arXiv:2302.05168v1 [math.AP] 10 Feb 2023

无限维端口哈密顿系统——系统节点方法

FRIEDRICH PHILIPP、TIMO REIS 和 MANUEL SCHALLER

摘要。我们研究线性无限维端口哈密顿系统的算子理论方法。具体而言，我们采用 STAFFANS 的系统节点理论 [34] ，为端口哈密顿系统提出一个合适的概念，从而能够以统一的方法处理具有边界控制以及分布式控制和观测的系统。本文提出的概念既不限于抛物型系统，也不限于双曲系统，并且还涵盖多维空间区域上的偏微分方程。我们通过若干物理实例对所提出的理论进行了验证。

关键词。端口哈密顿系统、无限维系统、系统节点、边界控制

1. 引言

端口哈密顿系统源自对物理系统的基于能量的建模。这一类系统在功率守恒网络互连下仍保持闭合，也就是说，宽泛地讲，端口哈密顿系统耦合后仍得到端口哈密顿系统。因此，它们构成了一种网络建模范式，为对来自不同物理领域的系统间相互作用进行建模提供了系统化方法，这些领域包括电动力学、（连续体）力学、流体动力学、化学反应动力学和热力学。

对于由常微分方程和微分代数方程 [8, 14, 25, 26, 37]描述的端口哈密顿系统，相关理论已取得巨大进展。另一方面，许多用于物理系统建模的偏微分方程，其内在结构显然类似于常微分方程情形中众所周知的结构。由于偏微分方程通常可以改写为无限维形式，因此，要对这类端口哈密顿系统进行严谨的分析，需要采用适当的算子理论方法；这种方法最好既不局限于分布式控制或边界控制，也不局限于某些特殊类别的偏微分方程，例如抛物型或双曲型方程。

最一般的方法是借助几何结构，例如Dirac结构和拉格朗日子流形；它们对于能量平衡的成立至关重要。粗略地说，上述几何结构与向量空间丛有关，这些向量空间丛相对于某些不定内积是自正交的。由此形成了端口哈密顿系统的行为方法，入门介绍见 [37] 。在 [22, 29, 38, 39],中，这一方法被推广到带边界端口的偏微分方程类，其中采用了Stokes-Dirac结构的概念；它是函数空间上的一种特殊Dirac结构。 [28]介绍了Dirac结构和拉格朗日子流形的泛函分析方法。端口哈密顿系统的几何方法的缺点在于，它们既不能给出解的存在性结果，也不能对解进行定性刻画，例如稳定性或正则性。

对于空间一维双曲偏微分方程，这种严谨的分析最初发表于学位论文 [40], ，随后在教科书 [19] 中进一步阐述，并

在其后数篇论文 [16–18], 中，研究者成功运用无限维系统理论，对这类系统进行了深入的定性分析。具体而言，空间域的一维性使得我们可以考虑有限维的边界迹空间，从而针对边界条件建立简便的线性代数判据，用以判断解的存在性和稳定性。最近，有人提出了一种极具前景的推广，将这一方法用于多维空间区域上的双曲型偏微分方程 [31]。

本文所采用的方法在一定程度上将更加偏向算子理论，但主要受到以下表示形式的启发

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (J - R)Hx(t) + (B - P)u(t), \\ y(t) &= (B^* + P^*)Hx(t) + (S - N)u(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

有限维端口哈密顿系统可表示为 [8, 24], , 其中 $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $N \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为斜厄米算子，而 $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $W := \left[\begin{smallmatrix} R & P \\ P^* & S \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$ 为厄米半正定算子。系统的总能量由哈密顿量 $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}x^*Hx$ 给出。利用 (1.1) 以及 J 和 N 的斜伴随性，再结合 W 和 H 的半正定性，对于所有 $t > 0$、 $u \in L^2([0,t];\mathbb{C}^m)$， $x_0 \in \mathbb{C}^n$，满足 $x(0) = x_0$ 的 (1.1) 的解满足耗散不等式

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x_0) = -\operatorname{Re}\int_0^t \begin{pmatrix} Hx(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix}^* \left[\begin{smallmatrix} R & P \\ P^* & S \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} Hx(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau + \operatorname{Re}\int_0^t u(\tau)^* y(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \leq \operatorname{Re}\int_0^t u(\tau)^* y(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其具有能量平衡的物理含义。也就是说，虽然 $\mathcal{H}(x(t))$ 表示时刻 t 存储的能量，但等号后的第一个积分表示系统在时间区间 $[0,t]$ 内耗散的能量，而 $\operatorname{Re}(u(\tau)^* y(\tau))$ 则可视为系统的外部功率供给。

尽管 [24] 声称有限维情形下的定义可以扩展到无限维状态空间，但无限维情形远非如此简单，尤其是在试图纳入具有边界控制和观测的、具有重要物理意义的偏微分方程时。因此，通过将所有矩阵替换为（可能无界的）算子，直接把 (1.1) 推广到无限维情形（这在数学上确实并不困难），会得到一类遗漏了多种物理系统的系统，尽管从某种意义上说，这些系统都是端口哈密顿系统。

我们对端口哈密顿系统的概念，基于将 (1.1) 改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} I_n & \\ & -I_m \end{smallmatrix}\right] M \begin{pmatrix} Hx(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$M := \left[\begin{smallmatrix} J-R & B-P \\ -B^*-P^* & N-S \end{smallmatrix}\right], \tag{1.4}$$

其中，根据对 J、 R、 B、 P、 N 和 S 的假设，矩阵 $M \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$ 是耗散的，即 $M + M^*$ 为负半定矩阵。

我们关于无限维情形的概念确实将基于表示式（1.3）的一个替代形式，其中涉及某个耗散算子 M 和某个非负算子 H。为了纳入具有边界控制和观测的偏微分方程， M 可能是无界的，并定义在某个适当的子空间上；该子空间不一定是状态空间与输入空间的笛卡尔积。在此，我们利用 STAFFANS [34], 提出的丰富的系统节点理论，该理论为边界控制系统的建模提供了很大的灵活性。这一框架是 [34]意义下适定系统这一类系统的推广。其特点之一是

系统节点的控制方程和观测方程采取如下形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A\&B \\ C\&D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

而非拆分为 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 和 $y(t) = Cx(t) + Du(t)$。由此， $A\&B$ 和 $C\&D$可以是定义在状态空间与输入空间的笛卡尔积的某个稠密子空间上的复合算子。这使得边界控制能够以自然、简单且直接的方式建模。通过将 (1.1) 与 (1.5) 适当结合，我们将提出一种新颖且在解析上严谨的线性无限维端口哈密顿系统研究方法。

如果 H 是恒等算子，我们就得到一类称为内部阻抗被动的系统 [33],，这种系统类型也曾在端口哈密顿系统的背景下于 [40] 中简要提及。在这种情况下，哈密顿量简单地表示为 $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$。引入非平凡的哈密顿量（它们不一定是强制的或有界的），将使能量泛函的适用范围大为拓宽。

本文组织如下：第 2 节简要介绍数学背景，并引入记号以及系统节点和（极大）耗散算子的基础知识。随后，第 3 节介绍本文的主要内容：我们将阐述端口哈密顿系统的系统节点方法。算子 H 将通过闭对称半双线性型构造，而 M 将作为具有某些性质的耗散算子引入。我们还将展示一些关于可解性的进一步结果。第 4 节将讨论若干符合我们框架的实际示例。

2. 数学预备知识

2.1. 记号。设 $\mathcal{X}$、 $\mathcal{Y}$ 为希尔伯特空间，本文始终假设它们是复空间。 $\mathcal{X}$ 上的范数记为 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$；若上下文明确，也简记为 $\|\cdot\|$。空间 $\mathbb{C}^n$ 始终配备标准欧几里得内积。 $\mathcal{X}$ 上的恒等映射简记为 $I_{\mathcal{X}}$（若上下文明确，也简记为 I），并令 $I_n := I_{\mathbb{C}^n}$。

符号 $\mathcal{X}^*$ 表示 $\mathcal{X}$的反对偶，即 $\mathcal{X}$上所有连续反线性（即加法且共轭齐次）泛函所构成的空间。因此，典范对偶积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}^*,\,\mathcal{X}}$与内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$（定义于 $\mathcal{X}$）一样，都是半双线性型。也就是说，它对第一个变量是线性的，对第二个变量是反线性的。此外，注意里斯映射 $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$将 $x \in \mathcal{X}$映射到泛函 $\langle x,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$，是从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{X}^*$的线性等距同构。同样，如果上下文已能清楚表明空间，我们可以省略下标。此外，除非另有说明，希尔伯特空间都与其反对偶作典范同一。注意，在这种情况下， $\mathcal{R}_{\mathcal{X}} = I_{\mathcal{X}}$。

