arXiv:2302.05158v1 [stat.ME] 10 Feb 2023

具有复杂趋势的非平稳多元时间序列的时变相关网络分析

Lujia Bai* 和 Weichi Wu*

*统计科学中心和工业工程系，清华大学，中国北京 100084

摘要

本文提出了一个灵活的框架，用于从具有分段光滑趋势的多元或高维非平稳时间序列中推断大规模时变及时间滞后相关网络。该方法建立在一种新颖且统一的多重检验程序之上，用于检验具有固定或发散滞后阶数的时间滞后互相关函数，能够准确揭示与复杂函数结构相关的、覆盖所有时点的灵活时变网络结构。通过针对结构突变开发基于差分的非参数互相关估计量，我们拓展了该方法的适用性；通过采用适应复杂时间动态的自助法辅助程序，实现了准确的族错误率控制；并通过一种新的一致方差缩减技术，提高了恢复时变网络结构的概率。我们证明了所提出方法的渐近有效性，并通过模拟研究和实证应用展示了其在有限样本中的有效性。

关键词：时变相关网络、方差缩减、非参数估计、局部平稳、家族错误率

1 引言

估计网络结构在许多领域都发挥着基础性作用，例如金融（Marti 等人（2021）、生物学（Langfelder 和 Horvath（2008年）和心理学（Borsboom 等人 （2021））。

[1]电子邮箱地址：blj20@mails.tsinghua.edu.cn(L.Bai), wuweichi@mail.tsinghua.edu.cn(W.Wu)

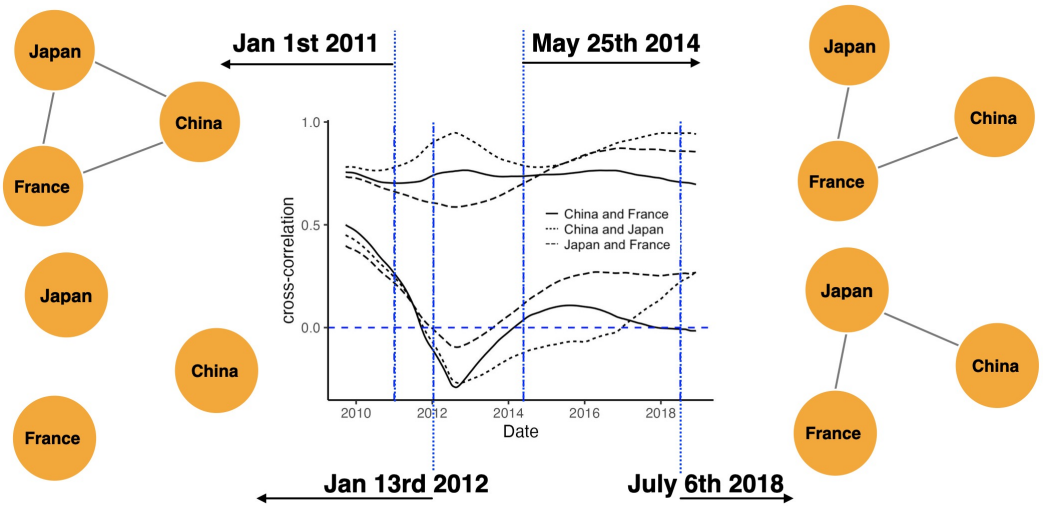


图1.1：中间面板：实线、虚线和点线分别表示中国与法国、日本与法国以及中国与日本的交叉相关同时置信带；左侧和右侧面板：分别展示由 $H_0 = 0$ 在2011年1月1日、2012年1月13日、2014年5月25日和2018年7月6日诱导的时变网络快照。

相关网络可谓是应用最广泛的网络，其本质是推断非零相关性的集合，参见 Kolaczyk 和 Csárdi（2014）、Efron（2012）和 Basu 和 Rao（2021）。具体而言，对于随机向量序列 $(\mathrm{Y}_t)_{t=1}^n = ((Y_t,1,\cdots,Y_{t,p})^\top)_{t=1}^n$，相关网络由关联图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ 定义，其顶点集为 $\mathcal{V} = 1, 2,\cdots,p$，边集为 $\mathcal{E} = \{(i,j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : c_{i,j} \neq 0\}$，其中 $(c_{i,j})$ 是某种基于相关性的相似性度量。尽管经典相关网络在过去几十年中已被证明在许多应用中取得成功，但对 $(\mathrm{Y}_t)_{t=1}^n$ 的严格独立性假设以及成对构造，限制了其在当今涌现的具有复杂结构的大规模数据中的适用性。例如，在生物信息学中，许多微阵列数据的不同列之间存在依赖性，参见 Efron（2012）。在经济与金融研究中，相关网络通常由时间序列构建；Diebold 和 Yilmaz（2014）的开创性研究基于方差分解构建了连通性度量，并指出：“基于相关性的度量仍然广泛使用，但它们只衡量成对关联，并且在很大程度上受制于线性、高斯思维，因此在金融市场环境中的价值有限。”此外，在许多领域的前沿研究中，连通性的动态演变特征往往至关重要，例如风险管理（Diebold 和 Yilmaz（2014）、Marti 等人（2021））以及生物网络的动态运作（Kim 等人（2014）），这使得构建相关网络的新方法和新理论成为必要。关于相关性和动态网络的现有文献，详见注2.3。

本文通过多重检验，建立了一个基于非平稳多元时间序列构建时变相关网络的新框架，在很大程度上解决了其缺陷

这些相关网络的缺陷由 Diebold 和 Yilmaz (2014指出。具体而言，我们基于一组相关性度量构建时变相关网络，并对以下假设进行联合 检验：$i,\ j,\ k) \in \mathbb{B}$，其中 $\mathbb{B}$ 是 $\{(i,\ j,\ k)$ 的索引子集：$i,\ j = 1, \cdots, p, \ k = 0, \cdots, d_n\}$，

$$H_{0ijkt} : c_{ijk}(t) = g_{ijk}(t) \quad \text{versus} \quad H_{1ijkt} : c_{ijk}(t) \neq g_{ijk}(t), \quad t \in (0, 1), \tag{1.1}$$

其中，$c_{ijk}(\cdot)$是针对$(Y_{s,i})_{s=1}^{n-k}$与$(Y_{s-k,j})_{s=k+1}^{n}$之间相关性的、经时间重标度（定义在(0, 1)上）的度量函数；$g_{ijk}(\cdot)$是预先指定且可能随时间变化的函数。$g_{ijk}(\cdot)$的简单且有意义的选择包括但不限于：(1) $g_{ijk}(\cdot) \equiv 0$，用于检验是否存在相关性；(2) 对于给定的(i, j)指标集，$g_{ijk}(t)$是常数函数，用于检验相应子图是否具有时间不变性。令 $T(t) = (T_{ijk}(t))$为相应的检验统计量。若存在某个 k 使得 $T_{ijk}(t) \geq c_{1-\alpha}(t, i, j, k)$，则在时间 t 将 i 与 j 相连；其中，$c_{1-\alpha}(t, i, j, k)$是阈值，用于在名义水平 α下控制(1.1)中假设检验的族错误率（FWER）。为简洁起见且不失一般性，我们将 $c_{ijk}(t)$视为一般时间序列$\mathbf{Y}_t := f(\mathbf{Z}_t, \cdots, \mathbf{Z}_{t-r})$的时变滞后交叉相关，其中$\mathbf{Z}_t$是 p_1维非平稳多元时间序列，r 是某个固定整数，而 $f : (\mathbb{R}^{p_1})^r \to \mathbb{R}^p$ 是光滑向量函数。重要的是，通过灵活选择 f，我们缓解了上述基于相关性的网络成对构造所带来的局限。当$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Z}_t$时，我们的方法与线性格兰杰因果检验相关。当$\mathbf{Y}_t = ((\mathbf{Z}_t \circ \mathbf{Z}_t)^\top, ..., (\mathbf{Z}_t \circ \mathbf{Z}_{t-r})^\top)^\top$时，其中

$\circ$ 表示哈达玛积，我们的方法提供了一种替代方案，可替代 Diebold 和 Yilmaz(2014)，以波动性的形式衡量连通性。此外，通过考虑 f 的高阶多项式，即使数据是非高斯的，我们也能衡量时间序列向量中的高阶依赖，而经典相关性只能在高斯性假设下捕捉成对线性依赖，并会导致 Diebold 和 Yilmaz (2014) 提出的“线性、高斯思维”问题。

我们用于恢复时变网络结构的框架基于一类新型基于差分的估计量和一种新颖的自助法辅助程序，并允许灵活选择（1.1）中考虑的 $\mathbb{B}$。我们的基于差分的估计量无需预先估计复杂趋势，可应用于具有分段光滑趋势的一般非平稳线性或非线性过程（Zhou 和 Wu（2010）、Vogt（2012）、Dahlhaus 等人（2019）以及 Dette 和 Wu（2022））；这类趋势允许出现许多应用中常见的结构突变（例如，St$\check{}$aric$\check{}$a 和 Granger（2005）、Bouri 等人（2019）以及 Karavias 等人（2022））。为处理（1.1）中的函数约束并控制族错误率，我们提供了一种一致自助法辅助工具，用于构造 $(\mathbf{Y}_t)$ 的时滞交叉相关的同时置信带（SCBs）。这些

ˆ ˆ SCBs 定义为由数据估计得到的$U_{\alpha,ijk}$(·) 和$L_{\alpha,ijk}$(·)，使得当 $n \to \infty$ 时，对于 $\alpha \in$ (0,1),

$$P(\hat{L}_{\alpha,ijk}(t/n) \leq \text{corr}(Y_{t,i}, Y_{t-k,j}) \leq \hat{U}_{\alpha,ijk}(t/n),\ 1 \leq t \leq n, (i,j,k) \in \mathbb{B}) \to 1-\alpha, \tag{1.2}$$

其中，Y_t、$_i$ 是 Y_t的 i_{th} 分量。根据假设检验与置信集的对偶性质，如果在时间 $s \in$ (0, 1) 上，$g_{ijk}(s) \notin$ ˆ ˆ$[L_{\alpha,ijk}(s)U_{\alpha}$，$_{ijk}(s)]$，我们通过连接 i 和 j 来构造时变网络。我们用图1.1进行说明，其中根据金融数据（第 6 节的S_i ）的同时置信带推断动态网络。我们展示了诱导网络在不同时间的若干子图，这些子图具有不同的边连接，体现了不断变化的动态特征。通过利用同时置信带控制族错误率，我们能够以较高概率恢复所有时刻的时变网络，这有助于研究复杂数据互联性的演化动态与转变。最后，我们开发了一种易于实施的方差缩减技术，可一致地缩减等价同时置信带（1.2）的宽度，并提高所有节点对均被正确连接的恢复概率。据作者所知，我们是首个考虑一致方差缩减，以在给定显著性水平下获得更小同时置信带第二类错误率的研究。具体而言，我们通过非标准野生自助法，构建了适用于高维时间序列数据的宽度缩减与基于差分的同时置信带（RED-SCBs）。在数据分析中，借助方差缩减算法，当原始置信带超出该范围时，我们生成的交叉相关同时置信带完全包含在 $[-1,1]$ 中。从理论上讲，RED-SCBs 的一致宽度缩减效应需要对高维高斯过程的尾部行为进行精细分析，这使其区别于平稳单变量情形下的对应结果 Cheng 等（2007）。基于 H¨usler 和 Sch¨upbach（1988）以及 Royen（2014）（另见 Lata-la 和 Matlak（2017））的结果，我们的论证为评估具有灵活协方差结构的多元及高维高斯向量最大值的尾概率提供了一种理论工具，这一结果本身也具有独立意义。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们给出关于揭示时变网络结构的主要结果，包括具有多个滞后的交叉相关函数的估计与推断程序，以及一种简单的统一方差缩减方法。在第3节中，我们建立估计交叉相关曲线的高斯近似方案、所提出的方差缩减自助法辅助算法的渐近族错误率控制，以及其总体恢复概率的提升。需要指出的是，在固定数量的滞后下，（自）相关的最大偏差的渐近行为与在发散数量的滞后下的渐近行为存在显著差异，这使得（自）相关的同时推断长期以来一直是一个困难的问题。作为一项重要的附带成果，我们解决了这一问题。第 4 节给出了平滑参数的选择方案。第 5 节报告了模拟研究中的有限样本性能。在第 6 节中，我们分析了时变交叉

相关网络，该网络由 WRDS每日全球指数诱导而成。第 7 节给出了结论性意见，并讨论了未来的研究工作。附录 A介绍了基于 RED-SCB 的算法中所使用估计量的详细公式。在附录 B中，我们通过基于差分的同时置信带提供了时变交叉相关分析的详细算法及其理论性质。附录 C给出了辅助结果及定理证明。在线补充材料包括在趋势平滑时使用插件估计量的算法及其相应的理论性质，以及定理 3.1和辅助结果的证明。

2 主要结果

在正式陈述结果之前，我们先总结一下全文将用到的记号。对于向量 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_p) \in \mathbb{R}^p$，令 $|\mathbf{v}| = (\sum_{j=1}^p v_j^2)^{1/2}$。对于随机向量 $\mathbf{V}, q \geq 1$，令 $\|\mathbf{V}\|_q = (\mathbb{E}|\mathbf{V}|^q)^{1/q}$ 表示随机向量 $\mathbf{V}$ 的 $\mathcal{L}_q$- 范数。令 $|\mathbf{z}|_\infty$ 表示向量 $\mathbf{z}$ 的最大元素。本文考虑核函数 $K(\cdot)$，其在区间 $(-1,1)$ 外为零；对于某个带宽参数 η，记 $K_\eta = K(\cdot/\eta)$。对于指标集 $\mathbb{A}$，令$|\mathbb{A}|$ 表示其基数。令 $\mathbf{1}(\cdot)$ 表示示性函数，并用 $\xrightarrow{p}$ 表示依概率收敛。

我们考虑如下形式的时间序列模型 [1]：对于 $i = 1, \cdots, p,\ j = 1, \cdots, n$,

$$Y_{j,i} = \mu_i(t_j) + \epsilon_{j,i}, \quad \mu_i(t) = \sum_{l=0}^{d_i} \mu_{i,l}(t)\mathbf{1}(a_{i,l} \leq t < a_{i,l+1}), \tag{2.1}$$

其中，$t_j = j/n$、$t \in [0,1]$，$(\epsilon_j, _i)_{j=1}^n$ 是局部平稳过程[2]（定义见第3节），$\mu_i(\cdot)$是在 $[0,1]$ 上具有突变点$0 = a_i, _0 < a_i, _1 < \cdots < a_i, _{d_i} <$$a_i$的确定性函数，$_{d_i+1} = 1$是变点的数量，$\mu_{il}(t)$在 $[a_{i,l}, a_{i,l+1}]$上Lipschitz 连续，且$\mu_{il}(\cdot)$的 Lipschitz 常数对 $i = 1$、$\cdots$、p、$0 \leq l \leq d_i$一致有界。为构造(1.2)的等价同时置信带，我们首先介绍时间序列非平稳情形下互相关函数的定义。将 k_{th} ($k \in \mathbb{Z}$)阶交叉协方差、交叉边际方差和交叉相关函数定义为

$$\gamma_k^{i,l}(t) = \mathrm{Cov}(\epsilon_{\lfloor nt \rfloor, i}, \epsilon_{\lfloor nt \rfloor + k, l}), \quad \sigma_{i,l}^2(t) = \gamma_0^{l,l}(t)\gamma_0^{i,i}(t), \quad \rho_k^{i,l}(t) = \gamma_k^{i,l}(t)/\sigma_{i,l}(t). \tag{2.2}$$

注意，当 $k \neq 0$，（2.2）通常表示 $\rho^{i,}{}_k^{l}(t) \neq \rho^{i,}{}_{-k}^{l}(t)$ 当 $i \neq l$。在这种情况下，基于（1.1）的构造将产生一个有向网络。在本文的其余部分，我们将使用一个

[1]这些区间$a_{i,l} \leq t < a_{i,l+1}$ 可以替换为$a_{i,l} < t \leq a_{i,l+1}$，但结果保持不变[2]仔细考察我们的理论论证后，我们的方法可应用于分段局部平稳模型，参见Zhou (2013)，该模型允许局部平稳模型中存在高阶断点，但数学论证要复杂得多。为简洁起见，本文仍采用局部平稳误差。

单一索引 s 来表示上标中的双重索引 i，l 当 $i = l = s$ 时，如果不会引起混淆。

注 2.1. 如果已知不存在变点，即 $d_i = 0$，$1 \le i \le p$，则可以通过非参数残差 (2.2) 估计其中的相关函数$\hat{}\epsilon_{j,i} = Y_{j,i} - \hat{}\mu_i(t_j)$，其中$\hat{}\mu_i(\cdot)$ 是 $\mu_i(\cdot)$的局部线性估计量，参见*Zhou 和 Wu (2010)*以及在线补充材料附录 *D*，其中我们提供了基于$\hat{}\epsilon_{j,i}$构建相关网络的算法。在正文中，我们将重点关注 $d_i > 0$ 情形，并在后续章节中提出基于差分的估计量。

2.1 基于差分的样本相关曲线

当 $(\mathbf{Y}_t)_{t=1}^n$ 受到未知突变点的影响时，直接估计其分段光滑趋势将十分复杂。事实上，目前还没有针对这一问题设计的方法。一个相关问题是如何从一般非平稳时间序列的分段光滑均值中一致地识别（数量发散的）突变点，而这一问题直到最近才由 Wu 和 Zhou (2019) 研究。因此，去除分段光滑趋势的一个直接方法是，分别对已识别跳跃点之间的子序列应用局部线性估计。然而，在实践中这会造成严重的边界问题，这在核估计领域广为人知，例如参见Cheng 等人 (1997)。

或者，我们针对 (2.2) 提出一种基于差分的方法，该方法已成功用于估计方差（见 M¨uller 和 Stadtmuller（1987年））、长期方差（见 Dette 和 Wu（2019））以及自协方差（见 Inder 和 Axel（2017年）和 Cui 等（2021年）），且无需预先估计趋势函数。定义 $\tilde{\epsilon}^i_{j,k} = \epsilon_{j,i} - \epsilon_{j-k,i}$。令 $\beta^{i,l}_k(t_j) := \mathbb{E}(\tilde{\epsilon}^i_{j+k,k}\tilde{\epsilon}^l_{j+k,h})$，其中 $h = o(n)$ 足够大。那么，在第3节所述的局部平稳性假设 3.1 下，$\beta^{i,l}_k(\cdot)$ 是 $[0,1]$ 上的光滑函数。注意，根据假设 3.1，我们可以选取一个正的 $\tilde{h} < h$，使得 $\gamma^{i,l}_k(t) \approx 0$ 对于 $|k| \ge \tilde{h}$ 成立。注意，对于 $k \le h - \tilde{h}$，

$$\begin{aligned}\beta^{i,l}_k(t_j) &= E(\epsilon_{j+k,i} - \epsilon_{j,i})(\epsilon_{j+k,l} - \epsilon_{j+k-h,l}) \\ &= \gamma^{i,l}_0(t_{j+k}) + \gamma^{i,l}_{k-h}(t_j) - \gamma^{i,l}_{-h}(t_{j+k}) - \gamma^{i,l}_k(t_j) \approx \gamma^{i,l}_0(t_j) - \gamma^{i,l}_k(t_j). \end{aligned} \tag{2.3}$$

进一步定义 $\tilde{y}^i_{j,k} = Y_{j,i} - Y_{j-k,i}$, $\tilde{\mu}^i_{j,k} = \mu_i(t_j) - \mu_i(t_{j-k})$，从而得到 $\tilde{y}^i_{j,k} = \tilde{\mu}^i_{j,k} + \tilde{\epsilon}^i_{j,k}$。根据

$\mu_i(\cdot)$、 $1 \le i \le p$ 的分段光滑性，在某些温和条件下可以推出

$$\sum_{j=1}^{n} K_b(t_j - t)\tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h} = \sum_{j=1}^{n} K_b(t_j - t)(\tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\epsilon}^l_{j,h} + \tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h} + \tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h} + \tilde{\epsilon}^l_{j,h}\tilde{\mu}^i_{j,k})$$
$$\approx \sum_{j=1}^{n} K_b(t_j - t)\tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\epsilon}^l_{j,h},$$

详见补充材料中 引理 1 的证明。因此，由于 的连续性，$_k{}^l(\cdot)$，可得

$$\sum_{j=1}^{n} K_b(t_j - t)E\big(\tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h}\big) \approx \sum_{j=1}^{n} K_b(t_j - t)\beta^{i,l}_k(t_{j-k}) \approx \gamma^{i,l}_0(t) - \gamma^{i,l}_k(t).$$

因此，我们可以通过局部线性估计量 $\hat{}\beta^{i,}{}_k{}^l(t)$ 一致地估计 $\gamma^{i,}{}_0{}^l(t) - \gamma^{i,}{}_k{}^l(t)$，使得

$$(\hat{\beta}^{i,l}_k(t), \hat{\beta}^{i,l,\prime}_k(t))^\top = \underset{(\eta_0,\eta_1)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{n} \big(\tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h} - \eta_0 - \eta_1(t_j - t)\big)^2 K_{b^{i,l}_k}(t_j - t), \tag{2.4}$$

其中， $b^{i,}{}_k{}^l$ 为带宽参数。将 $\tilde{\epsilon}^i_{j,}{}_k\tilde{\epsilon}^l_{j,}{}_h$ 的中心化版本定义为

$$\tilde{e}^{i,l}_{j,k} := \tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\epsilon}^l_{j,h} - \beta^{i,l}_k(t_{j-k}), \tag{2.5}$$

由于 $\tilde{e}^{i,}{}_j{}^l{}_{,0} = 0$ 因为 $\tilde{\epsilon}^i_{j,0} = 0$ 根据定义。对于 $(i,\ l,\ k) \in \mathbb{B}$，由于 $\tilde{\epsilon}^i_{j,}{}_k\tilde{\epsilon}^l_{j,}{}_h$ 是局部平稳过程之差的乘积， $\tilde{e}^{i,}{}_j{}^l{}_{,k}$ 也是局部平稳的（定义见 第3节）。在温和条件下，通过随机展开（详见补充材料中的 推论 F.1 ），可得

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \hat{\beta}^{i,l}_k(t) - \beta^{i,l}_k(t) - \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t)\tilde{e}^{i,l}_{j,k} \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.6}$$

其中 $\mathbb{B}$ 的定义见（1.1）。类似于（2.4），并利用（2.3），局部线性估计量 $\hat{}\beta^{i,}{}_h{}^l(t)$ 是 $2\gamma^{i,}{}_0{}^l(t)$ 的相合估计量。因此，交叉协方差函数 $\gamma^{i,}{}_k{}^l(t)$ 可由 $\tilde{\gamma}^{i,}{}_k{}^l(t) = \hat{}\beta^{i,}{}_h{}^l(t)/2 - \hat{}\beta^{i,}{}_k{}^l(t)$ 估计，而互相关函数 $\rho^{i,}{}_k{}^l(t)$ 可由下式估计

$$\tilde{\rho}^{i,l}_k(t) = \tilde{\gamma}^{i,l}_k(t)/\tilde{\sigma}_{i,l}(t), \quad \tilde{\sigma}_{i,l}(t) = \sqrt{\tilde{\gamma}^i_0(t)\tilde{\gamma}^l_0(t)}. \tag{2.7}$$

为简便起见，令 z 表示三元组$(i,\ l,\ k)$，并用 b_z、 $\rho_z(t)$、 $\sigma_z(t)$分别表示 $b^{i,}{}_k{}^l$、 $\rho^{i,}{}_k{}^l(t)$、$\sigma_{i,}{}_l(t)$。

2.2 方差缩减

尽管根据定义，相关函数位于 $[-1,1]$之内，但在实践中，相关曲线的非参数置信带可能超出 $[-1,1]$ （例如参见 Zhao (2015) 中的图5），从而降低其信息量和敏感度，尤其是在连接推断方面。为提高恢复真实连接的概率，我们提出一种一致方差缩减技术，通过在选定点进行插值，在不改变名义水平的前提下进一步收窄同时置信带。改进后的同时置信带（即 RED-SCBs）形式简单，仅需略微增加计算开销，并能有效地将相应的渐近缩减效应体现于有限样本中。我们的思路源自关于 $i.i.d.$ 误差方差缩减和逐点推断的文献（例如参见 Efron (1990) 以及 Cheng 等人 (2007)）。然而，对于其依赖且非平稳的情形，相关研究仍十分有限，更不用说将针对固定 $t \in [0,1]$ 的逐点缩减效应推广为在 $(0,\ 1)$ 上的一致缩减效应。

ˆ 具体而言，我们提出使用以下 $\beta_z(t)$ 的线性组合来改进 $\beta_z(t)$ 的估计量，

$$\check{\beta}_z(t) = \{\check{\beta}_{z,+}(t) + \check{\beta}_{z,-}(t)\}/2, \quad \check{\beta}_{z,\pm}(t) = \sum_{j=0,1,2} A_j(\pm r)\hat{\beta}_z(t - (\pm r + 1 - j)\omega_z(t)),$$

其中 $A_0(r) = r(r-1)/2, A_1(r) = (1-r^2)$ $A_2(r) = r(r+1)/2$，对于某个选定的 $r \in (-1, 1)$，且 $\omega_z(t) = \delta(t)b_z$, $\delta(t) = \min\{\delta, (t-b)/[(r+1)b], (1-b-t)/[(r+1)b]\}$，其中 δ 是一个非负常数。上述估计利用了 $\beta_z(t_1)$ 与 $\beta_z(t_2)$ 之间的相关性，当 t_1, t_2 落在 t 附近时，可实现更小的方差；同时，系数 $A_i(r)$，$i = 1, 2, 3$ 经过精心设计，使渐近偏差保持不变。在 $\beta_z(\cdot)$ 的公式中，$\omega_z(t)$ 通过 δ 和 b_z 控制平滑邻域的范围。特别地，当 $\delta = 0$, $\beta_z(t)$ 等于原始估计量 $\beta_z(t)$ 时，方差保持不变。实践中，当趋势函数平滑且噪声水平较低时，较大的 δ 更合适；而当信号中包含许多突变点时，则更适合采用较小的 δ。我们最终得到的交叉相关方差缩减估计量为

$$\check{\rho}_z(t) = \check{\gamma}_z(t)/\check{\sigma}_z(t), \quad \check{\sigma}_z(t) = \sqrt{\check{\gamma}_0^i(t)\check{\gamma}_0^l(t)}, \quad z = (i,l,k) \in \mathbb{B}, \tag{2.8}$$

