 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$ 中的概率测度，那么

$$\mathscr{O}\ni x\mapsto\int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)}\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,z)^2\mathrm{d}\nu(z),\tag{3.7}$$

存在唯一的最小点 $x_\nu\in\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，我们称之为 ν 的黎曼质心。

首先，我们需要证明，(3.7) 的最小点必然位于 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$ 中。

引理 3.17. 若 $y \in \mathsf{O}$、ν 是支撑于 O 上的概率测度，且 $x \in \mathsf{O}$ 是 (3.7) 的最小点，则 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$。

证明。此证明与 [Afs11, 定理 2.1] 的证明类似。

我们断言 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$。事实上，只需证明：若 $x \in \mathsf{O} \setminus \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，则可以固定 $x' \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，使得对每个 $z \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，都有 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x',z) < \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,z)$。若 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y) \geq 2\rho$，则由三角不等式可知，只需取 $x' = y$。现在考虑 $\rho < \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y) < 2\rho$ 的情形。给定 $z \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，有

$$\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,z) = \min\{\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x},\widetilde{z}) : \widetilde{x} \in \phi^{-1}(x), \widetilde{z} \in \phi^{-1}(z)\},$$

因此，我们只需证明：给定 $\widetilde{x} \in \phi^{-1}(x)$，存在 $\widetilde{x}' \in \mathrm{B}^{(U,\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y},\rho)$，使得对于任意 $\widetilde{z} \in \mathrm{B}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y},\rho)$，都有 $\mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x}',\widetilde{z}) < \mathrm{dist}^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{x},\widetilde{z})$。这一点可以仿照 [Afs11，第 662] 页中的论证来证明。

我们已经证明了 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，因此只需证明 $x \notin \partial(\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho))$。给定 $z, w \in \mathsf{O}$，令 $\gamma_{z,w}\colon [0,1] \to \mathsf{O}$ 为 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上连接 z 与 w 的最短测地线。仿照 [Afs11，第 661] 页中的论证，可以证明若 $x \in \partial(\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho))$，则

$$[T,1] \ni t \mapsto \int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)} \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma_{y,x}(t),w)^2 |u(w)| \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(w)$$

对于某些 $T \in]0,1[$，该函数严格递增。事实上，固定满足以下条件的 $T \in]0,1[$

$$\operatorname{supp} u \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\left(y, \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma_{y,x}(T),y)\right) \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho).$$

若 $T \leq s < 1$ 和 $z \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\left(y, \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma_{y,\ x}(T)\ y)\right)$，则

$$\gamma_{z,\gamma_{y,x}(s)}(]0,1[) \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\left(y, \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma_{y,x}(T),y)\right)$$

由命题 3.15 可知，因此 $\mathfrak{g}(\gamma'_{z,\ \gamma_{y,\ x}(s)}(1^-)\gamma'_{y,\ x}(s)) > 0$，所以

$$[T,1] \ni t \mapsto \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\gamma_{y,x}(t),z)$$

严格递增。 □

现在，只需证明最小点的存在性与唯一性，即可得出结论。

命题 3.16 的证明。函数 (3.7) 连续，且 O 是紧致的，因此它能取到一个最小点。由引理 3.17 可知，(3.7) 的最小点位于 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$ 中，因此只需证明

$$(\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho),\mathfrak{g}) \ni x \mapsto \int_{\mathrm{B}^{(M,\mathfrak{g})}(y,\rho)} \mathrm{dist}^{(M,\mathfrak{g})}(x,z)^2 \mathrm{d}\nu(z) \tag{3.8}$$

具有唯一的最小点（注意，（3.8）的定义域与（3.7）的定义域不同）。由引理 3.14 可知，给定 $x \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)$，

$$(\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho),\mathfrak{g}) \ni z \mapsto \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,z)^2 \in [0,(2\rho)^2[$$

是严格凸的，因此根据 [BV04 第 3.2 节1] 中的讨论可知，(3.8) 也严格凸。由于命题 3.15，集合 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)$ 在 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上是弱凸的，因此结论由命题 A.1 得出。□

4. Preliminaries

本节将在引言所述的背景下，介绍证明定理 1.5 所需的技术预备知识。

便捷半径 ρ。若我们有 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}} \neq \emptyset$，则命题 3.10 推出 $\inf \mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} = 0$，因此我们无法像 [BBM07, Remark 2.7] 中那样固定 $\rho \in]0, \text{使 } \inf \mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}[$。因此，我们的目标是确定另一种便捷半径 $\rho > 0$，以确保 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上半径为 ρ 的度量球具有便于使用的几何性质，其含义很快就会明了。

考虑在 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 上、纤维为

$$N_x := \{v \in \mathrm{T}_x\mathscr{O} : v \perp^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} \mathrm{T}_x\mathscr{O}^{\mathrm{sing}}\}.$$

让我们利用纤维丛 N，构造 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 在 O 中的一个拓扑管状邻域。

引理 4.1. 存在 $\rho > 0$ 使得

$$\left\{w \in N : \mathfrak{g}(w,w) < (3\rho)^2\right\} \ni v \mapsto \exp^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v) \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathscr{O}^{\mathrm{sing}}, 3\rho)$$

是一个同胚。

证明。我们知道，$\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 是 O 的紧致子集，且 $\mathrm{inj}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 在 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 上的限制是连续的（见注 3.11），因此只需证明：若 Σ 是 O 的一个奇异层，且 $x \in \Sigma$，则存在 $\rho_x > 0$ 使得

$$\left\{w \in N|_{\Sigma \cap \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho_x)} : \mathfrak{g}(w,w) < \rho_x^2\right\} \ni v \mapsto \exp^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v) \in \mathscr{O}$$

