arXiv:2302.05157v1 [math.MG] 10 Feb 2023

关于正可达子集的注记

ALEXANDER LYTCHAK

Abstract. 我们为欧几里得空间和黎曼流形中的正可达集提供了新的结构性结果。

1. Introduction

欧几里得空间中的正可达集由 Herbert Federer [Fed59], 引入，作为凸子集和 $\mathcal{C}^{1,1}$-子流形的共同推广。事实证明，它们与黎曼几何、积分几何和度量几何密切相关，参见 [Kle81], [Tha08], [KL22], [HS22]。

若黎曼流形 M 中的子集 C 在 C in$M$的某个邻域内存在唯一确定的最近点投影，则称其具有正可达性。正可达性的概念在 $\mathcal{C}^{1,1}$-微分同胚下保持不变，并且具有局部性。Viktor Bangert 在 [Ban82] 中证明，在黎曼流形中具有正可达性并不取决于黎曼度量的选择，而只取决于 $\mathcal{C}^{1,1}$-图册。

许多论文研究了正可达子集的几何与拓扑，包括 [Fed59], [Hug98], [Lyt04], [Lyt05], [RZ17], [RZ19]。主要性质概述见第 2 节；此处仅回顾陈述本文结果所需的事实。

在任意 $x \in C$ 处，都有一个定义良好的切锥 T_xC ，它是欧几里得空间 T_xM中的凸锥。锥 T_xC 的最大维数 k 与 C 的豪斯多夫维数相同，称为 C [的维数（Fed59，定理 4.8，注 4.15]）。一个连通的 m维正可达子集 C 是拓扑流形，当且仅当它是一个 $\mathcal{C}^{1,1}$-子流形， [（Lyt05，命题 1.4]）。此外，当且仅当所有切锥 T_xC 都是欧几里得空间时，这一结论成立。

我们的结果描述了这些等价条件不成立时会发生什么。当且仅当存在一点，其无穷小结构与带边界流形的结构相同，正可达性集合 C 才不是一个无边界的 $\mathcal{C}^{1,1}$-流形：

2020年数学主题分类。53C20、53C45、52A30。关键词和短语。半凸函数、半凸集、正则点。作者部分受到德国研究联合会（DFG）SFB TRR 191 项目资助。

定理 1.1. 设 C 是黎曼流形 M 中一个连通的、具有正可达性的 m 维子集。要么 C 是 M 的一个无边界 $\mathcal{C}^{1,\,1}$-子流形，要么存在某个 $x \in C$，使得切锥 T_xC 与一个 m 维欧几里得半空间等距。

下文的定理 4.1 给出了一个略强的表述。

C 中定理 1.1 所述任意点 $x \in C$ 的一个邻域，与 $\mathbb{R}^m$中的一个凸体 $\mathcal{C}^{1,\,1}$-等价，正如本文以下主要结果所述:

定理 1.2. 设 $C \subset M$ 是一个 n维流形 M中的 m维正可达性子集。设 $x \in C$ 满足凸锥 T_xC 的维数为 m。

那么，存在一个闭凸子集 $K \subset \mathbb{R}^m$，其在 $\mathbb{R}^m$中具有非空内部；存在 $\mathbb{R}^m$ 中 K 的一个开邻域 O，以及一个 $\mathcal{C}^{1,\,1}$-嵌入Φ: $O \to \mathbb{R}^n$，使得 $\Phi(K)$ 是 C中 x 的一个邻域。

即使 $\dim M = m$，这一表述也并非显而易见。在这种情况下，定理 1.2 的某些形式见 [Res56], [Fu85], [HS22, 定理 5.6] ；而在 [LV10, 附录 B] 中，则以未经证明的陈述形式出现。

如果定理 1.2 中的切锥 T_xC 是一个 m维欧几里得空间，那么 C 中 x 的一个邻域是一个无边界的 $\mathcal{C}^{1,\,1}$维子流形， [RZ17，定理 7.5]。由此可得:

推论 1.3. 设 $C \subset M$ 是一个 m维正可达性子集。那么，所有具有 m 维切锥的点 $x \in C$ 构成的集合 C^+ 是 C的一个开子集，同胚于一个 m维带边界流形。该流形的边界 C^+ 是切锥 T_xC 不是欧几里得空间的点 $x \in C^+$ 构成的集合。

换言之，当且仅当流形 C^+ 的切空间 T_xC 具有非空边界时， $x \in C^+$ 才是该流形的边界点；这与亚历山德罗夫空间边界的结构类似， [Per91]。

1.1. 证明与进一步说明。定理 1.1 的证明将在第 4 节按以下思路给出。我们考虑包含在 C中的极大非空 m维 $\mathcal{C}^{1,\,1}$ 无边界流形 U。取任意一点 $p \in U$，并在补集 $C \setminus U$中找到一点 x，使其为相对于 C的内在度量而言距离 p 最近的点。于是，切锥 T_xC 必定包含一个m维半空间，因此与该半空间重合。

定理 1.2 的证明更具技术性。在满维情形 $\dim(C) = \dim(M)$ 中，该结果实质上已包含在文献[Res56] 中；该文早于对 [Fed59]中正可达集的研究。我们只需将 [Res56]中的术语调整为适用于我们的问题。