其中 $\check{\gamma}_z(t) = \check{\beta}^{i,\ {}^l}_{h}(t)/2 - \check{\beta}^{i,\ {}^l}_{k}(t)$ 和 $\check{\gamma}_0^l(t) = \check{\beta}_h^l(t)/2.$

2.3 通过自助法辅助推断控制族错误率

为阐明我们用于时变网络推断的自助法算法，请注意，构造式（1.2）的有效同时置信带的关键在于

$$\max_{z\in\mathbb{B}} \sup_{t\in[b,1-b]} \sqrt{nb_z}|\check{\rho}_z(t)-\rho_z(t)|, \tag{2.9}$$

其中， b_z 是带宽参数，且 $b=b_n:=\max_{z\in\mathbb{B}} b_z$ 在 $n\to\infty$时收敛于 0，因此$\cup_n[b_n,1-b_n]=$(0,1)。除时变数据生成机制外，对于指标集 $\mathbb{B}$，我们还允许 p和d_n 为固定值或发散。我们将首先推导.....的同时置信带

$$\max_{z\in\mathbb{B}} \sup_{t\in[b,1-b]} \sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t)-\rho_z(t)|, \tag{2.10}$$

，并说明（2.10）的结果如何导出（2.9）的解。

在时间序列分析中，（2.10）的分布性质仅在自相关（即 $p=1$）方面得到部分理论研究。例如，Zhao (2015) 研究了$p=d_n=1$的情形，即局部相关曲线的同时推断。Xiao and Wu（2014）和 Braumann 等（2021）在平稳性假设下考虑了 $p=1$，其中 $\rho_k(t)=\rho_k$。具体而言，Xiao and Wu（2014）的理论结论要求 d_n 发散，而 Braumann 等（2021）的渐近结果允许 d_n 有限，但要求底层时间序列为线性过程。由于分布性质复杂，且为取得更好的有限样本性能，Xiao and Wu（2014）提出了分块自助法，Braumann 等（2021）则为线性过程开发了基于AR筛法的自助法。然而，这些方法无法用于时变相关网络的推断，主要是因为它们是为平稳过程设计的，而这类过程的相关曲线为常数。

我们首先考察互相关估计量的随机展开。根据（2.6）和（2.7），我们可以通过$\vartheta_z(t)$，即新息的移动加权平均，来近似互相关估计量的最大偏差：

$$\max_{z\in\mathbb{B}} \sup_{t\in[b,1-b]} \sqrt{nb_z}\,|\tilde{\rho}_z(t)-\rho_z(t)-\vartheta_z(t)| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.11}$$

其中 $\vartheta_z(t)=(nb_z)^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_{b_z}(t_j-t)\Xi_{z,j}$，并且

$$\Xi_{z,j}:=(\tilde{e}^{i,l}_{j,h}/2-\tilde{e}^{i,l}_{j,k})/\sigma_{i,l}(t_j)-4^{-1}\rho^{i,l}_k(t_j)\left(\tilde{e}^{i}_{j,h}/\gamma^{i}_0(t_j)+\tilde{e}^{l}_{j,h}/\gamma^{l}_0(t_j)\right). \tag{2.12}$$

当 $i=l$， $\Xi_{z,j}$可化简为 $\sigma_i^{-1}(t_j)(\tilde{e}^{i}_{j,h}/2-\tilde{e}^{i}_{j,k}-\rho^{i}_k(t_j)\tilde{e}^{i}_{j,h}/2)$，即 Zhao(2015) 中式（A.8）的基于差分的对应量的随机误差，其中要求数据为零均值。

（2.12）的第一项源于对 $\tilde{\gamma}_z(t) - \gamma_z(t))/\sigma_z(t)$ 的近似，而（2.12）的第二项主要反映了对 $\tilde{\sigma}_z(t) - \sigma_z(t))/\tilde{\sigma}_z(t)$ 的近似误差。

根据（2.10）和（2.11），我们可以通过 $\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in[b,1-b]}\sqrt{nb_z}|\vartheta_z(t)|$ 的分位数构造同时置信带，并推断时变网络结构，其中 $\mathbb{B}$ 在（1.1）中定义。令 $c_z = (b/b_z)^{1/2}$，其中 $b = \max_{z\in\mathbb{B}} b_z$，且 $\tilde{\Gamma}_z^2(t)$ 为 $\sqrt{nb_z}|\vartheta_z(t)|$ 的极限方差；根据 Dette 和 Wu（2021）的引理 C.3 及假设 3.4，可确保该极限方差存在且满足非退化性。此外，我们可以通过估计 $\tilde{\Gamma}_z(t)$ 并求出 $\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in[b,1-b]}\sqrt{nb_z}|\vartheta_z(t)|/\tilde{\Gamma}_z(t)$ 的分位数，构造具有时变且边特定阈值的（1.1）时变网络；该分位数可由一个可能是高维向量的最大值近似。为此，我们将经方差和带宽调整后的相关随机变量合并成一个维度为 $|\mathbb{B}|$ 的区块：

$$\bar{\Xi}_{j,s}^{\mathbb{B}} := (c_z K_{b_z}(t_j - t_s)\Xi_{z,j}/\tilde{\Gamma}_z(t_s), z \in \mathbb{B})^\top, \quad 1 \le j, s \le n,\ t_s = s/n.$$

在温和条件下，我们有 $\max_{1\le s\le n}\left|\sum_{j=1}^n \bar{\Xi}_{j,s}^{\mathbb{B}}/\sqrt{nb}\right|_\infty \approx \max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in[b,1-b]}\sqrt{nb_z}|\vartheta_z(t)|/\tilde{\Gamma}_z(t)$，详情请参见补充材料中定理 3.1 的证明。模拟 $\max_{1\le s\le n}\left|\sum_{j=1}^n \bar{\Xi}_{j,s}^{\mathbb{B}}/\sqrt{nb}\right|_\infty$ 分布性质的常用方法是采用时间序列向量的区块和进行乘子自助法 $(\bar{\Xi}_{j,1}^{\mathbb{B}\top},,\cdots,\bar{\Xi}_{j,n}^{\mathbb{B}\top},)_{1\le j\le n}^\top$，参见 Zhang 和 Cheng（2018）。然而，由于核函数 $K(\cdot)$ 的有界支撑所导致的 $\bar{\Xi}_{j,s}^{\mathbb{B}}$ 稀疏性，这种方法会产生不一致的结果，参见 Dette 和 Wu（2021）第 2.1 节中的讨论。为了解决这一问题，我们对上述稀疏向量序列进行压缩，重新排列区块，并得到以下 $(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|$ 维向量

$$\bar{\Xi}_j^{\mathbb{B}} = (\bar{\Xi}_{j,\lceil nb\rceil}^{\mathbb{B},\top}, \bar{\Xi}_{j+1,\lceil nb\rceil+1}^{\mathbb{B},\top}, \cdots, \bar{\Xi}_{n-2\lceil nb\rceil+j,n-\lceil nb\rceil}^{\mathbb{B},\top})^\top, 1 \le j \le 2\lceil nb\rceil, \tag{2.13}$$

使得 $\left|\sum_{j=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\Xi}_j^{\mathbb{B}}/\sqrt{nb}\right|_\infty$ 等于最大值 $\max_{1\le s\le n}\left|\sum_{j=1}^n \bar{\Xi}_{j,\ s}^{\mathbb{B}}/\sqrt{nb}\right|_\infty$。事实上，$\bar{\Xi}_j^{\mathbb{B}}$（2.13）将 $\hat{\tilde{Z}}_j^\diamond$ 推广了 Dette 和 Wu（2021）方程（2.26）中的向量，适用于允许使用不同带宽的多变量非平稳二阶过程，使我们能够开发一种“非标准分块野生自助法”，根据（1.1）恢复所需的相关网络，同时控制家族错误率，而不受指标集基数 $\mathbb{B}$ 发散或时间序列中存在非线性和平稳性的影响。详细算法见算法 B.1（载于）附录 B。

请注意，$\beta_z(t)$ 在邻近点处的线性组合渐近等价于使用高阶核函数 $\breve{K}(\cdot)$ 对 $\beta_z(\cdot)$ 的局部线性估计量，其中 $\breve{K}(t) = (\breve{K}_+(t) + \breve{K}_-(t))/2$，且 $\breve{K}_\pm(t) = \sum_{j=0,1,2} A_j(\pm r)K(t + (\pm r + 1 - j)\delta)$。因此，只需更换核函数，即可轻松将基于高维向量 (2.13) 的自助法程序应用于 (2.9)

算法 2.1 基于 RED-SCBs 的时变交叉相关分析

1：计算在 (2.8) 中定义的 $\check{\rho}^{i}_{,k}{}^{l}(t), (i,l,k)$。^ 2：使用 (A.2) 计算 $|\mathbb{B}|$ 维向量 $\check{\Xi}^{\mathbb{B}}_{j,s}$， $1 \le j,s \le n$。^ ^ ^ 3：对于窗口大小 w，计算 $\check{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j} = \sum_{s=j-w+1}^{j} \check{\Xi}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb\rceil+l} - \sum_{s=j+1}^{j+w} \check{\Xi}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb\rceil+l}$，其中 $l = 0,\cdots,n-2\lceil nb\rceil$。4：对于 $r = 1,\cdots,B$，执行以下操作 5：生成独立标准正态随机变量 $R^{(r)}_j$，$j = 1,\cdots,n$。6：回顾 $b = \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} b^{i}_{,k}{}^{l}$。计算

$$\check{Z}^{(r)}_{\text{boot}} = \frac{\max\limits_{0\le l\le n-2\lceil nb\rceil} \left|\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w} \hat{\check{\mathbf{S}}}^{\mathbb{B}}_{l,j} R^{(r)}_{l+j}\right|_\infty}{\sqrt{2w\lceil nb\rceil}}.$$

7: **结束循环**

8: 令 $\check{r}_{\text{boot}}$ 表示自助样本 $\check{Z}^{(1)}{}_{\text{boot}}\cdots$、$\check{Z}^{(B)}{}_{\text{boot}}$ 的 $(1-\alpha)$ 分位数。^9: 若存在某个 k 使得 $(i$、l、$k) \in \mathbb{B}$，则在时间 $t \in [b, 1-b]$ 将 i 与 l 相连，当且仅当 $|g_{ilk}(t) - \check{\rho}^{i}_{,k}{}^{l}(t)| > \check{r}_{\text{boot}}(nb^{i}_{,k}{}^{l})^{-1/2}\check{\Gamma}^{i}_{,k}{}^{l}(t)$。

$K(\cdot)$ 由 $\check{K}(\cdot)$ 在 $\vartheta_z(t)$、$\tilde{\Gamma}_z(t)$ 和 $\bar{\Xi}^{\mathbb{B}}_{j\,s}$ 中给出，这些分别记为 $\check{\vartheta}_z(t)$、$\check{\Gamma}_z(t)$ 和 $\check{\Xi}^{\mathbb{B}}_{j\,s}$。我们可以将方差缩减估计量 $\check{\Xi}^{\mathbb{B}}_i$ 和 $\check{\Gamma}^2_z(t)$ 定义为 $\check{\Xi}^{\mathbb{B}}_i$ 和 $\check{\Gamma}^2_z(t)$ 的估计量，详细公式见附录 A。算法 2.1 给出了完整的算法。

算法 2.1 与传统的分块自助法（Lahiri （2003年））在两个方面有所不同。首先，大多数传统的分块自助法旨在模拟原始时间序列，并推导统计量的极限分布（例如参见Lahiri （2003年）的第 2.5 节），而算法 2.1则近似多元或可能为高维的估计误差的最大值。因此，即使在有限 $|\mathbb{B}|$ 下，（2.9）的分布与在发散的 $|\mathbb{B}|$ 下的分布存在显著差异，它仍能为（1.1）产生渐近正确的检验。其次，当 $l_1 + j_1 = l_2 + j_2$ 时，^ ^ 求和项 $\check{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l_1、j_1}$ 和 $\check{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l_2、j_2}$ 共享相同的高斯乘子；这与经典方法形成对比，在经典方法中，求和项分别乘以相互独立的高斯变量，例如参见Zhou （2013）的定理 5。此外，算法 2.1 适用于高效的并行计算。在算法 2.1 中，我们可以针对 $\left|\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w} \hat{\check{\mathbf{S}}}^{\mathbb{B}}_{l、j} R^{(r)}_{l+j}\right|_\infty$ 的不同分块分别进行计算l，并结合它们的最大值以获得 $\check{r}_{\text{boot}}$，进而推断时变网络。

备注 2.2。 为了将网络连接的先验知识纳入定量分析，允许灵活选择 $\mathbb{B}$至关重要。 第3节 将说明，在 算法 2.1中，只需对 $\mathbb{B}$施加非常温和的条件即可保证其一致性。具体而言， $|\mathbb{B}|$ 可根据实际需求取固定值或趋于无穷。据我们所知，目前尚无经过论证的方法能够在滞后阶数固定或趋于无穷这两种情形下，对一般时间序列的相关性进行推断，且

滞后阶数为固定数量和趋于无穷的数量。

注2.3。 相关网络的推断和相关矩阵的检验已由 *Efron (2007)* 、*Cai 和 Liu (2016)* 以及 *Bailey 等 (2019)* 开展研究，他们关注静态网络，并要求时间上的独立性。近年来，基于时间序列推断时变网络或动态网络的研究日益增多，参见 *Basu 和 Rao (2021)* 以及 *Chen 等 (2022)* 。其中新近提出的方法利用数据生成机制不断变化的时间序列构建一个统一的网络结构。然而，由于系统具有复杂的动态结构和生成机制，这些方法无法直接用于推断由此产生的无限维时变网络结构。相比之下，所提出的算法 2.1 通过控制族错误率，以较高概率恢复所有时间点上的时变网络；理论保证见下一节。

3 理论性质

本节将从第一类错误和恢复概率两个方面考察算法 2.1的理论性能，而 算法 B.1 的理论性质可见附录 B。为严谨地陈述理论结果，我们引入以下记号和假设。假设过程 $(\epsilon_{i,j})_{i=1}^{n}$ 在（2.1）和 $(\tilde{e}_{z,j})_{j=1}^{n}$ $(\tilde{e}^{i}_{j,l},_{k}$ 在（2.5）中）满足

$$\epsilon_{j,i} = G_i(t_j, \mathcal{F}_j), \quad \tilde{e}_{z,j} = H_z(t_j, \mathcal{F}_j), \quad 1 \le j \le n,\ 1 \le i \le p,\ z = (i,l,k) \in \mathbb{B},$$

其中， $G_i(\cdot,\cdot)$ 和 $H_z(\cdot,\cdot)$ 是可测函数， $[0,1] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_j = (\boldsymbol{\xi}_{-\infty}, ..., \boldsymbol{\xi}_j)$ 是一个滤过，且 $(\boldsymbol{\xi}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $i.i.d.$ 随机元素。定义 $\mathbb{B}(t) = \{z \in \mathbb{B} : \rho_z(t) \neq g_z(t)\}$, $t \in [0,1]$。对于集合 A，令 $\bar{A}$ 表示其补集。对于 $t \in [0,1]$，记 $\sqrt{n b_z}|g_z(t) - \check{\rho}_z(t)|/\check{\Gamma}_z(t)$ 为 $\check{T}_z(t)$，并令 $\check{N}(t) = \{\check{T}_z(t) \le r_{\text{boot}}, z \in \mathbb{B} \cap \tilde{\mathbb{B}}(t)\} \cap \{\check{T}_z(t) > r_{\text{boot}}, z \in \tilde{\mathbb{B}}(t)\}$。族错误率（以数据为条件）为

$$1 - P_{H_0}(\{\check{T}_z(t) \le \check{r}_{\text{boot}}, z = (i,l,k) \in \mathbb{B}, t \in [b, 1-b]\}|\mathcal{F}_n),$$

其中 H_0 表示（1.1）的原假设。基于 RED-SCBs 的数据条件下，时变网络的恢复概率可表示为

$$\int_0^1 P(\check{N}(t)|\mathcal{F}_n)dt.$$

我们将证明算法 2.1能够控制族错误率，并以至少 $1-$ 的概率恢复时变网络结构，从而在后续分析中通过同时置信带控制族错误率。

我们算法 2.1 的关键之处在于，直接模拟估计相关曲线的最大偏差，而非其极限分布，因为非平稳非线性多元时间序列（2.1）的基于差分的非参数估计量的最大偏差的极限行为以复杂的方式取决于 $\mathbb{B}$。为说明这一点，考虑单变量平稳时间序列 $X_1,...,X_n$，其自相关为 $\rho(k)$，样本版本为 $\hat{\rho}(k) = \hat{\gamma}(k)/\hat{\gamma}(0)$，其中 $\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-h} X_i X_{i+k}$。对于固定的 d_n，$\sqrt{n}\max_{1\le k\le d_n} |\hat{\rho}(k) - \rho(k)|$ 的渐近分布取决于时间序列的四阶结构；而当 d_n 发散时，只要满足 $E(|X_i|^q) < \infty$（$q > 4$），其渐近分布便为 Gumbel 型，且仅取决于二阶性质，参见 Braumann 等（2021）的讨论。我们利用 Dette 和 Wu（2021）针对稀疏高维时间序列建立的高斯近似和比较技术，对估计量的最大偏差进行近似，以避免复杂极限分布带来的困难，并证明算法 2.1 能够生成适应 $|\mathbb{B}|$ 大小的有效检验。

对于过程 $L(t, \mathcal{F}_i)$，若对任意 $t_1, t_2 \in [0,1]$，都存在一个常数 $C > 0$ 使得，我们称其为 $\mathcal{L}^q$ 随机 Lipschitz 连续（记作 $L(\cdot, \cdot) \in \text{Lip}_q$）。

$$\|L(t_1, \mathcal{F}_0) - L(t_2, \mathcal{F}_0)\|_q \le C|t_1 - t_2|.$$

若 $q \ge 2$，则过程 $L(t, \mathcal{F}_j)$ 是局部平稳的（LS）。LS 过程刻画了式 (2.1) 中误差过程复杂且平滑的时间动态。我们对 LS 过程的定义基于伯努利移位过程，它为非线性非平稳过程的建模提供了基本框架；全面综述请参见 Dahlhaus 等人 (2019)。令 $\mathcal{F}_j^* = (\mathcal{F}_{-1}, \varepsilon_0', \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j)$，其中 ε_0' 是 ε_0 的一个副本。非线性滤波器 $L(\cdot,\cdot) \in \text{Lip}_q (q > 0)$ 的物理依赖度量定义为 $\delta_q(L,k) = \sup_{t\in[0,1]} \|L(t, \mathcal{F}_k) - L(t, \mathcal{F}_k^*)\|_q$，它量化了输入 ε_0 对输出 $L(\cdot, \mathcal{F}_k)$ 的影响。最后，对于单变量 LS 时间序列 $L(t, \mathcal{F}_j)$，其长期方差函数定义为

$$\sigma^2(L,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \text{Cov}(L(t,\mathcal{F}_0), L(t,\mathcal{F}_k)),\ t \in [0,1].$$

As假设 3.1。对于某些 $q \ge 4$，误差过程 $\epsilon_{j,\,i} = G_i(t_j、\ \mathcal{F}_j)$ 满足 $s,$

(A1) $G_i(\cdot,\cdot) \in \text{Lip}^{2q}、\ i = 1、2、\cdots、p$ 及其 *Lipschitz* 常数均一致有界。

(A2) 存在一个正常数 t_0，使得 上确界 $_{t\in[0,1]、\ i=1、2、\cdots、p}$ $\mathbb{E}$ $(t_0 \exp(G_i(t、\ \mathcal{F}_0)) < \infty$。

(A3) 最大值$_{i=1,\cdots,p}$ $\delta_{2q}(G_i, l) = O(\chi^l)$，对于某个 $\chi \in (0,\ 1)$。

(A4) 函数 $\gamma_z(\cdot)$ 的二阶导数 $\gamma_z''(\cdot)$ 存在，且在 $[0,1]$ 上 *Lipschitz* 连续。对于所有 $z \in \mathbb{B}$，*Lipschitz* 常数均有界。

条件(A1)、(A3) 和(A4) 是假设 3.1中针对 LS 时间序列的基于核函数的非参数分析所采用的标准条件。ZhaoZhao (2015针对单变量自相关函数的推断也提出了类似的假设。假设 3.1较为宽松，允许时间序列具有次指数尾部。

假设 3.2。核函数 $K(\cdot)$ 是一个对称函数，在$(-1,1)$ 之外为零，并且$\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u)du = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}(K'(u))^2 du < \infty$，且二阶导数 K'' 在$(0,1)$上是 *Lipschitz* 连续的。

可以验证，若 $K(\cdot)$ 满足假设 3.2，则其方差缩减相关曲线估计量 $\check{K}(\cdot)$的等价核 $\check{\rho}(\cdot)$也满足该假设。

假设 3.3. 存在一个常数 $c^* > 0$，使得 $\min_{z\in\mathbb{B}} b_z/b \geq c^*$。

假设 3.3 规定所有（b_z）$_{z\in\mathbb{B}}$ 具有相同的量级。

假设 3.4. 以下关于 $\Gamma_z(\cdot)$和变点的假设成立：

(B1) 极限方差函数 $\tilde{\Gamma}_z^2(t)$：$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\sqrt{n b_z}\vartheta_z(t))$ *($\vartheta_z(t)$ 在(2.12))* 中有定义，且有限；对于，并且 $\min_{z\in\mathbb{B}}\inf_{t\in[0,1]}\tilde{\Gamma}_z^2(t) > 0$。

(B2) $\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in(0,1)}|\Gamma_z'(t)| < \infty$，其中 $\Gamma_z'(t)$ 是 $\Gamma_z(t)$ 的导数。

(B3) 突变点的数量 $d :=$ 最大值$_{1\leq i\leq p} d_i = O(n^{\phi})$, $0 \leq \phi < 2/5$, 且对于充分大的常数 D，最大值$_{1\leq i\leq p}$ 最大值$_{1\leq l\leq d_i}|\mu_{i,\,l(a_{il}^{+},\,)} - \mu_{i,\,l(a_{il}^{-},\,)}| \leq D < \infty$。

条件 (B1) 保证 $\tilde{\Gamma}_z^2(t)$ 具有非退化性。根据 Dette 和 Wu 的引理 C.3(2021)，$\Gamma_z(t)$ 存在，且 (B1) 的一个等价条件是 $\{\Xi_{z,j}\}_{j=1}^n$ 的长期方差具有非退化性。值得注意的是，$\check{\Gamma}_z(t)$ 和 $\check{\Gamma}_z'(t)$ 也满足 (B1) 和 (B2) 的条件，因为 $\check{\Gamma}_z^2(t) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\sqrt{n b_z}\check{\vartheta}_z(t))$ 且 $\check{\vartheta}_z(t) = (nb_z)^{-1}\sum_{j=1}^{b}\check{K}_{b_z}(t_j - t)\Xi_{z,j}$，是 $\vartheta_z(t)$的线性组合。条件 (B3) 确保跳跃幅度一致有界。注意，(B3) 允许均值中的变点数量发散。回顾 $\mathbb{B}(t) = \{z:\ \rho_z(t) \neq g_z(t)\}$, $t \in [0,1]$。

假设 3.5。我们假设 $\lambda(\{t:\ |\rho_z(t) - g_z(t)| \geq \eta_n,\ z \in \mathbb{B}(t)\}) \to 1$，其中 λ 是 $[0,1]$上的勒贝格测度，$\eta_n = \lambda_n \log(n|\mathbb{B}|)/\sqrt{nb}$，其中 $\lambda_n \to \infty$ 以任意缓慢的速度。

假设 3.5 要求，如果 $\rho_z(\cdot) \neq g_z(\cdot)$，它们的绝对差值应足够大。

假设 3.6。 以下条件适用于 $\Xi_{z,j}$, $K(\cdot)$ 和 $\check{}K(\cdot)$：对于 $\mathbb{B}$, $0 \le k,l \le n-2\lceil nb\rceil$ 中任意两个不同的三元组 z 和 z'，$\sum_{s=1}^{2\lceil nb\rceil}\Xi_{z,s+k}K_{b_z}(\frac{s-\lceil nb\rceil}{n})$ 与 $\sum_{s=1}^{2\lceil nb\rceil}\Xi_{z',s+l}K_{b_{z'}}(\frac{s-\lceil nb\rceil}{n})$ 之间相关性的绝对值均有一个常数上界$0<\rho<1$；对 $\check{}K(\cdot)$也同样成立。

假设 3.6 确保不同节点对和滞后对应的核函数加权误差之间不存在完全相关性。

我们的第一个结果 定理 3.1 用一个高斯向量的最大值来近似所有相关曲线的基于差分的估计量的最大偏差，即 $\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\sqrt{nb_z}|\check{}\rho_z(t)-\rho_z(t)|/\check{}\Gamma_z(t)$。根据定理 3.1，我们可以通过进一步研究该高斯向量，同时推断所有考察的相关曲线。近期，Zhang 和 Cheng (2018) 和 Dette 和 Wu (2021) 等人研究了高维时间序列的高斯逼近理论。插件估计量的高斯近似是现有高斯逼近理论的直接应用，参见在线补充材料中的附录 D 。相比之下，定理 3.1为二阶过程和基于差分的估计量提供了首个高斯近似方案，这对于构建 RED-SCBs 至关重要。