从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{Y}$的有界线性算子空间记作 $L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$。按照惯例，我们将 $L(\mathcal{X})$ 简记为 $= L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$。可能无界的线性算子 $A{:}\mathcal{X} \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$的定义域 $\operatorname{dom} A$通常配备图范数 $\|x\|_{\operatorname{dom} A}{:} = \left(\|x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2\right)^{1/2}$。

稠密定义线性算子 $A\colon \mathcal{X} \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{Y}$ 的伴随算子 $A^*\colon \mathcal{Y}^* \supset \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{X}^*$ 的定义域为

$$\operatorname{dom} A^* = \left\{ y' \in \mathcal{Y}^* \,\middle|\, \exists\, z' \in \mathcal{X}^* \text{ s.t. } \forall\, x \in \operatorname{dom} A :\ \langle y', Ax\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle z', x\rangle_{\mathcal{X}} \right\}.$$

上述集合中的泛函 $z' \in \mathcal{X}^*$由 $y' \in \operatorname{dom} A^*$唯一确定，我们记作$A^*y' = z'$。注意，我们将 $\mathbb{C}^{n\times m} \cong L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ 视为同一对象。结合 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$均配备欧几里得内积这一事实，这意味着 $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 是 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$的共轭转置。同理， x^* 是 $x \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n\times 1}$的共轭转置，因此 $\mathbb{C}^n$ 中的内积写作

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = y^* x.$$

$A\colon \mathcal{X} \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{X}$的预解集记为 $\rho(A)$，即

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X})\right\}.$$

我们用 $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}\ \lambda > 0\}$ 表示开右半平面，用 $\mathbb{R}_{\geq 0}$表示非负实数集。

对于勒贝格空间、索об列夫空间以及由 k 次连续可微函数构成的空间，我们采用 ADAMS 的著作 [1] 中的记号。对于取值于希尔伯特空间 $\mathcal{X}$ 的函数空间，在指定（空间或时间）定义域后，我们用“; $\mathcal{X}$”表示。例如，定义域 Ω 上取值于 $\mathcal{X}$ 且 p 可积的 $\mathcal{X}$ 函数的勒贝格空间记为 $L^p(\Omega; \mathcal{X})$。请注意，本文中对 $\mathcal{X}$ 值函数的积分始终按博赫纳意义 [12] 理解。

2.2. 算子节点与系统节点。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为希尔伯特空间，并分别将 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 中到 $\mathcal{X}$($\mathcal{Y}$)的典范投影记为 $P_{\mathcal{X}}$($P_{\mathcal{Y}}$。令

$$S : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} S \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

是一个线性算子。其所谓的主算子 $A\colon \mathcal{X} \supset \operatorname{dom}\ A \to \mathcal{X}$从 $\operatorname{dom} A := \{x \in \mathcal{X} \,|\, \binom{x}{0} \in \operatorname{dom}\ S\}$ 映射到 $\mathcal{X}$，通过 $Ax := P_{\mathcal{X}} S \binom{x}{0}$。我们设

$$A\&B := P_{\mathcal{X}} S \qquad \text{and} \qquad C\&D := P_{\mathcal{Y}} S,$$

使得 S 可以写成

$$S = \left[\begin{smallmatrix} A\&B \\ C\&D \end{smallmatrix}\right].$$

算子节点的概念对算子 S提出了自然的假设，以确保其具有良好的性质，并为抽象动力学提供合适的解概念

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

我们给出 [27, 定义 2.1]。关于希尔伯特空间上的强连续半群的基础知识，请参阅 [36]。

定义 2.1（算子节点/系统节点）。三元组 $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ 上的算子节点是一个（可能无界的）线性算子 $S\colon \mathcal{X} \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} S \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$，满足以下性质：
(a) S 是闭的；(b) $P_{\mathcal{X}} S\colon \mathcal{X} \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom}\ S \to \mathcal{X}$是闭的；(c) 对所有 $u \in \mathcal{U}$，都存在某个 $x \in \mathcal{X}$，使得 $\binom{x}{u} \in \operatorname{dom}\ S$；(d) 其主算子 A是稠密定义的，且预解集非空。

此外，如果 A 在 $\mathcal{X}$上生成一个强连续半群，那么 S 称为系统节点。
注释 2.2（算子/系统节点 I）。设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是 $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ 上的一个算子节点。

(a) 用 $\mathcal{X}_{-1}$ 表示关于范数 $\|x\|_{\mathcal{X}_{-1}}$ 的 $\mathcal{X}$ 的完备化：$= \|(\alpha I - A)^{-1} x\|$，其中 $\alpha \in \rho(A)$。注意，根据命题 2.10.2]，$\mathcal{X}_{-1}$ 的拓扑不依赖于 $\alpha \in \rho(A)$ [36, 的具体选取。于是，算子 A可扩张为闭且稠密定义的算子 $A_{-1}\colon \mathcal{X}_{-1} \supset \operatorname{dom} A_{-1} = \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{-1}$，使得 $A_{-1}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{-1}$ 有界。A 和 A_{-1} 的谱相同。此外，若 S 是一个系统节点，则由 A 生成的半群 $\mathfrak{A}(\cdot)$可扩张为 $\mathcal{X}_{-1}$上的半群 $\mathfrak{A}_{-1}(\cdot)$。该半群的生成元为A_{-1} [36, 命题 2.10.3 和 2.10.4]。

(b) 存在一个算子 $B \in L(\mathcal{U}, \mathcal{X}_{-1})$，使得 $[A_{-1}\ B] \in L(\mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_{-1})$ 是 $A\&B$ 的扩张。$A\&B$ 的定义域（同样地：S 的定义域）满足

$$\operatorname{dom}(A\&B) = \left\{\binom{x}{u} \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} \,|\, A_{-1}x + Bu \in \mathcal{X}\right\},$$

参见 [34, 定义 4.7.2 和引理 4.7.3]。

(c) 给定 $u \in \mathcal{U}$，仿射空间

$$\{x \in \mathcal{X} \mid \left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{dom}(A\&B)\}$$

在 $\mathcal{X}$ 中稠密。

(d) 对所有 $\alpha \in \rho(A)$，范数

$$\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_\alpha := \left(\|x - (\alpha I - A_{-1})^{-1} B u\|_{\mathcal{X}}^2 + \|u\|_{\mathcal{U}}^2\right)^{1/2}$$

与 S 的图范数等价。此外，算子

$$\begin{bmatrix} I & -(\alpha I - A_{-1})^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

将 $\operatorname{dom} S$ 双射到 $\operatorname{dom} A \times \mathcal{U}$ [34, Lem. 4.7.3]。

现在我们记录一个算子论引理，它在多个地方都会用到。与本节开头的陈述类似，对于希尔伯特空间 $\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$、$\mathcal{Z}$，以及一个算子R：$\mathcal{Z} \supset \operatorname{dom} R \to \mathcal{V} \times \mathcal{W}$，我们将 $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ 中到 $\mathcal{V}$($\mathcal{W}$) 上的典范投影记为 $P_{\mathcal{V}}$($P_{\mathcal{W}}$，分别如此)。

引理 2.3（块算子的闭性）。设 $\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$、$\mathcal{Z}$ 为希尔伯特空间，且设 R：$\mathcal{Z} \supset$dom $R \to \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ 为线性算子。则以下陈述等价：

(i) R 是闭的，且 $P_{\mathcal{V}} R$ 是闭的，其定义域为 dom($P_{\mathcal{V}} R$) =dom R。(ii) $P_{\mathcal{V}} R$ 是闭的，其定义域为 dom($P_{\mathcal{V}} R$) =dom R，且 $P_{\mathcal{W}} R \in L$(dom($P_{\mathcal{V}} R$) $\mathcal{W}$)。(iii) R 是闭的，且 $P_{\mathcal{W}} R \in L$(dom($P_{\mathcal{V}} R$) $\mathcal{W}$)。

证明。

“(i)⇒(ii)”：假设 (i) 成立。我们通过运用闭图定理 [2, Thm. 7.9] 来证明 $P_{\mathcal{W}} R \in L$(dom($P_{\mathcal{V}} R$) $\mathcal{W}$)。假设

$$(z_n) \to z \text{ in } \operatorname{dom}(P_{\mathcal{V}} R), \qquad (P_{\mathcal{W}} R z_n) \to w \text{ in } \mathcal{W}.$$