是到其像上的同胚。令 $k = \dim \Sigma$；设 $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$ 是一个适配于 Σ 且以 O 上的 x 为中心的线性图，并令 $E = \phi^* N$，即 E 是

$$\mathrm{T}\mathbb{R}^n|_{\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}} = (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}) \times \mathbb{R}^n$$

的秩为 $(n-k)$ 的向量子丛，其纤维为

$$E_{\widetilde{y}} := \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp^{(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{y}})} \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}\}$$

对任意 $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\} = \phi^{-1}(\Sigma)$。我们可以像证明 Pet16 命题 5.5 中 (2) 那样论证，以证明映射

$$E \ni (\widetilde{y}, v) \mapsto \psi(\widetilde{y}, v) := \exp^{(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathfrak{g}})}(\widetilde{y}, v) \in \mathbb{R}^n.$$

满足 $\mathrm{d}\psi_{(0,0)}$ 可逆。此时，只需仿照 BB08 命题 6 的证明即可得出结论。□

由于紧致性，我们可以固定 $\kappa \in \mathbb{R}$，使得 (3.4) 成立，并且现在可以定义便捷半径的概念。

定义 4.2. 固定一个便捷半径 $\rho \in]0, \text{满足 } {}_{\mathrm{Z}^{\mathscr{O}}} \inf^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}[\ \mathrm{inj}$，从而 (3.5)、(3.6) 以及引理 4.1 的结论均成立。

事实上，如果 $x \in \mathsf{O}$ 与 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 的距离小于 3ρ，那么它在 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 上有唯一的最近点。由于 O 的奇异分层是 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 的全测地子流形，因此这一结果的证明与 [Pet16, 定理 5.6.21] 的证明非常相似。

引理 4.3. 若 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, \mathsf{O}^{\mathrm{sing}}) < 3\rho$，则存在唯一的 $x^{\mathrm{sing}} \in \mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$，使得 $\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, \mathsf{O}^{\mathrm{sing}}) = \mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, x^{\mathrm{sing}})$。

证明。由紧致性可知，存在最近点 $x^{\mathrm{sing}} \in \mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$。设 Σ 为包含 x^{sing}的 O 的奇异层。当 $x \in \Sigma$时，引理显然成立，因此假设并非如此。

我们先证明

$$[\exp_{x^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x) \in N_{x^{\mathrm{sing}}}. \tag{4.1}$$

设 $\gamma\colon]-\delta,\delta[\to\Sigma$ 为一条光滑曲线，使得 $\gamma(0)=x^{\mathrm{sing}}$，并定义

$$H(s,t)=\exp_{\gamma(s)}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\left[t(\exp_{\gamma(s)}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})})^{-1}(x)\right],$$

对任意 $(s,t)\in]-\delta,\delta[\times[0,1]$。给定 $s\in]-\delta,\delta[$，我们将 $H(s,\cdot)$ 的能量定义为

$$E(s)=\int_0^1 \mathfrak{g}(\partial_2 H(s,t),\partial_2 H(s,t))\mathrm{d}t.$$

我们断言，只要 $t\neq 0$，就有 $H(s,t)\in\mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$。事实上，反设存在 $s\in]-\delta,\delta[$，使得 $\partial_2 H(s,0)\in\mathsf{T}_x\Sigma$。于是对每个 $t\in[0,1]$，都有 $H(s,t)\in\Sigma$，因为 Σ 在 $(\mathsf{O},\mathfrak{g})$ 上是全测地的（见 [Bor92，命题32]），这与 $H(s,1)=x\in\mathsf{O}^{\mathrm{reg}}$ 矛盾。

由上一段中的断言可知，能量的一阶变分公式成立。由于 $\mathsf{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,x^{\mathrm{sing}})=\mathsf{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\mathsf{O}^{\mathrm{sing}})$，我们得到

$$\mathfrak{g}\left(\gamma'(0),[\exp_{x^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x)\right)=E'(0)=0$$

因此 (4.1) 成立。

下面证明最近点的唯一性。设 $x_1^{\mathrm{sing}},x_2^{\mathrm{sing}}\in\Sigma$ 满足

$$\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\mathscr{O}^{\mathrm{sing}})=\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,x_1^{\mathrm{sing}})=\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,x_2^{\mathrm{sing}}).$$

断言 (4.1) 意味着 $[\exp_{x_1^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x),[\exp_{x_2^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x)\in N$，因此由引理 4.1 可知 $[\exp_{x_1^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x)=[\exp_{x_2^{\mathrm{sing}}}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^{-1}(x)$，从而 $x_1^{\mathrm{sing}}=x_2^{\mathrm{sing}}$。 □

特别地，由此可知，将距 $\mathsf{O}^{\mathrm{sing}}$ 小于 3ρ 的点投影到最近的奇异点，

$$\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathscr{O}^{\mathrm{sing}},3\rho)\ni x\mapsto x^{\mathrm{sing}}\in\mathscr{O}^{\mathrm{sing}},$$