定理 *3.1*。在假设 *3.1*、*3.2*、*3.3*、*3.4* 以及带宽条件 $nb^4\to\infty$, $nb^6\to 0$, $|\mathbb{B}|^{1/q}hn^{\phi-1/2}b^{-1/2-1/q}\to 0$, $|\mathbb{B}|^{1/q}n^{1/2}b^{7/2-1/q}\to 0$ 和 $(nb)^{-1/2}\{|\mathbb{B}|/(hn^{\phi-1}+b^4+n^{-1/2}hb)\}^{1/(q+2)}\to 0$ 下，存在一列零均值高斯向量 $(\tilde{}Z_i)_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\in\mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$，它们与向量 $(\bar{\Xi}_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 具有相同的自协方差结构，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t)-\rho_z(t)|/\tilde{\Gamma}_z(t)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|=O(\tilde{\theta}_n)=o(1),$$

其中 $\tilde{\theta}_n=(nb)^{-(1-11\iota)/8}+\Theta\left((\sqrt{nb}c_n)^{q/(q+1)},\ n|\mathbb{B}|\right)+\Theta\left(|\mathbb{B}|^{1/(q+1)}(nb)^{-q/(q+1)},\ n|\mathbb{B}|\right)$, $c_n=(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)(|\mathbb{B}|/b)^{1/q}$。

此外，存在一列零均值高斯向量 $(\check{}\mathbf{Z}_i)_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\in\mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$，它们与向量 $(\check{}\Xi_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 具有相同的自协方差结构（在$(\bar{\Xi}_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 中将 $K(\cdot)$ 替换为$\check{}K(\cdot)$），使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\sqrt{nb_z}|\check{\rho}_z(t)-\rho_z(t)|/\check{\Gamma}_z(t)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\check{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|=o(1).$$

带宽条件可以通过以下方式满足：$|\mathbb{B}|=O(n^\ell)$，其中 $\ell>0$，也就是说，当 $|\mathbb{B}|$具有 n的多项式阶时。值得注意的是，定理 3.1对有限的 $|\mathbb{B}|$同样成立，从而弥合了时间序列有限滞后与发散滞后之间分布性质的差距。

回顾一下，w 是算法 2.1中步骤 3的块大小，m_z 和 η 是估计量 $\check{\Gamma}_z(\cdot)$ 的平滑参数，定义见附录 A。令 $m = \max_{z\in\mathbb{B}} m_z$，并令 $\tilde{h} = \lfloor M \log n \rfloor$，其中 M 是与假设 3.1中的 χ 相关的充分大常数。我们用 $a \vee b$ 表示 $\max\{a, b\}$。令 $\vartheta_n = \log_w^2 n + \frac{w}{nb} + \sqrt{\frac{w}{nb}}(n|\mathbb{B}|)^{4/q}$，
$g_n = |\mathbb{B}|^{1/q}\Big(\sqrt{\frac{m}{n\eta^2}} + \frac{m-1}{} + \eta + \big(\frac{m}{nb}\big)^{1/2}\big(\frac{mb}{n}\big)^{-1/(2q)} + (nb)^{-1/2}b^{-1/q}\Big) + w^{3/2}/n + n^{\phi}h/\sqrt{w}$。令 $\check{\mathcal{C}}_n = \{\mathbf{x}(\cdot) = (x_z(\cdot)\ z \in \mathbb{B})^\top \in [b, 1-b]^{|\mathbb{B}|}:\ \sqrt{nb}_z|x_z(t) - \hat{\check{\rho}}_z(t)| \le \check{r}_{\text{boot}}\check{\Gamma}_z(t)\ \forall t \in [b, 1-b],\ z \in \mathbb{B}\}$。以下定理 3.2确立了族错误率（FWER）的控制，并给出了与未进行方差缩减的算法（附录 B中的算法 B.1）相比，在恢复时变网络概率方面的理论改进；作为副产品，我们还获得了 RED-SCBs的一致渐近正确性和一致方差缩减效应。

定理 3.2。 在满足 定理 *3.1* 及带宽条件

$$\vartheta_n^{1/3}\left(1 \vee \log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n)\right)^{2/3} + \left(g_n(n|\mathbb{B}|)^{1/q}\right)^{q/(q+2)} \to 0. \tag{3.1}$$

我们得到以下结果：

(i)（第一类错误控制。）当 n 和 B 趋于无穷大时，

$$P_{H_0}(\{\check{T}_z(t) \le \check{r}_{\text{boot}}, z \in \mathbb{B}, t \in [b, 1-b]\}|\mathcal{F}_n) = P(\{\rho_z(\cdot), z \in \mathbb{B}\} \in \check{\mathcal{C}}_n|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{p} 1 - \alpha.$$

(ii)（恢复概率的提升。）在假设*3.5* 和 *3.6*成立时，对于预先指定的显著性水平 $0 < \alpha < 1$，$|\mathbb{B}| = O(\log n)$，给定数据，随着 $n \to \infty$，$B \to \infty$，对于任意 $\delta > 0$和 $r \in (-1, 1)$，网络恢复概率有所提高，具体来说，对于足够小的 $\alpha > 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{B\to\infty}\int_0^1 P(\check{N}(t)|\mathcal{F}_n)dt \ge \lim_{n\to\infty}\lim_{B\to\infty}\int_0^1 P(\tilde{N}(t)|\mathcal{F}_n)dt \ge 1 - \alpha, \tag{3.2}$$

其发生概率趋近于1，其中 $\tilde{N}(t)$ 是 $\check{N}(t)$ 在不进行方差缩减时的对应量，见(B.3)。

注 3.1。 定理 *3.2* 允许 $|\mathbb{B}|$ 取固定值或发散，这是由定理 *3.1*所致。若定理 *3.2* 成立，则当 q足够大时，条件可以满足 $w \asymp \lfloor n^{2/5} \rfloor$，$\eta \asymp n^{-1/7}$,$b \asymp n^{-1/5}$，$m \asymp \lfloor n^{2/7} \rfloor$。

随着自助法迭代 B 和样本量趋于无穷，定理 3.2 表明，在给定数据的条件下，RED-SCBs 渐近达到名义水平，且算法 2.1 的族错误率渐近受到控制。式（3.1）的收敛速率由两部分组成：第一项表示在所有误差均可观测时自助法程序的收敛速率，而

ˆ 第二项反映了 ˇ$\rho_z(\cdot)$ 和 ˇ $\Gamma_z(\cdot)$ 的收敛速率。在同时置信带 ˇ $\mathcal{C}_n$ 中，ˇr_{boot} 考虑了不同滞后、维度及时间上的 $\sqrt{nb_z}|\check{\vartheta}_z(t)|/\check{\Gamma}_z(t)$ 的随机性和依赖性，而 ˇ $\Gamma_z(t)$ 则解释了 $\sqrt{nb_z}|\check{\vartheta}_z(t)|$ 的特质离散度。

结果 (ii) 确保了 α 可以任意小的情况下，以高概率恢复时变网络结构，同时提高网络恢复概率。˜当所有 $1-\alpha$ 均满足 $|\mathbb{B}(t)|=0$ 时，$t\in[b,1-b]$ 的等号成立。未使用方差缩减技术时（见 附录 B 中的算法 B.1），相关性的自助法分位数和估计方差 ˆ ˆ 分别记为 $\tilde{r}_{\text{boot}}$ 和$\tilde{\Gamma}_z(t)$，它们对应于 ˇr_{boot} 和 ˇ $\Gamma_z(t)$。改进的恢复概率 (ii) 可表示为

$$|\check{r}_{\text{boot}}/\tilde{r}_{\text{boot}}-1|=o_{\mathbb{P}}(1),\quad \hat{\check{\Gamma}}_z(t)/\hat{\tilde{\Gamma}}_z(t)\xrightarrow{p}\sqrt{\check{\kappa}/\kappa}<1, \tag{3.3}$$

对 $t\in[b,1-b]$一致成立，其中 $\kappa=\int K^2(t)dt$，ˇ$\kappa=\int\check{K}^2(t)$。根据定理 3.2 和定理 B.1，算法 2.1 和算法 B.1 在时间 t 处，Y_i 与 Y_l 的 k_{th} 阶互相关函数同时置信带的宽度分别为 2ˇ $r_{\text{boot}}(nb_z)^{-1/2}\check{\Gamma}_z(t)$ 和 $2\tilde{r}_{\text{boot}}(nb_z)^{-1/2}\tilde{\Gamma}_z(t)$，其中 $z=(i,l,k)\in\mathbb{B}$。等式 (3.3) 表明，随着概率趋近于 1，会产生一致方差缩减效应，从而使同时置信带一致地变窄，并提高 (3.2) 的网络恢复概率。采用满足假设 3.2 的核函数时，当 $r=1/\sqrt{2}$ 且 $\delta\geq 2/(\sqrt{2}-1)$，我们得到与 Cheng 等（2007）相同的方差缩减比例 ˆ ˆ，但这种缩减在一致意义下成立，即 ˇ $\Gamma_z(t)\approx 5\tilde{\Gamma}_z(t)/16$。此外，第 5 节的数值研究表明，这种渐近改进也体现在有限样本中。

4 实现

本节讨论如何选择平滑参数 w，η，m_z，b_z，$z=(i,l,k)\in\mathbb{B}$以实现算法 2.1。对于 b_z，$z\in\mathbb{B}$，我们采用由Craven 和 Wahba (1978)提出的广义交叉验证（GCV）。我们通过最小化 b_z 来选择

$$\text{GCV}(b)=\frac{n^{-1}|\mathbf{Y}_z-\hat{\mathbf{Y}}_z|^2}{[1-\text{tr}\{\mathbf{Q}_z(b)\}/n]^2},\quad \hat{\mathbf{Y}}_z(b)=\mathbf{Q}_z(b)\mathbf{Y}_z,$$

其中，方阵 $\mathbf{Q}_z(b)$ 取决于 b。对于 $k\neq 0$，我们使用 $\mathbf{Y}_z=(\tilde{y}^i_{1,k}\tilde{y}^l_{1,h},\cdots,\tilde{y}^i_{n,k}\tilde{y}^l_{n,h})^\top$和 ˆ$\mathbf{Y}_z=($ ˆ$\beta_z(t_1)$ ..., ˆ$\beta_z(t_n))^\top$。如果 $k=0$，我们考虑 $\mathbf{Y}_z=(\tilde{y}^i_{1,h}\tilde{y}^l_{1,h},\cdots,\tilde{y}^i_{n,h}\tilde{y}^l_{n,h})^\top$ 和 ˆ$\mathbf{Y}_z=($ ˆ$\beta^{i,}{}_h{}^l(t_1)$ ..., ˆ$\beta^{i,}{}_h{}^l(t_n))^\top$。我们使用 $b^{i,}{}_k{}^l$ 来估计 $\rho^{i,}{}_k{}^l(\cdot)$，即将其用于 ˇ$\rho^{i,}{}_k{}^l(\cdot)$ 中 ˆ$\beta^{i,}{}_k{}^l(\cdot)$、ˆ$\beta^l_h(\cdot)$、ˆ $\beta^i_h(\cdot)$ 和 ˆ$\beta^{i,}{}_h{}^l(\cdot)$ 的公式中。

为了选取 w 和 η，在 算法 2.1中，我们建议采用 Politis 等人 (1999年提出的第 9 章中的扩展最小波动率（MV）方法；该方法在复杂依赖

结构下具有稳健性，且不依赖参数假设。具体而言，我们首先提出一个由可能的区块大小 $\{w_1, w_2, \cdots, w_{M_1}\}$ 和带宽 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{M_2}\}$构成的网格。将自助法统计量的样本方差记为 $s^2_{w_{j_1}, \eta_{j_2}}$，即

$$s^2_{w_{j_1},\eta_{j_2}} = \sum_{r=w_{j_1}}^{n-w_{j_1}} \sum_{l=0}^{n-2\lceil nb \rceil} \hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B},\top}_{l,r,w_{j_1},\eta_{j_2}} \hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,r,w_{j_1},\eta_{j_2}}, \quad 1 \le j_1 \le M_1, 1 \le j_2 \le M_2, \tag{4.1}$$

其中 $\check{\hat{\mathbf{S}}}^{\mathbb{B}}_{l,\ r,\ w_{j_1},\ \eta_{j_2}}$ 的定义见算法 2.1 的 w_{j_1} 步骤 3，该步骤使用区块和中的 $m_z = \lfloor n^{2/7} \rfloor$ 和 η_{j_2} 中的 $\Gamma_z(t)$，$z \in \mathbb{B}$，详见（A.1）。然后，我们选择使下列准则最小化的（j_1，j_2）：

$$\mathrm{MV}(j, j') := \mathrm{SD}\left\{ \cup_{r=-1}^{1} \{ s^2_{w_j, \eta_{j'+r}} \} \cup \cup_{r=-1}^{1} \{ s^2_{w_{j+r}, \eta_{j'}} \} \right\},$$

其中 SD 表示样本标准差。给定 $z = (i, l, k) \in \mathbb{B}$ 以及选定的 (w_{j_1}, η_{j_2})，我们可以通过 MV 方法进一步细化 m_z：首先构造区块大小网格 $\{m_{z,1}, \cdots, m_{z,M_3}\}$，然后选择使下式最小化的 j_3

$$\mathrm{SD}(j) = \int_0^1 \mathrm{SD}\left\{ \hat{\Gamma}^2_{z,m_{z,(r+j)},\eta_{j_2}}(t), r = -1, 0, 1 \right\} dt,$$

其中 η_{j_2} 是我们在上一步中选取的平滑参数。

5 模拟

我们考虑以下多元时间序列模型，$\mathbf{Y}_j = \boldsymbol{\mu}_j + \mathbf{G}(t_j, \mathcal{F}_j)$，其中 $\mathbf{G}(t, \mathcal{F}_j) = (G_1(t, \mathcal{F}_j)\ G_2(t, \mathcal{F}_j)\ G_3(t, \mathcal{F}_j))^\top$，$\boldsymbol{\mu}_j := \boldsymbol{\mu}(t_j) := (\mu_1(t_j)\ \mu_2(t_j)\ \mu_3(t_j))^\top$，$1 \le j \le n$。令 (ξ_{1j})、(ξ_{2j})、(ξ_{3j}) 为 $i.i.d.$ 标准高斯随机变量，$\boldsymbol{\xi}_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j})^\top$ 以及 $\mathcal{F}_j = (\cdots, \boldsymbol{\xi}_j)$。对于误差过程，我们考虑

$$\mathbf{G}(t, \mathcal{F}_j) = \begin{pmatrix} 0.075 & 0, & 0 \\ 0 & 0.15(0.9 + 0.1\sin(2\pi t)) & 0 \\ 0 & (0.9 + 0.1t) & 0.1 \end{pmatrix} \mathbf{G}(t, \mathcal{F}_{j-1}) + \boldsymbol{\xi}_j.$$

模拟中的均值函数 $\boldsymbol{\mu}_j$ 为

$$
\begin{aligned}
\mu_1(t) &= 4 - 0.5\sin(4t) + 0.5t, \\
\mu_2(t) &= (1-(t-0.5)^2)\mathbf{1}(0 \le t < 0.4 \text{ or } 0.5 \le t < 0.6) \\
&\quad + (3 - 0.5\sin(4t))\mathbf{1}(0.4 \le t < 0.5 \text{ or } 0.6 \le t \le 1), \\
\mu_3(t) &= 0.3\mathbf{1}(0 \le t < 0.35) + 0.7\mathbf{1}(0.35 \le t < 0.55) + 0.2\mathbf{1}(0.55 \le t \le 1).
\end{aligned}
$$

在模拟中，我们考察：(i) 滞后 1 互相关函数的同时置信带的经验覆盖率；(ii) 由多重检验问题（1.1）诱导的时变相关网络的模拟恢复率，其中包含 () 、。请注意，所考虑的互相关函数是不对称的，即 ，$_{3\,1}(t) \neq \gamma^{3}{}_{,\,2\,1}(t)$。

我们分别采用算法 2.1 和算法 B.1 ，使用第 4 节和附录 B中介绍的选择方案。对于 RED-SCBs，我们按照 $r = 1/\sqrt{2}$ Cheng 等人的建议选择(2007)，并选择 $\delta = \bar{}1.3$ ，因为趋势中可能存在许多变点。我们首先研究所提出的算法对带宽扰动的敏感性 $b^{i,}{}_{k}{}^{l}$ 。在表 5.1中，$b = \pm 10\%$ 行报告了使用 $1 \pm 10\%$ 的广义交叉验证所选带宽时的平均宽度、模拟覆盖率和模拟网络恢复率。结果表 5.1显示，算法 2.1和算法 B.1 都对带宽扰动不敏感，并表明随着样本量增加，同时置信带的宽度减小，两个算法都能产生渐近正确的同时置信带。方差缩减技术效果显著：当 RED-SCBs 的模拟覆盖率均接近名义水平时，其平均宽度平均比原始同时置信带窄约 10%。此外，我们在名义水平为 0.1% 的情况下进行了双样本 t 检验，发现方差缩减效应显著。更重要的是，借助 RED-SCBs，算法 2.1 的模拟恢复率优于使用算法 B.1 的恢复率，并且随着样本量增加而逐渐接近 1。

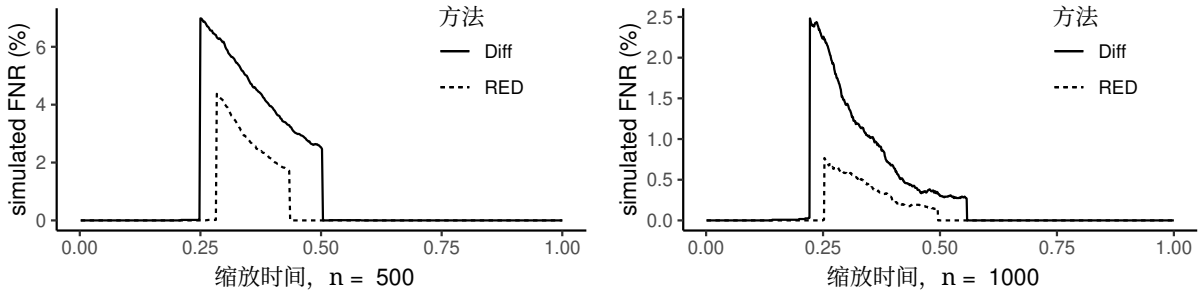
为进一步说明基于 RED-SCBs 的方法所产生的均匀方差效应，我们绘制了由 $g_{ij1}(t) \equiv 0.3 + 0.3t$、$1 \le i \neq j \le 3$ 诱导的网络随时间变化的假阴性率（FNR），其定义为

$$
\mathrm{FNR}(t) = \frac{\sum_{z\in\mathbb{B}} \mathbf{1}(\rho_z(t) \neq g_{ij1}(t), T_z(t) \le r_{\mathrm{boot}})}{\sum_{z\in\mathbb{B}} \mathbf{1}(\rho_z(t) \neq g_{ij1}(t))},
$$

其中，$T_z(t) = \tilde{T}_z(t)$，$r_{\mathrm{boot}} = \tilde{r}_{\mathrm{boot}}$ 对于基于差分的同时置信带，以及 $T_z(t) = \check{}T_z(t)$，$r_{\mathrm{boot}} = \check{}r_{\mathrm{boot}}$对于 RED-SCBs。 图 5.1 显示，RED-SCBs 在整个时间范围内均能降低假阴性率；随着样本量增加，两种基于同时置信带的方法对时变网络进行推断的检验效能，在每个时间点上都趋近于 1。

		算法 2.1						算法 B.1					
		宽度		覆盖率		恢复		宽度		覆盖率		恢复	
n	b	90%	95%	90%	95%	90%	95%	90%	95%	90%	95%	90%	95%
500	-10%	0.76	0.86	87.0	94.4	96.3	94.0	0.68	0.77	86.2	93.9	93.5	90.5
	0	0.70	0.79	90.9	96.0	97.8	96.3	0.64	0.73	87.2	93.6	95.4	93.1
	10%	0.67	0.76	92.0	96.6	99.2	98.5	0.60	0.69	88.9	95.1	97.0	95.2
800	-10%	0.63	0.71	87.9	94.8	98.9	97.7	0.56	0.63	87.6	94.4	96.7	94.5
	0	0.59	0.67	89.2	95.4	99.3	98.5	0.53	0.60	87.1	94.6	98.1	96.7
	10%	0.56	0.63	89.7	95.9	99.7	99.3	0.50	0.57	88.8	94.6	98.9	97.9
1000	-10%	0.58	0.66	86.6	94.6	99.3	98.6	0.51	0.58	88.5	94.4	97.9	96.2
	0	0.55	0.62	90.0	95.3	99.6	99.1	0.48	0.55	87.3	94.2	98.8	97.6
	10%	0.51	0.58	90.9	96.6	99.8	99.6	0.46	0.52	89.1	95.4	99.2	98.5

表 5.1：在 算法 2.1 和 算法 B.1 对 $\mathbb{B} = \{(i,j,k)\ i = 1,2,3, j = 1,2,3, i \neq j, k = 1\}$ 的平均宽度、模拟覆盖率（%）和模拟恢复率（%），名义水平为 90% 和 95%，样本量为 $n = 500,800,1000$。



实线和点线分别表示 算法 2.1（RED）和 算法 B.1（差异）的时变模拟假阴性率。左图：$n = 500$。右图：$n = 1000$。

6 数据分析

自2007—2009年金融危机以来，人们已广泛认识到，网络结构和连接对于风险测度至关重要。例如，资产、信贷和跨行业投入产出关联之间的互联性，分别对于量化金融投资组合风险、系统性风险和宏观经济风险具有重要意义（参见 Puliga 等 (2014)、Diebold 和 Yilmaz(2014)、Acemoglu 等 (2012) 及其中的相关综述）。此外，Brunetti 等 (2019) 将金融网络分为“物理网络”和“相关网络”。前者基于银行交易和主体选择，而后者——也是本文的研究重点——则通过探究资产收益率之间与相关性有关的相互作用构建。此外，相关网络本质上是时变且不断演化的，已被广泛用于金融危机预测，参见 Diebold 和 Yilmaz (2014)。本节分析 WRDS每日全球指数的时变相关网络，该指数为市值加权指数

有关每日频率的含股息收益率，详见 https://wrds-www.wharton.upenn.edu/pages/get-data/world-indices-wrds/ 。具体而言，我们研究了2006年6月1日至2022年6月1日期间含股息的每日国家收益率（PORTRET）的周平均值。每个国家共有819个时间点。我们将PORTRET绝对值的周平均值记为S_i ，将PORTRET对数平方的周平均值记为 R_i，这两者常用作波动性和风险的度量。首先，我们通过同时检验 R_i 和 S_i 在滞后1、2、3期的自相关，考察各个国家的独立性假设；结果发现，在0.5%的显著性水平下，RED-SCBs分别拒绝了中国和德国的 R_i 以及德国、法国和日本的S_i 的序列相关为零这一原假设。因此，对于这些指数时间序列而言，经典方法的独立性假设可能过于严格。为了从这个具有复杂动态特征和趋势的数据集中推断潜在的时变网络结构，我们采用基于RED-SCBs的算法 2.1。为了更好地展示连接的时变特征，图6.1和图6.2左侧面板展示了置信水平热图（即同时置信带覆盖 $g_{ijk}(t) \equiv 0$、$(i, j, k) \in \mathbb{B}$、$t \in [b, 1-b]$ 的最小置信水平）。请注意，可以通过连接对应置信水平高于预设阈值的两个节点，从热图中恢复相关网络，见图6.1和图6.2右侧面板。为简便起见，我们用CHN、HK、DE、GB、FR和JP分别表示中国、香港、德国、英国、法国和日本。为简洁起见，图6.1和图6.2仅展示每年6月1日选定时间点的时变网络（省略了没有连接的年份），而图1.1则展示了基于 S_i在重要时间点的子图。由于我们的推断结果在整个时间范围内同时成立，因此也可以用类似方式展示其他感兴趣的时间点。如图6.1所示，在香港股市于2012年6月1日和2018年6月1日前后下跌期间，就绝对市值加权指数而言，香港与世界其他地区之间的连接发生了重大变化。相比之下，从2010年到2018年，日本与欧洲国家（英国、法国和德国）保持着显著的连接。

图6.2 展示了根据 R_i构建的时变交叉相关网络。从这些2011年和2017年的波动性网络中，可以识别出前文所述的香港在2012年和2018年发生的股市崩盘：当时，香港与世界其他地区之间交叉相关性的置信度大幅下降。2012年，欧洲债务危机等一系列金融危机相继发生，标准普尔下调了法国及其他八个欧元区国家的评级，欧元区国家之间的连接总体上有所减弱。然而，在一系列金融危机后的复苏期间，日本与英国之间的互联性依然相对较强，这得益于双方有利的政策和关系，包括首相戴维·卡梅伦于2012年推动的联合开发武器系统协议，以及2016年达成的脱欧贸易协议。在2012年至2016年间