这意味着 (Rz_n) 收敛到 ($\begin{smallmatrix} P_{\mathcal{V}} R z \\ w \end{smallmatrix}$) $\in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$，并由 R 的闭性得到 $Rz =$($\begin{smallmatrix} P_{\mathcal{V}} R z \\ w \end{smallmatrix}$)。特别地，$P_{\mathcal{W}} R z = w$。

“(ii)⇒(iii)”：在假设 (ii) 下，考虑一个满足以下条件的序列

$$(z_n) \to z \text{ in } \mathcal{Z}, \qquad (Rz_n) \to \left(\begin{smallmatrix} v \\ w \end{smallmatrix}\right) \text{ in } \mathcal{V} \times \mathcal{W}.$$

则 ($P_{\mathcal{V}} R z_n$) 在 $\mathcal{V}$中收敛于 v，而定义域为 dom R的 $P_{\mathcal{V}} R$的闭性导致 $z \in$dom R且满足 $P_{\mathcal{V}} R z = v$。性质 $P_{\mathcal{W}} R \in L$(dom($P_{\mathcal{V}} R$) $\mathcal{W}$) 进一步导致 ($P_{\mathcal{W}} R z_n$) 收敛于 $P_{\mathcal{W}} R z$。综上，$z \in$dom R且 $Rz =$($\begin{smallmatrix} v \\ w \end{smallmatrix}$)。

“(iii)⇒(i)”：假设 R是闭的，且 $P_{\mathcal{W}} R \in L$(dom($P_{\mathcal{V}} R$) $\mathcal{W}$)，并令

$$(z_n) \to z \text{ in } \mathcal{Z}, \qquad (P_{\mathcal{V}} R z_n) \to v \text{ in } \mathcal{V}.$$

则 ($P_{\mathcal{W}} R z_n$) 是 $\mathcal{W}$中的柯西序列，因而收敛于某个 $w \in \mathcal{W}$。因此，(Rz_n) 收敛于 ($\begin{smallmatrix} v \\ w \end{smallmatrix}$)，而 R的闭性导致 $z \in$dom R 以及 $Rz =$($\begin{smallmatrix} v \\ w \end{smallmatrix}$)。特别地，$P_{\mathcal{V}} R z = w$。□

注 2.4（算子/系统节点 II）。令 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 为 ($\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{U}$) 上的一个算子节点。引理 2.3 表明，$C\&D \in \mathcal{L}$(dom($A\&B$) $\mathcal{Y}$)，其中 dom($A\&B$) 配备 $A\&B$的图范数。特别地，对于满足 $Cx := C\&D\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ 的算子 C，我们有 $C \in \mathcal{L}$(dom $A, \mathcal{Y}$)。

另一方面，若 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\text{与}C & B\text{与}D \end{smallmatrix}\right]$ 满足定义 2.1 中的性质 (b)-(c)，且还满足C与$D \in \mathcal{L}$(dom(A与B) $\mathcal{Y}$)，则由引理 2.3 可知，S 是一个算子节点。

前面的两条备注使我们能够定义传递函数的概念。

定义 2.5（传递函数）。设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是作用于（$\mathcal{Y}$，$\mathcal{X}$，$\mathcal{U}$）上的系统节点。与 S 相关联的传递函数 $\mathcal{G}$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\colon \quad \rho(A) &\to \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y}), \\ s &\mapsto C\&D \begin{bmatrix} (sI-A_{-1})^{-1}B \\ I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注 2.6（伴随算子节点）。设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的算子节点。[23, 命题 2.4] 已证明，伴随算子 $S^*\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \supset \operatorname{dom} S^* \to \mathcal{X}\times\mathcal{U}$ 的形式为

$$S^* = \begin{bmatrix} [A\&B]^d \\ [C\&D]^d \end{bmatrix}$$

其定义域为

$$\operatorname{dom} S^* = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \,\middle|\, A_{-1}^* x + C^* x \in \mathcal{X} \right\},$$

其中，$[A\&B]^d$ 是 $[(A^*)_{-1}\ C^*]$ 在 $\operatorname{dom} S^*$ 上的限制，并且对所有 $\alpha \in \rho(A)$，

$$[C\&D]^d \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) := B^*\Big(x - (\overline{\alpha}I - (A^*)_{-1})^{-1} C^*\Big) + \mathcal{G}(\alpha)^* y.$$

特别地，S^* 的主算子是 A^*。

此外，若 A 在 $\mathcal{X}$ 上生成强连续半群 $\mathfrak{A}(\cdot)$，则根据 [36, 命题 2.8.5]，A^* 生成伴随半群 $\mathfrak{A}^*(\cdot)$。因此，若 S 甚至是一个系统节点，那么 S^* 也是一个系统节点。

接下来，我们简要回顾适用于微分方程 (2.1) 的解概念，其中 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是一个系统节点。

定义 2.7（经典/广义轨迹）。设 $T > 0$，并设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点。

方程 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的经典轨迹是一个三元组

$$(y,x,u) \in C([0,T];\mathcal{Y}) \times C^1([0,T];\mathcal{X}) \times C([0,T];\mathcal{U})$$

它对所有 $t \in [0,T]$ 都满足 (2.1)。

方程 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的广义轨迹是一个三元组

$$(y,x,u) \in L^2([0,T];\mathcal{Y}) \times C([0,T];\mathcal{X}) \times L^2([0,T];\mathcal{U}),$$

它是方程 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的经典轨迹在 $L^2([0,T];\mathcal{Y}) \times C([0,T];\mathcal{X}) \times L^2([0,T];\mathcal{U})$ 的拓扑下的极限。

若 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点，则 $A\&B$ 可视为 $(\{0\},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点。因此，我们还可以进一步讨论其经典轨迹和广义轨迹（x,u），其中

$$\dot{x} = A\&B \left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right). \tag{2.2}$$

以下结果保证了在适当的控制函数和初值下，经典轨迹的唯一存在性。

命题 2.8（经典轨迹的存在性 [34, 定理 4.3.9]）。设 S 是 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点，设 $T > 0$，$x_0 \in \mathcal{X}$ 和 $u \in W^{2,1}([0,T];\mathcal{U})$ 满足 $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ u(0) \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{dom} S$。则存在唯一的经典轨迹 (y,x,u)，满足 (2.1)，且 $x(0) = x_0$。

我们给出关于经典广义解的一些进一步结论。

注 2.9（经典/广义轨迹）。设 $T > 0$，并设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的一个系统节点。

(a) 假设 (x,u) 是方程 (2.2) 的经典轨迹。那么

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right) \in C([0,T];\operatorname{dom} S).$$

(b) (x,u) 是 (2.2) 的广义轨迹，当且仅当 $x \in C([0,T];\ \mathcal{X})$ 且

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad x(t) = \mathfrak{A}(t)x(0) + \int_0^t \mathfrak{A}_{-1}(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.3}$$

其中后者必须解释为空间 $\mathcal{X}_{-1}$ 中的积分，并以 $B \in L(\mathcal{U},\mathcal{X}_{-1})$ 表示，如注释 2.2 (b) 所述。

(c) 如果 (x,u,y) 是 (2.1) 的广义轨迹，那么显然，(x,u) 是 (2.2) 的广义轨迹。特别地，(2.3) 成立。乍看之下，输出评估 $y(t) = C\&D\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right)(t)$ 对所有 $t \in [0,T]$ 未必都有定义。然而，[34, 引理 4.7.9] 证明，$\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right)$ 的第二个积分作为从 $[0,T]$ 到 $\operatorname{dom}(A\&B) = \operatorname{dom} S$ 的映射是连续的。因此，输出可以在分布意义下定义为 $C\&D$ 作用于 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right)$ 的第二个积分所得的二阶导数。由此可证明，(x,u,y) 是 (2.1) 的广义轨迹，当且仅当 (x,u) 是 (2.2) 的广义轨迹，并且（参见 [34] 中的 (4.7.6)）

$$y = \left(t \mapsto \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, C\&D \int_0^t (t-\tau)\left(\begin{smallmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{smallmatrix}\right)\mathrm{d}\tau\right) \in L^2([0,T];\mathcal{Y}).$$

接下来我们回顾适定系统这一重要概念。

定义 2.10（适定系统）。设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点。若对某个（因而对所有）$T > 0$，存在某个 $c_T > 0$，使得 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的经典轨迹（从而广义轨迹）满足

$$\|x(T)\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{L^2([0,T];\mathcal{Y})} \le_B c_T\big(\|x(0)\|_{\mathcal{X}} + \|u\|_{L^2([0,T];\mathcal{U})}\big).$$