是一个定义良好的连续映射。

$\mathbb{R}^n$中的极限问题。考虑 $\mathbb{R}^n$中的以下非线性问题，

$$\begin{cases}-\Delta u+u=u|u|^{p-2}\ \text{and}\\ u>0.\end{cases} \tag{4.2}$$

(4.2)的 $H^1(\mathbb{R}^n)$中的弱解，恰好是由下式给出的 $E\in C^2(H^1(\mathbb{R}^n))$的一个临界点

$$E(u):=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\operatorname{grad}^{\mathbb{R}^n}(u)(\widetilde{x})|^2}{2}+\frac{u(\widetilde{x})^2}{2}-\frac{u^+(\widetilde{x})^p}{p}\mathrm{d}\widetilde{x}.$$

我们定义 $m(E)=\inf_{u\in\mathcal{N}(E)}E(u)$，其中

$$\mathcal{N}(E):=\{u\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}:\mathrm{d}_uE(u)=0\}$$

是与 E相关的Nehari流形。众所周知，存在唯一一个元素

$$H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n):=\{v\in H^1(\mathbb{R}^n):\ \text{for a.e. } x,y\in\mathbb{R}^n,\ |x|=|y|\ \text{implies}\ v(x)=v(y)\}$$

它是方程 (4.2) 的一个弱解，并使 E 取最小值。

定义 4.4. 我们将满足 $E(V) = m(E)$ 的 $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}(E)^{\sim}$ 中的唯一函数记为 $\widetilde{V}$。

若 $0 < \epsilon < 1$，则我们定义 $\widetilde{V}_\epsilon(\widetilde{x}) = \widetilde{V}(\epsilon^{-1}\widetilde{x})$，对几乎处处的 $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 成立，使得 $\widetilde{V}_\epsilon \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + u = u|u|^{p-2} \text{ and} \\ u > 0. \end{cases}$$

嵌入 $i_\epsilon\colon \mathsf{Z}^{\mathscr{O}} \to \mathcal{N}_\epsilon$。我们先固定截断函数的记号。

定义 4.5。给定 $r > 0$, $\chi_r : [0,\infty[\to [0,1]$，$[0,\infty[\to [0,1]$ 表示一个非增的光滑函数，满足：若 $t \le r/2$，则 $\chi_r(t) = 1$；若 $t \ge r$，则 $\chi_r(t) = 0$，且 $\sup|\chi_r'| \le 3/r$。

~我们可以利用 V 的径向对称性，得到如下定义。

定义 4.6。设 $0 < \epsilon < 1$, $x \in \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$，且 $(\widetilde{U} := \mathsf{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho)\ G, \phi)$ 是以 x 为中心的正规坐标图，位于 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上。由于 $\widetilde{V}_\epsilon \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $G \subset \mathsf{O}(\mathbb{R}^n)$，我们可以定义

$$V_{\epsilon,x}(y) = \begin{cases} \widetilde{V}_\epsilon(\phi^{-1}(y))\chi_\rho(\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y)) & \text{if } y \in U \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于 $\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$-几乎处处的 $y \in \mathsf{O}$。

我们来证明 $V_{\epsilon,\ x} \in H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$。

引理 4.7. 给定 $(\epsilon, x) \in]0,1[\times \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$，有 $V_{\epsilon,\ x} \in H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$。

证明。只需构造 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$，使得 $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 中的柯西序列，且当 $k \to \infty$ 时，$V_k \to V_{\epsilon,\ x}$ $\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$-几乎处处成立。

设 $(\widetilde{U} := \mathsf{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho)\ G, \phi)$ 是以 x 为中心、位于 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上的正规坐标图。固定 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{\mathrm{rad}}(U)$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $H^1(U)$ 中的 $V_k \to V_\epsilon$，均有 $\mathrm{supp}\ V_k \subset U$，当 $k \to \infty$ 时成立。给定 $k \in \mathbb{N}$，令 $V_k \in C^\infty(\mathsf{O})$ 由 V_k 得到：其构造与定义 4.6 中类似。

我们声称，$(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$中的柯西序列。事实上，包含关系 $\mathsf{B}^{(\mathrm{T}_{x\mathscr{O}}\ \mathfrak{g}_x)}(0,\rho) \subset \Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 表明，存在 $K > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \|V_{k_1} - V_{k_2}\|^2_{H^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})} &= \\ &= \frac{1}{|G|}\int_{\widetilde{U}} \left[|\operatorname{grad}^{\mathbb{R}^n}(\widetilde{V_{k_1}} - \widetilde{V_{k_2}})|^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})} \right]^2 + (\widetilde{V_{k_1}} - \widetilde{V_{k_2}})^2 \mathrm{d}\mu^{(\widetilde{U},\widetilde{\mathfrak{g}})} \le \\ &\le \frac{K}{|G|}\|\widetilde{V_{k_1}} - \widetilde{V_{k_2}}\|^2_{H^1(\widetilde{U})} \end{aligned}$$

对每个 $k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}$。

我们来证明，除去一个子序列外，$V_k \to V_{\epsilon,x}$ $\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$-几乎处处地，当 $k \to \infty$时成立。由于$\widetilde{V_k} \to \widetilde{V}_\epsilon$ 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$中随 $k \to \infty$趋于 $\widetilde{V_k} \to \widetilde{V}_\epsilon$，我们得出，除去一个子序列外，当 $k \to \infty$时，$\widetilde{V_k} \to \widetilde{V}_\epsilon$ 几乎处处成立。因此，该结论是以下事实的推论：给定 $k \in \mathbb{N}$，V_k 是 V_k 的局部提升；对于 V_ϵ，$V_{\epsilon,x}$也有类似结论。□