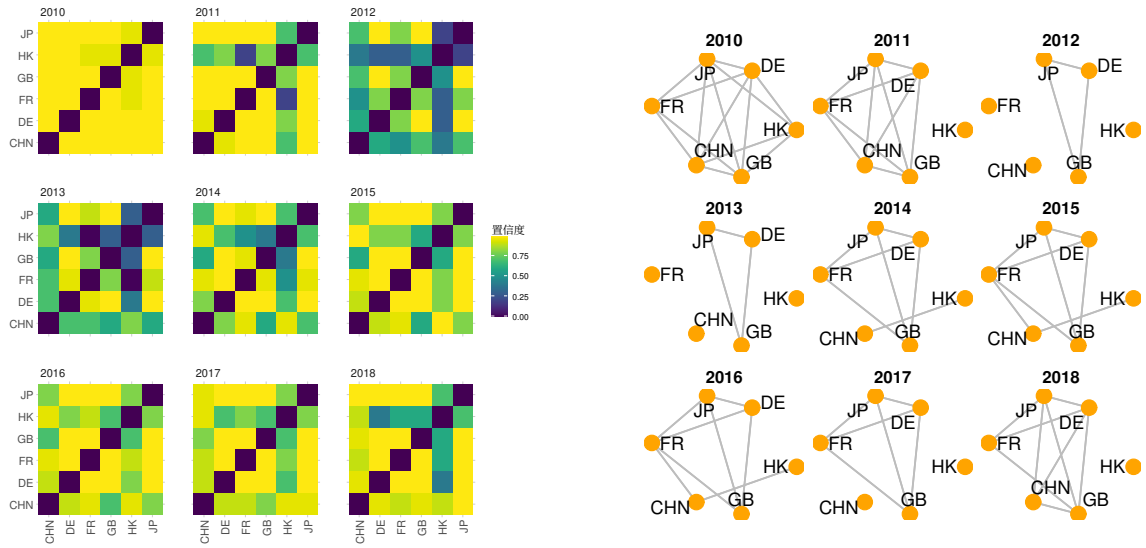


图6.1：左图：使用 S_i 从 2010 年到 2018 年的交叉相关置信水平热力图，采用算法 2.1。右图：阈值为 0。9 的诱导网络快照。

中国与英国或日本之间连接的置信水平也急剧下降，这可能是由这些国家之间不断变化的外交和贸易关系所致。

7 结论与未来工作

本文提出了一个统一框架，用于从具有复杂趋势的多元时间序列向量中推断时变交叉相关网络，其中向量的维度和基于相关性的度量数量都可以是固定的，也可以是发散的。我们利用基于差分的估计量，规避了对分段光滑趋势中未知变点进行预估计的需要，并提出一种自助法辅助方法，以在时间序列非平稳性条件下推断时变网络结构。作为一个副产品，我们弥合了时间序列文献中固定滞后与发散滞后之间相关推断的差距。我们将单变量时间序列非参数估计中的方差缩减技术推广到非平稳和非线性时间序列同时置信带的一致宽度缩减，从而提高了恢复时变网络的概率。我们为所提出的自助法辅助算法提供了理论依据，并通过模拟研究和金融数据集分析评估了其有限样本性能。

动态网络中的互联性不仅可以通过交叉相关来衡量，还可以借助格兰杰因果关系、方差分解和交叉分位数图等其他指标来评估，

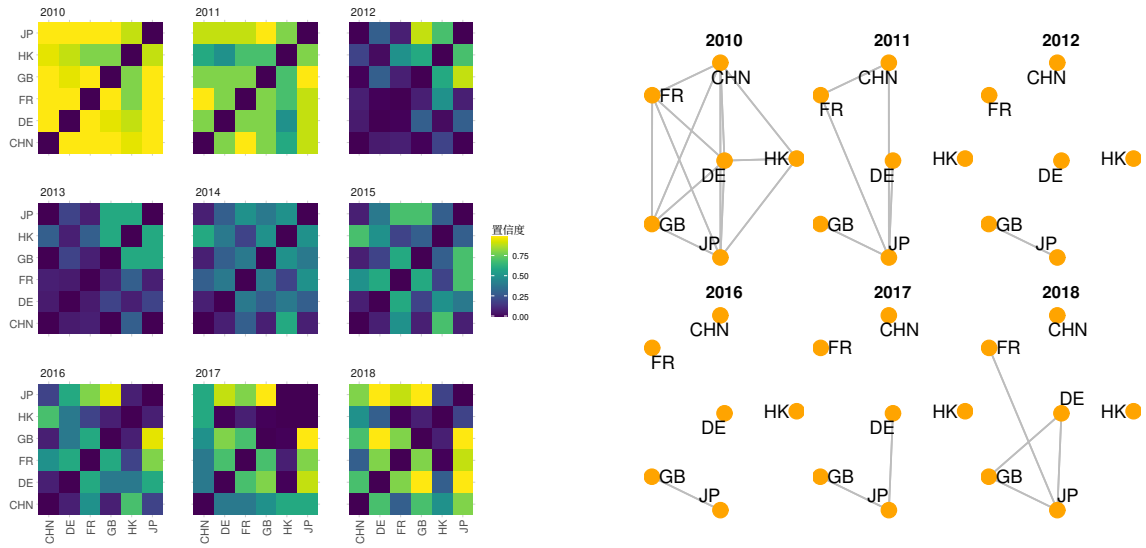


图6.2：左图：使用 R_i 从 2010 年到 2018 年的交叉相关置信水平热力图，采用 算法 2.1。右图：阈值为 0。85 时诱导网络的快照，其中省略了没有连接的网络。

参见 Andrie,等人 （2022），以了解详细综述。对于基于一般且可能具有非线性和非平稳特征的过程所构建的大规模网络，其他用于推断的指标的统计性质尚未得到充分研究。除了族错误率（FWER）之外，错误发现率（FDR）也是多重检验和构建网络的一种常用且有效的工具。我们将通过其他指标或采用包括 FDR 在内的其他标准来构建网络留作未来有意义的研究方向。

致谢

Weichi Wu 是通讯作者，并谨此感谢国家自然科学基金委员会（12271287）的资助。

补充材料

标题：《非平稳多元时间序列复杂趋势的时变相关网络分析》的补充材料

当趋势函数平滑时使用插件估计量的算法、其理论性质、定理 3.1 的证明以及辅助结果均收录于补充材料中。

算法的详细公式

本节给出了 算法 2.1 和 算法 B.1中所用估计量的精确公式。回顾 定理 3.2中的定义， $\kappa = \int K^2(t)dt$, $\check{\kappa} = \int \check{K}^2(t)dt$。

A.1 估计量算法 2.1

回顾第 2.2 节中 $\check{\beta}_z(t)$、$\check{\gamma}_0^i(t)$、$\check{\sigma}_{i,l}(t)$、$\check{\rho}_z(t)$ 和 $\check{K}(t)$、 $z = (i, l, k) \in \mathbb{B}$, $1 \le i, l \le p$ 的定义。定义方差缩减残差 $\hat{\check{e}}^i_{j}{}^{l}{}_{,k}$ 为 $\tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^i_{j,h} - \check{\beta}^{i}{}_{,k}{}^{l}(t_j)$。于是， $\Xi_{z,j}$ 和 $\check{\Gamma}_z(t)$ 的方差缩减估计量为

$$\check{\Xi}_{z,j} = (\tilde{y}^i_{j,h}\tilde{y}^l_{j,h}/2 - \tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h})/\check{\sigma}_{i,l}(t) - 4^{-1}\check{\rho}^{i,l}_k(t_j)\left(\tilde{y}^{i,2}_{j,h}/\check{\gamma}^i_0(t_j) + \tilde{y}^{l,2}_{j,h}/\check{\gamma}^l_0(t_j)\right),$$

and

$$\hat{\check{\Gamma}}^2_z(t) = \frac{\check{\kappa}}{m}\sum_{i=1}^n \check{\Delta}^2_{z,i}\omega(t,i), \quad \omega(t,i) = K_\eta(t-t_i)/\sum_{j=1}^n K_\eta(t_j - t), \tag{A.1}$$

其中 $\check{\Delta}_{z,s} = \sum_{j=s}^{s+m-1}\check{\Xi}_{z,j}$， 以及 $\check{\Xi}_{z,j} = (\hat{\check{e}}^i_{j}{}^{l}{}_{,h}/2 - \hat{\check{e}}^i_{j}{}^{l}{}_{,k})/\check{\sigma}_{i,l}(t) - 4^{-1}\check{\rho}^{i}{}_{,k}{}^{l}(t)\left(\hat{\check{e}}^i_{j,h}/\check{\gamma}^i_0(t_j) + \hat{\check{e}}^l_{j,h}/\check{\gamma}^l_0(t_j)\right)$。接下来定义 $\check{\boldsymbol{\Xi}}^{\mathbb{B}}_j$, $1 \le j \le 2\lceil nb\rceil$ 为

$$\hat{\check{\boldsymbol{\Xi}}}^{\mathbb{B}}_j = (\hat{\check{\boldsymbol{\Xi}}}^{\mathbb{B},\top}_{j,\lceil nb\rceil}, \cdots, \hat{\check{\boldsymbol{\Xi}}}^{\mathbb{B},\top}_{n-2\lceil nb\rceil+j,n-\lceil nb\rceil})^\top, \text{ with } \hat{\check{\boldsymbol{\Xi}}}^{\mathbb{B}}_{j,s} = (c_z K_{b_z}(t_j - t_s)\check{\Xi}_{z,j}/\hat{\check{\Gamma}}_z(t_s), z \in \mathbb{B})^\top. \tag{A.2}$$

B 基于差分的同时置信带的时变交叉相关分析

本节列出不进行方差缩减的基于差分的同时置信带算法，并给出其中的估计量及其理论性质。

B.1 估计量

回顾一下， $\tilde{y}^i_{j,\ k} = Y_{j,\ i} - Y_{j-k,\ i}$。对于 $\Xi_{z,\ j}$， $z = (i,\ l,\ k) \in \mathbb{B}$ 在（2.12）中的估计，我们使用以下基于差分的估计量：

$$\tilde{\Xi}_{z,j} = (\tilde{y}^i_{j,h}\tilde{y}^l_{j,h}/2 - \tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h})/\tilde{\sigma}_{i,l}(t_j) - 4^{-1}\tilde{\rho}^{i,l}_k(t_j)\left(\tilde{y}^{i,2}_{j,h}/\tilde{\gamma}^i_0(t_j) + \tilde{y}^{l,2}_{j,h}/\tilde{\gamma}^l_0(t_j)\right).$$

算法 B.1时变交叉相关分析

1：计算在 (2.7) 中定义的 $\tilde{\rho}^{i}_{,k}{}^{l}(t)$、$(i, l, k) \in \mathbb{B}$。2：使用 (B.2) 计算 $|\mathbb{B}|$ 维向量 $\hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{j}$、$1 \le j, s \le n$。3：对于窗口大小 w，计算 $\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j} = \sum_{s=j-w+1}^{j} \hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb \rceil+l} - \sum_{s=j+1}^{j+w} \hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb \rceil+l}$，其中 $l = 0, \cdots, n - 2\lceil nb \rceil$。4：对于 $r = 1, \cdots, B$，执行以下操作 5：生成独立标准正态随机变量 $R^{(r)}_{j}$、$j = 1, \cdots, n$。6：回顾一下，$b = \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} b^{i}_{,k}{}^{l}$。计算

$$\tilde{Z}^{(r)}_{\text{boot}} = \frac{\max_{0 \le l \le n-2\lceil nb \rceil} \left| \sum_{j=w}^{2\lceil nb \rceil - w} \hat{\tilde{\mathbf{S}}}^{\mathbb{B}}_{l,j} R^{(r)}_{l+j} \right|_{\infty}}{\sqrt{2w\lceil nb \rceil}}.$$

7: **结束循环**

8: 令 $\tilde{r}_{\text{boot}}$ 表示自助法样本 $\tilde{Z}^{(1)}{}_{\text{boot}} \cdots, \tilde{Z}^{(B)}{}_{\text{boot}}$ 的 $(1-\alpha)$ 分位数。9: 若存在某个 k 使得 $(i, l, k) \in \mathbb{B}$，则在时间 $t \in [b, 1-b]$ 将 i 与 l 相连，当且仅当 $|g_{ilk}(t) - \tilde{\rho}^{i}_{,k}{}^{l}(t)| > \tilde{r}_{\text{boot}}(nb^{i}_{,k}{}^{l})^{-1/2}\tilde{\Gamma}^{i}_{,k}{}^{l}(t)$。

将局部线性回归 (2.4) 的残差定义为 $\hat{\tilde{e}}^{i,j}{}^{l}_{,k} = \tilde{y}^{i}_{j,k}\tilde{y}^{l}_{j,h} - \hat{\beta}^{i,}{}^{l}_{k}(t_j)$。对于 $\tilde{\Gamma}^{2}_{z}(\cdot)$ 的估计，我们使用

$$\hat{\tilde{\Gamma}}^{2}_{z}(t) = \frac{\kappa}{m} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Delta}^{2}_{z,i} \omega(t, i), \quad \omega(t, i) = K_{\eta}(t - t_i) / \sum_{j=1}^{n} K_{\eta}(t_j - t), \tag{B.1}$$

其中 $\tilde{\Delta}_{z,s} = \sum_{j=s}^{s+m-1} \hat{\Xi}_{z,j}$，以及 $\hat{\Xi}_{z,j} = (\hat{\tilde{e}}^{i,j}{}^{l}_{,h}/2 - \hat{\tilde{e}}^{i,}{}^{l}_{j\,k,})/\tilde{\sigma}_{i,l}(t) - 4^{-1}\tilde{\rho}^{i}_{,k}{}^{l}(t)\big(\hat{\tilde{e}}^{i}_{j,h}/\tilde{\gamma}^{i}_{0}(t_j) + \hat{\tilde{e}}^{l}_{j,h}/\tilde{\gamma}^{l}_{0}(t_j)\big)$。对于 $1 \le j \le 2\lceil nb \rceil$，$\hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{j}$ 是 $\bar{\Xi}^{\mathbb{B}}_{j}$ 的估计量（即 (2.12)），使用估计量 $\tilde{\Xi}_{z,j}$ 和 $\hat{\tilde{\Gamma}}^{2}_{z}(t)$ 来估计 $\Xi_{z,j}$ 和 $\tilde{\Gamma}^{2}_{z}(t)$，即

$$\hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{j} = (\hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B},\top}_{j,\lceil nb \rceil}, \cdots, \hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B},\top}_{n-2\lceil nb \rceil+j,n-\lceil nb \rceil})^{\top}, \text{ with } \hat{\bar{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{j,s} = (c_z K_{b_z}(t_j - t_s)\tilde{\Xi}_{z,j}/\hat{\tilde{\Gamma}}_{z}(t_s), z \in \mathbb{B})^{\top}. \tag{B.2}$$

B.2 理论性质

将 $\sqrt{nb_z}|g_z(t) - \tilde{\rho}_z(t)|/\tilde{\Gamma}_z(t)$ 写作 $\tilde{T}_z(t)$，$t \in [0, 1]$。那么，FWER（以数据为条件）可直接表示为 $1 - P_{H_0}(\{T_z(t) \le \tilde{r}_{\text{boot}}, z = (i, l, k) \in \mathbb{B}, t \in [b, 1-b]\}|\mathcal{F}_n)$，其中 H_0 表示式（1.1）的原假设。以数据为条件的时变网络恢复概率为

$$\int_{0}^{1} P(\tilde{N}(t)|\mathcal{F}_n)dt, \tag{B.3}$$

其中 $N(t) = \{T_z(t) \le \tilde{r}_{\text{boot}},\ z \in \mathbb{B} \cap \mathbb{B}(t)\} \cap \{T_z(t) \succ \tilde{r}_{\text{boot}},\ z \in \mathbb{B}(t)\}$。定义 $\mathcal{C}_n = \{\mathbf{x}(\cdot) = (x_z(\cdot)\ z \in \mathbb{B})^\top \in [b, 1-b]^{|\mathbb{B}|} : \sqrt{n b_z}|x_z(t) - \tilde{\rho}_z(t)| \le \tilde{r}_{\text{boot}} \tilde{\Gamma}_z(t)\ \forall t \in [b, 1-b],\ z \in \mathbb{B}\}$。回顾一下，$\alpha \in (0, 1)$ 是预先指定的显著性水平。

以下定理保证了算法 B.1的族错误率控制和恢复概率。证明见附录 C。

定理 B.1. 假设满足定理 *3.1* 的条件，并且

$$\vartheta_n^{1/3} (1 \vee \log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n))^{2/3} + \left(g_n(n|\mathbb{B}|)^{1/q}\right)^{q/(q+2)} \to 0.$$

(i)（第一类错误控制。）以 n 和 B 趋于无穷时的数据为条件，我们有

$$P_{H_0}(\{\tilde{T}_z(t) \le \tilde{r}_{\text{boot}}, z \in \mathbb{B}, t \in [b, 1-b]\}|\mathcal{F}_n) = P(\{\rho_z(\cdot), z \in \mathbb{B}\} \in \tilde{\mathcal{C}}_n|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{p} 1 - \alpha. \tag{B.4}$$

(ii)（恢复概率下界。）在假设 *3.5*下，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int_0^1 P(\tilde{N}(t)|\mathcal{F}_n) dt \ge 1 - \alpha,$$

以趋近于1 的概率，对任意小的 $\alpha > 0$成立，其中 $N(t)$ 是时刻 t正确恢复网络的事件，见 (B.3)。

B.3 实现

算法 B.1 的平滑参数选择方式与算法 2.1 类似。特别地，我们对 b_z, m_z, $z = (i, l, k) \in \mathbb{B}$ 以及 w 和 $\hat{\eta}$采用相同的选择方案；而对于 (4.1) 中的样本方差 $s^2_{w_i,\eta_j}$，则应将步骤 3 中的 $\check{\mathsf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j}$ 替换为方差缩减估计量 $\tilde{\mathsf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j}$。

C 证明

为使证明清晰，我们在表示相关性、带宽和估计量的下标时，可以用 (i, l, k) 表示 z。回顾 $b = \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} b^{i}_{\cdot,k}{}^{l}$。对于任意两个随机序列 a_n 和 b_n，令 $a_n \sim_1 b_n$表示以概率趋近于 1 的 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to 1$，$a_n \lesssim_1 b_n$ 表示以概率趋近于 1 的 $\limsup_{n\to\infty} a_n/b_n \le 1$。我们用 $a \vee b$ 表示 $\max\{a, b\}$。令 $\Theta(a, b) = a\sqrt{1 \vee \log(b/a)}$，其中 a, b 为正常数。令 $\mathcal{T} = [b, 1-b]$。

我们给出主论文中使用的必要命题以及各定理的证明，其证明见在线补充材料的附录 F。定义 $\mathcal{F}_n$ 可测的

事件

$$B_n' = \left\{ \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\gamma}_k^{i,l}(t) - \gamma_k^{i,l}(t) \right| > f_n q_n' \right\},$$

其中 $f_n = (nb)^{-1/2}(|\mathbb{B}|/b)^{1/q}$，$q_n'$ 是满足 $q_n' \to \infty$、$f_n q_n' \to 0$ 的正序列。

命题 C.1（估计的互相关曲线的渐近行为）。设 $\mathcal{T} = [b, 1-b]$。在假设 *3.1*、*3.2*、*3.3*、*3.4* 以及带宽条件 $nb^4 \to \infty$、$nb^7 \to 0$、$n^{2\phi-1}b^{-1}h \to 0$ 下，我们有以下结果：

(*i*) 回顾 $\vartheta_k^{i,l}(t) = \frac{1}{nb}\sum_{j=1}^n K_{b_k^{i,l}}(t_i - t)\,\Xi_{j,k}^{i,l}$，其中 $\Xi_{j,k}^{i,l}$ 的定义见（2.12）。于是，我们有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\rho}_k^{i,l}(t) - \rho_k^{i,l}(t) - \vartheta_k^{i,l}(t) \right| \mathbf{1}(\bar{B}_n') \right\|_q = O\left(n^{\phi-1}b^{-1-1/q}h + b^{3-1/q} + n^{-1/2}b^{-1/q}h \right).$$

(*ii*) 回顾，$\check{\vartheta}_k^{i,l}(t) := \frac{1}{nb}\sum_{j=1}^n \check{K}_{b_k^{i,l}}(t_i - t)\,\Xi_{j,k}^{i,l}$。于是，我们有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \check{\rho}_k^{i,l}(t) - \rho_k^{i,l}(t) - \check{\vartheta}_k^{i,l}(t) \right| \mathbf{1}(\bar{B}_n') \right\|_q = O\left(n^{\phi-1}b^{-1-1/q}h + b^{3-1/q} + n^{-1/2}b^{-1/q}h \right).$$

命题 C.2。在命题 *C.1* 的条件下，假设满足带宽条件 $\eta \to 0, n\eta \to \infty$, $m \to \infty$, $m = O(n^{1/3})$, $|\mathbb{B}|^{1/q}(mb/n)^{-1/(2q)}\sqrt{m/(nb)} \to 0$, $nb^3 \to \infty$, $nb^6 \to 0$。设对于 $(i,l,k) \in \mathbb{B}$，$\tilde{\Gamma}_k^{i,l,2}(t)$ 的二阶导数在 $(0,1)$ 上一致有界。则有

$$\left\| \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \hat{\tilde{\Gamma}}_k^{i,l,2}(t) - \tilde{\Gamma}_k^{i,l,2}(t) \right| \right\|_q = O\left(|\mathbb{B}|^{1/q} g_n' \right),$$

其中 $g_n' = \sqrt{m/(n\eta^2)} + 1/m + \eta + \sqrt{m/(nb)}(mb/n)^{-1/(2q)}$。

C.1 定理 B.1 的证明

令 $\tilde{Z}_{\text{boot}}$ 表示 $\tilde{Z}^{(r)}$ 在算法 B.1 的一次迭代中进行自助抽样算法 B.1。根据定理 3.1，只需证明

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P(\tilde{Z}_{\text{boot}} \le x | \mathcal{F}_n) - P\left(\left| \frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \tilde{\mathbf{Z}}_i \right|_\infty \le x \right) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{C.1}$$

其中 $(\tilde{\mathbf{Z}}_i)_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \in \mathbb{R}^{(n-2\lceil nb \rceil+1)|\mathbb{B}|}$ 是一个零均值高斯向量序列，其与向量 $(\bar{\Xi}_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}$ 具有相同的自协方差结构，定义见定理 3.1。下文中

ˆ证明中，为简便起见，我们省略 $\mathbb{B}$ 在 $\tilde{\mathbf{S}}_{i,j}^{\mathbb{B}}$ 中的下标。定义

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{a|\mathbb{B}|+c}^{\diamond}=\left((2w\lceil nb\rceil)^{-1/2}\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\hat{\tilde{S}}_{a-1,j,c}R_{a+j-1},a=1,\cdots,n-2\lceil nb\rceil+1,1\leq c\leq|\mathbb{B}|\right),$$

ˆˆ˜ ˜其中，$S_{l,j,r}$ 表示$\mathbf{S}_{l,j}$的第 r 个元素。令

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{\diamond}=\left(\tilde{\mathbf{Z}}_{1}^{\diamond,\top},\cdots,\tilde{\mathbf{Z}}_{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}^{\diamond,\top}\right)^{\top},$$

˜ ˜由此可得，$Z_{\text{boot}}=|\mathbf{Z}^{\diamond}|_{\infty}$。给定数据后，$k_1\leq k_2$ 的条件方差为

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\tilde{\mathbf{Z}}^{\diamond}}&:=(2w\lceil nb\rceil)^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\hat{\tilde{S}}_{k_1-1,j,j_1}R_{k_1-1+j}\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\hat{\tilde{S}}_{k_2-1,j,j_2}R_{k_2-1+j}|\mathcal{F}_n\right)\\&=\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w-(k_2-k_1)-1}\hat{\tilde{S}}_{k_1-1,j+k_2-k_1,j_1}\hat{\tilde{S}}_{k_2-1,j,j_2}/(2w\lceil nb\rceil).\end{aligned}$$

定义$\bar{\Xi}_{i,s,j}^{\mathbb{B}}$ 为$\bar{\mathbf{\Xi}}_{i,s}^{\mathbb{B}}$的第 j个元素。为简洁起见，我们省略$\bar{\Xi}_{i,s,j}^{\mathbb{B}}$中的索引 $\mathbb{B}$ 。定义

$$\tilde{S}_{a-1,j,c}=\sum_{i=j-w+1}^{j}\bar{\Xi}_{i+(a-1),\lceil nb\rceil+(a-1),c}-\sum_{i=j+1}^{j+w}\bar{\Xi}_{i+(a-1),\lceil nb\rceil+(a-1),c},$$

ˆ和 ˜$\mathbf{Z}^{\dagger}$ 通过在 ˜$\mathbf{Z}^{\diamond}$ 中用 $\tilde{S}_{(a-1),j,c}$ 替换 $\tilde{S}_{(a-1),j,c}$ 。

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\tilde{\mathbf{Z}}^{\dagger}}&:=(2w\lceil nb\rceil)^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\tilde{S}_{k_1-1,j,j_1}R_{k_1-1+j}\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\tilde{S}_{k_2-1,j,j_2}R_{k_2-1+j}|\mathcal{F}_n\right)\\&=\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w-(k_2-k_1)}\tilde{S}_{k_1-1,j+k_2-k_1,j_1}\tilde{S}_{k_2-1,j,j_2}/(2w\lceil nb\rceil).\end{aligned}$$

令 $\tilde{Z}_{i,j}$ 表示 $\tilde{\mathbf{Z}}_i$ 的第 j 个元素。由于 $\tilde{\mathbf{Z}}_i$ 与 $\bar{\mathbf{\Xi}}_i^{\mathbb{B}}$ 具有相同的协方差结构，因此 $\frac{1}{\lceil nb \rceil}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i$ 的协方差结构为 ——

$$\begin{aligned}\sigma^{\tilde{\mathbf{Z}}}_{k_1,k_2,j_1,j_2} &:= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lceil nb \rceil}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\tilde{Z}_{i,(k_1-1)|\mathbb{B}|+j_1}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\tilde{Z}_{i,(k_2-1)|\mathbb{B}|+j_2}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lceil nb \rceil}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\bar{\Xi}_{i+(k_1-1),\lceil nb \rceil+(k_1-1),j_1}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\bar{\Xi}_{i+(k_2-1),\lceil nb \rceil+(k_2-1),j_2}\right).\end{aligned}$$