注释 2.11（适定系统）。设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\&D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 $(\mathcal{Y},\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的系统节点，且 $T > 0$。(2.1) 的适定性等价于以下映射定义良好且有界

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_T\colon &\quad L^2([0,T];\mathcal{U}) \to \mathcal{X}, && \mathfrak{C}_T\colon &\quad \mathcal{X} \to L^2([0,T];\mathcal{Y}),\\ \mathfrak{D}_T\colon &\quad L^2([0,T];\mathcal{U}) \to L^2([0,T];\mathcal{Y}), \end{aligned}$$

定义如下

- $\mathfrak{B}_T u = x(T)$，其中 (x,u) 是 (2.2) 在 $[0,T]$ 上、初值为 $x(0) = 0$ 时的广义轨迹；
- $\mathfrak{C}_T x_0 = y$，其中 (y,x,u) 是 (2.1) 在 $[0,T]$ 上、输入为 $u = 0$ 且初值为 $x(0) = x_0$ 时的广义轨迹；
- $\mathfrak{D}_T u = y$，其中 (y,x,u) 是 (2.1) 在 $[0,T]$ 上、初值为 $x(0) = 0$ 时的广义轨迹。

根据注 2.9 (b)，我们有

$$\mathfrak{B}_T u = \int_0^T \mathfrak{A}_{-1}(T-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \forall u \in L^2([0,T];\mathcal{U}).$$

特别地，适定性意味着上述积分属于 $\mathcal{X}$。结合命题 2.8 与注 2.9 (b) 可得，对于所有 $t > 0$，以及所有 $x_0 \in \operatorname{dom} A$，$\mathfrak{A}(t)x_0 \in \operatorname{dom} A$。因此，取注 2.4 中的 C，令 $y = C\mathfrak{A}(\cdot)x_0$ 和 $x = \mathfrak{A}(\cdot)x_0$，便得到方程 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的一条经典轨迹 $(x,0,y)$，其中 $x(0) = x_0$。适定性意味着映射

$x_0 \mapsto C\mathfrak{A}(\cdot)x_0$ 可以扩展为一个有界线性算子 $\mathfrak{C}_T\colon\ \mathcal{X} \to L^2([0,T];\,\mathcal{Y})$，参见 [34,定理 4.7.14]。

2.3. 耗散算子。

定义 2.12（（极大）耗散算子）。设 $\mathcal{X}$ 是一个希尔伯特空间。若子空间 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 满足

$$\forall\,(v,w) \in \mathcal{Z}: \qquad \operatorname{Re}\langle v, w\rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}^*} \le 0.$$

Furt其中，$\mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 称为极大耗散的，当且仅当它是耗散的，且不是
a di $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$的耗散子空间的真子集。
一个算子 $A:\ \mathcal{X} \supset \operatorname{dom} A \ \to\ \mathcal{X}^*$ 称为（极大）耗散的，若 A 的图，即
$\{(x, Ax) \mid x \in \operatorname{dom}\ A\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$，是（极大）耗散的。
称算子 $A\colon\ \mathcal{X}\ \supset \operatorname{dom}\ A\ \to\ \mathcal{X}$ 为（极大）耗散的，若 $\mathcal{R}_{\mathcal{X}} A$ 是（极大）
耗散的。

因此，算子 $A\colon \mathcal{X} \supset \operatorname{dom}\ A \to \mathcal{X}$ 是耗散的，当且仅当对所有 $x \in \operatorname{dom} A$，均有 $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le 0$，这与通常的定义一致。
设 $A\colon\ \mathcal{X}\ \supset \operatorname{dom}\ A\ \to\ \mathcal{X}^*$ 是一个耗散算子。根据耗散性的定义，对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}_+$，
$\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A$ 都是单射。极大耗散性进一步意味着 $\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A$ 是双射。

命题 2.13（极大耗散算子）。设 $\mathcal{X}$ 为一个希尔伯特空间，并考虑一个闭的耗散线性算子 $A:\ \mathcal{X} \supset \operatorname{dom}\ A \to \mathcal{X}^*$。则以下陈述等价：

（i） A 是极大耗散的；（ii）对于某个（因而对于所有） $\lambda \in \mathbb{C}_+$， $\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A$ 是满射的；（iii）对于某个（因而对于所有） $\lambda \in \mathbb{C}_+$， $\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A$ 具有稠密值域；（iv） A 是稠密定义的，且对于某个（因而对于所有） $\lambda \in \mathbb{C}_+$， $\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A^*$ 是单射的。（v） A 是稠密定义的，且 A^* 是耗散的（因而也是极大耗散的）。

证明。利用 $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ 是 Riesz 同构这一事实，只需考虑将 $\mathcal{X}^*$ 与 $\mathcal{X}$ 等同的情形（因此也与 $\mathcal{R}_{\mathcal{X}} = I_{\mathcal{X}}$等同）。
（i）、（ii）之间的等价性由 [9, 定理 1.6.4], 得出，该定理是在更广泛的线性关系背景下证明的。此外，对于 $x \in \operatorname{dom} A$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}^+$，我们有

$$\|(\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A)x\|_{\mathcal{X}^*}\|x\|_{\mathcal{X}} \ \ge\ \operatorname{Re}\langle x, (\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A)x\rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}^*} \ \ge\ (\operatorname{Re}\lambda)\ \|x\|_{\mathcal{X}}^2.$$

这表明，对所有 $\lambda \in \mathbb{C}^+$， $\lambda\mathcal{R}_{\mathcal{X}} - A$ 本身的值域都是闭的。因此，(ii) 和 (iii) 等价。

此外，应用 [36,命题 3.1.6] 可得，极大耗散算子是稠密定义的。进而，应用 [9,定理 1.6.4 和命题 1.6.7] 可知，(iv) 和 (v) 各自都等价于 A 是极大耗散的。□

2.4. 正半双线性型与拟 Gelfand 三元组。与内积一样，半双线性型假定对第一个变量线性、对第二个变量共轭线性。下文主要讨论具有附加性质的半双线性型。

定义 2.14（正／闭半双线性形式）。设 $\mathcal{X}$ 是一个希尔伯特空间。若半双线性型 $h\colon \operatorname{dom} h \times \operatorname{dom} h \to \mathbb{C}$ 的定义域是某个稠密子空间 $\operatorname{dom}\ h \subset \mathcal{X}$，则称其为正的，当且仅当

$$\forall\, x \in \operatorname{dom} h \setminus \{0\}: \quad h(x,x) > 0.$$

若正半双线性型 $h\colon \mathrm{dom}\ h \times \mathrm{dom}\ h \to \mathbb{C}$ 的定义域 $\mathrm{dom}\, h$ 关于范数完备，则称其为闭的

$$\|x\|_{\mathrm{dom}\, h} := \big(\|x\|_{\mathcal{X}}^2 + h(x,x)\big)^{1/2}. \tag{2.4}$$

对于半双线性型 h，若对所有 $x \in \mathrm{dom}\ h$， $h(x,x)$ 都是实数，则 h 在如下意义下是对称的：对所有 $x, y \in \mathrm{dom}\ h$ [21, Sec. 6.1]， $h(x,y) = h(y,x)$。因此， h 在 $\mathrm{dom}\, h$ 上定义了一个内积，但这并不一定能得到一个希尔伯特空间。

[31] 中的拟 Gelfand 三元组概念在我们对哈密顿量的考察中起着基础性作用，另请参见近期预印本 [32]。

定义 2.15（拟 Gelfand 三元组）。设 $\mathcal{X}$ 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$，并设 $h\colon \mathrm{dom}\ h \times \mathrm{dom}\, h \to \mathbb{C}$ 是一个稠密定义、闭且正半双线性型。设 $\mathcal{X}_h$ 是 $\mathrm{dom}\ h$ 关于范数 $\|x\|_h = h(x,x)^{1/2}$ 的完备化。此外，考虑

$$\|x'\|_{h-} = \sup_{x \in \mathrm{dom}\, h \setminus \{0\}} \frac{|\langle x', x\rangle_{\mathcal{X}}|}{\|x\|_h}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_{h-} = \{x \in \mathcal{X} \,|\, \|x\|_{h-} < \infty\},$$

~并令 $\mathcal{X}_{h-}$ 为 $\mathcal{X}_{h-}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{h-}$的完备化。

于是，我们称 $(\mathcal{X}_{h-}, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为与 h 相关联的拟 Gelfand 三元组。