考虑 Nehari流形时，通常都会有以下注记。注 4.8. 假设 $0 < \epsilon < 1$ 和 $u \in H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 满足 u^+ 几乎处处不为零。在这种情况下，$su \in \mathcal{N}_\epsilon$ 当且仅当 $s = n_\epsilon(u)$，其中

$$\begin{aligned} n_\epsilon(u)^{p-2} &:= \\ &:= \left[\int_{\mathscr{O}} (u^+)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}\right]^{-1} \int_{\mathscr{O}} \epsilon^2 \mathfrak{g}(\operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u), \operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u)) + u^2 \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} > 0. \end{aligned}$$

最后，我们可以定义单射 i_ϵ: $\mathsf{Z}^{\mathscr{O}} \to \mathcal{N}_\epsilon$。

定义 4.9. 若 $0 < \epsilon < 1$，则我们利用前述注记来定义

$$\mathsf{Z}^{\mathscr{O}} \ni x \mapsto i_\epsilon(x) := n_\epsilon(V_{\epsilon,x})V_{\epsilon,x} \in \mathcal{N}_\epsilon.$$

只需仿照 [BBM07 命题 4.2] 中第一个结论的证明，即可得到以下结果。

引理 4.10. 给定 $\epsilon \in]0,1[$, i_ϵ: $\mathsf{Z}^{\mathscr{O}} \to \mathcal{N}_\epsilon$ 是连续的。

下一个结果只需对 [BBM07 命题 4.2] 中第二个结论的证明稍作调整即可得到。

引理 4.11. 给定 $\delta > 0$，存在 $\epsilon_\delta \in]0,1]$，使得若 $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$，则$i_\epsilon(x) \in \Lambda_{\epsilon,(\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}m(E)+\delta}$ 对任意 $x \in \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$ 均成立。

证明。只需按照 [BBM07，命题 4.2] 的证明进行论证，即可证明：给定 $\delta > 0$，存在 $\epsilon_\delta \in]0、1]$，使得若 $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$，则

$$\left|\epsilon^{-n}\|V_{\epsilon,x}\|^2_{L^2(\mathscr{O},\mathfrak{g})} - (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}\|\widetilde{V}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right| < \delta;$$

$$\left|\epsilon^{2-n}\|\operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(V_{\epsilon,x})\|^2_{L^2(\mathscr{O},\mathfrak{g})} - (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}\|\operatorname{grad}^{\mathbb{R}^n}(\widetilde{V})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right| < \delta$$

and

$$\left|\epsilon^{-n}\|V_{\epsilon,x}\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})} - (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}\|\widetilde{V}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right| < \delta$$

（见 [BBM07，（4.5）–（4.7）]）。

根据注 4.8，由上一段可推得：给定 $\delta > 0$，存在 $\epsilon_\delta \in]0、1]$，使得对于给定的（ϵ，x）$\in]0、\epsilon_\delta[\times \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$，我们有

$$|n_\epsilon(V_{\epsilon,x}) - 1| < \delta.$$

As

$$J_\epsilon(n_\epsilon(V_{\epsilon,x})V_{\epsilon,x}) = \frac{1}{\epsilon^n}\frac{p-2}{2p}n_\epsilon(V_{\epsilon,x})^p\|V^+_{\epsilon,x}\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$$

对于任意（ϵ，x）$\in]0、1[\times \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$，我们可以得出：给定 $\delta > 0$，存在 $\epsilon_\delta \in]0、1]$，使得

$$\left|J_\epsilon(n_\epsilon(V_{\epsilon,x})V_{\epsilon,x}) - (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}m(E)\right| < \delta.$$

对于任意（ϵ，x）$\in]0、\epsilon_\delta[\times \mathsf{Z}^{\mathscr{O}}$。 □

Λ_ϵ在，$(\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}m(E)+\delta$中的函数集中性。我们要证明以下结果。

定理 4.12。给定 $\eta \in]0,1[$，，存在 $\delta_\eta \in]0,\infty[$ 和 $\epsilon_\eta \in]0,1]$，使得若$0 < \delta < \delta_\eta$，$0 < \epsilon < \epsilon_\eta$ 且 $u \in \Lambda_{\epsilon,(\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}m(E)+\delta}$，则

$$\int_{B^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)} (u^+)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} > \eta\|u^+\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$$

对某个 $x \in \mathsf{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}}, \rho)$。

请注意，与类似的结果 [BBM07, 命题 5.5] 以及 [Pet19, 定理 3.7]，不同，我们的定理表明，任意 $u \in \Lambda_{\epsilon,(\zeta^{\mathscr{O}})^{-1}m(E)+\delta}$ 都集中在 O 的某个特定子集中的一点附近，即 $\mathsf{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}}, \rho)$。证明时，我们将沿用 [BBM07, 第 5] 节的方法，并作少量修改。下面的预备引理与 [BBM07, 引理 5.3、5.4]类似，也可用相应方法证明。

引理 4.13. 存在 $\gamma > 0$，对于给定的 $\delta \in]0, \infty[$，存在 $\epsilon_\delta \in]0, 1]$，使得若 $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$ 且 $u \in \Lambda_{\epsilon,\ (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E)+\delta}$，则

$$\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\epsilon)} (u^+)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} \geq \gamma$$

对于某个 $x \in \mathsf{O}$。

引理 4.14。固定 $\epsilon \in]0、\ 1[$。给定 $\delta > 0$ 和 $u \in \mathcal{N}_\epsilon$，使得

$$J_\epsilon(u) < \min\left(m(J_\epsilon) + 2\delta, \frac{m(E)}{\zeta^{\mathscr{O}}} + \delta \right),$$