情形 $\dim(M) < \dim(C)$ 的证明方法是，找到一个 $\mathcal{C}^{1,1}$微分同胚，它将 x 的一个邻域映到一个m维子流形中（并将 x 在 C 中的一个邻域映入其中）。随后便可应用前面讨论过的满维情形。该微分同胚的构造依赖于 Whitney 延拓定理以及第 3 节中得到的一项技术性结果。这个结果，即推论 3.4，指出正可达集的切锥以一种精确意义上的 Lipschitz 半连续方式变化。这种半连续性或许也具有一定的独立意义。

我们以几点评论和问题结束引言。

注 1.4. 下文以及上述主要结果的表述中所涉及的黎曼流形 M 均假定为光滑流形。不过，所有结果都只依赖于 $\mathcal{C}^{1,1}$-图册。

注 1.5. 上述结果在子度量理论中的应用将在另一篇论文中介绍。

要对正可达子集的（局部）结构在（双 Lipschitz）同胚意义下，甚至在 $\mathcal{C}^{1,1}$ 微分同胚意义下作精确分类，似乎是不可能的。不过，对于以下这些不那么宏大的问题，似乎有可能得到合理的答案。

问题 1.6. 任意连通的二维正可达子集是否都局部双 Lipschitz 等价于 $\mathbb{R}^2$ 中的某个正可达子集？关于平面内正可达子集的明确描述，参见 [RZ17] 。

问题 1.7. 能否在所有正可达集之中，对带边界的拓扑流形给出一种无穷小刻画？

问题 1.8. 能否在同胚意义下，描述所有三维正可达子集的芽？

致谢。我感谢 Joe Fu、Daniel Hug 和 Jan Rataj 提供宝贵意见并参与讨论。

2. 预备知识

2.1. 略作推广的定义与局部化。我们称光滑黎曼流形 M 中的局部闭子集 C 在 M 中具有正可达性，如果存在 M 中包含 C 的开邻域 O，使得到 C 的最近点投影 P^C 在 O 上有唯一确定的定义。

通常，这一定义是针对全局闭子集 C 给出的。不过，如有必要，将 O 替换为更小的邻域后，我们总可以假设 C 在 O 中是闭的。

这种广义定义的优点在于以下局部性：对于 M 中任意正可达子集 C，若 C 的任意子集 U 在

C 中是开集，则它是 M 中的正可达子集。另一方面，局部闭子集 C of M 若能被 M 中的正可达相对开子集覆盖，则具有正可达性。

对于流形 M 的闭子集 C，具有正可达性的性质不依赖于黎曼度量 [Ban82，推论]，；此外，该性质在 $\mathcal{C}^1$, 1-微分同胚下保持不变 [Ban82]，[Fed59，定理 4.19]。鉴于上述局部性，相同结论也适用于局部闭子集。

给定 M 中具有正可达性的局部闭子集 C 以及任意一点 $p \in C$，我们可以找到一个包含 p 的小坐标图 U，使得 $C \cap U$ 在 U 中是闭集。将 U 上的度量改为欧几里得度量后，$C \cap U$ 就成为欧几里得空间中的正可达闭子集。

如果闭子集 C 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中具有正可达性，那么对于任意 $p \in C$，C 与任意足够小的¯闭球 $B_r(p)$ 的交集都是正可达的紧致可缩子集 [Fed59，定理 4.10，备注 4.15], [RZ17，引理 2.3]。

对于流形 M 中的正可达紧子集 C，存在一个正数 r，使得最近点投影在 C 的开 r-管状邻域 $B_r(C)$ 上有唯一的定义。此类 r 的上确界通常称为该子集 C 的可达半径。

注 2.1. 注意，对于正可达非紧子集 C，按上述方式定义的 C 的可达半径可能为 0。

上述讨论使我们能够将黎曼流形中任意正可达子集的所有局部命题，归结为欧几里得空间中的正可达紧连通子集。下文将不时使用这一观察。

最后，关于正可达性的多种刻画，可参见 [Fed59, 4.18], [Ban82], [Lyt05, 定理 1.3], [KL21, 命题 1.3] 。

2.2. 正可达子集的基本性质。正可达子集的拓扑维数 $\dim(C)$ 与其豪斯多夫维数一致，[Fed59, 注 4.15]。此外，$\dim(C)$ 是凸锥 T_xC 的维数中的最大值。

对于 $m = \dim(C)$，我们用 C_{reg} 表示所有满足以下条件的 $x \in C$ 的集合：切锥 T_xC 与 $\mathbb{R}^m$等距。子集 C_{reg} 非空，在 C 中是开集，并且是 $\mathcal{C}^1$, 1-子流形，见 M, [RZ17，定理 7.5]。

补集 $C \setminus C_{reg}$ 是维数至多为¯$m-1$的正可达性局部闭子集，[RZ17，定理 7.5]。如引言中所述，我们用 C^+ 表示满足 $\dim(T_xC) = m$的点 $x \in C$ 的集合。¯前述结论意味着 $C^+ \subset C_{reg}$。