注 2.16（拟 Gelfand 三元组）。设 $\mathcal{X}$为希尔伯特空间，设 $h\colon \mathrm{dom}\ h \times \mathrm{dom}\ h \to \mathbb{C}$ 为闭正半双线性型，并设 $(\mathcal{X}_{h-}, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为与 h相关联的拟 Gelfand 三元组。

(a) [31, Cor. 4.8] 表明， $\mathcal{X}_{h-}$ 以一种规范的方式与 $\mathcal{X}_h^*$等距同构。它也被称为相对于枢轴空间 $\mathcal{X}$的 $\mathcal{X}_h$ 的反对偶。我们将 $\mathcal{X}_h^* = \mathcal{X}_{h-}$规范地视为同一空间，因此称 $(\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为拟 Gelfand 三元组。(b) 若 h 是有界的，即存在某个 $c > 0$ 使得 $h(x,x) \le c\|x\|_{\mathcal{X}}^2$，则由 h的闭性可得 $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_h$。由此构造拟 Gelfand 三元组，便得到$\mathcal{X}_h^* \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_h$。(c) 若 h是强制的，即存在某个 $c > 0$使得 $h(x,x) \ge c\|x\|_{\mathcal{X}}^2$，则可得 $\mathcal{X}_h = \mathrm{dom}\ h$，从而特别有 $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$。由此构造拟 Gelfand 三元组，便得到 $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_h^*$。(d) 具有 $\mathcal{X}_h^* \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_h$或 $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_h^*$的拟 Gelfand 三元组称为 Gelfand 三元组。(e) 根据 16]Prop. 4.14 & Cor. 4. $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_h \cap \mathcal{X}_h^*$在所有空间 $\mathcal{X}$、 $\mathcal{X}_h$和 $\mathcal{X}_h^*$中均稠密，且这些空间分别配备范数 [31,。

假设 $h\colon \mathrm{dom}\ h \times \mathrm{dom}\, h \to \mathbb{C}$是定义在 $\mathcal{X}$ 上的稠密定义的闭正半双线性型。根据 Kato第二表示定理 [21, 第 6 章，2], 存在唯一的正自伴算子 $H\colon \mathcal{X} \supset \mathrm{dom}\ H \to \mathcal{X}$，使得其算子平方根满足 $\mathrm{dom}\ H^{1/2} = \mathrm{dom}\, h$，并且

$$\forall\, x, y \in \mathrm{dom}\, h: \quad h(x,y) = \big\langle H^{1/2}x, H^{1/2}y\big\rangle. \tag{2.5}$$

此外，算子 H 的定义域在 $\mathrm{dom}\, h$ 中稠密，其中赋予范数 (2.4)。我们称 H 为与 h相关联的算子。

我们进一步汇总稠密定义的闭正半双线性型、如 (2.5) 中的算子 H，以及与 h 相关联的拟 Gelfand 三元组之间的一些联系。

命题 2.17（拟 Gelfand 三元组）。设 $\mathcal{X}$ 是希尔伯特空间，设 $h\colon \mathrm{dom}\, h \times \mathrm{dom}\ h \to \mathbb{C}$ 是闭正半双线性型，并设 $(\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 是与 h 相关联的拟 Gelfand 三元组。则以下陈述成立：

(a) ran $H^{1/2} \subset \mathcal{X}_h^*$。(b) 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ 在 $\left(\mathcal{X}_h^* \cap \mathcal{X}\right) \times \left(\mathcal{X}_h \cap \mathcal{X}\right)$ 上的限制可延拓为对偶积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_h^*,\ \mathcal{X}_h}$。(c) $H^{1/2}\colon\ \mathcal{X} \supset \mathrm{dom}\ h \to \mathcal{X}$ 可唯一延拓为有界线性算子 $U\colon\ \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}$。此外，该算子是等距同构。(d) $H^{1/2}\colon\ \mathcal{X} \supset \mathrm{dom}\ h \to \mathcal{X}$ 可唯一延拓为有界线性算子 $V\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_h^*$。该算子满足 $V = U^*$。特别地，它是等距同构。(e) $H\colon \mathrm{dom}\ H \to \mathcal{X}$ 可唯一延拓为有界线性算子 $\widetilde{H}\colon\ \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h^*$。该算子与 Riesz 同构一致，即 $\widetilde{H} = \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$。

证明。

(a) 对于 $x, z \in \mathrm{dom}\ h \backslash \{0\}$，我们有

$$\frac{|\langle H^{1/2} z, x \rangle_{\mathcal{X}}|}{\|x\|_h} = \frac{|\langle z, H^{1/2} x \rangle_{\mathcal{X}}|}{\|H^{1/2} x\|_{\mathcal{X}}} \ \leq\ \|z\|_{\mathcal{X}},$$

因此，确实有 $H^{1/2} z \in \tilde{\mathcal{X}}_{h-} \subset \mathcal{X}_{h-} = \mathcal{X}_h^*$。

(b) 这一点在 [31,注 4.11] 中得到证明。

(c) 由 (2.5)，对于 $x \in \mathrm{dom}\ h$，我们有 $\|x\|_h^2 = \|H^{1/2} x\|_{\mathcal{X}}^2$。此外，根据 $\mathcal{X}_h$ 的构造，$\mathrm{dom}\, h$ 在 $\mathcal{X}_h$ 中稠密。因此，$H^{1/2}$ 唯一地延拓为一个等距线性算子 $U : \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}$。

为完成证明，还需证明 U 是满射：由于 U 保范数，ran U 是闭的。因此，只需证明 $(\mathrm{ran}\ U)^{\perp} = \{0\}$。假设 $z \in (\mathrm{ran}\ U)^{\perp}$。那么

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}\, h\colon \quad 0 = \langle z, Ux \rangle_{\mathcal{X}} = \langle z, H^{1/2} x \rangle_{\mathcal{X}}. \tag{2.6}$$

因此，$z \in (\mathrm{ran}\, H^{1/2})^{\perp} = \ker\ H^{1/2} = \{0\}$。

(d) 考虑算子 $V = U^* \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X}_h^*)$。根据 (c)，$V$ 是一个等距同构。进一步由 (a) 和 (b) 可得，对所有 $x, y \in \mathrm{dom}\ h$，有

$$\langle Vx, y \rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} = \langle x, Uy \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x, H^{1/2} y \rangle_{\mathcal{X}} = \langle H^{1/2} x, y \rangle_{\mathcal{X}} = \langle H^{1/2} x, y \rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h}.$$

$\mathrm{dom}\ h$ 在 $\mathcal{X}_h$ 中的稠密性表明，V 延拓了 $H^{1/2}$。再利用 $\mathrm{dom}\, h$ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密这一事实，可进一步推出该延拓是唯一的。

(e) 考虑算子 $\widetilde{H} = VU \in L(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h^*)$，结合 (c) 和 (d) 可知它是一个等距同构。对于 $x \in \mathrm{dom}\, H$，有

$$Hx = H^{1/2} H^{1/2} x = VUx = \widetilde{H} x,$$

因此，$\widetilde{H}$ 确实是 H 的扩张。由于 H 在 $\mathcal{X}_h$ 中稠密，该扩张还是唯一的。剩下要证明的是 $\widetilde{H} = \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$。利用 $V = U^*$，再结合 U 这一事实：$\mathcal{X}_h \to \mathcal{X}$ 是一个等距同构，即可得到所需结果。

$$\forall x, y \in \mathcal{X}_h\colon \quad \langle \widetilde{H} x, y \rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} = \langle VUx, y \rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} = \langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}_h}.$$

□

3. 端口哈密顿系统节点

在本文的这一主体部分，我们将介绍针对无限维端口哈密顿系统的方法。本部分分为三部分：首先，我们通过稠密定义的闭正半双线性形式来定义哈密顿量。随后，我们引入.....的概念

耗散节点，它是式 (1.4) 中矩阵 M 的对应概念。哈密顿量和耗散节点是端口哈密顿系统的组成要素，本章最后一部分将对端口哈密顿系统进行定义。

3.1. 二次哈密顿量与能量空间。由于本文致力于研究线性问题，因此全文仅考虑二次哈密顿量（为简洁起见，称为“哈密顿量”）。它们与正半双线性型相关联。

定义 3.1（哈密顿量）。设 $\mathcal{X}$是一个希尔伯特空间，且 $h\colon \operatorname{dom} h \times \operatorname{dom}\ h \to \mathbb{C}$ 是一个稠密定义的闭正半双线性型。那么映射

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\colon \qquad & \operatorname{dom} h \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \tfrac{1}{2}\, h(x,x) \end{aligned}$$