存在 $u_\delta \in \mathcal{N}_\epsilon$，使得 $J_\epsilon(u_\delta) < J_\epsilon(u)$；

$$\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathscr{O}} \epsilon^2 [|\operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(u_\delta - u)|^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}]^2 + (u_\delta - u)^2 \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} < 16\delta$$

and

$$\mathrm{d}_{u_\delta} J_\epsilon(w)^2 < \frac{\delta}{\epsilon^n} \int_{\mathscr{O}} \epsilon^2 \mathfrak{g}(\operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(w), \operatorname{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(w)) + w^2 \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}.$$

对于任意 $w \in \mathsf{T}_u \mathcal{N}_\epsilon \subset H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$。

定理 4.12 将作为以下结果的推论得到。

引理 4.15. 给定 $\eta \in]0, 1[$，存在 $\delta_\eta > 0$ 和 $\epsilon_\eta \in]0, 1]$，使得若 $0 < \delta < \delta_\eta$，$0 < \epsilon < \epsilon_\eta$ 且 $u \in \Lambda_{\epsilon,(\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E)+\delta}$，则

$$\frac{1}{\epsilon^n} \int_{B^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)} (u^+)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} > \eta \frac{2p}{p-2} \frac{m(E)}{\zeta^{\mathscr{O}}}$$

对于某个 $x \in \mathsf{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}}, \rho)$。

证明。若 O 是流形，则结论与 [BBM07, 命题 5.5] 相同，因此我们假设 O 不是流形，即 $\zeta^{\mathscr{O}} > 1$。

我们用反证法。假设存在 $\eta \in]0, 1[$ 以及数列 $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset]0, 1[, \{u_k \in \mathcal{N}_{\epsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得当 $k \to \infty$ 时 $\epsilon_k, \delta_k \to 0$，且给定 $k \in \mathbb{N}$,

$$J_{\epsilon_k}(u_k) < \min\left(m(J_{\epsilon_k}) + 2\delta_k, \frac{m(E)}{\zeta^{\mathscr{O}}} + \delta_k \right)$$

and

$$\frac{1}{\epsilon_k^n} \int_{B^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,\rho)} (u_k^+)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})} \leq \eta \frac{2p}{p-2} \frac{m(E)}{\zeta^{\mathscr{O}}} + \delta_k$$

对于任意 $y \in \mathsf{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(Z^{\mathscr{O}}, \rho)$。给定 $k \in \mathbb{N}$，我们可以利用引理 4.13 固定 $x_k \in \mathsf{O}$，使得

$$\frac{1}{\epsilon_k^n} \int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x_k,\epsilon_k)} (u^+)^p \mathrm{d}\mu^{\mathfrak{g}} > \gamma.$$

由于 O 是紧致的，存在 $x_\infty \in \mathsf{O}$，使得经过取子序列后，$x_k \to x_\infty$ 当 $k \to \infty$ 时成立。舍去有限个指标后，我们可以假设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x_\infty, 3\rho)$。给定 $k \in \mathbb{N}$，令

$$y_k = \begin{cases} x_k, & \text{if } x_\infty \in \mathscr{O}^{\mathrm{reg}} \text{ and} \\ x_k^{\mathrm{sing}}, & \text{if } x_\infty \in \mathscr{O}^{\mathrm{sing}}. \end{cases}$$

再次舍弃有限个指标后，我们可以利用注 3.11，保证能够固定 $\rho' > 0$，使得 $\mathsf{B}^{(T_{y_k} \mathscr{O}^{\mathfrak{g}_{y_k}})}(0, \rho') \subset \Omega^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$ 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。给定 $k \in \mathbb{N}$,

• 引理 4.14 允许我们假设

$$\mathrm{d}_{u_k} J_{\epsilon_k}(v)^2 < \frac{\delta_k}{\epsilon_k^n} \int_{\mathscr{O}} \epsilon^2 \mathfrak{g}(\mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v), \mathrm{grad}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(v)) + v^2 \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}.$$

对任意 $v \in \mathsf{T}_{u_k}\mathcal{N}_{\epsilon_k} \subset H^1(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$;

• 我们令 $\widetilde{U_k} := B^{\mathbb{R}^n}(0,\rho')\ G_k, \phi_k)$ 为围绕 y_k 的一个正规坐标图，位于 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上，并且

• 我们将 $w_k \in H_0^1(B^{\mathbb{R}^n}(0,\rho'/\epsilon_k))$ 定义为 $w_k(\widetilde{x}) = \chi_{\rho'}(\epsilon_k|\widetilde{x}|)u_k(\phi_k(\epsilon_k\widetilde{x}))$，对几乎所有 $\widetilde{x} \in B^{\mathbb{R}^n}(0,\rho'/\epsilon_k)$ 成立。

事实上，

(4.3) 存在 $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$，使得 $w_k \rightharpoonup w$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$w_k \to w \text{ in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ as } k \to \infty;$$

(4.4)

$$\text{the function } w \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ is a weak solution to } \begin{cases} -\Delta w + w = w|w|^{p-2} \text{ and} \\ w \geq 0; \end{cases}$$

and

$$E(w) = m(E) \tag{4.5}$$

结果 (4.3)–(4.5) 与 [BBM07 中的引理 5.6–5.8],相同，因此请读者参阅 [BBM07 第 7] 节，以了解其证明。此外，集合 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 由 $(\mathsf{O}\ \mathfrak{g})$ 上正规坐标图的坐标图映射组成，并且 $\epsilon_k \to 0$, $x_k \to x_\infty$ 如$k \to \infty$，因此