切锥 T_xC 关于 $x \in C$下半连续，[Fed59，定理 4.8], [RZ17，命题 3.1] 或下文的命题 3.3：若 x_i 在 C 中收敛到 x，则（在 x周围任意固定的欧几里得坐标图中）凸锥 $T_{x_i}C$的任意逐点豪斯多夫极限（取某个子列）都包含切锥 T_xC。这立即推出：

引理 2.2. 设 $C \subset M$ 是 M 中具有正可达性的集合，且 $\dim(C) = m$。所有满足 $\dim(T_xC) = m$ 的 $x \in C$ 所成的集合 C^+ 在 C 中是开集。

ˆ 对于任意点 $x \in C$，记 T_xC 为由凸锥 T_xC 在 T_xM 中生成的欧几里得子空间。它是一个与 T_xC 维数相同的欧几里得空间。切锥 T_xCˆ 的半连续性蕴含欧几里得空间 T_xC 的半连续性。若维数恒定，则可得：

引理 2.3. 设 C 是 M 中具有正可达性的子集。设序列 $x_i \in C$ 收敛于 $x \in C$。假设对于所有充分大的 i，均有 $\dim(T_{x_i}C) = \dim(T_xC)$。那么线性空间 $T_{x_i}C$ 收敛于 T_xC。

注意，如果 $x \in C^+$，则维数假设成立。

2.3. 正可达子集上的内在度量。设 C 是流形 M中一个连通的正可达集。内在度量 d_C按通常方式定义，参见 [BBI01，第 2 节3]，：令 $d_C(x, y)$等于连接 x 与 y、且位于 C 中的曲线长度的下确界。任何达到此下确界且以弧长参数化的曲线，都称为连接 x 与 y的 C-测地线。若 C 是紧致的，则其中任意两点C 都可由一条 C-测地线连接。

设 C 在 M 中具有正可达性，且 $p \in C$ 任意。如上所述，存在 p在 C中的一个紧邻域 K，它在 M中具有正可达性。于是，我们可以改变 M 在 K 于 M 中的某个邻域 U 之外的拓扑和度量，并将 U等距嵌入一个紧致光滑流形 N。通过这一过程， p 在 M 中某邻域内的度量，以及 p 在 C 中某邻域内的内在度量，均保持不变。

现在将 [Lyt05，备注 6.4、定理 1.3] 以及 [Lyt04，定理 1.1、定理 1.2] 应用于数对 $K \subset N$，可得：

命题 2.4. 设 C 是流形 M 中正可达性的局部闭子集。对于任意的 $p \in C$ 和 $\delta > 0$，存在 $\kappa > 0$ 和$0 < r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，使得对所有 $r < r_0$，以下结论成立：

- $\bar{B}_r(p) \cap C$ 是 M 中正可达性的紧子集。_
- 在 $B_r(p) \cap C$ 上的内禀距离 d_C 与 $B_r(p) \cap C$ 上的 M-¯距离至多相差因子 $(1 + \delta)$。

• 相对于 d_C而言，子集 $B_r(p) \cap \bar{C}$ 在 C中是凸的。
• 关于 d_C，子集 $B_r(p) \cap C$ 是一个 CAT(κ) 空间。

上述最后一点意味着，关于内在度量， $B_r(p) \cap C$ 是唯一测地的。特别地，它是可缩的。

3. Semi-continuity of tangent spaces

本节将讨论切锥半连续性的 Lipschitz 版本。回顾 [Lyt05、定理 1.2、定理1.3、例3.4]:

引理3.1. 存在某个普适常数 $\mu_1 > 0$ ，具有如下性质。若 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中可达半径为 ≥ 1 的紧子集，那么任意以弧长参数化的 C-测地线 $\gamma : [a, b] \to C$ 都是一条 $\mathcal{C}^{1,\ 1}$ 曲线，且 $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 是 μ_1-Lipschitz连续的。

μ_1 的最优取值在此处不起作用，而且它不能由 [Lyt05], 推出，不过它或许本身具有一定的研究价值:

问题3.2。引理3.1中 μ_1 的最优取值以及下文命题3.3中 μ 的最优取值分别是多少?

现在我们可以推出以下半连续性陈述:

命题 3.3。存在一个普适常数 $\mu > 0$ ，具有以下性质。设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是可达半径为 ≥ 1的紧子集。设$\varepsilon \leq 1$ 和 $\gamma : [0, \varepsilon] \to C$ 是一条以弧长参数化的 C-测地线。那么，对于 $p = \gamma(0)$、 $v = \gamma'(0) \in T_pC$以及任意 $q \in C$，若 $||p-q|| \leq \varepsilon^2$，则从 v 到 T_qC 的距离可估计为:

$$d(v, T_qC) \leq \mu \cdot ||p - q|| .$$

证明。不失一般性，我们可以假设 p是原点0。我们还可以假设 $||p - q|| = ||q|| = \varepsilon^2$; 否则，只需将 γ 替换为一条较短的子曲线。