称为与 h相关联的哈密顿量。

在哈密顿系统中，哈密顿量表示能量。由此引出以下定义。

定义 3.2（能量空间）。设 $\mathcal{X}$是一个希尔伯特空间，且 $h\colon \operatorname{dom} h \times \operatorname{dom}\ h \to \mathbb{C}$ 是一个稠密定义的闭正半双线性型。令 $(\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为与 h相关联的拟 Gelfand 三元组。则称 $\mathcal{X}_h$ 为能量空间。

注 3.3（能量空间）。在形式 h 是强制的情况下，能量空间这一术语在文献中已经被使用（例如参见 [42]）。JOHNSON [20] 将范数 $\|\cdot\|_h$ 称为~能量范数。与 h 相关联的算子 H 的延拓 $H\colon \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h^*$ 称为 H的能量延拓。我们采用这些术语，并将其推广到更一般的拟 Gelfand 三元组情形。

能量空间的定义表明，哈密顿量 $\mathcal{H}$ 延拓到 $\mathcal{X}_h$，对此我们仍使用相同的符号。事实上，我们有

$$\forall\, x \in \mathcal{X}_h\colon \quad \mathcal{H}(x) = \tfrac{1}{2}\,\langle \widetilde{H}x, x\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} = \tfrac{1}{2}\,\|x\|_{\mathcal{X}_h}^2, \tag{3.1}$$

~其中 $H\colon \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h^*$ 表示与 h相关联的算子 H 的能量延拓。进一步注意，对于所有 $x, y \in \mathcal{X}_h$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{H}(x+hy) - \mathcal{H}(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \widetilde{H}(x+hy), x+hy\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} - \langle \widetilde{H}x, x\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h}}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h\,\operatorname{Re}\langle \widetilde{H}x, y\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} + h^2\langle \widetilde{H}y, y\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h}}{2h} = \operatorname{Re}\langle \widetilde{H}x, y\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h}, \end{aligned}$$

~因此 H 是 $\mathcal{H}\colon \mathcal{X}_h \to \mathbb{R}$的 Gˆateaux 导数。

3.2. 耗散节点。本节致力于将 (1.3) 中的 M 适当地推广到无限维情形。与系统节点部分一样，我们用 $P_{\mathcal{X}_h}$（分别为 $P_{\mathcal{U}^*}$）表示投影到 $\mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$中的 $\mathcal{X}_h(\mathcal{U}^*)$ 上的规范投影。此外，我们注意到，由于希尔伯特空间是自反的，我们可以规范地将 $(\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U})^* = \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$识别为。

定义 3.4（耗散节点）。设 $\mathcal{X}_h$、 $\mathcal{U}$ 为希尔伯特空间，其反对偶空间分别为 $\mathcal{X}_h^*$、 $\mathcal{U}^*$。在 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点是一个满足以下条件的（可能无界的）线性算子 $M\colon\ \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom}\ M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$

(a) M 是闭的且耗散的；(b) $P_{\mathcal{X}_h} M\colon$
$\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom}\ M \to \mathcal{X}_h$ 是闭的；

(c) 对所有 $u \in \mathcal{U}$，存在某个 $x' \in \mathcal{X}_h^*$，使得 $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{dom} M$；

(d) 对于主算子 $F\colon \mathcal{X}_h^* \supset \operatorname{dom} F \to \mathcal{X}_h$ with

$$\operatorname{dom} F := \left\{ x' \in \mathcal{X}_h^* \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x' \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{dom} M \right\}$$

以及 $Fx' := P_{\mathcal{X}_h} M \left(\begin{smallmatrix} x' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$，存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}_+$，使得 $\lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F$ 具有稠密值域。

我们定义

$$F\&G := P_{\mathcal{X}_h} M, \qquad K\&L := P_{\mathcal{U}^*} M,$$

从而 M 可写为

$$M = \left[\begin{smallmatrix} F\&G \\ K\&L \end{smallmatrix}\right].$$

我们汇总耗散节点的一些性质。

命题 3.5（耗散节点）。设 $\mathcal{X}_h$、$\mathcal{U}$ 为希尔伯特空间，其反对偶空间分别为 $\mathcal{X}_h^*$、$\mathcal{U}^*$，并设 $M = \left[\begin{smallmatrix} F_{\&K} & G_{\&L} \end{smallmatrix}\right]\colon \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 是 $(\mathcal{X}_h, \mathcal{U})$ 上的一个耗散节点。那么以下陈述成立：

(a) F 是极大耗散的。(b) F 和 M 是稠密定义的。(c) 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}_+$、$\lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F\colon \mathcal{X}_h^* \supset \operatorname{dom} F \to \mathcal{X}_h$ 是双射。特别地，对所有 $\lambda \in \mathbb{C}_+$，$\lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F$ 都有有界逆算子。(d) $F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$ 在 $\mathcal{X}_h$ 上生成压缩半群 $\mathfrak{A}(\cdot)$。也就是说，$\mathfrak{A}(\cdot)$ 是 $\mathcal{X}_h$ 上的强连续半群，且对所有 $t \geq 0$，$\|\mathfrak{A}(t)\|_{L(\mathcal{X}_h)} \leq 1$。

证明。

(a) 首先，注意到 F 根据定义 3.4 中的性质 (b) 是闭的。F 的耗散性直接由 M 的耗散性推出。此外，定义 3.4 中的性质 (d) 结合命题 2.13 可得，M 是极大耗散的。(b) 将 (a) 与命题 2.13 结合，可得 $\operatorname{dom} F$ 在 $\mathcal{X}_h$ 中稠密。结合 $\operatorname{dom} F$ 在 $\mathcal{X}_h^*$ 中的稠密性以及定义 3.4 中的性质 (c)，即可推出 $\operatorname{dom} M$ 在 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$ 中稠密。(c) 第一个结论由命题 2.13 得出，第二个结论则由 F 的闭性得出。(d) 利用 F 是极大耗散的这一事实，可得 $F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}\colon \mathcal{X}_h \supset \operatorname{dom}(F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}) \to \mathcal{X}_h$ 且 $\operatorname{dom}(F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}) = \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} \operatorname{dom} F$ 仍然是极大耗散的。于是，Lumer-Philips 定理 [36, 命题 3.8.4] 蕴含 $F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$ 在 $\mathcal{X}_h$ 上生成一个压缩半群。

□

我们对耗散节点的定义与算子节点的定义非常相似。以下结果阐明了这两个概念之间的联系。

命题 3.6（耗散节点与耗散系统节点）。设 $\mathcal{X}_h$、$\mathcal{U}_h$ 为希尔伯特空间，其反对偶空间分别为 $\mathcal{X}_h^*$、$\mathcal{U}_h^*$，并设 $M\colon \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \subset \operatorname{dom} M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 为一个线性算子。则以下陈述等价：

(i) M 是 $(\mathcal{X}_h, \mathcal{U})$ 上的耗散节点。(ii) $N := M \left[\begin{smallmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right]\colon \mathcal{X}_h \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$，其中 $\operatorname{dom} N = \left[\begin{smallmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right] \operatorname{dom} M$ 是 $(\mathcal{U}^*, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ 上的耗散系统节点。

证明。
“(i)⇒(ii)”：假设 M 是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点。则 M 是耗散的，并具有定义 3.4 中的性质 (a)、(b) 和 (c)。由此可得， N 满足定义 2.1 中的性质 (a)、(b) 和 (c)。此外，根据命题 3.5， $F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$ 在 $\mathcal{X}_h$ 上生成一个强连续半群。综上，我们得到 N 是一个耗散系统节点。

“(ii)⇒(i)”：假设 N 是 $(\mathcal{U}^*,\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的耗散系统节点。同样，通过比较定义 2.1 和定义 3.4，我们可直接得到 M 具有定义 3.4 中的性质 (a)、(b) 和 (c)。 N 的耗散性意味着 M 也具有这一性质。因此， F 是耗散的。此外，由于 $F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$ 在 $\mathcal{X}_h$ 上生成一个强连续半群，根据 Hille–Yosida 定理 [13, 第 II.3] 节可得，对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}_+$， $\lambda I_{\mathcal{X}} - F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$ 有界可逆。这表明 M 是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点。□