(4.6) 给定 $\sigma \in]0,1[$, ，存在 $k_\sigma \in \mathbb{N}$，使得若 $k \geq k_\sigma$，则

$$1 - \sigma \leq |\det \widetilde{\mathfrak{g}_k}(\epsilon_k z)|^{1/2} \leq 1 + \sigma \text{ for every } z \in \mathrm{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho').$$

我们来证明 $x_\infty \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}},\rho)$。反设结论不成立。由 (可知，给定 $\sigma \in]0,1[$, ,4.6) 我们有

$$\begin{aligned} \|u_k^+\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})} &\geq \int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x_k,\rho')} \chi_{\rho'}(\mathrm{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y,x_k))^p u_k^+(y)^p \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y); \\ &\geq \frac{1}{|G_k|} \int_{\mathrm{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho')} |\det \widetilde{\mathfrak{g}_k}(\widetilde{x})|^{1/2} \chi_{\rho'}(|\widetilde{x}|)^p u_k^+(\phi_k(\widetilde{x}))^p \mathrm{d}\widetilde{x}; \\ &\geq \frac{1-\sigma}{|G_k|} \epsilon_k^n \int_{\mathrm{B}^{\mathbb{R}^n}(0,\rho'/\epsilon_k)} \chi_{\rho'}(\epsilon_k|\widetilde{x}|)^p u_k^+(\phi_k(\epsilon_k\widetilde{x}))^p \mathrm{d}\widetilde{x}; \\ &\geq \frac{1-\sigma}{|G_k|} \epsilon_k^n \|w_k^+\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1-\sigma}{\zeta^{\mathscr{O}}-1} \epsilon_k^n \|w_k^+\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

当 $k \in \mathbb{N}$ 充分大时。由 (4.3) 和 (4.5)，我们得到

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k^+\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})} \geq \frac{1}{\zeta^{\mathscr{O}}-1} \frac{2p}{p-2} m(E),$$

这与以下事实矛盾：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$J_{\epsilon_k}(u_k) < (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E) + \delta_k$，因为$\delta_k \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。

由于 $\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}},\rho)$ 是 O 的开子集，根据上一段中的断言，舍弃有限个指标后，$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}},\rho)$。此时，为了完成证明，我们应仿照 BBM07 命题 5.5] 证明的最后一部分进行论证（更确切地说，参见 BBM07，第 480] 页）。□

最后证明定理 4.12。

定理 4.12 的证明。由引理 4.11 可知，$\limsup_{\epsilon\to 0^+} m(J_\epsilon) \leq m(E)/\zeta^{\mathscr{O}}$，因此极限 $m(J_\epsilon) \to m(E)/\zeta^{\mathscr{O}}$ as $\epsilon \to 0^+$ 是引理 4.15 的推论。由此极限和注 4.8 即可得出结论，注 4.8 蕴含对于任意 $\epsilon \in]0, 1[$ 和 $u \in \mathcal{N}_\epsilon$，$J_\epsilon(u) = (p-2)\|u^+\|^p_{L^p(\mathscr{O},\mathfrak{g})}/(2p)$。□

黎曼质心的推广。Petean 在 [Pet19 第 5] 节将黎曼流形上的黎曼质心概念加以推广，使其也适用于在小半径测地球上充分集中的函数，尽管这些函数的支集不一定包含在其中。

下面说明，Petean 的构造在黎曼轨形的情形下同样成立。首先，定义

$$L^{1,r}(\mathscr{O},\mathfrak{g}) = \{u \in L^1(\mathscr{O},\mathfrak{g}) : \operatorname{supp} u \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,r) \text{ for a certain } x \in \mathscr{O}\}$$

对任意 $r > 0$。给定 $u \in L^{1,\rho}(\mathrm{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$，考虑由下式给出的连续函数

$$P_u(x) := \frac{1}{\|u\|_{L^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})}} \int_{\mathscr{O}} \operatorname{dist}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,y)^2 |u(y)| \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(y)$$

对每个 $x \in \mathrm{O}$。容易验证

$$L^{1,\rho}(\mathscr{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\} \ni u \mapsto P_u \in C(\mathscr{O},\mathbb{R}) \tag{4.7}$$

是连续的，通过简单的反证法可得以下引理。

引理 4.16. 若 K 是一个紧致度量空间，且

$$\mathcal{A} := \{f \in C(K,\mathbb{R}) : f \textit{ has a unique minimum point}\},$$

那么将 $\mathcal{A}$ 中的函数映射到其在 K 中的唯一最小点的映射是连续的。

由命题 3.16 以及关于 ρ 的假设（见定义 4.2），我们可以定义 cm: $L^{1,\rho}(\mathrm{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\} \to \mathrm{O}$ 为如下映射：将 $u \in L^{1,\rho}(\mathrm{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$映射到 P_u的唯一最小点。事实上，$\mathrm{cm} : L^{1,\rho}(\mathrm{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\} \to \mathrm{O}$ 是连续的，因为它是连续映射 (4.7) 与前一个引理中的映射的复合。

给定 $u \in L^1(\mathrm{O},\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$，我们将其集中函数定义为由下式给出的连续函数

$$\mathrm{CF}_u(x) := \frac{1}{\|u\|_{L^1(\mathscr{O},\mathfrak{g})}} \int_{\mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x,\rho)} |u| \mathrm{d}\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$$