根据 Dette 和 Wu (2021) 的 (5.12)，由于 $\Xi^{i}_{j,k,l})_{j=1}^{n}$ 是 LS，并且由于 假设 3.1 满足几何度量收缩条件，因此有

$$\left\|\max_{k_1,k_2,j_1,j_2}|\sigma^{\tilde{\mathbf{Z}}^\dagger}_{k_1,k_2,j_1,j_2}-\sigma^{\tilde{\mathbf{Z}}}_{k_1,k_2,j_1,j_2}|\right\|_{q/2} = O\left(\frac{\log^2 n}{w}+\frac{w}{nb}+\sqrt{\frac{w}{nb}}(n\log n)^{4/q}\right).$$

根据 Dette 和 Wu (2021) 的 (5.12) 和 (5.13)，有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(|\tilde{\mathbf{Z}}^\dagger|\le x\middle|\mathcal{F}_n\right)-P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right| = O_{\mathbb{P}}(\vartheta_n^{1/3}\{1\vee\log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n)\}^{2/3}), \tag{C.2}$$

其中 $\vartheta_n = \log^2 n + \frac{w}{nb} + \sqrt{\frac{w}{nb}}(n\log n)^{4/q}$。令 $g'_n = |\mathbb{B}|^{1/q}(\sqrt{m/(n\eta^2)}+1/m+\eta+\sqrt{m/(nb)})(mb/n)^{-1/2q}$, $\hat{f}_n = (nb)^{-1/2}\overline{b^{-1}}^{1/q}|\mathbb{B}|^{1/q}$。回顾在 (2.7) 和 (B.1) 中分别定义的估计量 $\tilde{\rho}^{i}_{k,l}(\cdot)$ 和 $\tilde{\Gamma}^{i}_{k,l2}(\cdot)$。定义 $\mathcal{F}_n$ 可测事件

$$A_n = \left\{\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\tilde{\Gamma}}^{i,l,2}_k(t)-\tilde{\Gamma}^{i,l,2}_k(t)\right|>g'_nq_n\right\},\quad B_n = \left\{\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\tilde{\beta}^{i,l}_k(t)-\beta^{i,l}_k(t)\right|>f_nq_n\right\},$$

其中，正数序列 q_n 趋于无穷大，使得 $(g'_n+f_n)q_n\to 0$，$\mathcal{T}=[b,1-b]$。于是，由引理 1 和 命题 C.2，$P(A_n\cup B_n)=O(q_n^{-q})$。因此，对于某个充分大的常数$M$，并且由于条件正态性，我们有

$$\mathbb{E}(|\tilde{\mathbf{Z}}^\diamond-\tilde{\mathbf{Z}}^\dagger|^q_\infty\mathbf{1}(\bar{A}_n\cap\bar{B}_n)|\mathcal{F}_n)\le M\left|\frac{\log(n|\mathbb{B}|)}{2w\lceil nb \rceil}\max_{\substack{1\le r\le|\mathbb{B}|\\0\le l\le n-2\lceil nb \rceil}}\sum_{j=w}^{2\lceil nb \rceil-w}(\hat{\tilde{S}}_{l,j,r}-\tilde{S}_{l,j,r})^2\mathbf{1}(\bar{A}_n\cap\bar{B}_n)\right|^{q/2}. \tag{C.3}$$

^^^ 回顾 (B.2) 中 $\bar{\mathbf{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{i+l,\lceil nb \rceil+l}$ 的定义。令 $\bar{\Xi}_{i+l,\lceil nb \rceil+l,r}$ 表示 $\bar{\mathbf{\Xi}}^{\mathbb{B}}_{i+l,\lceil nb \rceil+l}$ 的第 r 个元素。^^^^ 通过将 $\tilde{S}_{a,j,r}$ 中的 $\tilde{y}^i_{j,k}$ 替换为 $\tilde{\epsilon}^i_{j,k}$, $\tilde{S}^e_{a,j,r}$，定义 $\tilde{S}^\epsilon_{a,j,r}$；通过将 $\tilde{S}^\epsilon_{a,j,r}$ 中的 $\tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\epsilon}^l_{j,h}$ 替换为 $\tilde{e}^{i,l}_{j,k,}$,

^^^^^通过将 $\tilde{S}^{e}_{a,j,r}$ 中的 $\tilde{\Gamma}^{i}_{k}{}^{l}(t)$ 替换为 $\tilde{\Gamma}^{i}_{k}{}^{l}(t)$，得到 $\tilde{S}^{e,\Gamma}_{a}{}_{,j,r}$；并通过将 $\tilde{S}^{e}_{a}{}^{\Gamma}{}_{,j,r}$ 中的 $\tilde{\rho}^{i}_{k}{}^{l}(t)$ 替换为 $\hat{\rho}^{i}_{j,k}(t)$，得到 $\tilde{S}^{e}_{\Gamma,a}{}^{\rho}_{r}{}_{,j}$。注意，$\tilde{S}^{e}_{a}{}^{\Gamma}{}_{,j,r} = \tilde{S}_{l,j,r}$。根据 $\beta^{i}_{k}{}^{l}(\cdot)$ 的连续性，参照命题 C.1 的证明，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2w\lceil nb\rceil}}\left\|\max_{\substack{1\le r\le|\mathbb{B}|\\0\le l\le n-2\lceil nb\rceil}}\left(\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}(\hat{\tilde{S}}_{l,j,r}-\tilde{S}_{l,j,r})^2\mathbf{1}(\bar{A}_n\cap\bar{B}_n)\right)^{1/2}\right\|_q\\
&\le\frac{C(n|\mathbb{B}|)^{1/q}}{\sqrt{2w\lceil nb\rceil}}\max_{\substack{1\le r\le|\mathbb{B}|\\0\le l\le n-2\lceil nb\rceil}}\left|\sum_{j=w}^{2\lceil nb\rceil-w}\left(\|\hat{\tilde{S}}_{l,j,r}-\hat{\tilde{S}}^{\epsilon}_{l,j,r})\|_q^2+\|\hat{\tilde{S}}^{\epsilon}_{l,j,r}-\hat{\tilde{S}}^{e}_{l,j,r}\|_q^2\right.\right.\\
&\left.\left.+\|\hat{\tilde{S}}^{e}_{l,j,r}-\hat{\tilde{S}}^{e,\Gamma}_{l,j,r}\|_q^2+\|\hat{\tilde{S}}^{e,\Gamma}-\tilde{S}_{l,j,r}\|_q^2\right)\mathbf{1}(\bar{A}_n\cap\bar{B}_n)\right|^{1/2}\\
&=O((n^{\phi}h/\sqrt{w}+w^{3/2}/n+g'_nq_n+f_nq_n)(n|\mathbb{B}|)^{1/q}),
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

其中 C 是一个充分大的常数，最后一个不等式由三角不等式得出。令 $q_n=\left\{(g'_n+f_n+w^{3/2}/n+n^{\phi}h/\sqrt{w})(n|\mathbb{B}|)^{1/q}\right\}^{-1/(q+2)}$。在（3.1）条件下，我们有 $q_n\to\infty$，且 $(g'_n+f_n)\,q_n\le g_nq_n\to 0$。根据（C.2）、（C.3）和（C.4），Dette 和 Wu（2021）的引理 C.1 已证明（C.1），即：

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(\tilde{Z}_{\text{boot}}\le x|\mathcal{F}_n)-P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil-1}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_{\infty}\le x\right)\right|\\
&=O_{\mathbb{P}}\left(\vartheta_n^{1/3}\left\{1\vee\log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n)\right\}^{2/3}+\Theta\left(q_n^{-q},n|\mathbb{B}|\right)\right).
\end{aligned}
$$

~在 假设 3.5 下，对于 $t\in[b,1-b]$，$z=(i,\ l,\ k)\in\mathbb{B}(t)$，根据高维高斯过程的集中不等式，我们可以一致地得到

$$
\begin{aligned}
\sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t)-g_z(t)|/\hat{\tilde{\Gamma}}_z(t)&\ge\sqrt{nb_z}|g_z(t)-\rho_z(t)|/\hat{\tilde{\Gamma}}_z(t)-\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t)-\rho_z(t)|/\hat{\tilde{\Gamma}}_z(t)\\
&\ge\lambda_n\log(n|\mathbb{B}|)-O_{\mathbb{P}}(\log(n|\mathbb{B}|))\to\infty.
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

结合 (B.4) 和 (C.5)，在假设 3.5 下可得 $\lim_{n\to\infty}\lim_{B\to\infty}\int_0^1 P(\{\tilde{T}_z(t)\le\tilde{r}_{\text{boot}},z\in$ ~ ~ ~ $\mathbb{B}\cap\mathbb{B}(t)\}\cap\{T_z(t)>\tilde{r}_{\text{boot}},z\in\mathbb{B}(t)\}|\mathcal{F}_n)dt\ge\lim_{n\to\infty}\lim_{B\to\infty}P(\{\rho_z(\cdot)\ z\in\mathbb{B}\}\in\mathcal{C}_n|\mathcal{F}_n)=1-\alpha$，且该结论以趋近于 1 的概率成立。□

C.2 定理 3.2 的证明定理 3.2

（i）的证明。该结论由 命题 C.1 以及 定理 B.1 的证明中的类似论证可得。

（ii）的证明。进一步考察（C.5）式，可得 $\left|\sqrt{nb_z}\check{\rho}_z(t) - \overline{g_z}(t)| - \sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t) - \overline{g_z}(t)\right| = O_{\mathbb{P}}(\log(n|\mathbb{B}|)) = o_{\mathbb{P}}(\lambda_n)$。因此，若（3.3）成立，则根据定理 B.1 以及对充分小的 α 进行初等计算，即可推出（3.2）。下面我们将证明（3.3）。根据命题 C.2，我们有

$$\max_{z\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left|\hat{\check{\Gamma}}_z(t)/\hat{\tilde{\Gamma}}_z(t) - \check{\Gamma}_z(t)/\tilde{\Gamma}_z(t)\right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

记 $\Xi^{i,l}_{j,k} = \tilde{L}^{i,l}_{j,k}(t_j, \mathcal{F}_j)$，其中 $\tilde{L}^{i,l}_{j,k}(\cdot,\cdot)$ 是一个非线性滤波器，$(i,l,k) \in \mathbb{B}$。通过仔细考察 Dette 和 Wu（2022）的引理 C.3，可得 $\tilde{\Gamma}^{i,l}_{2,k}(t) = \kappa\sigma^2(\tilde{L}^{i,l}_{k}, t)$ 以及 $\check{\Gamma}^{i,l}_{2,k}(t) = \check{\kappa}\sigma^2(\tilde{L}^{i,l}_{k}, t)$，其中 $\sigma^2(\tilde{L}^{i,l}_{k}, t)$ 是 $\tilde{L}^{i,l}_{k}(t, \mathcal{F}_j)$ 的长期方差。回顾可知，$\check{K}(t) = (\check{K}_+(t) + \check{K}_-(t))/2$，其中 $\check{K}_\pm(t) = \sum_{j=0,1,2} A_j(\pm r)K(t + (\pm r + 1 - j)\delta)$，$A_0(r) = r(r-1)/2$，$A_1(r) = (1-r^2)$ $A_2(r) = r(r+1)/2$，对于某个选定的 $r \in (-1, 1)$ 和非负常数 δ。由初等计算可得

$$\int \check{K}^2(t)dt = \int K^2(t)dt - r^2(1-r^2)C(\delta) - \frac{1}{2}D(\delta),$$

其中 $C(\delta) = 1.5C(0,\delta) - 2C(0.5,\delta) + 0.5C(1,\delta)$，$C(a,\delta) = \frac{1}{2}\int K(u - a\delta)K(u + a\delta) + K(u - a\delta)K(u + a\delta)du$ 和 $D(\delta) = \kappa - r^2(1-r^2)C(\delta) - \frac{1}{4}\{2(2 - 3r^2)(1-r^2)C(r,\delta) + r^2(1-r)^2C(r+1,\delta) + r^2(r+1)^2C(r-1,\delta) - 4r(1-r)(1-r^2)C(r + 1/2,\delta) + 4r(1+r)(1-r^2)C(r - 1/2,\delta)\}$. 当 $\delta > 0$ 时，$C(\delta)$ 和 $D(\delta)$ 的正性可由假设 3.2 以及对 Cheng 等（2007）中命题 1 和命题 2 的仔细考察得出。

对于预先指定的显著性水平 $0 < \alpha < 1$，我们将通过证明 $|\tilde{r}_{\text{boot}}/\check{r}_{\text{boot}} - 1| = o_{\mathbb{P}}(1)$ 来说明

$$|\tilde{r}_{\text{boot}} - \sqrt{2\log b^{-1}}| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad |\check{r}_{\text{boot}} - \sqrt{2\log b^{-1}}| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

为简洁起见，我们仅给出 $\tilde{r}_{\text{boot}}$ 的证明，$\check{r}_{\text{boot}}$ 的证明类似。记 $\tilde{r}$为 $\tilde{r}_{\text{boot}}$的简写。我们首先证明，对于某个任意的非负 c，一致地有 $x > \sqrt{2\log b^{-1} - 2c}$，

$$\begin{aligned} P(\tilde{Z}_{\text{boot}} > x|\mathcal{F}_n) &\geq \prod_{z\in\mathbb{B}}(b^{-1}c_z^2 C_\kappa \exp(-x^2/2) + 2(1 - \Phi(x))) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &\geq (b^{-1}C_\kappa \exp(-x^2/2) + 2(1-\Phi(x)))^{|\mathbb{B}|} + o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{C.6}$$

其中 $C_\kappa = \sqrt{\int |K'(x)|^2 dx / \int K^2(x) dx}$。回顾，$P(\tilde{Z}_{\text{boot}} > \tilde{r} | \mathcal{F}_n) = 1 - \alpha$。因此，(C.6)将导出 $\tilde{r}^- := \sqrt{2\log(b^{-1}C_\kappa) - 2|\mathbb{B}|^{-1}\log\alpha} \lesssim_1 \tilde{r}$。回顾假设 3.3 中 c^* 的定义。另一方面，我们将证明，在假设 3.3 下，对于任意满足 $x/\sqrt{2\log\log n} \to \infty$的 x，

$$
\begin{aligned}
P(\tilde{Z}_{\text{boot}} > x | \mathcal{F}_n) &\le 1 - \prod_{z\in\mathbb{B}} (1 - b^{-1}c_z^2 C_\kappa \exp(-x^2/2) - 2(1-\Phi(x))) + o_{\mathbb{P}}(1), \\
&\le 1 - (1 - b^{-1}(c^*)^{-1} C_\kappa \exp(-x^2/2) - 2(1-\Phi(x)))^{|\mathbb{B}|} + o_{\mathbb{P}}(1), \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

这将导出 $\tilde{r} \lesssim_1 \sqrt{2\log(b^{-1}C_\kappa/c^*) - 2\log(1-(1-\alpha)^{1/|\mathbb{B}|})} =: \tilde{r}^+$。由于 $|\mathbb{B}|^{-1}\log\alpha = o(b^{-1})$，$-\log(1-(1-\alpha)^{1/|\mathbb{B}|}) = O(\log|\mathbb{B}|) = o(b^{-1})$，我们有 $\tilde{r}^- \sim_1 \sqrt{2\log b^{-1}}$和 $\tilde{r}^+ \sim_1 \sqrt{2\log b^{-1}}$，从而得到结果 $|\tilde{r} - \sqrt{2\log b^{-1}}| = o_{\mathbb{P}}(1)$。最后，进一步考察 (C.5) 后，我们有 $\left|\sqrt{nb_z}|\check{\rho}_z(t) - g_z(t)| - \sqrt{nb_z}|\tilde{\rho}_z(t) - g_z(t)|\right| = O_{\mathbb{P}}(\log(n|\mathbb{B}|)) = o_{\mathbb{P}}(\lambda_n \log(n|\mathbb{B}|))$。既然我们已证明 $\check{\Gamma}_z(t)/\tilde{\Gamma}_z(t) \xrightarrow{p} \sqrt{\check{\kappa}/\kappa} < 1$ 和 $|\tilde{r}_{\text{boot}}/\check{r}_{\text{boot}} - 1| = o_{\mathbb{P}}(1)$，则由 (B.4) 和结果 (i) 可得 (3.2)。

证明(C.6) **和**(C.7)。根据定理 B.1，给定数据后，$\tilde{Z}_{\text{boot}}$ 和 $\check{Z}_{\text{boot}}$ 的尾概率渐近相等

$$
P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty > x\right) \text{ and } P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\check{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty > x\right), \qquad \text{(C.8)}
$$

对 $x \in \mathbb{R}$ 一致成立，且其概率趋近于 1，见（C.1）。在接下来的证明中，我们将推导（C.8）中定义的尾概率的显式近似公式。为简洁起见，我们仅给出计算 $P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty > x\right)$上下界的详细过程；（C.8）中方差缩减尾概率（第二项）的结果可类似推出。回顾，$\tilde{Z}_{i,j}$ 是 j th个元素，属于 $\tilde{\mathbf{Z}}_i$。定义 $\bar{\tilde{Z}}_{i,j}$ 为$\tilde{Z}_{i,j}/\sqrt{\text{Var}(\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{Z}_{i,j})/(nb)}$。通过类似于Dette 和 Wu（2021）中引理 C.3的初等计算可知，$\text{Var}(\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{Z}_{i,j})/(nb)$有正下界，因此 $\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i$ 是$\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i$ 的标准化版本，且每个分量的方差均为 1。

证明 (C.6)。我们将证明分为以下 3 个步骤。固定 $\mathbb{B}$中各元素的顺序，并令 z 为以下证明中 j_{th} 的元素 $\mathbb{B}$。

步骤 1：在假设 3.6下，当 $|\mathbb{B}| = O(\log n)$ 时，我们将证明，对于$x > \sqrt{2\log b^{-1} - 2c}$，其中 c 是任意非负常数，

$$
P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\tilde{\mathbf{Z}}}_i\right|_\infty \le x\right) \le \prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|} P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb\rceil|\mathbb{B}|+j}\right| \le x\right) + o(1), \qquad \text{(C.9)}
$$

其中 $m^* = (n - 2\lceil nb \rceil)/(\lceil nb \rceil)$ 。

步骤 2：对于 $i.i.d.\ N(0,\ 1)$ 随机变量 $v_{z,\ j},\ z \in \mathbb{B},\ 1 \le j \le n$，对于 $b \to 0,\ nb \to \infty$，我们得到

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|} P\left(\max_{0\le s\le m^*} \left| \frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb \rceil |\mathbb{B}|+j} \right| \le x \right) - \prod_{z\in\mathbb{B}} P\left(\max_{0\le s\le m^*} \left| \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \frac{v_{z,i+s\lceil nb \rceil} K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb \rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}} \right| \le x \right) \right| = o(1). \tag{C.10}$$

步骤 3：证明对于 $x > \sqrt{2\log\ b^{-1} - 2c}$，对于**步骤 1**中定义的常数 c

$$\prod_{z\in\mathbb{B}} P\left(\max_{0\le s\le m^*} \left| \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \frac{v_{z,i+s\lceil nb \rceil} K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb \rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}} \right| > x \right) = \prod_{z\in\mathbb{B}} (b^{-1} c_z^2 C_\kappa \exp(-x^2/2) + 2(1 - \Phi(x))) + o(1), \tag{C.11}$$

其中 $\Phi(x)$ 是正态分布的累积分布函数，$C_\kappa = \sqrt{\int |K'(x)|^2 dx / \int K^2(x)\ dx}$。因此，由于 $c_z \ge 1$，（C.6）由（C.11）推出。

注 C.1。$|\mathbb{B}|$ 也可以按多项式速率发散，使得 $|\mathbb{B}| = o\left(b^{-\frac{1-\rho}{4}\frac{1-\rho}{1+\rho}()}\right)$。为简洁起见，我们省略其证明。

步骤 1 的证明。当 $|\mathbb{B}|$ 有限时，证明可由H¨usler 和 Sch¨upbach(1988年）的定理 3 得出。我们将其推广到发散的 $|\mathbb{B}|$。注意

$$P\left(\left| \frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \bar{\tilde{\mathbf{Z}}}_i \right|_\infty \le x \right) \le P\left(\max_{1\le j\le|\mathbb{B}|, 0\le s\le m^*} \left| \frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb \rceil |\mathbb{B}|+j} \right| \le x \right). \tag{C.12}$$

为简单起见，令

$$J_{k,j} := \frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \bar{\tilde{Z}}_{i,(k-1)|\mathbb{B}|+j}, \quad k = 1, \cdots, n - 2\lceil nb \rceil + 1, j = 1, \cdots, |\mathbb{B}|.$$

只需证明，高斯过程 $(J_{s\lceil nb \rceil+1,\ j})$ 的分布可以由 $(J^*_{s\lceil nb \rceil+1,\ j})$ 近似，其中对于不同的 j，它们相互独立（即，对于任意 s，l 和 $i \ne j$，$\mathrm{Cov}(J^*_{s\lceil nb \rceil+1,\ i},\ J^*_{l\lceil nb \rceil+1,\ j}) = 0$），并且满足

$$\mathrm{Cov}(J^*_{s\lceil nb \rceil+1,j}, J^*_{l\lceil nb \rceil+1,j}) = \mathrm{Cov}(J_{s\lceil nb \rceil+1,j}, J_{l\lceil nb \rceil+1,j}), \quad s, l = 0, \cdots, m^*, j = 1, \ldots, |\mathbb{B}|. \tag{C.13}$$

因此，根据C.13）的定义，我们有

$$\prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|} P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb\rceil|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right) = P(J^*_{s\lceil nb\rceil+1,j}\le x, 0\le s\le m^*, 1\le j\le|\mathbb{B}|).$$

根据H¨usler 和 Sch¨upbach (1988年年的定理 3，可得

$$\begin{aligned}
&\left|P\left(\max_{1\le j\le|\mathbb{B}|,0\le s\le m^*}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb\rceil|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right) - \prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|}P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\tilde{Z}}_{i,s\lceil nb\rceil|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right)\right| \\
&= \left|P(J_{s\lceil nb\rceil+1,j}<x, 0\le s\le m^*, 1\le j\le|\mathbb{B}|) - P(J^*_{s\lceil nb\rceil+1,j}<x, 0\le s\le m^*, 1\le j\le|\mathbb{B}|)\right| \\
&\le \sum_{1\le i,j\le|\mathbb{B}|}\sum_{0\le s,l\le m^*}\lambda^*_{i,j}(s,l)(1-\lambda^{*,2}_{i,j}(s,l))^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{1+\lambda^*_{i,j}(s,l)}\right\} := S_n, \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}$$

其中，$\lambda^*_{i,j}(s,l) = |\mathrm{Cov}(J_{s\lceil nb\rceil+1,i}, J_{l\lceil nb\rceil+1,j})|$，当 $i\neq j$, $s,l = 0,\cdots,m^*$ 时；而 $\lambda^*_{i,j}(s,l) = 0$ 在其他情况下。由于 $(\tilde{Z}_i)_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\in\mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$ 与 $(\bar{\Xi}_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 具有相同的自协方差结构，且 $\mathrm{Var}(\lambda^*_{i,j}(s,l)) = 1$，根据假设 3.6，存在一个常数 $\rho, 0<\rho<1$，使得 $|\lambda^*_{i,j}(s,l)|<\rho$ 对于 $i,j = 1,\cdots,|\mathbb{B}|$ 成立。令 $\theta_n = b^{-\lambda}$, $\lambda = (1-\rho)/(2(1+\rho))$。注意，根据 Zhou 和 Wu（2010）的引理 5，由于 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{Z}_{i,j})/(nb)$ 且 $\tilde{\Gamma}_z(\cdot)$ 均有正下界，对于 $|k_1-k_2|\ge\lfloor nb\log n\rfloor, k_1,k_2 = 1,\cdots, n-2\lceil nb\rceil+1$，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(J_{k_1,i}, J_{k_2,j}) &= O\left(\frac{c_z c_y}{nb}\sum_{p,q=1}^{2\lceil nb\rceil}E\left(\Xi_{y,p+k_1-1}\Xi_{z,q+k_2-1}K_{b_y}\left(\frac{p-\lceil nb\rceil}{n}\right)K_{b_z}\left(\frac{q-\lceil nb\rceil}{n}\right)\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{nb}\sum_{p,q=1}^{2\lceil nb\rceil}\chi^{|p+k_1-q-k_2|}\right) = O(\chi^{|k_1-k_2|}/(nb)),
\end{aligned}$$

其中，z和 y分别是 $\mathbb{B}$中的第 j和第 i个元素。对于 $|k_1-k_2|\le\lfloor nb\log n\rfloor$，可立即得出 $\mathrm{Cov}(J_{k_1,i}, J_{k_2,j}) = O(1)$。我们分别考虑 S_n 在 $|s-l|<\theta_n$ 和 $|s-l|\ge\theta_n$下的情形，$s, l = 0, \cdots, m^*$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\sum_{1\le i,j\le|\mathbb{B}|}\sum_{|s-l|<\theta_n} + \sum_{1\le i,j\le|\mathbb{B}|}\sum_{|s-l|\ge\theta_n}\right)\lambda^*_{i,j}(s,l)(1-\lambda^{*,2}_{i,j}(s,l))^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{1+\lambda^*_{i,j}(s,l)}\right\} \\
&:= S_{n,1}+S_{n,2},
\end{aligned}$$

其中，$S_{n,1}$ 和 $S_{n,2}$ 以显而易见的方式定义。注意，$|\lambda^*_{i,j}(s,l)|<\rho$ 和 $m^* = O(b^{-1})$。对于足够大的常数 $C>0$ 以及常数 c的对数 $x>\sqrt{2}$，其中 c在步骤

1 中定义，我
们有

$$S_{n,1} \le C|\mathbb{B}|^2 b^{-1}\theta_n \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{(1-\rho)x^2}{2(1+\rho)}\right\}$$
$$\le C|\mathbb{B}|^2 \theta_n b^{(1-\rho)/(1+\rho)} \exp(2c/(1+\rho)) = o(1). \tag{C.15}$$