令 $u = \gamma(\varepsilon)$。那么，根据引理3.1，

$$||u - \varepsilon \cdot v|| \leq \frac{\mu_1}{2}\varepsilon^2 .$$

因此

$$||(u - q) - \varepsilon \cdot v|| \leq (1 + \frac{\mu_1}{2})\varepsilon^2 .$$

另一方面，根据 [Fed59，定理 4.18],

$$d(u - q, T_qC) \leq \frac{||u - q||^2}{2} .$$

由于 T_qC 是一个锥，三角不等式可得

$$d(v,T_qC)\le(1+\frac{\mu_1}{2})\varepsilon+\frac{||u-q||^2}{2\varepsilon}\ .$$

由于 $||u||\le\varepsilon\le 1$，第二项至多为 2ε。因此，我们得到所需的不等式，其中 $\mu=3+\frac{\mu_1}{2}$。□

我们将上述结论从单个 $v\in T_pC$ 推广到 T_pC的较大凸子锥，更确切地说，推广到所有与 T_pC的边界至少相距一定距离的向量所构成的集合。

对于任意 $\varepsilon>0$，我们考虑集合 $T_{p,\ \varepsilon}C$，它由所有满足以下条件的 $v\in T_pC$ 构成：以 v 为中心、半径为 $\varepsilon\cdot||v||$ 的球在仿射包 T_pC 内包含于 $\hat{}T_pC$中。若 $T_pC=T_pC$，则对任意 ε，有 $T_{p,\ \varepsilon}C=T_pC$。一般而言，$T_{p,\ \varepsilon}C$ 是 T_pC的一个凸子锥。随着 $\hat{}\varepsilon$ 减小，子锥 $T_{p,\ \varepsilon}C$ 逐渐增大，其并集是 T_pC 相对于 T_pC的内点集。

现在我们可以由命题 3.3 推出：

推论 3.4. 对于任意可达半径为 $\ge\delta$ 的紧子集 C，$\mathbb{R}^n$，对于任意点 $p\in C$ 和任意 $\varepsilon>0$，以下结论成立。

存在某个 $s=s(p,\varepsilon)>0$，使得对于任意 $q\in C\cap B_s(p)$ 以及任意属于凸子锥 $T_{p,\ \varepsilon}C\subset T_pC$ 的向量 v，v 到 T_qC 的距离满足估计：

$$d(v,T_qC)\le 2\mu\cdot\delta\cdot||p-q||\cdot||v||\ ,$$

其中 μ 是命题 3.3 中得到的常数。

证明。对空间进行缩放后，我们可以假设 $\delta=1$。固定某个 $\varepsilon_0<<\varepsilon$，并在证明过程中对其作调整。

锥 T_pC 中的单位球面 S 是从 p 出发的 C-测地线初始方向集合的完备化。因此，我们可以找到某个 $t=t(\varepsilon_0)>0$ 和 C-测地线 $\gamma_1,...,\gamma_k:[0,t]\to C$，它们从 p 出发，初始方向分别为单位方向 $v_1,...,v_k$，且 $\{v_1,...,v_k\}$ 在 S 中是 ε_0-稠密的。

根据命题 3.3，对于任意满足 $||q-p||\le t^2$ 的 $q\in C$，我们得到

$$d(v,T_qC)\le\mu\cdot||p-q||\ , \tag{3.1}$$

对于 $v=v_i$，任意 $i=1,.....,k$。由到凸锥 T_qC 的距离函数的凸性可知，不等式 (3.1) 对凸包 K_{ε_0} 中由 v_i 表示的单位向量及原点 0 构成的任意 v 都成立。

对于 $\varepsilon_0\to 0$ 凸子集 K_{ε_0} 在 T_pC中收敛到单位球。因此，对于足够小的 ε_0 以及任意单位向量 $w\in T_{p,\ \varepsilon}C$，凸子集 K_{ε_0} 包含 $\frac{1}{2}w$。于是

$$d(\frac{1}{2}w,T_qC)\le\mu\cdot||p-q||\le 2\cdot\mu\cdot||p-q||\cdot||\frac{1}{2}w||\ .$$

这意味着，对于如此足够小的 ε_0，推论中的陈述对 $s = t(\varepsilon_0)$ 成立。□

4. Existence of boundary points

以下结果是定理 1.1 的一个小幅推广，更适用于局部化。显然，它蕴含定理 1.1。

定理 4.1. 设 C 是黎曼流形 M 中具有正可达性的 m 维集合，且 M 的维数为 n。设 C_{reg} 是包含于 C 中的极大 m 维无边界 $C^{1,1}$ 子流形。

考虑 C 中 C_{reg} 的边界点集合 ∂C_{reg}。考虑由所有满足 T_xC 与一个 m 维欧几里得半空间等距的点 $x \in \partial C_{reg}$ 构成的子集 G。那么 G 在 ∂C_{reg} 中稠密。

证明. 若 ∂C_{reg} 为空，则无须证明。因此，假设 ∂C_{reg} 非空。我们固定任意的 $p \in \partial C_{reg}$ 和 $\varepsilon > 0$，并将要找到某个 $x \in B_\varepsilon(p) \cap G$。