对任意 $x \in \mathrm{O}$，并将其集中系数定义为 $\mathrm{CC}(u) = \max \mathrm{CF}_u$。若$1/2 < \eta < 1$ 且 $\mathrm{CC}(u) > \eta$，则我们定义 $\Psi_{\eta,u} \in L^1(\mathrm{O},\mathfrak{g})$ 为

$$\Psi_{\eta,u}(x) = \left[1 - \chi_\eta(\mathrm{CF}_u(x))\right] u(x)$$

对于几乎处处的 $x \in \mathrm{O}$（相对于 $\mu^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}$）。下面的结果表明，当 u 充分集中于某一点附近时，$\Psi_{\eta,u}$ 的支集包含在一个小度量球内。

引理 4.17（[Pet19，引理 5.1]）。若 $1/2 < \eta < 1$ 且 $\mathrm{CF}_u(x) = \mathrm{CC}(u) > \eta$，则 $\operatorname{supp}\Psi_{\eta,u} \subset \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, 2\rho)$。

由前一个引理可知，若 $1/2 < \eta < 1$，则

$$\mathrm{CC}^{-1}(]\eta, 1]) \ni u \mapsto \Psi_{\eta,u} \in L^{1,2\rho}(\mathscr{O},\mathfrak{g})$$

是连续的，最终我们得到一个类似于 [Pet19，定理 5.2], 的结果，其证明方法类似。

定理 4.18。给定 $\eta \in]1/2, 1[$，，映射

$$\mathrm{CC}^{-1}(]\eta, 1]) \ni u \mapsto \mathrm{Cm}_\eta(u) := \mathrm{cm}(\Psi_{\eta,u}) \in \mathscr{O}$$

是连续的，且若 $\mathrm{CF}_u(x) = \mathrm{CC}(u) > \eta$，则 $\mathrm{Cm}_\eta(u) \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O},\mathfrak{g})}(x, 2\rho)$。

5. Proof of Theorem 1.5

固定 $\eta \in]1/2, 1[$，并令 $\epsilon_\eta \in]0, 1]$, $\delta_\eta \in]0, \infty[$ 满足定理 4.12 的结论。由引理 4.11，我们可以固定 $\widetilde{\epsilon}_\eta \in]0, \epsilon_\eta]$，使得每当$0 < \epsilon < \widetilde{\epsilon}_\eta$时，都有一个映射 $\mathsf{Z}^{\mathscr{O}} \ni x \mapsto i_\epsilon(x) \in \Lambda_{\epsilon, (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E) + \delta_\eta}$。假设 $(\epsilon, \delta) \in]0, \widetilde{\epsilon}_\eta[\times]0, \delta_\eta[$。定理 4.12 表明，若 $u \in \Lambda_{\epsilon, (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E) + \delta}$, 则对某个 $x \in \mathsf{B}^{(\mathscr{O}, \mathfrak{g})}(\mathsf{Z}^{\mathscr{O}}, \rho)$，$\mathsf{CF}_{(u^+)^p}(x) > \eta$。因此，我们可以使用定理 4.18 来设定

$$\Lambda_{\epsilon, (\zeta^{\mathscr{O}})^{-1} m(E) + \delta} \ni u \mapsto c_\epsilon(u) := \mathrm{Cm}_\eta((u^+)^p) \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O}, \mathfrak{g})}(\mathrm{Z}^{\mathscr{O}}, 3\rho).$$

引理 4.1 保证

$$\{w \in N|_{\mathrm{Z}^{\mathscr{O}}} : \mathfrak{g}(w, w) < (3\rho)^2\} \ni v \mapsto \psi(v) := \exp^{(\mathscr{O}, \mathfrak{g})}(v) \in \mathrm{B}^{(\mathscr{O}, \mathfrak{g})}(\mathrm{Z}^{\mathscr{O}}, 3\rho)$$

是一个同胚，因此函数 $H : \mathsf{O} \times [0, 1] \to \mathsf{O}$ 定义为

$$H(x, t) = \psi\left((1 - t)\psi^{-1}(c_\epsilon \circ i_\epsilon(x))\right)$$

给出了从 $c_\epsilon \circ i_\epsilon$ 到 $\mathsf{id}_{\mathrm{Z}^{\mathscr{O}}}$ 的同伦，结论由引言中概述的摄影方法得出。

□

Appendix A. Length spaces

设 (X, dist) 是一个长度空间，即 (X, dist) 是一个度量空间，并且

$$\mathrm{dist}(x, y) = \inf\{\mathrm{length}(\gamma) \mid \\ \mid \gamma \colon [0, 1] \to (X, \mathrm{dist}) \text{ is continuous}, \gamma(0) = x \text{ and } \gamma(1) = y\}$$

对于任意 $x, y \in X$，其中给定一个连续的 $\gamma \colon [a, b] \to (X, \mathsf{dist})$,

$$\mathrm{length}(\gamma) := \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} \mathrm{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ and } a = t_0 \leq \ldots \leq t_{n+1} = b\right\}.$$

若 $\gamma \colon [a, b] \to (X, \mathsf{dist})$ 连续，则称 γ为极小测地线，当

$$\mathrm{dist}(\gamma(t), \gamma(s)) = \frac{|t - s|}{|b - a|} \mathrm{length}(\gamma)$$