注 3.7（耗散节点）。
(a) 类似于注 2.4，通过使用，定义在 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点 $M = \left[\begin{smallmatrix} F\text{且}K \\ G\text{且}L \end{smallmatrix}\right]$ 引理 2.3， $K\text{且}L \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(F\text{且}G)\ \mathcal{U}^*)$，其中 $\mathrm{dom}(F\text{且}G)$ 配备图 $F\text{且}G$的范数。
另一方面，若 $M = \left[\begin{smallmatrix} F\text{且}K \\ G\text{且}L \end{smallmatrix}\right]$ 是耗散的，并且具有定义 3.4 中的性质 (b)–(d) 此外还满足 $K\text{且}L \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(F\text{且}G)\ \mathcal{U}^*)$，则由引理 2.3 可得， M 是一个耗散——耗散节点。
(b) 对于系统节点，我们可以通过 $Kx' = K\&L\left(\begin{smallmatrix} x' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ 定义 $K\colon \mathrm{dom}\ F \to \mathcal{U}^*$。根据前面的注释，当 $M = \left[\begin{smallmatrix} F\&K \\ G\&L \end{smallmatrix}\right]$ 是耗散节点时，可得 $K \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}\ F,\mathcal{U}^*)$。
(c) 取 $\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\alpha\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F$ 是双射，并令 $\mathcal{X}_{h,-1}$ 为关于范数的 $\mathcal{X}_h$ 的完备化

$$\|x\|_{\mathcal{X}_{h,-1}} := \|(\alpha\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F)^{-1}x\|.$$

由于 $\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}\colon\ \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h^*$ 是等距变换，且 $\alpha\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F = (\alpha I - F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h})\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}$，根据 [36, 命题 2.10.2]，我们可以得出 $\mathcal{X}_{h,-1}$ 的拓扑不依赖于 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的具体选择。此外， F 和 $F\&G$ 分别延拓为有界算子 $F_{-1}\colon \mathcal{X}_h^* \to \mathcal{X}_{h,-1}$ 及 $[F_{-1}\ G]\colon \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}_{h,-1}$。

(d) 假设 h 有界且强制。则 $\mathcal{X}_h$ 和 $\mathcal{X}_h^*$ 中的内积都等价于 $\mathcal{X}$中的内积，因此得到 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^*$。此外，拟 Gelfand 三元组的构造表明，对偶积等于 $\mathcal{X}$中的内积。因此，在这种情况下， M是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$上的耗散节点，当且仅当它是 $(\mathcal{X},\mathcal{U})$上的耗散节点。

现在我们可以证明耗散节点还具有一些其他性质。

命题 3.8（耗散节点——其他性质）。设 $\mathcal{X}_h$和 $\mathcal{U}$ 为希尔伯特空间，其反对偶分别为 $\mathcal{X}_h^*$和 $\mathcal{U}^*$，并设 $M = \left[\begin{smallmatrix} F\&K \\ G\&L \end{smallmatrix}\right]\colon\ \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \mathrm{dom}\ M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$上的耗散节点。则以下陈述成立：

(a) M 是极大耗散的。(b) $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset\colon\ \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \mathrm{dom}\ M^* \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点，且满足

$$M^* = \begin{bmatrix} [F\&G]^d \\ [K\&L]^d \end{bmatrix}$$

且定义域

$$\mathrm{dom}\, M^* = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{U} \,\middle|\, F_{-1}^* x + K^* x' \in \mathcal{X} \right\},$$

其中， $[F\&G]^d$是 $[F_{-1}^*\ K^*]$在 $\mathrm{dom}\ M^*$上的限制，并且对于所有 $\alpha \in \rho(F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h})$，

$$[K\&L]^d \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y \end{smallmatrix}\right) := G^*\left(x' - (\overline{\alpha}\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1}^*)^{-1}K^*\right) + \mathcal{F}(\alpha)^* y,$$

其中， $\mathcal{F}$ 是与算子节点 $N = M \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$ 相关联的传递函数。特别地， M^* 的主算子是 F^*。

证明。
(a) 利用命题 3.6，我们可以从 [33, Lem. 4.3] 推知， $N := M \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$ 是极大耗散的。因此， M 也同样是极大耗散的。
(b) 由于根据前述结论， M 是极大耗散的，因此由命题 2.13 可知 M^* 是耗散的。其余结论可由命题 3.6 与注 2.6 结合得出。

□

我们进一步给出一个关于重新定义耗散节点第二个块分量的结果。在应用中，例如，这指的是将某些输入和输出通道设为非活动状态。

命题 3.9（耗散节点与输入/输出重新定义）。设 $\mathcal{X}_h$、 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{U}_{\text{new}}$ 为希尔伯特空间，其反对偶空间为 $\mathcal{X}_h^*$、 $\mathcal{U}^*$、 $\mathcal{U}^{*\text{新}}$，设 $M = \left[\begin{smallmatrix} F & G \\ K & L \end{smallmatrix}\right] \colon \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 是 $(\mathcal{X}_h, \mathcal{U})$ 上的一个耗散节点，并设 $U \in L(\mathcal{U}_{\text{new}}, \mathcal{U})$。那么

$$\begin{aligned} M_U &:= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}_h} & 0 \\ 0 & U^* \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}_h^*} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\&(GU) \\ U^*(K\&(LU)) \end{bmatrix}, \\ \operatorname{dom} M_U &= \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ u \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x' \\ Uu \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M \right\} \end{aligned}$$

是 $(\mathcal{X}_h, \mathcal{U}_{\text{new}}^*)$ 上的耗散节点。

证明。我们按照逆序依次证明定义 3.4 中的性质 (a)–(d)。

(d) 由于 M 和 M_U 具有相同的主算子，因此显然满足此性质。(c) 设 $u_{\text{new}} \in \mathcal{U}_{\text{new}}$。则存在某个 $x' \in \mathcal{X}_h^*$，使得 $\begin{pmatrix} x' \\ Uu_{\text{new}} \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M$，而根据 M_U 的定义可得 $\begin{pmatrix} x' \\ u_{\text{new}} \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M_U$。(b) 考虑 $\operatorname{dom} M_U$ 中的一个序列，满足

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_n' \\ u_{\text{new},n} \end{pmatrix} \right) &\to \begin{pmatrix} x' \\ u_{\text{new}} \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}_{\text{new}}, \\ \left(F\&(GU) \begin{pmatrix} x_n' \\ u_{\text{new},n} \end{pmatrix} \right) &\to x \text{ in } \mathcal{X}_h. \end{aligned}$$

于是，由于 U 的有界性，

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_n' \\ Uu_{\text{new},n} \end{pmatrix} \right) &\to \begin{pmatrix} x' \\ Uu_{\text{new}} \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \\ \left(F\&G \begin{pmatrix} x_n' \\ Uu_{\text{new},n} \end{pmatrix} \right) &\to x \text{ in } \mathcal{X}_h. \end{aligned}$$

$F\&G$ 的闭性以及 $\operatorname{dom}(F\&G) = \operatorname{dom} M$，现在可得 $\begin{pmatrix} x' \\ Uu_{\text{new}} \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M$，满足

$$\left(F\&G \begin{pmatrix} x' \\ Uu_{\text{new}} \end{pmatrix} \right) = x.$$

换言之，$\begin{pmatrix} x' \\ u_{\text{new}} \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M_U$，且 $\left(F\&(GU) \begin{pmatrix} x' \\ u_{\text{new}} \end{pmatrix} \right) = x$。

(a) M_U 的耗散性直接由 M的耗散性得出。剩下需要证明 M_U 是闭的。根据引理 2.3以及 M 是一个耗散节点这一事实，存在某个 $C > 0$满足

$$\left\| K\&L \begin{pmatrix} x' \\ Uu \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{U}^*} \le C \left(\left\| \begin{pmatrix} x' \\ Uu \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}} + \left\| F\&G \begin{pmatrix} x' \\ Uu \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}_h} \right) \quad \forall \begin{pmatrix} x' \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M_U.$$

这意味着，对于所有 $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{dom}\ M_U$,

$$\begin{aligned}\|U^*(K\&(LU))\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{U}^*} &= \|U\|_{L(\mathcal{U}_{\mathrm{new}},\mathcal{U})}\|K\&(LU)\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{U}^*} \\ &\le C\,\|U\|_{L(\mathcal{U}_{\mathrm{new}},\mathcal{U})}\left(\|\left(\begin{smallmatrix} x' \\ Uu \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{X}_h^*\times\mathcal{U}} + \|F\&G\left(\begin{smallmatrix} x' \\ Uu \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{X}_h}\right) \\ &= \tilde{C}\left(\|\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{X}_h^*\times\mathcal{U}} + \|F\&(GU)\left(\begin{smallmatrix} x' \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{X}_h}\right)\end{aligned}$$

with

$$\tilde{C} := C\cdot\|U\|_{L(\mathcal{U}_{\mathrm{new}},\mathcal{U})}\cdot\max\{\|U\|_{L(\mathcal{U}_{\mathrm{new}},\mathcal{U})},1\}.$$