我们将命题 2.4 应用于 $\delta = 1$，得到某个 $r_0 < \varepsilon$，使得对所有 $r \le r_0$，交集 $B_r(p) \cap C$ 是实数集 M 中具有正可达性的紧子集。此外，$B_r(p) \cap C$ 在 C 的内禀度量 d_C 下是凸的。

选取 $r = \frac{r_0}{4}$ 和任意一个 $y \in B_r(p) \cap C_{reg}$。考虑关于内禀距离 d_C 到 y 的最近点 $x \in \partial C_{reg}$。于是$x \in B_{3r}(p) \subset B_\varepsilon(p)$。还需验证 $x \in G$。

考虑连接 x 与 y、以弧长参数化的 C-测地线 $\gamma : [0, a] \to C$。由于 x 是 y 在 ∂C_{reg} 上的最近点，对任意 $0 < s \le a$，以下结论成立：以 $\gamma(s)$ 为中心、半径为 s 的开球 W_s，关于 d_C 而言，与 ∂C_{reg} 不相交。因此，该球 W_s 完全包含于 $\mathcal{C}^{1,1}$ 维流形 C_{reg} 中。

特别地，W_s 中的任意 C-测地线都可以延拓为 C-测地线，直至到达与 $\gamma(s)$ 的距离为 s 的点，[LS07，定理 1.5]。此外，W_s与 $\mathbb{R}^m$中的 s-球是均匀双 Lipschitz 等价的，因为 W_s 是一个测地凸的 $\mathcal{C}^{1,1}$维流形，它是唯一测地的，且曲率从两侧均受到一致有界的约束，[KL21，命题 1.7]。

将 T_xC 处的切锥与 C 在 x [处的放大等同起来，x Lyt05，注 6.1]。对于 γ的起始方向 v ——它是 T_xC中的一个单位向量——我们得到：v 周围的开单位球是 m维的。此外，T_xC 中的任何测地线都不会终止于距 v小于 1 的点。因此，凸锥 T_xC 包含以 v为中心的闭 m维单位 W 球。由于 T_xC 是一个锥，它包含切锥 T_0W，后者是一个 m维欧几里得半空间。

切锥 T_xC 是一个维数至多为 $m = \dim(C)$ 的凸锥，其中包含一个 m 维半空间 T_0W。此外，T_xC

不是一个 m 维欧几里得空间，因为 x 不包含于C_{reg}。因此，$T_xC = T_0W$。于是 $x \in G$。□

5. Structure around the boundary points

5.1. 准备工作。我们将在本节证明定理 1.2。因此，设 C 是 n 维黎曼流形 M 中具有正可达性的 m 维子集。设 $x \in C$ 是一点，满足 $\dim(T_xC) = m$。若 T_xM 是一个 m 维欧几里得空间，则根据 RZ17 定理 7.5]， x 包含于流形 C_{reg} 中， [。此时定理 1.2 的结论直接成立。

从现在起，我们假设 T_xC 是 m 维的，但不是欧几里得空间。定理 1.2 的结论是局部的。按照第 2.1 小节中的论证，我们可以假设 $M = \mathbb{R}^n$，且 C 是紧的。

我们还可以假设 $x = 0$，并且由锥 T_0C 生成的 m 维欧几里得空间 $V := T_0C$ 是坐标子空间

$$V = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n .$$

我们找到了一些单位向量 $v_0 \in T_0C$ 和 $\varepsilon > 0$，使得 T_0C 包含 $V = \mathbb{R}^m$ 中半径为 4ε 的球。经过旋转后，不妨设 v_0 是 $\mathbb{R}^m$ 中的最后一个坐标向量 $v_0 = e_m$。

我们固定某个小于紧子集 C 的可达半径的 $\delta > 0$。应用引理 2.2、命题 2.4 和切锥的半连续性，我们找到某个 $r > 0$，其满足以下性质，对任意 $C' = B_r(0) \cap C$:

- C' 在 $\mathbb{R}^n$ 中的可达半径至少为 δ。
- 对于任意 $p \in C'$，都有 $\dim(T_pC) = m$。
- T_pC 包含一个以某个单位向量 $v_p \in T_pC$ 为中心、半径为 2ε 的 m 维欧几里得球。
- 子集 C' 关于内在度量 d_C 是凸的。
- 内在度量 d_C 与欧几里得度量之间的差异 C'至多相差因子 2。

5.2. 满维情形。首先假设 $m = n$，即C 是满维的。在这种情况下，结果实质上已包含在[Res56], 中，下面我们将对此作出说明。

考虑由 $\mathcal{O}$ 所有半径为 δ 且与 C恰有一个公共点的闭球组成的族。该族在豪斯多夫拓扑下是闭的，并且 ∂C 中的每个点都位于某个球 $O \in \mathcal{O}$中，参见 [RZ17，命题 3.1 (vi)]。用 [Res56], 的术语来说，这意味着 ∂C 是 $\mathbb{R}^m$的一个 O^*_δ 子集。

拓扑边界 ∂C 恰好是这样的点的集合：在这些点 $p \in C$ 处， T_pC 不是 $\mathbb{R}^m$, [RZ17，定理 9.5]。特别地， $0 \in \partial C$。