另一方面，对于 $S_{n,\ 2}$，我们得到

$$S_{n,2} = O\left(|\mathbb{B}|^2 b^{-1}\chi^{nb\theta_n}/(nb)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\right) = o(1). \tag{C.16}$$

最后，结合 (C.12)、(C.14)、(C.15) 和 (C.16)，我们证明了 (C.9)。

步骤 2 的证明。记 $J^{\circ}_{k,\ j}: = \sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil} v_{z,\ i+k-1}K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})/\sqrt{nb_z\kappa}$ 在 (C.10) 中，其中 z 是 j_{th} 的元素 $\mathbb{B}$。根据 Chernozhukov 等人 (2013) 的引理 3.1，我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|} P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\bar{Z}}_{s\lceil nb\rceil|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right)\right.$$
$$\left.-\prod_{z\in\mathbb{B}} P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\frac{v_{z,i+s\lceil nb\rceil}K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}}\right|\le x\right)\right|$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\cap_{j=1}^{|\mathbb{B}|}\left\{\max_{0\le s\le m^*}|J^*_{s\lceil nb\rceil+1,j}|\le x\right\}\right) - P\left(\cap_{j=1}^{|\mathbb{B}|}\left\{\max_{0\le s\le m^*}|J^{\circ}_{s\lceil nb\rceil+1,j}|\le x\right\}\right)\right|$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\max_{0\le s\le m^*,1\le j\le|\mathbb{B}|}|J^*_{s\lceil nb\rceil+1,j}|\le x\right) - P\left(\max_{0\le s\le m^*,1\le j\le|\mathbb{B}|}|J^{\circ}_{s\lceil nb\rceil+1,j}|\le x\right)\right|$$
$$\le C\Delta^{1/3}\left\{1\vee\log(n|\mathbb{B}|/\Delta)\right\}^{2/3}, \tag{C.17}$$

其中 $\Delta \le \max_{1\le j\le|\mathbb{B}|,\ 1\le k,\ l\le n-2\lceil nb\rceil+1}\left|\mathbb{E}(J^*_{k,\ j}J^*_{l,\ j}) - \mathbb{E}(J^{\circ}_{k,\ j}J^{\circ}_{l,\ j})\right|$。接下来我们推导 Δ 的上界。首先，通过初等计算，对于 $1 \le k,\ l \le n-2\lceil nb\rceil+1$,$1 \le j \le |\mathbb{B}|$，有以下一致成立的结果，

$$\mathbb{E}(J^{\circ}_{k,j}J^{\circ}_{l,j}) = \frac{1}{nb_z\kappa}\sum_{p,q=1}^{2\lceil nb\rceil}\mathbb{E}v_{z,p+k-1}v_{z,q+l-1}K_{b_z}\left(\frac{p-\lceil nb\rceil}{n}\right)K_{b_z}\left(\frac{q-\lceil nb\rceil}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{nb_z\kappa}\sum_{p,q=1}^{2\lceil nb\rceil}\mathbf{1}(p=q+l-k)K_{b_z}\left(\frac{p-\lceil nb\rceil}{n}\right)K_{b_z}\left(\frac{q-\lceil nb\rceil}{n}\right)$$
$$= \kappa^{-1}\int K(u)K\left(u+\frac{k-l}{nb_z}\right)du + O((nb)^{-1}). \tag{C.18}$$

对于 $\mathbb{E}(J^*_{k,j}J^*_{l,j})$ 的计算，由于 $(\tilde{\mathbf{Z}}_i)_{i=1}^{2\lceil nb\rceil} \in \mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$ 具有相同的自协方差

由向量 $(\Xi_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 构成的结构，按照类似于 Dette 和 Wu (2021) 中引理 C.3 的论证可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{nb}\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{Z}_{i,(k-1)|\mathbb{B}|+j}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{Z}_{i,(l-1)|\mathbb{B}|+j}\right)\\
&=\frac{1}{nb}\sum_{p,q=1}^{2\lceil nb\rceil}\frac{\mathbb{E}\Xi_{z,p+k-1}\Xi_{z,q+l-1}K_{b_z}\left(\frac{p-\lceil nb\rceil}{n}\right)K_{b_z}\left(\frac{q-\lceil nb\rceil}{n}\right)}{\tilde{\Gamma}_z(\frac{k-1+\lceil nb\rceil}{n})\tilde{\Gamma}_z(\frac{l-1+\lceil nb\rceil}{n})}\\
&=\frac{1}{nb}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\Xi_{z,p}\Xi_{z,q}K_{b_z}\left(\frac{p-k+1-\lceil nb\rceil}{n}\right)K_{b_z}\left(\frac{q-l+1-\lceil nb\rceil}{n}\right)}{\tilde{\Gamma}_z(\frac{k-1+\lceil nb\rceil}{n})\tilde{\Gamma}_z(\frac{l-1+\lceil nb\rceil}{n})}\\
&=\kappa^{-1}\int K(u)K\left(u+\frac{k-l}{nb_z}\right)du+O(b\log b+\chi^{nbr_n}+r_n+(nb)^{-1}),
\end{aligned}$$

其中 $r_n=M\log n/(nb)$，M 是一个足够大的常数，而较大的 O 仅依赖于依赖度量和随机 Lipschitz 连续性的系数，这些系数由假设 3.1一致有界。因此，对于一致的 $1\le k,l\le n-2\lceil nb\rceil+1$ 以及 $1\le j\le\mathbb{B}$，有

$$\mathbb{E}(J_{k,j}^*J_{l,j}^*)=\kappa^{-1}\int K(u)K\left(u+\frac{k-l}{nb_z}\right)du+O(b\log b+\chi^{nbr_n}+r_n+(nb)^{-1}). \tag{C.19}$$

由（C.17）、（C.18）和（C.19），有 $\Delta=O(b\log b+\chi^{nbr_n}+r_n+(nb)^{-1})$，从而（C.10）得证。

步骤 3 的证明。对 $t\in[0,1]$，定义

$$\boldsymbol{\ell}_z(t)=(K_{b_z}(1/n-t),\cdots,K_{b_z}(1-t))^\top/(\sqrt{nb_z}\kappa^{1/2}),\quad \mathbf{T}_z(t)=\boldsymbol{\ell}_z(t)/|\boldsymbol{\ell}_z(t)|.$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\frac{v_{z,i+s\lceil nb\rceil}K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}}=\langle\boldsymbol{\ell}_z((s+1)\lceil nb\rceil/n),\mathbf{v}_z\rangle,$$

其中 $\mathbf{v}_z=(v_{z,1},\cdots,v_{z,n})^\top$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积。为应用 Sun 等人 (1994)，我们首先用 $s=0,\cdots,m^*$ 上的上确界近似离散的最大值 $t\in[0,1]$。按照

证明 定理 3.1中的类似推导，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\prod_{z\in\mathbb{B}}P\left(\max_{0\le s\le m^*}|\langle\mathbf{T}_z((s+1)\lceil nb\rceil/n),\mathbf{v}_z\rangle|\le x\right)-\prod_{z\in\mathbb{B}}P\left(\sup_{t\in[0,1]}|\langle\mathbf{T}_z(t),\mathbf{v}_z\rangle|\le x\right)\right|\\
&=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\max_{z\in\mathbb{B}}\max_{0\le s\le m^*}|\langle\mathbf{T}_z((s+1)\lceil nb\rceil/n),\mathbf{v}_z\rangle|\le x\right)-P\left(\max_{z\in\mathbb{B}}\sup_{t\in[0,1]}|\langle\mathbf{T}_z(t),\mathbf{v}_z\rangle|\le x\right)\right|\\
&=O(\Theta(|\mathbb{B}|^{1/(q+1)}(nb)^{-q/(q+1)},n|\mathbb{B}|)).
\end{aligned}\tag{C.20}$$

根据Sun 等人(1994) 的命题 1，由于 $x>\sqrt{2\log\,b^{-1}-2c}$ 对于步骤 1 中定义的常数 c，我们有

$$\prod_{z\in\mathbb{B}}P\left(\max_{t\in[0,1]}|\langle\mathbf{T}_z(t),\mathbf{v}_z\rangle|>x\right)=\prod_{z\in\mathbb{B}}(b_z^{-1}C_\kappa\exp(-x^2/2)+2(1-\Phi(x)))+O(|\mathbb{B}|b),\tag{C.21}$$

其中 $\Phi(x)$ 是正态分布的累积分布函数，$C_\kappa=\sqrt{\int|K'(x)|^2dx/\int K^2(x)dx}$，~~$|\mathbb{B}|b=O(b\log n)=o(1)$~~。结合 (C.20)、(C.21) 以及 $|\ell_z(t)|=1+O((nb)^{-1})$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\prod_{z\in\mathbb{B}}P\left(\max_{0\le s\le m^*}\left|\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\frac{v_{z,i+s\lceil nb\rceil}K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}}\right|>x\right)\\
&=\prod_{z\in\mathbb{B}}(b_z^{-1}C_\kappa\exp(-x^2/2)+2(1-\Phi(x)))+O(|\mathbb{B}|b+\Theta(|\mathbb{B}|^{1/(q+1)}(nb)^{-q/(q+1)},n|\mathbb{B}|)),
\end{aligned}$$

对于足够大的 q，由于 $nb^3\to\infty$, $\Theta(|\mathbb{B}|^{1/(q+1)}(nb)^{-q/(q+1)},\ n|\mathbb{B}|)$ 也收敛于 0。

证明 (C.7)。 根据 Lata-la 和 Matlak(2017年) 的定理 2，我们有

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\bar{\mathbf{Z}}}_i\right|_\infty\le x\right)\ge\prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|}P\left(\max_{1\le k\le n-2\lceil nb\rceil+1}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\bar{Z}}_{i,(k-1)|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right).\tag{C.22}$$

根据步骤 2 的证明中的类似论证（即（C.10）），我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\prod_{j=1}^{|\mathbb{B}|}P\left(\max_{1\le k\le n-2\lceil nb\rceil+1}\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\bar{Z}}_{i,(k-1)|\mathbb{B}|+j}\right|\le x\right)\right.\\
&\left.-\prod_{z\in\mathbb{B}}P\left(\max_{1\le k\le n-2\lceil nb\rceil+1}\left|\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\frac{v_{z,i+k-1}K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}}\right|\le x\right)\right|=o(1).
\end{aligned}\tag{C.23}$$

最后，根据步骤 3 的证明中的类似论证（即（C.11））， 对于 $x/\sqrt{2\log\log n} \to \infty$,

$$\prod_{z\in\mathbb{B}} P\left(\max_{1\le k\le n-2\lceil nb\rceil+1} \left| \sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil} \frac{v_{z,i+k-1} K_{b_z}(\frac{i-\lceil nb\rceil}{n})}{\sqrt{nb_z\kappa}} \right| \le x \right)$$
$$= \prod_{z\in\mathbb{B}} \left\{ 1 - (b_z^{-1} C_\kappa \exp(-x^2/2) + 2(1-\Phi(x))) \right\} + o(1), \tag{C.24}$$

其中 $\Phi(x)$ 是正态分布的累积分布函数， $C_\kappa = \sqrt{\int |K'(x)|^2 dx / \int K^2(x) dx}$。由（C.7）、（C.8）、（C.22）、（C.23）、（C.24）以及假设 3.3可得。□

《非平稳多元时间序列复杂趋势的时变相关网络分析》补充材料

Lujia Bai 和 Weichi Wu

清华大学工业工程系统计科学中心

补充材料安排如下：在附录 D中，我们给出了趋势函数平滑时采用插件估计量的算法，如注 2.1所述。附录 E给出了本文所用的引理和命题、相应的证明，以及采用插件估计量的算法的理论依据。

D 插件算法

回顾 $\hat{\epsilon}_{j,i} := Y_{j,i} - \hat{\mu}_i(t_j)$，$1 \le i \le p$，$1 \le j \le n$，其中 $\hat{\mu}_i(t_j)$ 是局部线性估计量，即

$$(\hat{\mu}_i(t), \hat{\mu}_i'(t)) = \underset{\eta_0,\eta_1}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{n} \{Y_{j,i} - \eta_0 - \eta_1(t_j - t)\}^2 K_{\tau_i}(t_j - t), \tag{D.1}$$

其中，τ_i 是$\hat{\mu}_i(\cdot)$的带宽参数。当主文中的(2.1)不存在变点时，我们可以去掉趋势函数，直接使用残差估计交叉相关，即$\hat{\gamma}^{i,l}_k(t) = \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} \hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t)$，以及

$$\hat{\rho}^{i,l}_k(t) = \hat{\gamma}^{i,l}_k(t)/\hat{\sigma}_{i,l}(t), \quad \hat{\sigma}_{i,l}(t) = \sqrt{\hat{\gamma}^{i}_0(t)\hat{\gamma}^{l}_0(t)}, \quad (i,l,k) \in \mathbb{B}, \tag{D.2}$$

这将使得 Zhao Zhao (2015) 的工作得以进行非平凡扩展：从对特定局部自相关曲线的推断，扩展到对多变量高维非平稳时间序列交叉相关曲线的联合推断，且滞后数量可能发散。回顾一下，$\hat{\gamma}^{i}_k(t)$是$\hat{\gamma}^{i,i}_k(t)$的简写。将过程和残差估计量定义为

$$e^{i,l}_{j,k} := \epsilon_{j,i}\epsilon_{j+k,l} - \gamma^{i,l}_k(t_j), \quad \hat{e}^{i,l}_{j,k} := \hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l} - \hat{\gamma}^{i,l}_k(t_j). \tag{D.3}$$

记作 $e^{i}_{j,k}$ 简写为 $e^{i,i}_{j,k}$。(2.12)的对应形式为

$$V^{i,l}_{j,k} = e^{i,l}_{j,k}/\sigma_{i,l}(t_j) - 2^{-1}\rho^{i,l}_k(t_j)\left(e^{i}_{j,0}/\gamma^{i}_0(t_j) + e^{l}_{j,0}/\gamma^{l}_0(t_j)\right). \tag{D.4}$$

假设 $V^{i,l}_{j,k}$具有如下形式：$V^{i,l}_{j,k} = L^{i,l}_k(t_j, \mathcal{F}_j)$，其中 $L^{i,l}_k(\cdot,\cdot)$ 是一个滤波器，且 $L^{i,l}_k(t, \mathcal{F}_j)$ 有明确定义。类似地，我们可以将 $\Gamma^{i,l}_k(t)$ 定义为以下对象的极限方差平方根

$(nb_k^{i,l})^{-1/2}\sum_{j=1}^n K_{b_k^{i,l}}(t_j-t)V_{j,k}^{i,l}$, and

$$\bar{\mathbf{V}}_{j,s}^{\mathbb{B}} := (c_k^{i,l}K_{b_k^{i,l}}(t_j-t_s)V_{j,k}^{i,l}/\Gamma_k^{i,l}(t_s),(i,l,k)\in\mathbb{B})^\top,\quad 1\le s\le n,\ j=\lceil n\tau_n\rceil,\cdots,2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil.$$

并得到 $\bar{\mathbf{V}}_j^{\mathbb{B}}=(\bar{\mathbf{V}}_j^{\mathbb{B}\top},,_{\lceil nb\rceil+\lceil n\tau_n\rceil},\bar{\mathbf{V}}_{j+1}^{\mathbb{B}\top},,_{\lceil nb\rceil+\lceil n\tau_n\rceil+1},\cdots,\bar{\mathbf{V}}_{n-2\lceil nb\rceil+j}^{\mathbb{B}\top},,_{n-\lceil n\tau_n\rceil-\lceil nb\rceil})^\top$。最后，我们在 $\bar{\mathbf{V}}_j^{\mathbb{B}}$ 中通过代入（D.3）的残差和（D.2）的估计量来估计 $V^{i}{}_{,j}{}^{l}{}_{,k}$ 和 $\Gamma^{i}{}_{,k}{}^{l}(u)$，即

$$\tilde{V}_{j,k}^{i,l}=\hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l}/\hat{\sigma}_{i,l}(t_j)-2^{-1}\hat{\rho}_k^{i,l}(t_j)\left(\hat{\epsilon}_{j,i}^2/\hat{\gamma}_0^i(t_j)+\hat{\epsilon}_{j,l}^2/\hat{\gamma}_0^l(t_j)\right),$$

and

$$\hat{\Gamma}_k^{i,l,2}(t)=\frac{\kappa}{m}\sum_{s=1}^n\Delta_{k,s}^{i,l,2}\omega(t,s),\quad \omega(t,s)=K_\eta(t-t_s)/\sum_{k=1}^n K_\eta(t_k-t),$$

其中 $\Delta^{i}{}_{,k}{}^{l}{}_{,s}=\sum_{j=s}^{s+m-1}\hat{}V^{i}{}_{,j}{}^{l}{}_{,k}$, , and $\hat{}V^{i}{}_{,j}{}^{l}{}_{,k}=\hat{}e^{i}{}_{,j}{}^{l}{}_{,k}/\hat{}\sigma_{i,l}(t_j)-2^{-1}\hat{}\rho^{i}{}_{,k}{}^{l}(t_j)\left(\hat{}e_{j,0}^{i}/\hat{}\gamma_0^i(t_j)+\hat{}e_{j,0}^{l}/\hat{}\gamma_0^l(t_j)\right)$。定义 $\bar{}\hat{}\mathbf{V}_j^{\mathbb{B}}=(\hat{}\mathbf{V}_j^{\mathbb{B}\top},,_{\lceil nb\rceil+\lceil n\tau_n\rceil},\hat{}\mathbf{V}_{j+1}^{\mathbb{B}\top},,_{\lceil nb\rceil+\lceil n\tau_n\rceil+1},\cdots,\hat{}\mathbf{V}_{n-2\lceil nb\rceil+j}^{\mathbb{B}\top},,_{n-\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil})^\top$, $j=\lceil n\tau_n\rceil,\cdots,2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil$为 $\bar{\mathbf{V}}_j^{\mathbb{B}}$的估计量，使用上文定义的估计量，其中

$$\bar{\hat{\mathbf{V}}}_{j,s}^{\mathbb{B}}=(c_k^{i,l}K_{b_k^{i,l}}(t_j-t_s)\tilde{V}_{j,k}^{i,l}/\hat{\Gamma}_k^{i,l}(t_s),(i,l,k)\in\mathbb{B})^\top.\tag{D.5}$$

写入 $\tau=\max_{i=1,\cdots,p}\tau_i$。采用插件估计的算法如算法 D。1.

注 *D.1.* 我们采用第 *4* 节中提出的方案选择平滑参数，并作如下修改。对于 $\mu(\cdot)$ 的估计，我们可以写成 $Y_0=Q_0(\tau)Y_0$，其中 Q_0 是依赖于 τ 的方阵，且 $Y_0=(Y_{1,i},\cdots,Y_{n,i})^\top$；$\hat{}Y_0=(\hat{}Y_{1,i},...,\hat{}Y_{n,i})^\top$ 是通过带宽 τ_i 得到的 Y_0 的估计值，即 $Y_{j,i}=\hat{}\mu_i(t_j)$。然后，我们通过最小化来选择 τ_i

$$\mathrm{GCV}(\tau)=\frac{n^{-1}|\mathbf{Y_0}-\hat{\mathbf{Y}}_0|^2}{[1-\mathrm{tr}\{\mathbf{Q}_0(\tau)\}/n]^2}.$$

我们也采用扩展最小波动率（*MV*）方法，在自助法算法 算法 *D.1* 中选择 w 和 η。正如 第 *4* 节所述，我们首先提出一个由可能的区块大小和带宽 $\{w_1,w_2,\cdots,w_{M_1}\}$, $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{M_2}\}$ 组成的网格。定义自助法统计量的样本方差 $s^2_{w_i,\eta_j}$ 为

$$s^2_{w_i,\eta_j}=\sum_{l=0}^{n-2\lceil nb\rceil}\sum_{r=w_i}^{n-w_i}\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B},\top}_{l,r,w_i,\eta_j}\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,r,w_i,\eta_j},$$

算法 D.1 时变网络的插件估计

1: 计算残差 $\hat{\epsilon}_{j,i} := Y_{j,i} - \hat{\mu}_i(t_j)$，其中 $\hat{\mu}_i(t_j)$ 的定义见 (D.1)，$1 \le i \le p, 1 \le j \le n$。2: 计算 $\hat{\rho}^{i}_{\cdot,k}{}^{l}(t)$，$(i,l,k) \in \mathbb{B}$，见 (D.2)。3: 计算 (D.5) 中的 $|\mathbb{B}|$ 维向量 $\hat{\mathbf{V}}^{\mathbb{B}}_{j,s}$，$1 \le j, s \le n$.

4: 对于窗口大小 w，计算 $\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j} = \sum_{s=j-w+1}^{j} \hat{\mathbf{V}}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb \rceil + l} - \sum_{s=j+1}^{j+w} \hat{\mathbf{V}}^{\mathbb{B}}_{s+l,\lceil nb \rceil + l}$，其中 $l = 0, \cdots, n - 2\lceil nb \rceil$。5: 对于 $r = 1, \cdots, B$，执行以下操作：6: 生成独立标准正态随机变量 $R^{(r)}_i$, $i = 1, \cdots, n$。7: 计算

$$Z^{(r)}_{\text{boot}} = \frac{\max_{0 \le l \le n - 2\lceil nb \rceil} \left| \sum_{j=w+\lceil n\tau_n \rceil - 1}^{2\lceil nb \rceil - w - \lceil n\tau_n \rceil} \hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,j} R^{(r)}_{l+j} \right|_\infty}{\sqrt{2w(\lceil nb \rceil - \lceil n\tau_n \rceil)}}$$

8: **结束循环**

9: 令 $\hat{r}_{\text{boot}}$ 表示自助样本 $Z^{(1)}{}_{\text{boot}} \cdots, Z^{(B)}{}_{\text{boot}}$ 的 $(1-\alpha)$ 分位数。

10: 若存在某个 k 使得 $(i,l,k) \in \mathbb{B}$，则在时间 $t \in [b, 1-b]$ 连接 i 和 l，当 $\sqrt{nb}^{i}_{\cdot,k}{}^{l} |g_{ilk}(t) - \hat{\rho}^{i}_{\cdot,k}{}^{l}(t)| > \hat{r}_{\text{boot}} \hat{\Gamma}^{i}_{\cdot,k}{}^{l}(t)$。

其中，$\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,r,w_i,\eta_j}$ 的定义见使用带宽 w_i 的算法 *D.1*，$m^{i}_{\cdot,k}{}^{l} = \lfloor n^{2/7} \rfloor$ 和 η_j 对应 $\hat{\Gamma}^{i}_{\cdot,k}{}^{l}(\cdot)$。然后选择 (i,j)，使下列准则最小：

$$\text{MV}(i,j) := \text{SD}\left\{ \cup_{r=-1}^{1} \{ s^2_{w_i, \eta_{j+r}} \} \cup \cup_{r=-1}^{1} \{ s^2_{w_{i+r}, \eta_j} \} \right\},$$

其中 *SD* 表示样本标准差。

对于 $z = (i,l,k) \in \mathbb{B}$, $t \in [0,1]$，将 $\sqrt{nb}_z |g_z(t) - \hat{\rho}_z(t)| / \hat{\Gamma}_z(t)$ 写作 $T_z(t)$，并令 $\hat{N}(t) = \{ T_z(t) \le \hat{r}_{\text{boot}}, z \in \mathbb{B} - \tilde{\mathbb{B}}(t) \} \cap \{ T_z(t) > \hat{r}_{\text{boot}}, z \in \tilde{\mathbb{B}}(t) \}$。定义 $\mathcal{C}_n = \{ \mathbf{x}(\cdot) = (x_z(\cdot))^\top \in [b, 1-b]^{|\mathbb{B}|} : \sqrt{nb}_z |x_z(t) - \rho_z(t)| \le \hat{r}_{\text{boot}} \hat{\Gamma}_z(t) \ \forall t \in [b, 1-b] \}$。类似于定理 B.1，以下定理保证了算法 D.1 的渐近第一类错误控制和恢复概率，其证明推迟至 E.2 节。

定理 D.1。在假设 *3.1*、*3.2*、*3.3* 下，假设 $\inf_{t \in (0,1)} \sigma(L^{i}_{\cdot,k}{}^{l}, t) > 0$，且 $\mu_i(\cdot)$ 的二阶导数存在，并且在 $[0,1]$ *for* $i = 1$、2、$\cdots$、p、$|\mathbb{B}|^{1/q}(\sqrt{nb^7} + (nb\tau^2)^{-1/2}) \to 0$ 上具有一致有界的 *Lipschitz* 常数。进一步假设对于某个充分大的 q,

$$\vartheta_n^{1/3} \{ 1 \vee \log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n) \}^{2/3} + \left(e_n (n|\mathbb{B}|)^{1/q} \right)^{q/(q+2)} \to 0,$$

其中 $\vartheta_n = \log^2 n/w + w/(nb) + \sqrt{w/(nb)} (n|\mathbb{B}|)^{4/q}$ 以及 $e_n = |\mathbb{B}|^{1/q} (\sqrt{m/(n\eta^2)} + \sqrt{1/m} + \eta^2 + \sqrt{m/(nb)} (mb/n)^{-1/(2q)} + (nb)^{-1/2} b^{-1/q} + 1/\sqrt{w\tau^2}) + w^{3/2}/n$。然后，我们有

(i)（第一类错误控制。）当 n 和 B 趋于无穷大时

$$P_{H_0}\big(T_z(t) \le \hat{r}_{\text{boot}}, t \in [b, 1-b], z \in \mathbb{B} | \mathcal{F}_n\big) = P(\{\rho_z(\cdot), z \in \mathbb{B}\} \in \mathcal{C}_n | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{p} 1-\alpha.$$

(ii)（恢复概率下界。）在假设 *3.5*下，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{B\to\infty} \int_0^1 P(\hat{N}(t)|\mathcal{F}_n)dt \ge 1-\alpha,$$