对于任意 $t, s \in [a, b]$，我们称 γ为测地线，若存在 $\epsilon > 0$ 使得当$a \leq t \leq s \leq \min(b, t + \epsilon)$时，$\gamma|_{[t,s]}$ 是极小测地线。

若一个 $F \colon (X, \mathsf{dist}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是凸的（分别地，严格凸的），则称其为凸的（分别地，严格凸的），当且仅当对于任意作为测地线（分别地，非恒定测地线）的 $\gamma \colon [a, b] \to (X, \mathsf{dist})$，$F \circ \gamma$是凸的（分别地，严格凸的）。事实上，严格凸性与极小点的唯一性有关。

命题 A.1（[Jos97，引理 3.1.1]）。设 $F \colon (X, \mathsf{dist}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$严格凸，且对于给定的 $x, y \in X$，存在一条将x 连接到 y的极小测地线。由此可得，F 在 X中至多有一个极小点。

References

[Afs11] Bijan Afsari。“黎曼L^p 质心：存在性、唯一性和凸性”。载于：《美国数学会会刊》139.2（2011），第655–673页。ISSN：0002-9939。URL：https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2010-10541-5。

[Alf21] Sebasti´an Camilo DazaAlfonso。“orbifold 上的 G-结构”。硕士论文。2021 年。URL：https://doi.org/10.11606%2Fd.45.2021.tde-24092021-130626。

[AM07] Antonio Ambrosetti 和 Andrea Malchiodi。《非线性分析与半线性椭圆问题》。第 104 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2007 年，第 xii+316页。 ISBN：978-0-521-86320-9；0-521-86320-1。 URL：https://doi.org/10.1017/CBO9780511618260。[BB08] Joseph E. Borzellino 和 Victor Brunsden。《光滑轨形的轨形微分同胚群的流形结构》。载于：《李理论杂志》18.4（2008），第 979–1007 页。 ISSN：0949-5932。[BBM07] Vieri Benci、Claudio Bonanno 和 Anna Maria Micheletti。《黎曼流形上非线性椭圆问题的解的多重性》。载于：《Journal of Functional Analysis》252.2（2007），第 464–489 页。 ISSN：0022-1236。 URL：https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.07.010。[Ben+22] Vieri Benci 等。《带体积约束的范德瓦耳斯–卡恩–希利亚德方程的 Lusternik–Schnirelman 理论与莫尔斯理论》。载于：《非线性分析》220（2022），第 112851 页。 ISSN：0362-546X。 URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X22000475。[Bor92] Joseph Ernest Borzellino。《轨形的黎曼几何》。加利福尼亚大学洛杉矶分校。博士论文。1992 年，第 69 页。 URL：http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:k

[Bor93] Joseph E. Borzellino.《最大直径轨形》。载于：《印第安纳大学数学期刊》42 (1993)，第 37–53 页。 ISSN：0022-2518。 URL：https://doi.org/10.1512/iumj.1993.42.42004。[BV04] Stephen Boyd 和 Lieven Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 xiv+716 页。 ISBN：0-521- 83378-7。 URL：https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441。[Car19] Francisco C. Caramello。《轨形导论》。2019 年。 URL：https://arxiv.org/abs/1909.08699。[Chi90] Yuan-Jen Chiang.《 V流形上的调和映射》。载于：《全球分析与几何年刊》8.3 (1990)，第 315–344 页。 ISSN：0232-704X。 URL：https://doi.org/10.1007/BF00127941。[Far01] Carla Farsi.《轨形谱理论》。载于：《落基山数学期刊》31.1 (2001)，第 215–235 页。 ISSN：0035-7596。 URL：https://doi.org/10.1216/rmjm/1008959678。[Gro99] Misha Gromov.《黎曼空间与非黎曼空间的度量结构》。第 152 卷。数学进展丛书。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1999 年，第 xx+585 页。 ISBN：0-8176-3898-9。[Jos97] J¨urgen Jost.《非正曲率：几何与分析方面》。苏黎世联邦理工学院数学讲座。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1997 年，第 viii+108 页。ISBN：3-7643-5736-3。URL：https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8918-6。[Kar77] H. Karcher.《黎曼质心与磨光核平滑》。载于：《纯粹与应用数学通讯》30.5 (1977)，第 509–541 页。 ISSN：0010-3640。URL：https://doi.org/10.1002/cpa.3160300502。[Lee18] John M. Lee.《黎曼流形导论》。第 176 卷。数学研究生教材。施普林格，尚贝里，2018 年，第 xiii+437 页。 ISBN：978- 3-319-91754-2；978-3-319-91755-9。[MM03] I. Moerdijk 和 J. Mrˇcun.《叶状结构与李群胚导论》。第 91 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2003 年，第 x+173 页。 ISBN：0-521-83197-0。 URL：https://doi.org/10.1017/CBO9780511615450。[Pet16] Peter Petersen.《黎曼几何》。第三版。第 171 卷。数学研究生教材。施普林格，尚贝里，2016 年，

第 xviii+499 页。 ISBN：978-3-319-26652-7；978-3-319-26654-1。 URL：https://doi.org/10.1007/978-3-319-26654-1。[Pet19] Jimmy Petean.《基于 Lusternik-Schnirelmann 理论的 Yamabe 方程多重性结果》。载于：《Journal of Functional Analysis》276.6(2019)，第 1788–1805 页。 ISSN：0022-1236。

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão, 1010, 05508-090, São Paulo, SP, Brazil
Email address: gustavopramos@gmail.com, gpramos@ime.usp.br
URL: http://gpramos.com