根据假设， e_m 是 T_0C的内部点。根据切锥的半连续性，对于任意接近 0 的 p ， T_pC 都包含 e_m 作为内部点，其中 p 属于 C。缩小 r 后，我们可以假设，对于所有 $p \in C'$， e_m 都是 T_pC的内部点。

那么，对于任意 $p \in C' \cap \partial C$，该族中包含 p 的所有球$\mathcal{O}$ 的交集都非空（更确切地说，当 $t > 0$ 足够小时，这些球都包含点 $-t \cdot e_m$）。按照 [Res56], 中使用的记号，这意味着 $C' \cap \partial C$ 是一个 O_δ 集，因此可以应用 [Res56] 的主要结果。

特别地，我们在 e_m 的正交补 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中找到一个球 W_0 ，它具有如下性质：对于任意 $w \in W_0$ ，直线 $\gamma_w(t) = w + te_m$ 与 $C' \cap \partial C$ 至多相交于一点 [Res56，定理 1]。

另一方面，对于所有充分小的 $t > 0$，点 $\gamma_0(t)$ 位于 C [RZ17 引理 3.5] 的内部。因此，如有必要，取更小的 W_0 ，我们可以假设对于任意 $w \in W_0$， γ_w 都与 C' 的内部相交。

对于所有充分小的 $t < 0$，点 $\gamma_0(t)$ 不包含于 C 中。否则，$-e_m \in T_0C$ ，并且由于 e_m 是凸锥 T_0C 的内点，这将意味着 $T_0C = \mathbb{R}^m$，与我们的假设 $0 \notin C_{reg}$ 矛盾。因此，如有必要将 W_0 取得更小，我们可以假设：对于某个固定的充分小的 $t_0 < 0$ 以及任意 $w \in W_0$，$\gamma_w(t_0)$ 不在 C 中。

因此，对于任意 $w \in W_0$， γ_w 与 C' 的交集是一个紧线段 $I_w = [\gamma_w(f_w)\ \gamma_w(g_w)]$, , 其中某个 $f_w < g_w$ 满足该条件。此外， $\gamma_w(f_w) \in \partial C$ ，而 $\gamma_w(g_w)$ 位于球面 $\partial B_r(0)$ 上，并且 $g_w > 0$。

由 ∂C 的紧致性，我们推得映射 $w \to f_w$ 是连续的。因此，在原点 0 附近，集合 C 在 $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ 中表示为连续函数 f 的上图： $W_0 \to \mathbb{R}$， $f(w) := f_w$。

应用 [Res56，定理 5], 可推得函数 f 在 W_0上是半凸的，因此存在某个 $c \in \mathbb{R}$ ，使得该函数

$$\hat{f}(w) := f(w) + c \cdot ||w||^2$$

在 W_0上是凸函数。

考虑微分同胚 Φ： $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$

$$\Phi(w, t) := (w, t + c \cdot ||w^2||) .$$

因此， $K = \Phi(C) \cap (W_0 \times \mathbb{R})$在 0 的某个邻域内可表示为凸函数 f的上图。于是，光滑微分同胚Φ^{-1} 将凸集 K 中 0 的某个邻域映射到 C中 0 的某个邻域。这就完成了 $m = n$情形下定理 1.2 的证明。

5.3. 切空间的 Lipschitz 连续性。现在转向一般情形 $n \geq m$，并固定 $C' \subset C$、ε、δ、r，如第 5.1 小节所述。同样地，

ˆ 第 2.2 小节中，对于任意 $p \in C'$，我们将由锥 T_pC张成的 T_pM 中的 m维欧几里得子空间记为 T_pC 。我们将从推论 3.4 推导出引理 2.3 的以下加强形式：

ˆ 命题5.1。从 $p \to T_pC$ 到格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{m,\ n}$ 的 m维子空间的映射是 Lipschitz连续的。

在开始证明之前，回顾一下，格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{m,\ n}$ 上的一种（许多双 Lipschitz等价的度量之一）定义为

$$d(U,W) \leq \sup_{u\in U, ||u||=1} d(u,W)\ ,$$

对于 U、$W \in \mathrm{Gr}_{m,\ n}$。距离 $d(u,W)$ 是范数 $||P(u)||$，其中$P = P^{W^\perp}$ 表示到 W的正交补 $W^\perp$上的投影。 P 的线性性直接推出以下结论

断言：如果 $u_0 \in U$ 是一个单位向量，并且对于球 $B_\varepsilon(u_0) \cap U$中的任意 u，都有 $d(u,W) \leq t$，那么

$$d(U,W) \leq \frac{2t}{\varepsilon}\,.$$

现在我们可以继续

命题5.1的证明。在 C' 上，内在度量与诱导度量是 2-双 Lipschitz等价的。因此，只需逐点证明 Lipschitz性质，即验证以下结论

断言：存在某个 $\lambda = \lambda(\varepsilon,\delta) > 0$，使得对于任意 $p \in C'$,

$$\limsup_{q\in C, q\to p} \frac{d(\hat{T}_pC, \hat{T}_qC)}{||p-q||} \leq \lambda\ .$$