ˆ以趋近于 1 的概率成立，对任意小的 $\alpha > 0$ 均如此，其中 $N(t)$ 表示在时刻 t 正确恢复网络的事件。

注 D.2。 定理 *D.1* 同时适用于 $|\mathbb{B}|$ 固定和 $|\mathbb{B}|$ 发散这两种情形。若 定理 *D.1*的条件得到满足，则对于充分大的 q，如果 $w \asymp \lfloor n^{2/5} \rfloor$, $\eta \asymp n^{-1/7} b \asymp n^{-1/5}$, $m \asymp \lfloor n^{2/7} \rfloor$ 且 $\tau \asymp n^{-1/6}$。

E 证明

E.1 定理定理 3.1的证明

回顾，在命题 命题 C.1， $\vartheta^{i,l}_k(t) = \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^n K_{b^{i,l}_k}(t_i - t)\Xi^{i,l}_{j,k}$。根据命题 C.1，我们有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\rho}^{i,l}_k(t) - \rho^{i,l}_k(t) - \vartheta^{i,l}_k(t) \right| \mathbf{1}(\bar{B}'_n) \right\|_q = O\left(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h + b^3 + n^{-1/2}h) \right). \tag{E.1}$$

根据假设 3.2，我们有 $\mu_2 = \int u^2 K(u)du = 0$。令 $\mathcal{T}_n = [\lceil nb \rceil, n - \lceil nb \rceil]$。

注意，$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \max_{j\in\mathcal{T}_n} \left| \tilde{\rho}^{i,l}_k(t_j) - \rho^{i,l}_k(t_j) - \vartheta^{i,l}_k(t_j) \right|^q \le \sum_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \max_{j\in\mathcal{T}_n} \left| \tilde{\rho}^{i,l}_k(t_j) - \rho^{i,l}_k(t_j) - \vartheta^{i,l}_k(t_j) \right|^q$。根据 (E.1)，我们有

$$\left\| \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \max_{j\in\mathcal{T}_n} \left| \tilde{\rho}^{i,l}_k(t_j) - \rho^{i,l}_k(t_j) - \vartheta^{i,l}_k(t_j) \right| \mathbf{1}(\bar{B}'_n) \right\|_q = O((|\mathbb{B}|/b)^{1/q}(hn^{\phi-1}b^{-1} + b^3 + n^{-1/2}h)). \tag{E.2}$$

同理，由 引理 1 和 （F.14），可得 $P(B'_n) = O((q'_n)^{-q})$。简记 $c_n = (|\mathbb{B}|/b)^{1/q}(hn^{\phi-1}b^{-1} + b^3 + n^{-1/2}h)$。通过与 Dette 和 Wu （2021）中的引理 C.3 类似的初等计算，

$$nb^{i,l}_k \left\| \vartheta^{i,l}_k(t) \right\|^2 = \tilde{\Gamma}^{i,l,2}_k(t) + O(b\log b + \chi^{nbr_n} + r_n + (nb)^{-1}), \tag{E.3}$$

其中 $r_n = M\log n/(nb)$ 对某个充分大的正 M 成立。由于 $\sum_{s=1}^{2\lceil nb \rceil} c^{i,l}_{k,j,k} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t_s)/(\sqrt{nb}\tilde{\Gamma}^{i,l}_k(t_j)) = \sqrt{nb}|\vartheta^{i,l}_k(t_j)|/\tilde{\Gamma}^{i,l}_k(t_j)$，可以验证，在 (E.3) 下，$\frac{1}{\sqrt{nb}} \sum_{i=1}^{2\lceil nb \rceil} \Xi^{\mathbb{B}}_i$ 满足

推论 2 中的条件 (9)，见 Zhang 和 Cheng（2018）。那么，存在一个零均值高斯向量序列 $(\tilde{\mathbf{Z}}_i)_{i=1}^{2\lceil nb\rceil} \in \mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$，其自协方差结构与向量序列 $(\bar{\mathbf{\Xi}}_i^{\mathbb{B}})_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}$ 相同，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\bar{\mathbf{\Xi}}_i^{\mathbb{B}}\right|_\infty \le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty \le x\right)\right| = O((nb)^{-(1-11\iota)/8}).$$

那么，根据Dette 和 Wu (2021) 中的引理 C.1，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\max_{j\in\mathcal{T}_n}\sqrt{nb_k^{i,l}}|\tilde{\rho}_k^{i,l}(t_j)-\rho_k^{i,l}(t_j)|/\tilde{\Gamma}_k^{i,l}(t_j)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|\\&= O((nb)^{-(1-11\iota)/8}+(\sqrt{nb}c_n/\delta)^q+\Theta(\delta,n|\mathbb{B}|)+(q_n')^{-q}),\end{aligned}\tag{E.4}$$

其中，求解 $(\sqrt{nbc_n}/\delta)^q=\delta$ 和 $\delta=(q_n')^{-q}$，可得 $\delta=(\sqrt{nbc_n})^{q/(q+1)}$ 和 $q_n'=(\sqrt{nbc_n})^{1/(q+1)}$。由于 $|\mathbb{B}|^{1/q}hn^{\phi-1/2}b^{-1/2-1/q}\to 0$, $|\mathbb{B}|^{1/q}n^{1/2}b^{7/2-1/q}\to 0$，可得 $c_n=(|\mathbb{B}|/b)^{1/q}(hn^{\phi-1}b^{-1}+b^3+n^{-1/2}h)$ $=o((nb)^{-1/2})$。因此，$q_n'\to\infty$。在带宽条件 $(nb)^{-1/2}\{|\mathbb{B}|/(hn^{\phi-1}+b^4+n^{-1/2}hb)\}^{1/(q+2)}\to 0$ 下，可得 $f_nq_n'\to\infty$。注意，$c_n=o((nb)^{-1/2})=o(b^{-1})$。那么，也有

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{nb_k^{i,l}}(\tilde{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t))\mathbf{1}(\bar{B}_n')\right\|_q\le M/b,$$

其中 M 是一个足够大的常数。根据泰勒展开，$\tilde{\Gamma}^{i}{}_{k}^{l}(t)$ 的连续性，以及根据 $\tilde{\Gamma}^{i}{}_{k}^{l}(t)$ 的严格正性，由假设 3.4，可得

$$\left\|\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sqrt{nb_k^{i,l}}\sup_{|t_j-t|\le n^{-1},j\in\mathcal{T}_n,t\in[0,1]}\left|\frac{\tilde{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t)}{\tilde{\Gamma}_k^{i,l}(t)}-\frac{\tilde{\rho}_k^{i,l}(t_j)-\rho_k^{i,l}(t_j)}{\tilde{\Gamma}_k^{i,l}(t_j)}\right|\mathbf{1}(\bar{B}_n')\right\|_q = O(|\mathbb{B}|^{1/q}(nb)^{-1}).\tag{E.5}$$

结合（E.4）和（E.5），沿用 Dette 和 Wu（2021）中定理 3.2 的类似论证，可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\sqrt{nb_k^{i,l}}|\tilde{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t)|/\tilde{\Gamma}_k^{i,l}(t)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=1}^{2\lceil nb\rceil}\tilde{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right| = O(\tilde{\theta}_n),\tag{E.6}$$

其中 $\tilde{\theta}_n=(nb)^{-(1-11\iota)/8}+\Theta\left((\sqrt{nbc_n})^{q/(q+1)},\ n|\mathbb{B}|\right)+\Theta\left(|\mathbb{B}|^{1/(q+1)}(nb)^{-q/(q+1)},\ n|\mathbb{B}|\right)$。注意，对于足够大的 q，我们有 $\theta_n=o(1)$。□

E.2 定理 D.1 的证明

根据Dette 等人(2019)关于定理 3.1 的证明中的 (A.8) 和 (A.10)，假设 $\tau \to 0$，我们有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \max_{\lceil n\tau_n\rceil \le r \le n-\lceil n\tau_n\rceil} \left| \sum_{j=1}^{r} \hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l} - \sum_{j=1}^{r} \epsilon_{j,i}\epsilon_{j+k,l} \right| \right\|_q = O(\log^2 n/\sqrt{n\tau^2} + \tau^{-1}) = O(\tau^{-1}). \quad \text{(E.7)}$$

回顾，$\gamma^{i}_{,k}{}^{l}(t) = \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} \hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t)$。于是，根据分部求和公式和 (E.7)，有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in[\tau,1-\tau]} \left| \hat{\gamma}^{i,l}_k(t) - \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{j,i}\epsilon_{j+k,l} K_{b^{i,l}_k}(t_i - t) \right| \right\|_q = O((nb\tau)^{-1}). \quad \text{(E.8)}$$

回顾 ($e^{i}_{,j}{}^{l}{}_{,k}$ 在 (D.3) 中的定义。根据 Dette 等人 Dette 等人(2019) 的补充材料中的引理 B.1，在 假设 3.2下，可得 $\mu_2 = \int u^2 K(u)du = 0$ 对 $(i,l,k) \in \mathbb{B}$一致成立，因此有

$$\left\| \sup_{t\in[b,1-b]} \left| \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{j,i}\epsilon_{j+k,l} K_{b^{i,l}_k}(t_i - t) - \gamma^{i,l}_k(t) - \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t) e^{i,l}_{j,k} \right| \right\|_q = O((nb)^{-1} + b^3). \quad \text{(E.9)}$$

结合 (E.8) 和 (E.9)，可知，对 $(i,l,k) \in \mathbb{B}$，一致有

$$\left\| \sup_{t\in[\tau+b,1-\tau-b]} \left| \hat{\gamma}^{i,l}_k(t) - \gamma^{i,l}_k(t) - \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t) e^{i,l}_{j,k} \right| \right\|_q = O((nb\tau)^{-1} + b^3) = O(a_n), \quad \text{(E.10)}$$

其中 $a_n = (nb\tau)^{-1} + b^3$。令 $\mathcal{T}' = [\tau + b, 1 - \tau - b]$, $\mathcal{T}'_n = [\lceil n\tau_n\rceil + \lceil nb\rceil, n - \lceil n\tau_n\rceil - \lceil nb\rceil]$。
根据 (E.10) 以及类似于 (E.2) 的论证，有

$$\left\| \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \max_{s\in\mathcal{T}'_n} \left| \hat{\gamma}^{i,l}_k(t_s) - \gamma^{i,l}_k(t_s) - \frac{1}{nb^{i,l}_k} \sum_{j=1}^{n} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t) e^{i,l}_{j,k} \right| \right\|_q = O(|\mathbb{B}|^{1/q} a_n). \quad \text{(E.11)}$$

回顾 $V^{i}_{,j}{}^{l}_{k,}$在（D.4）中的定义。通过与 Dette 和 Wu （2021）中引理 C.3 类似的初等计算，对于 $t \in \mathcal{T}'$,

$$\frac{1}{nb^{i,l}_k} \left\| \sum_{j=1}^{n} V^{i,l}_{j,k} K_{b^{i,l}_k}(t_j - t) \right\|^2 = \kappa\sigma^2(L^{i,l}_k, t) + O(b\log b + \chi^{nbr_n} + r_n + (nb)^{-1}),$$

其中 $r_n = a\log n/(nb)$ 是某个充分大的正 a常数。因此，在 假设 3.3下，可以验证 Zhang 和 Cheng (2018) 的推论 2 中的条件 (9) 得到满足。于是可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{V}}_i^{\mathbb{B}}\right|_\infty\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|=O((nb)^{-(1-11\iota)/8}),$$

其中 $(\bar{\mathbf{Z}}_i)_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\in\mathbb{R}^{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}$ 是一个零均值高斯向量序列，其自协方差结构与向量 $(\bar{\mathbf{V}}_i^{\mathbb{B}})_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}$，$n|\mathbb{B}|=O(\exp(n^\iota))$ 相同，其中$0\le\iota<1/11$。由于 $|\mathbb{B}|^{1/q}a_n=o((nb)^{-1/2})$，$|\mathbb{B}|^{1/q}a_n=o(b^{-1})$，按照命题 C.1 的证明中的类似论证以及定理 3.1 中 (E.6) 的证明中的类似论证，我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}'}\sqrt{nb_k^{i,l}}|\hat{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t)|/\Gamma_k^{i,l}(t)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|=o(1). \tag{E.12}$$

令 Z_{boot} 表示 $Z^{(r)}$ 自助抽样 在 算法 D.1的一次迭代中。根据（E.12），只需证明

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(Z_{\text{boot}}\le x|\mathcal{F}_n)-P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|=o_{\mathbb{P}}(1).$$

定义

$$\mathbf{Z}^\diamond_{a|\mathbb{B}|+c}=\left(\sum_{j=w+\lceil n\tau_n\rceil-1}^{2\lceil nb\rceil-w-\lceil n\tau_n\rceil}\hat{S}^{\mathbb{B}}_{(a-1),j,c}R_{a+j-1},a=1,\cdots,n-2\lceil nb\rceil+1,1\le c\le|\mathbb{B}|\right),$$

其中，$\hat{S}^{\mathbb{B}}_{l,\,j,\,r}$ 表示$\hat{\mathbf{S}}^{\mathbb{B}}_{l,\,j}$的第 r个元素。令

$$\mathbf{Z}^\diamond=\left(\mathbf{Z}_1^{\diamond,\top},\cdots,\mathbf{Z}_{(n-2\lceil nb\rceil+1)|\mathbb{B}|}^{\diamond,\top}\right)^\top,$$

因此可得 $Z_{\text{boot}}=|\mathbf{Z}^\diamond|_\infty$。定义

$$S^{\mathbb{B}}_{(a-1),j,c}=\sum_{i=j-w+1}^{j}\bar{V}^{\mathbb{B}}_{i+(a-1),\lceil nb\rceil+(a-1),c}-\sum_{i=j+1}^{j+w}\bar{V}^{\mathbb{B}}_{i+(a-1),\lceil nb\rceil+(a-1),c},$$

并且$\mathbf{Z}^\dagger$ 通过代入 $\hat{S}^{\mathbb{B}}_{(a-1),\,j,\,c}$ 在$\mathbf{Z}^\diamond$ 由$S^{\mathbb{B}}_{(a-1),\,j,\,c}$。 与（C.2）的证明类似，定理 B.1，

我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{|\mathbf{Z}^{\dagger}|}{\sqrt{2w(\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil)}}\le x\middle|\mathcal{F}_n\right)-P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{Z}}_i\right|_{\infty}\le x\right)\right|$$
$$=O_{\mathbb{P}}(\vartheta_n^{1/3}\{1\vee\log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n)\}^{2/3}),\tag{E.13}$$

其中 $\vartheta_n=$对数$_w^{\,2}n+\frac{w}{nb}+\sqrt{\frac{w}{nb}}(n|\mathbb{B}|)^{4/q}$。回顾，$f_n=(nb)^{-1/2}b^{-1/q}|\mathbb{B}|^{1/q}$以及 $g_n'=|\mathbb{B}|^{1/q}(\sqrt{m/(n\eta^2)}+1/m+\eta+\sqrt{m/(nb)})(mb/n)^{-1/(2q)}$。令 $l_n=|\mathbb{B}|^{1/q}\tau^{-1}$。定义可由 $\mathcal{F}_n$ 测量的事件

$$A_n^{\circ}=\left\{\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}'}\left|\hat{\Gamma}_k^{i,l,2}(t)-\Gamma_k^{i,l,2}(t)\right|>g_nq_n^{\circ}\right\},\quad B_n^{\circ}=\left\{\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}'}\left|\hat{\gamma}_k^{i,l,2}(t)-\gamma_k^{i,l,2}(t)\right|>f_nq_n^{\circ}\right\},$$

and

$$C_n^{\circ}=\left\{\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\max_{\lceil n\tau_n\rceil\le r\le n-\lceil n\tau_n\rceil}\left|\sum_{j=1}^{r}\hat{\epsilon}_{j,i}\hat{\epsilon}_{j+k,l}-\sum_{j=1}^{r}\epsilon_{j,i}\epsilon_{j+k,l}\right|>l_nq_n^{\circ}\right\},$$

其中 q_n° 是一个趋于无穷大的正数列，满足 $(g_n'+l_n+f_n)q_n^{\circ}\to 0$。然后，利用与 命题 C.2、(E.7) 和 (E.11) 中类似的论证，可得

$$P(A_n^{\circ}\cup B_n^{\circ}\cup C_n^{\circ})=O((q_n^{\circ})^{-q}).\tag{E.14}$$

于是，对于某个足够大的常数 M，由条件正态性可得

$$\mathbb{E}(|\mathbf{Z}^{\diamond}-\mathbf{Z}^{\dagger}|_{\infty}^{q}\mathbf{1}(\bar{A}_n^{\circ}\cap\bar{B}_n^{\circ}\cap\bar{C}_n^{\circ})|\mathcal{F}_n)$$
$$\le M\left|\sqrt{\log n|\mathbb{B}|}\max_{1\le r\le|\mathbb{B}|,0\le l\le n-2\lceil nb\rceil}\left(\sum_{j=w+\lceil n\tau_n\rceil-1}^{2\lceil nb\rceil-w-\lceil n\tau_n\rceil}(\hat{S}_{l,j,r}^{\mathbb{B}}-S_{l,j,r}^{\mathbb{B}})^2\mathbf{1}(\bar{A}_n^{\circ}\cap\bar{B}_n^{\circ}\cap\bar{C}_n^{\circ})\right)\right|^{q/2}.\tag{E.15}$$

由 $\gamma_k(\cdot)$ 和 $\gamma_0(\cdot)$ 的连续性可得

$$\frac{1}{\sqrt{2w(\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil)}}\left\|\max_{1\le r\le|\mathbb{B}|,0\le l\le n-2\lceil nb\rceil}\left(\sum_{j=w+\lceil n\tau_n\rceil-1}^{2\lceil nb\rceil-w-\lceil n\tau_n\rceil}(\hat{S}_{l,j,r}^{\mathbb{B}}-S_{l,j,r}^{\mathbb{B}})^2\mathbf{1}(\bar{A}_n^{\circ}\cap\bar{B}_n^{\circ}\cap\bar{C}_n^{\circ})\right)^{1/2}\right\|_q$$
$$=O\left(\left((g_n'+f_n+l_n/\sqrt{w})q_n^{\circ}+w^{3/2}/n\right)(n|\mathbb{B}|)^{1/q}\right).\tag{E.16}$$

令 $q_n^{\circ}=\left((g_n'+f_n+l_n/\sqrt{w}+w^{3/2}/n)(n|\mathbb{B}|)^{1/q}\right)^{-1/(q+2)}$。结合（E.13）、（E.14）、（E.15）可得 d

(E.16，沿用证明定理 B.1时的类似论证，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(Z_{\text{boot}}\le x|\mathcal{F}_n)-P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{nb}}\sum_{i=\lceil n\tau_n\rceil}^{2\lceil nb\rceil-\lceil n\tau_n\rceil}\bar{\mathbf{Z}}_i\right|_\infty\le x\right)\right|\\
&=O_{\mathbb{P}}\left(\vartheta_n^{1/3}\left\{1\vee\log(n|\mathbb{B}|/\vartheta_n)\right\}^{2/3}+\Theta\left((q_n^\circ)^{-q},n|\mathbb{B}|\right)\right)\\
&=o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}$$

最后，(i) 和 (ii) 可由与 定理 B.1 的证明类似的论证得到。 □

F 辅助结果的证明

F.1 命题 C.1及一个推论的证明

为了证明 命题 C.1，我们首先证明以下引理。

引理 1。 在假设 *3.1*、*3.2*、*3.3*、*3.4* 和带宽条件 $nb^4\to\infty$、$nb^7\to 0$、$n^{2\phi-1}b^{-1}h^2\to 0$下，对于任意 $q\ge 4$，有以下结果：

(i) 基于差分的估计量具有如下近似形式：

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\left\|\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\beta}_k^{i,l}(t)-\beta_k^{i,l}(t)-\frac{1}{nb_k^{i,l}}\sum_{j=1}^n K_{b_k^{i,l}}(t_j-t)\tilde{e}_{j,k}^{i,l}\right|\right\|_q=O\left(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)\right).$$

（*ii*）对于采用方差缩减的基于差分的估计量，我们有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\left\|\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\check{\beta}_k^{i,l}(t)-\beta_k^{i,l}(t)-\frac{1}{nb_k^{i,l}}\sum_{j=1}^n \check{K}_{b_k^{i,l}}(t_j-t)\tilde{e}_{j,k}^{i,l}\right|\right\|_q=O\left(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)\right).$$

引理的证明 引理 *1*。 （i）的证明。为简洁起见，由于 i，l，k 将在后续分析中固定不变，因此我们在下标和上标中省略它们。也就是说，在不引起混淆的情况下，我们省略 i、l 和 k 对 $b^{i,l}_k$、$\beta^{i,l}_k$ 的依赖性。令 $\tilde{e}_j$ 表示 $\tilde{e}^{i,l}_{j,k}$。定义

$$\mathbf{S}_n(t)=\begin{pmatrix}S_{n,0}(t), & S_{n,1}(t)\\ S_{n,1}(t), & S_{n,2}(t)\end{pmatrix},$$

其中，对于 $l=0$，1，2，

$$S_{n,l}(t)=(nb)^{-1}\sum_{j=1}^n\left\{(t_j-t)/b\right\}^l K_b(t_j-t).$$

进一步定义

$$T_{n,s}(t)=\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}\tilde{e}_j\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t),\quad \mathbf{T}_n(t)=(T_{n,0}(t),T_{n,1}(t))^\top,$$

$$\delta_{n,s}(t)=\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t),\quad \mathbf{D}_n(t)=(\delta_{n,0}(t),\delta_{n,1}(t))^\top,$$

$$C_{n,s}(t)=\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}+\tilde{\epsilon}^l_{j,h}\tilde{\mu}^i_{j,k}))\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t),\quad \mathbf{C}_n(t)=(C_{n,0}(t),C_{n,1}(t))^\top.$$

回顾，$(nb)^{-1}\sum_{j=1}^{n}K_b(t_j-t)\tilde{y}^i_{j,k}\tilde{y}^l_{j,h}=(nb)^{-1}\sum_{j=1}^{n}K_b(t_j-t)(\beta(t_j)+\tilde{e}_j+\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}+\tilde{\epsilon}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}+\tilde{\epsilon}^l_{j,h}\tilde{\mu}^i_{j,k})$ $+O(n^{-1}h)$。令 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)=\left(\hat{\beta}(t)\ b\hat{\beta}'(t)\right)^\top$，$\boldsymbol{\eta}(t)=(\beta(t)\ b\beta'(t))^\top$，其中 $\beta'(t)=\partial\beta(t)/\partial t$。在条件（A4）下，根据泰勒展开，若 $|t_j-t|<b$, $\beta(t_j)=\beta(t)+\beta'(t)(t_j-t)+(\beta''(t)/2+O(b))(t_j-t)^2$。因此，

$$\mathbf{S}_n(t)(\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)-\boldsymbol{\eta}(t))=\begin{pmatrix}b^2S_{n,2}(t)(\beta''(t)+O(b))/2+O(n^{-1}h)\\ b^2S_{n,3}(t)(\beta''(t)+O(b))/2+O(n^{-1}h)\end{pmatrix}+\mathbf{T}_n(t)+\mathbf{D}_n(t)+\mathbf{C}_n(t).\quad\text{(F.1)}$$

我们按如下方式研究 $\mathbf{T}_n(t)$, $\mathbf{D}_n(t)$, $\mathbf{C}_n(t)$ in (F.1)。

(a) $\sup_{t\in\mathscr{T}}\|\mathbf{T}_n(t)\|_q$ 的阶数。

根据 Dette 等人 (2019) 的引理 B.3

$$\sup_{t\in\mathscr{T}}\|\mathbf{T}_n(t)\|_q=O((nb)^{-1/2}).\quad\text{(F.2)}$$

(b) $\mathbf{D}_n$ 的计算。回顾，$t_i=i/n$。定义集合

$$\mathbb{I}^i_k:=\{t_j:[t_{j-k},t_j)\ \text{contains a change point of}\ \mu_i(\cdot)\}.$$

令 $\mathbb{I}^i_k$ 为 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ 中 $\mathbb{I}^i_k$ 的补集。为简洁起见，这里省略 $\mathbb{I}^i_k$ 和 $\mathbb{I}^i_k$ 对 n 的依赖。如果 t_{j-k} 和 t_j 之间没有变点，则 $\tilde{\mu}^i_{j,\ k}=O(n^{-1}h)$；否则，根据条件 (B3)，我们将看到 $\tilde{\mu}^i_{j,\ k}=O(1)$。令 $\mathbb{I}=\mathbb{I}^i_k\cup\mathbb{I}^l_h$，并令 $\mathbb{I}$ 为补集

$\mathbb{I}$，只要不会引起混淆，我们就省略其对 i， l， k 的依赖。于是，

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathscr{T}}|\delta_{n,s}(t)| &\le \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left|\sum_{j\in\mathbb{I}}\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t)\right| \\ &\quad+\frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left|\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t)\right| \\ &= D_1+D_2. \end{aligned} \tag{F.3}$$

由于 $\mathbb{I}$中最多有 $O(n^{\phi}h)$个元素，

$$D_1 \le \frac{1}{nb}\sum_{j\in\mathbb{I}}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left|\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h}\right|\sup_{u\in[-1,1]}|K(u)u^s| = O(n^{\phi-1}b^{-1}h). \tag{F.4}$$

由于 $n^{2\phi-1}b^{-1}h^2\to 0$，$D_1$ 的阶小于$\mathbf{T}_n$。注意，在假设 3.2下，对于 $t\in\mathcal{T}$，

$$(nb)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\{(t_i-t)/b\}^{2l}K_b^2(t_i-t) = \int_{-\infty}^{\infty}u^{2l}K^2(u)du + O((nb)^{-1}).$$