根据推论 3.4，对于球 O 中位于实数集 T_pC 内、以单位向量 v_p 为中心且半径为 ε 的任意 v，以及所有充分接近 p 的 q，我们有

$$d(v, T_qC) \leq 4\mu\cdot\delta\cdot||p-q||\ ,$$

其中 μ 是某个普适常数。命题证明之前的观察意味着

$$d(\hat{T}_pC, \hat{T}_qC) \leq \frac{8\mu}{\varepsilon}\cdot\delta\cdot||p-q||\,,$$

对所有这样的 q 均成立。这证明了 $\lambda = \rho\cdot 2\mu\cdot\delta$ 的结论，并完成了命题 5.1的证明。□

5.4. 寻找更大的子流形。在第 5.1 小节的设定下，我们将证明

引理5.2. 存在 $s>0$ 和一个 $\mathcal{C}^{1,\,1}$-微分同胚 Ψ，其将 $\bar{}$中的两个 $x=0$ 的邻域对应起来，并满足 $\mathbb{R}^n$ $\Psi(C'\cap B_s(0))\subset V=\mathbb{R}^m$。

$\bar{}$一旦引理得到证明，像 $Q:=\Psi(C'\cap B_s(0))$ 就是 m 维的、具有正可达性的 V [Fed59，定理 4.19] 中的子集。应用第5.2小节中在 $m=n$ 情形下得到的结果，我们可以找到一个微分同胚 Φ_0，它将 V 中 0 的两个邻域 O_1、O_2 对应起来，并将 $O_1\cap Q$ 映到一个凸子集 K。于是，只需令 Φ 为 Φ_0 与 Ψ^{-1} 的复合映射，定理 1.2 的结论便随之成立。

因此，剩下的工作是给出：

引理5.2的证明. 对空间进行重新缩放后，不妨设可达半径$\hat{}\rho$ 至少为 1。我们固定某个 $\lambda\geq 1$，使得映射 $p\to T_pC$ 在 C' 上是 λ-Lipschitz 的，命题5.1。

对于任意 $0<s<\frac{1}{4\lambda}\leq\frac{1}{4}$ 以及任意 $p\in C'\cap\bar{B}_s(0)$，我们有

$$d(\hat{T}_pC,V)\leq\frac{1}{4}\,.$$

在 C' 的定义中，我们可以用 s 替换 r，并假设 $C'=_{\!}C'\cap B_s(0)$。对于任意 $p\neq q\in C'$，由上述不等式和 Fed59 定理 4.8] ，可得

$$d(\frac{p-q}{||p-q||},V)\leq d(\frac{p-q}{||p-q||},\hat{T}_qC)+d(\hat{T}_qC,V)\leq\frac{s}{2}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\,.$$

考虑正交投影 $P\colon C'\to V$，并记 $Q\subset V$ 为紧像 $Q:=P(C')$。上述不等式意味着，1-Lipschitz映射 $P:\ C'\to Q$ 是单射，且具有 2-Lipschitz连续的逆映射 $\Phi=P^{-1}:\ Q\to C'$。

我们断言，只需将 Φ 延拓为一个 $\mathcal{C}^{1,1}$-映射$\Phi:\ V\to\mathbb{R}^n$。一旦完成此步，Φ 在 0 处的微分便自动是恒等映射。因此，映射 Φ 将是从 V 中 0 的一个邻域 O_1 到 $\mathbb{R}^n$ 的 $\mathcal{C}^{1,1}$-嵌入。然后，如有必要，将 O_1 取小一些，我们便可将 Φ 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的两个邻域之间的微分同胚。在这种情况下，逆映射 Ψ 将是 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的两个邻域之间的一个 $\mathcal{C}^{1,1}$微分同胚，并且满足$\Psi|_{C'}=P$。这就完成了证明。

接下来需要将 $\Phi:\ Q\to C'$ 延拓为一个 $\mathcal{C}^{1,1}$-映射 $\Phi:V=\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$。为此，我们将采用 [Gla58]形式的 Whitney延拓定理 [Whi34] 。

对于任意满足 $\bar{z}=\Phi(z)$ 的 $z\in Q$，考虑线性同构 $P:\ T_{\bar{z}}C\to V$ 的逆映射 $f_{\bar{z}}^1:\ V\to\hat{}\,\hat{}T_{\bar{z}}C\subset\mathbb{R}^n$。记 $f_z:$

$V \to \mathbb{R}^n$ 仿射映射（“一次泰勒多项式”）

$$f_z(q) := \Phi(z) + f_z^1(q-z)\,.$$

[Gla58，命题VII]形式的Whitney延拓定理推出如下结论。 Φ 存在一个延拓： $Q \to \mathbb{R}^n$ 至一个$\mathcal{C}^{1,\ 1}$-映射 Φ： $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ，且对所有 $z \in Q$ 均有 $D_z\Phi = f_z^1$ ，当且仅当对某个 $c > 0$ 以及所有 y、 $z \in$ ，满足以下两个条件:

- $||f_z^1 - f_y^1|| \le c \cdot ||z-y||$.
- $||f_z(z) - f_y(z)|| = ||\Phi(z) - \Phi(y) - f_y^1(z-y)|| \le c \cdot ||z-y||^2$.