根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned} D_2 &\le \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left|\left(\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}(\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}\{(t_j-t)/b\}^{2l}K_b^2(t_j-t)\right)^{1/2}\right| \\ &\le \frac{1}{nb}\left(\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}(\tilde{\mu}^i_{j,k}\tilde{\mu}^l_{j,h})^2\right)^{1/2}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left(\sum_{i=1}^{n}\{(t_i-t)/b\}^{2l}K_b^2(t_i-t)\right)^{1/2} \\ &= O(n^{-2}b^{-1/2}h^2). \end{aligned} \tag{F.5}$$

因此，结合（F.3）、（F.4）和（F.5），我们有

$$\sup_{t\in\mathscr{T}}|\delta_{n,s}(t)| = O(n^{\phi-1}b^{-1}h). \tag{F.6}$$

(c) 计算$\mathbf{C}_n$。设 $c^{i,s}_{j,k}(t) = \tilde{\mu}^i_{j,k}\{(t_j-t)/b\}^s K_b(t_j-t)$。如果 t_{j-k} 和 t_j之间没有变点，则 $c^{i,s}_{j,k}(t) = O(n^{-1}h)$；否则，根据条件(B3)， $c^{i,s}_{j,k}(t) = O(1)$。

$$\sup_{t\in\mathscr{T}}\|C_{n,s}(t)\|_q = \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left\|\sum_{j\in\mathbb{I}}\tilde{\epsilon}^i_{j,k}c^{l,s}_{j,h}(t)\right\|_q + \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left\|\sum_{j\in\mathbb{I}}\tilde{\epsilon}^l_{j,h}c^{i,s}_{j,k}(t)\right\|_q$$
$$+ \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left\|\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}\tilde{\epsilon}^i_{j,k}c^{l,s}_{j,h}(t)\right\|_q + \frac{1}{nb}\sup_{t\in\mathscr{T}}\left\|\sum_{j\in\bar{\mathbb{I}}}\tilde{\epsilon}^l_{j,h}c^{i,s}_{j,k}(t)\right\|_q$$
$$:= C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}. \tag{F.7}$$

与（F.4）类似，在条件 (A2)下，我们有

$$C_{11} = O(n^{\phi-1}b^{-1}h), \quad C_{12} = O(n^{\phi-1}b^{-1}h). \tag{F.8}$$

写作 $\bar{\mathbb{I}} = \{j_1, j_2, \cdots, j_K\}$，其中 j_s 表示 $\tilde{\mu}_i(\cdot)$ 在时间区间 $[t_{j_s-k}, t_{j_s}$ 内不含变点，且 $\tilde{\mu}_l(\cdot)$ 在时间区间 $[t_{j_s-h}, t_{j_s}$ 内不含变点，$1 \le s \le K$。$\mathbb{I}$ 的基数为 $O(n)$。令 $c^{l,s}_{j_0,h}(t) \equiv 0$。则有

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{m=1}^{K}\left|c^{l,s}_{j_m,h}(t) - c^{l,s}_{j_{m-1},h}(t)\right|$$
$$\le \sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{m=1}^{K}\left|\tilde{\mu}^l_{j_m,h}\{(t_{j_m}-t)/b\}^s K_b(t_{j_m}-t)\right| + \sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{m=1}^{K}\left|\tilde{\mu}^l_{j_{m-1},h}\{(t_{j_{m-1}}-t)/b\}^s K_b(t_{j_{m-1}}-t)\right|$$
$$= O(hb).$$

利用分部求和公式，可得

$$C_{21} = \frac{1}{nb}\left\|\sum_{m=1}^{K}\tilde{\epsilon}^i_{j_m,k}\right\|_q \sup_{t\in\mathcal{T}}\left|c^{l,s}_{j_K,h}(t)\right| + \frac{1}{nb}\sup_{1\le r\le K}\left\|\sum_{m=1}^{r}\tilde{\epsilon}^i_{j_m,k}\right\|_q \sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{m=1}^{K}\left|c^{l,s}_{j_m,h}(t) - c^{l,s}_{j_{m-1},h}(t)\right|$$
$$= O(n^{-1/2}h). \tag{F.9}$$

同理，可得 $C_{22} = O(n^{-1/2}h)$。结合 (F.7)、(F.8) 和 (F.9)，可得

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}\|C_{n,s}(t)\|_q = O(n^{\phi-1}b^{-1}h + n^{-1/2}h). \tag{F.10}$$

根据微积分，$\sup_{t\in\mathcal{T}}|S_{n,l}(t) - \mu_l| = O((nb)^{-1})$，其中 $\mu_l = \int_{\mathbb{R}} x^l K(x)dx$。结合（F.1）、（F.2）、（F.6）和（F.10），并利用 $\mathbf{S}_n(t)$ 的可逆性，在带宽条件 $n^{2\phi-1}b^{-1}h^2 \to 0$ 下，

我们有

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}\|\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)\|_q = O((nb)^{-1/2}+b^2).$$

在假设 3.2下，我们有 $\mu_0=1,\quad \mu_1=0,\quad \mu_2=0$。因此可得

$$\mathbf{S}_n(t)(\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)) = \begin{pmatrix} b^2\mu_2\beta''(t)/2+O(b^3+b/n+n^{-1}h) \\ O(b^3+b/n+n^{-1}h)\end{pmatrix} + \mathbf{T}_n(t)+\mathbf{D}_n(t)+\mathbf{C}_n(t),$$

在带宽条件 $nb^3\to\infty,\quad n^{2\phi-1}b^{-1}h^2\to 0$下，按照Zhou 和 Wu (2010) 中定理 1 的证明,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathcal{T}}\left\|\hat{\beta}(t)-\beta(t)-\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}K_b(t_j-t)\tilde{e}_j\right\|_q &= O((nb)^{-3/2}+b^3+n^{-1}b+n^{\phi-1}b^{-1}h+n^{-1/2}h)\\ &= O(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h). \end{aligned}\tag{F.11}$$

Us利用Dette 等人(2019) 的命题 B.1，对于固定的 $(i,\quad l,\quad k)\in\mathbb{B}$,

$$\left\|\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\beta}(t)-\beta(t)-\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}K_b(t_j-t)\tilde{e}_j\right|\right\|_q = O(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)).$$

在假设 3.1 以及 $\mu_i(t)$ 的 Lipschitz 常数一致有界的条件下，大 O 中 $(i,\quad l,\quad k)\in\mathbb{B}$ 的常数也可以一致有界，即

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\left\|\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\beta}(t)-\beta(t)-\frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{n}K_b(t_j-t)\tilde{e}_j\right|\right\|_q = O(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)).$$

（ii）的证明。由于 $\check{\beta}_+(t)=\sum_{j=0,\ 1,\ 2}A_j(r)\hat{\beta}_j(t-(r+1-j)\omega(t))$，根据（i）可得

$$\begin{aligned}&\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\left\|\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\check{\beta}_+(t)-\sum_{j=0,1,2}A_j(r)\beta_j(t-(r+1-j)\omega(t))\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0,1,2}A_j(r)K_b(t_i-t+(r+1-j)\omega(t))\tilde{e}_i\right|\right\|_q = O(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)).\end{aligned}\tag{F.12}$$

在 （A4）条件 假设 3.1下，根据 Cheng 等人 （2007）的（7.4）式，我们有

$$\left| \sum_{j=0,1,2} A_j(r)\beta_j(t-(r+1-j)\omega(t)) - \beta(t) \right| = O(b^3). \tag{F.13}$$

结合（F.12）和（F.13，可得

$$\begin{aligned} &\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \check{\beta}_+(t) - \beta(t) - \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0,1,2} A_j(r)K_b(t_i - t + (r+1-j)\omega(t))\tilde{e}_i \right| \right\|_q \\ &= O(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h + b^3 + n^{-1/2}h)). \end{aligned}$$

同样，可得

$$\begin{aligned} &\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \check{\beta}_-(t) - \beta(t) - \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0,1,2} A_j(-r)K_b(t_i - t + (-r+1-j)\omega(t))\tilde{e}_i \right| \right\|_q \\ &= O(b^{-1/q}(n^{\phi-1}b^{-1}h + b^3 + n^{-1/2}h)). \end{aligned}$$

因此，(ii) 成立。 □

F.1.1 命题C.1 的证明

(i) 的证明。回顾 $\mu_l = \int_{\mathbb{R}} x^l K(x)dx$。回顾等式 (2.2) 中 $\gamma^{i,l}_k(t)$ 和 $\sigma_{i,l}(t)$ 的定义，以及 (2.7) 中 $\tilde{\gamma}^{i,l}_k(t)$ 和 $\tilde{\sigma}_{i,l}(t)$ 的定义。根据 Zhou 和 Wu（2010）的引理 5，在假设 3.1 下，对于 $t \in (0, 1)$，有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} |\beta^{i,l}_k(t) - \gamma^{i,l}_0(t)| = O(\chi^h + h/n), \quad \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} |\beta^{i,l}_h(t) - 2\gamma^{i,l}_0(t)| = O(\chi^h + h/n). \tag{F.14}$$

注意，$\chi^h + h/n = o(n^{\phi-1}b^{-1}h) = o((nb)^{-1/2})$。我们首先研究 $\tilde{\sigma}_{i,l}(t) - \sigma_{i,l}(t)$ 的界和表示。

(a) 根据$\sigma_{i,\ l}(t)$和$\tilde{\sigma}_{i,\ l}(t)$的定义，

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\sigma}_{i,l}(t)-\sigma_{i,l}(t)\|_{2q} &= \left\|\sqrt{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)}-\sqrt{\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)}\right\|_{2q} \\
&= \left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)}+\sqrt{\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)}}\right\|_{2q} \\
&= \left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)(\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^l(t))+(\tilde{\gamma}_0^i(t)-\gamma_0^i(t))\gamma_0^l(t)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)}+\sqrt{\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)}}\right\|_{2q} \\
&\le \left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}\right\|_{4q}\|\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^l(t))\|_{4q}+\left\|\frac{\gamma_0^l(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}\right\|_{4q}\|\tilde{\gamma}_0^i(t)-\gamma_0^i(t))\|_{4q} \\
&= O((nb)^{-1/2}), \qquad \text{(F.15)}
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由三角不等式得出，最后一个等式由 (A2),(F.2)以及 (F.11)得出。

(b) $\tilde{\sigma}_{i,\ l}(t)-\sigma_{i,\ l}(t)$的表示。

设 $T^{i,\ l}_{\ k}(t)=\frac{1}{nb^{i,\ l}_{\ k}}\sum_{j=1}^n \tilde{e}^{i,\ l}_{\ j,\ k}K_{b^{i,\ l}_{\ k}}(t_j-t)$。当 $i=l$时，为简便起见，我们使用单一索引。例如，我们用 $T^i_h(t)$表示 $T^{i,\ i}_{\ h}(t)$。注意，由（F.11）、（F.2）和条件(A2)，

$$\|\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)-\gamma_0^i(t)T_h^l(t)/2+\gamma_0^l(t)T_h^i(t)/2\|_q=\|(\tilde{\gamma}_0^i(t)-\gamma_0^i(t))(\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^l(t))+(\tilde{\gamma}_0^i(t)-\gamma_0^i(t)-T_h^i(t)/2)\gamma_0^l(t)-\gamma_0^i(t)(\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^l(t)-T_h^l(t)/2)\|_q=O(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h)。$$

(F.16)

然后，我们有：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\tilde{\sigma}_{i,l}(t)-\sigma_{i,l}(t)-\left(\gamma_0^i(t)T_h^l(t)+\gamma_0^l(t)T_h^i(t)\right)/(4\sigma_{i,l}(t))\right\|_q \\
&=\left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)}{2\sigma_{i,l}(t)}\frac{2\sigma_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}-\left(\gamma_0^i(t)T_h^l(t)/2+\gamma_0^l(t)T_h^i(t)/2\right)/(2\sigma_{i,l}(t))\right\|_q \\
&\le\left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)-\gamma_0^i(t)T_h^l(t)/2-\gamma_0^l(t)T_h^i(t)/2}{\sigma_{i,l}(t)}\frac{\sigma_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}\right\|_q \\
&+\left\|\frac{\sigma_{i,l}(t)-\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}\left(\gamma_0^i(t)T_h^l(t)/2+\gamma_0^l(t)T_h^i(t)/2\right)/(2\sigma_{i,l}(t))\right\|_q \\
&\le\left\|\frac{\tilde{\gamma}_0^i(t)\tilde{\gamma}_0^l(t)-\gamma_0^i(t)\gamma_0^l(t)-\gamma_0^i(t)T_h^l(t)/2-\gamma_0^l(t)T_h^i(t)/2}{\sigma_{i,l}(t)}\right\|_q \\
&+\left\|\frac{\sigma_{i,l}(t)-\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)+\sigma_{i,l}(t)}\right\|_{2q}\left\|\left(\gamma_0^i(t)T_h^l(t)+\gamma_0^l(t)T_h^i(t)\right)/(4\sigma_{i,l}(t))\right\|_{2q} \\
&=O(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h), \qquad \text{(F.17)}
\end{aligned}
$$

其中，第二个不等式由$\tilde{\sigma}_{i的l}(t)$非负性得出，而最后一个等式由 (F.2)、(F.15) 和 (F.16) 得出。

回顾 $\vartheta^{i,\ l}_{\ k}(t):=\frac{1}{nb^{i,\ l}_{\ k}}\sum_{j=1}^n K_{b^{i,\ l}_{\ k}}(t_i-t)\Xi^{i,\ \ l}_{\ j\ k,}$，其中 $\Xi^{i,\ \ l}_{\ j\ ,\ k}$ 按 (2.12) 中的定义。根据引理 1 (F.14) 和 (F.17)，对所有 $t\in\mathcal{T}$，

$$
\begin{aligned}
\left\|\tilde{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t)-\vartheta_k^{i,l}(t)\right\|_q &=\left\|\frac{\left[\tilde{\gamma}_k^{i,l}(t)-\gamma_k^{i,l}(t)\right]-\left[\tilde{\sigma}_{i,l}(t)-\sigma_{i,l}(t)\right]\rho_k^{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}-\vartheta_k^{i,l}(t)\right\|_q \\
&=\left\|\frac{\sigma_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}\vartheta_k^{i,l}(t)-\vartheta_k^{i,l}(t)\right\|_q+O(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h). \qquad \text{(F.18)}
\end{aligned}
$$

由 (F.15)，可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathcal{T}}\left\|\left(\frac{\sigma_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}\vartheta_k^{i,l}(t)-\vartheta_k^{i,l}(t)\right)\mathbf{1}(\bar{B}_n')\right\|_q \\
&=\sup_{t\in\mathcal{T}}\left\|\left(\frac{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)-\sigma_{i,l}(t)}{\tilde{\sigma}_{i,l}(t)}\right)\mathbf{1}(\bar{B}_n')\right\|_{2q}\left\|\vartheta_k^{i,l}(t)\right\|_{2q}=O((nb)^{-1}). \qquad \text{(F.19)}
\end{aligned}
$$

因此，由 (F.18) 和 (F.19)，可得

$$
\sup_{t\in\mathcal{T}}\left\|(\tilde{\rho}_k^{i,l}(t)-\rho_k^{i,l}(t)-\vartheta_k^{i,l}(t))\mathbf{1}(\bar{B}_n')\right\|_q=O(n^{\phi-1}b^{-1}h+b^3+n^{-1/2}h).
$$

结果由此得出 m 命题 B.1，见Dette 等人（2019）以及对 th 的深入考察 e

大 O 中的常数。

（ii）的证明。结论由引理 1（ii）得出。 □

F.1.2 引理 1的一个推论

推论 F.1。 在命题 *C.1*的条件下，当 q充分大时，有

$$\max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\beta}_k^{i,l}(t) - \beta_k^{i,l}(t) - \frac{1}{nb_k^{i,l}} \sum_{j=1}^{n} K_{b_k^{i,l}}(t_j - t)\tilde{e}_{j,k}^{i,l} \right| = O_{\mathbb{P}}(c_n) = o_{\mathbb{P}}(1),$$

其中 c_n 的定义见定理 *3.1*。

证明。证明由引理 1 以及以下事实得出：

$$\begin{aligned} &[(i,l,k)\in\mathbb{B}]\sup\max_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\beta}_k^{i,l}(t) - \beta_k^{i,l}(t) - \frac{1}{nb_k^{i,l}} \sum_{j=1}^{n} K_{b_k^{i,l}}(t_j - t)\tilde{e}_{j,k}^{i,l} \right|^q \\ &\leq \sum_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\beta}_k^{i,l}(t) - \beta_k^{i,l}(t) - \frac{1}{nb_k^{i,l}} \sum_{j=1}^{n} K_{b_k^{i,l}}(t_j - t)\tilde{e}_{j,k}^{i,l} \right|^q. \end{aligned}$$

□

F.2 证明命题 C.2

证明。注意到$[(i,l,k)\in\mathbb{B}]\max\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\tilde{\Gamma}}^{i,l2,}_{k}(t)-\tilde{\Gamma}^{i,l2,}_{k}(t)\right|^q \leq \sum_{(i,l,k)\in\mathbb{B}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\hat{\tilde{\Gamma}}^{i,l2,}_{k}(t)-\tilde{\Gamma}^{i,l2,}_{k}(t)\right|^q$，因此

$$\left\| \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \hat{\tilde{\Gamma}}_k^{i,l,2}(t) - \tilde{\Gamma}_k^{i,l,2}(t) \right| \right\|_q \leq |\mathbb{B}|^{1/q} \max_{(i,l,k)\in\mathbb{B}} \left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \hat{\tilde{\Gamma}}_k^{i,l,2}(t) - \tilde{\Gamma}_k^{i,l,2}(t) \right| \right\|_q.$$

根据 命题 C.1、(F.2) 以及 Dette 等人(2019)，在假设 3.1下，对于 $(i,\ l,\ k)$ 一致地有 $\in\mathbb{B}$,

$$\left\| \sup_{t\in\mathcal{T}} \left| \hat{\beta}_k^{i,l}(t) - \beta_k^{i,l}(t) \right| \right\|_{2q} = O\left(n^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}} \right), \quad \left\| \max_{1\leq s\leq n-m+1} \left| \sum_{j=s}^{s+m-1} \Xi_{j,k}^{i,l} \right| \right\|_{2q} = O\left(m^{\frac{1}{2}} (m/n)^{-\frac{1}{2q}} \right).$$

该证明可由仔细考察 Zhou 和 Wu (2010) 的定理 5，以及 Dette 和 Wu(2019) 中的命题 1.3 得出。

□

参考文献

Acemoglu, D., Carvalho, V. M., Ozdaglar, A., and Tahbaz-Salehi, A. (2012). 总体波动的网络起源。《计量经济学》，80(5):1977–2016. Andrie˛s, A. M., Ongena, S., Sprincean, N., and Tunaru, R. (2022). 具有系统重要性的机构之间的风险溢出与互联性。《金融稳定杂志》，58:100963. Bailey, N., Pesaran, M. H., and Smith, L. V. (2019). 一种针对大样本相关矩阵正则化的多重检验方法。《计量经济学杂志》，208(2):507–534. Basu, S. and Rao, S. S. (2021). 非平稳时间序列的图模型。arXiv预印本 arXiv:2109.08709. Borsboom, D., Deserno, M. K., Rhemtulla, M., Epskamp, S., Fried, E. I., McNally, R. J., Robin- augh, D. J., Perugini, M., Dalege, J., Costantini, G., et al. (2021). 心理科学中的多变量数据网络分析。《自然·方法入门综述》，1(1):1–18. Bouri, E., Gil-Alana, L. A., Gupta, R., and Roubaud, D. (2019). 比特币市场长记忆波动率建模：持续性与结构突变的证据。《国际金融与经济学杂志》，24(1):412–426. Braumann, A., Kreiss, J.-P., and Meyer, M. (2021). 基于自回归筛法自助法的自协方差同时推断。《时间序列分析杂志》，42(5-6):534–553. Brunetti, C., Harris, J. H., Mankad, S., and Michailidis, G. (2019). 银行间市场的互联性。《金融经济学杂志》，133(2):520–538. Cai, T. T. and Liu, W. (2016). 相关性的大规模多重检验。《美国统计学会杂志》，111(513):229–240. PMID: 27284211. Chen, J., Li, D., Li, Y.-N., and Linton, O. (2022). 高维时间序列的时变网络估计。Janeway研究所工作论文 2231，剑桥大学经济学院。Cheng, M.-Y., Fan, J., and Marron, J. S. (1997). 关于自动边界校正。《统计学年刊》，25(4):1691–1708. Cheng, M.-Y., Peng, L., and Wu, J.-S. (2007). 降低单变量平滑中的方差。《统计学年刊》，35(2):522–542.

Chernozhukov, V., Chetverikov, D., and Kato, K.（2013）。高维随机向量和的最大值的高斯近似与乘子自助法。*The Annals of Statistics*，41(6):2786 – 2819。Craven, P. and Wahba, G.（1978）。用样条函数平滑含噪数据。数值数学，31(4):377–403。Cui, Y., Levine, M., and Zhou, Z.（2021）。复杂趋势下时变自协方差的估计与推断：一种基于差分的方法。电子统计学期刊，15(2):4264 – 4294。Dahlhaus, R., Richter, S., and Wu, W. B.（2019）。迈向非线性局部平稳过程的一般理论。伯努利，25(2):1013 – 1044。Dette, H. and Wu, W.（2019）。检测非平稳过程均值的相关变化——一种质量超额方法。*The Annals of Statistics*，47(6):3578–3608。Dette, H. and Wu, W.（2021）。局部平稳函数型时间序列均值的置信曲面。*arXiv preprint arXiv:2109.03641*。Dette, H. and Wu, W.（2022）。局部平稳时间序列的预测。*Journal of Business &Economic Statistics*，40(1):370–381。Dette, H., Wu, W., and Zhou, Z.（2019）。非平稳时间序列相关性的变点分析。《中华统计学志》，29(2):611–643。Diebold, F. X. and Yilmaz, K.（2014）。论方差分解的网络拓扑：测量金融公司的连通性。《计量经济学杂志》，182(1):119–134。《因果关系、预测与设定分析：最新进展与未来方向》。Efron, B.（1990）。更高效的自助法计算。《美国统计学会杂志》，85(409):79–89。Efron, B.（2007）。相关性与大规模同时显著性检验。《美国统计学会杂志》，102(477):93–103。Efron, B.（2012）。大规模推断：用于估计、检验和预测的经验贝叶斯方法，第1卷。剑桥大学出版社。Hall, P., Kay, J. W., and Titterington, D. M.（1990）。非参数回归中方差的渐近最优基于差分的估计。《生物统计学》，77(3):521–528。

H¨usler, J. and Sch¨upbach, M.（1988）。非平稳多元高斯序列最大值的极限结果。*Stochastic Processes and their Applications*，28(1):91–99。Inder, T.-G. and Axel, M.（2017）。具有不连续信号和m-依赖误差的回归中的自协方差估计：一种基于差分的方法。*Scandinavian Journal of Statistics*，44(2):346–368。Karavias, Y., Narayan, P. K., and Westerlund, J.（2022）。交互效应面板中的结构突变及股市对新冠肺炎的反应。*Journal of Business & Economic Statistics*，0(0):1–14。Kim, Y., Han, S., Choi, S., and Hwang, D.（2014）。利用时间过程数据推断动态网络。***Briefings in Bioinformatics***，15(2):212–228。Kolaczyk, E. D. and Cs´ardi, G.（2014）。使用*R*语言进行网络数据的统计分析，第65卷。Springer。Lahiri, S.（2003）。相关数据的重采样方法。Springer Science & Business Media。Langfelder, P. and Horvath, S.（2008）。WGCNA：用于加权相关网络分析的R语言软件包。***BMC Bioinformatics***，9(1):1–13。Lata-la, R. and Matlak, D.（2017）。Royen证明的高斯相关不等式。载于***Geometric Aspects of Functional Analysis***，第265–275页。Springer。Marti, G., Nielsen, F., Bi´nkowski, M., and Donnat, P.（2021）。金融市场中相关性、层级结构、网络与聚类二十年研究综述，第245–274页。Springer International Publishing, Cham。M¨uller, H.-G. and Stadtmuller, U.（1987）。回归分析中的异方差性估计。*The Annals of Statistics*，15(2):610–625。Politis, D. N., Romano, J. P., and Wolf, M.（1999）。子抽样。Springer Science & Business Media。Puliga, M., Caldarelli, G., and Battiston, S.（2014）。信用违约掉期网络与系统性风险。***Scientific Reports***，4(1):1–8。Royen, T.（2014）。将高斯相关猜想推广至多元伽马分布的一个简单证明。*arXiv preprint arXiv:1408.1028*。St˘aric˘a, C. and Granger, C.（2005）。股票收益率中的非平稳性。*The Review of Economicsand Statistics*，87(3):503–522。

Sun, J., Loader, C. R., 等（1994）。线性回归和平滑的同时置信带。*The Annals of Statistics*, 22(3):1328–1345。Vogt, M.（2012）。局部平稳时间序列的非参数回归。统计年鉴, 40(5):2601–2633。Wu, W. 和 Zhou, Z.（2019）。复杂时间动态下的多尺度跳跃检验与估计。*arXiv* 预印本 *arXiv:1909.06307*。Xiao, H. 和 Wu, W. B.（2014）。序列协方差的端口曼托检验与同时推断。《中华统计学志》, 24(2):577–599。Zhang, X. 和 Cheng, G.（2018）。物理依赖下高维向量的高斯近似。伯努利, 24(4A):2640 – 2675。Zhao, Z.（2015）。局部平稳模型中局部自相关的推断。*Journal ofBusiness & Economic Statistics*, 33(2):296–306。Zhou, Z.（2013）。异方差性与自相关稳健结构变化检测。《美国统计学会杂志》, 108(502):726–740。Zhou, Z. 和 Wu, W. B.（2010）。时变系数线性模型的同时推断。《英国皇家统计学会杂志: *B*辑（统计方法学）》, 72(4):513–531。