令 $\bar{z}: = \Phi\ (z)$ ，并令 $\bar{y}: = \Phi\ (y)$ 。

为了验证上述第一项，考虑任意单位向量 $v \in V$。则向量 $f_z^1\ (v)\ \in \hat{}$ $T_{\bar{z}}C$的范数至多为2。由ˆ 命题5.1，我们可以找到某个向量 $w \in T_{\bar{y}}C$ ，使得

$$||w - f_z^1(v)|| \le 2 \cdot \lambda \cdot ||\bar{z} - \bar{y}|| \le 4 \cdot \lambda \cdot ||z-y||\,,$$

其中， λ 是命题5.1中给出的Lipschitz常数。于是

$$||P(w) - v|| = ||P(w - f_z^1(v))|| \le 4 \cdot \lambda \cdot ||z-y||\,.$$

因此

$$||w - f_y^1(v)|| = ||f_y^1(P(w) - v)|| \le 8 \cdot \lambda \cdot ||z-y||$$

由 $c: = 12\lambda$ ，三角不等式推出

$$||f_z^1(v) - f_y^1(v)|| \le c \cdot ||z-y||\,.$$

由于 v 是任意的单位向量，这就证明了第一项。

为了验证第二项，我们应用 [Fed59 定理 4.18ˆ]，并找到了一个向量 $w \in T_{\bar{y}}C \subset T_yC$ ，满足

$$w - (\bar{z} - \bar{y}) \le \frac{1}{2}||\bar{z} - \bar{y}||^2 \le 2 \cdot ||z-y||^2$$

因此

$$||P(w) - (z-y)|| \le 2 \cdot ||z-y||^2\,.$$

所以

$$||w - f_y^1(z-y)|| \le 4 \cdot ||z-y||^2\,.$$

由三角不等式可得

$$||\bar{z} - \bar{y} - f_y^1(z-y)|| \le 6 \cdot ||z-y||^2\,.$$

因此，对于 $c = \max\{12\lambda, 6\}$ ，这就完成了对这两个条件的验证，也完成了引理5.2和定理 1.2 的证明。□

References

[Ban82] V. Bangert. 正可达集。《巴塞尔数学档案》，38(1):54–57，1982。[BBI01] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov。《度量几何教程》，数学研究生教材第33卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2001。[Fed59] H. Federer. 曲率测度。《美国数学会汇刊》，93:418–491，1959。[Fu85] J. Fu. 欧几里得空间中的管状邻域。《杜克数学杂志》，52(4):1025–1046，1985。[Gla58] G. Glaeser. ´关于若干泰勒代数的研究。《数学分析杂志》，6:1–124；勘误，补入第6卷（1958），第2期，1958。[HS22] D. Hug 和 M. Santilli. 凸性之外的曲率测度与肥皂泡。《数学进展》，411（A部分）：论文编号108802，2022。[Hug98] D. Hug. 广义曲率测度与正可达集的奇异点。《数学论坛》，10(6):699–728，1998。[KL21] V. Kapovitch 和 A. Lytchak. 关于具有双侧曲率界的流形的注记。《分析、几何与度量空间》，9(1):53–64，2021。[KL22] V. Kapovitch 和 A. Lytchak. 次度量映射的结构。《几何与拓扑》，26(6):2649–2711，2022。[Kle81] N. Kleinjohann. 黎曼几何中的最近点。《数学杂志》，176(3):327–344，1981。[LS07] A. Lytchak 和 V. Schroeder. CAT(κ)空间上的仿射函数。《数学杂志》，255(2):231–244，2007。[LV10] G. Loeper 和 C. Villani. 弯曲几何中最优传输的正则性：非焦点情形。《杜克数学杂志》，151(3):431–485，2010。[Lyt04] A. Lytchak. 关于正可达子集的几何。《手稿数学》，115(2):199–205，2004。[Lyt05] A. Lytchak. 近似凸子集。《几何论著》，115:201–218，2005。[Per91] G. Perelman. 曲率下界的 A. D. Alexandrov空间 II。预印本，1991。[Res56] Yu. G. Reshetnyak. 关于凸曲面的一种推广。《数学文集》新系列，40(82):381–398，1956。[RZ17] J. Rataj 和 L. Zaj´ıˇcek. 关于正可达集的结构。《数学消息》，290(11-12):1806–1829，2017。[RZ19] J. Rataj 和 M. Z¨ahle. 奇异集的曲率测度。施普林格数学专著。施普林格，查姆，2019。[Tha08] Ch. Thaele. 正可达集50年——综述。《数学应用综述》，3:123–165，2008。[Whi34]H. Whitney. 定义在闭集上的可微函数的解析延拓。《美国数学会汇刊》，36(1):63–89，1934。

Institute of Algebra and Geometry, KIT, Englerstr. 2,
76131 Karl-sruhe, Germany电子邮件地址：alexander.lytchak@kit.edu