现在，利用引理 2.3 的另一个应用可知， M_U 是闭的。

□

3.3. 端口哈密顿系统。介绍了哈密顿量和耗散节点之后，我们现在可以介绍受系统节点理论启发的端口哈密顿系统概念。

定义 3.10（端口哈密顿系统节点）。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{U}$为希尔伯特空间，设 h: dom h ×dom h $\to \mathbb{C}$ 且 dom h $\subset$ $\mathcal{X}$为一个稠密定义的闭正半双线性型。~设 $(\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为与 h相关联的拟 Gelfand 三元组，并设 $H \in L(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h^*)$ 为与 h 相关联的算子的能量延拓（参见命题 2.17 (e)）。此外，设M: $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \mathrm{dom}\ M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 为定义在 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点。则我们称

$$S := \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}_h} & \\ & -I_{\mathcal{U}^*} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \widetilde{H} & \\ & I_{\mathcal{U}} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的一个端口哈密顿系统节点。

若 $M = \left[\begin{smallmatrix} F\&K & G\&L \end{smallmatrix}\right]$，则与端口哈密顿系统节点对应的微分方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F\&G \\ -K\&L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

与定义 2.7 类似， $[0,T]$ 上的经典轨迹是一个三元组

$$(y,x,u) \in C([0,T];\mathcal{U}^*)\times C^1([0,T];\mathcal{X}_h)\times C([0,T];\mathcal{U})$$

它在 $[0,T]$ 上逐点满足 (3.3)，而广义轨迹则是在 $L^2([0,T];\mathcal{U}^*)\times C([0,T];\mathcal{X}_h)\times L^2([0,T];\mathcal{U})$ 的拓扑下经典轨迹的极限。

接下来，我们总结端口哈密顿系统节点的性质。例如，我们证明它们是定义 2.1 意义下的系统节点。

定理 3.11（端口哈密顿系统节点）。设 S 是 (3.2) 中的一个端口哈密顿系统节点，其中采用定义 3.10 中的记号。则有以下结论:

(a) S是定义在 $(\mathcal{U}^*,\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的系统节点；~(b) S 的主算子 $A := FH$ 在 $\mathcal{X}_h$ 上生成一个压缩半群；(c) 与 S 相关联的传递函数 $\mathcal{G}$ 满足

$$\forall\, s\in\mathbb{C}_+,\ u\in\mathcal{U}: \quad \mathrm{Re}\langle\mathcal{G}(s)u,u\rangle_{\mathcal{U}^*,\mathcal{U}} \ge 0;$$

(d) 对于所有 $T>0$，广义轨迹 $(y,x,u) \in L^2([0,T];\mathcal{U}^*)\times C([0,T];\mathcal{X}_h)\times L^2([0,T];\mathcal{U})$（因此经典解也如此）均满足耗散不等式

$$\begin{aligned}\forall\, t\in[0,T]: \quad & \mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x(0)) \\ &= \mathrm{Re}\int_0^t \left\langle M\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{H}x(\tau) \\ u(\tau) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \widetilde{H}x(\tau) \\ u(\tau) \end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{X}_h\times\mathcal{U}^*,\mathcal{X}_h^*\times\mathcal{U}} \mathrm{d}\tau + \mathrm{Re}\int_0^t \langle y(\tau),u(\tau)\rangle_{\mathcal{U}^*,\mathcal{U}}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\leq \operatorname{Re} \int_0^t \langle y(\tau), u(\tau) \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} \mathrm{d}\tau, \quad (3.4)$$

其中 $\mathcal{H}\colon\ \mathcal{X}_h \to \mathbb{R}$是与 h 相关的哈密顿量。

证明。

(a) 根据命题 2.17 (e)，$H = \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$，由命题 3.8 可知，$\begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}} \\ -I_{\mathcal{U}^*} \end{bmatrix} S$是一个系统节点。因此结论成立，因为改变输出方程中算子的符号不会影响算子是否为系统节点这一性质。

(b) 结合命题 3.5 (d) 和 $H = \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$即可得到此结论。

(c) 首先注意到，根据命题 3.5 (a)，F是极大耗散的，因此 $FH = F\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$也是如此。由此，根据命题 2.13 可知，对于所有 $s \in \mathbb{C}_+$，$sI - FH$都是双射。因此，传递函数 $\mathcal{G}$ 定义在 $\mathbb{C}_+$上。

现在令 $u \in \mathcal{U}, s \in \mathbb{C}_+$。根据 $H = \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}$，对于注 3.7 (b) 中的 F_{-1}，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(s) &= -(K\widetilde{H}\&L) \begin{bmatrix} (sI - F_{-1}\widetilde{H})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} \\
&= -(K\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}\&L) \begin{bmatrix} (sI - F_{-1}\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} = -K\&L \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}
&F\&G \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} \\
&= (F - s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\&G \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} + s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}(s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\
&= s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}(s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G.
\end{aligned}$$

那么，根据 $M = \begin{bmatrix} F\&G \\ K\&L \end{bmatrix}$的耗散性，后面的关系式可推出

$$\begin{aligned}
0 &\geq \operatorname{Re} \left\langle \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} F\&G \\ K\&L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} u \right\rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \begin{bmatrix} (s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ I \end{bmatrix} u, \begin{pmatrix} s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}(s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}G \\ -\mathcal{G}(s) \end{pmatrix} u \right\rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} \\
&= \operatorname{Re} s \cdot \|(s\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1} - F_{-1})^{-1}Gu\|_{\mathcal{X}_h^*}^2 - \operatorname{Re}\langle \mathcal{G}(s)u, u \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} \geq -\operatorname{Re}\langle \mathcal{G}(s)u, u \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}}.
\end{aligned}$$

(d) 假设 (y, x, u) 是一条经典轨迹，并令 $t \in [0, T]$。那么，由 (3.1) 和乘积法则可得

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(x(t)) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|_{\mathcal{X}_h}^2 = \operatorname{Re}\langle x(t), \dot{x}(t) \rangle_{\mathcal{X}_h}^2 \\
&= \operatorname{Re} \left\langle x(t), F\&G \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_h} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \widetilde{H}x(t), F\&G \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} F\&G \\ K\&L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} \\
&\qquad + \operatorname{Re} \left\langle u(t), -K\&L \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}^*} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} F\&G \\ K\&L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{H}x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} + \operatorname{Re}\langle u(t), y(t) \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}^*} \\
&\leq \operatorname{Re}\langle u(t), y(t) \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}^*}
\end{aligned}$$

对上述不等式积分即可得到 (3.4)。然后通过取极限，可得广义解的情形。

□

我们汇集了关于所引入的这类系统的一些评述。

评注 3.12（端口哈密顿系统节点）。设 S 是如 (3.2) 所示的端口哈密顿系统节点，这里采用定义 3.10 中的记号。

(a) 证明 (c) 和 (d) 的论证与 [33, 被动系统的定理 4.2] 中一些相应结论的论证类似。

(b) 若 $\mathcal{U} = \mathbb{C}^m$，则传递函数取值于 $\mathbb{C}^{m\times m}$，而定理 3.11 (c) 意味着，对于所有 $s \in \mathbb{C}_+$，$\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}(s)^*$ 都是半正定的。此外，对于所有 $s \in \mathbb{R}_{>0}$ 都满足 $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 的这类传递函数称为正实传递函数；它们在无源系统和网络综合的背景下发挥着重要作用 [3]。(c) 由定理 3.11 (a) 可知，端口哈密顿系统节点是定义 2.1 意义下的系统节点，因此我们可以应用命题 2.8 得出：对于所有 $x_0 \in \mathcal{X}_h$ 和 $u \in W^{2,1}([0,T];\mathcal{U})$，若 $\begin{pmatrix} \widetilde{H}x_0() \\ u \quad 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M$，则存在唯一的经典轨迹 (y,x,u)，满足 (3.3)。

按照定义 2.10 的意义，适定性并非端口哈密顿系统的一种自然属性。也就是说，不能据此断定端口哈密顿系统是适定的。不过，可以通过传递函数对适定性作出相当简单的刻画。

命题 3.13（端口哈密顿系统节点与适定性）。设 S 是如式 (3.2) 所示的端口哈密顿系统节点，其中采用定义 3.10 中的记号。此外，设 $\mathcal{G}$ 是与 S 相关联的传递函数。那么，系统 (3.3) 适定，当且仅当 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 中某条（或等价地，每条）垂直线上有界。

证明。由定理 3.11 (a)，S 是 $(\mathcal{U}^*,\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的系统节点。因此可得

$$\widetilde{S} := \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}} & \\ & \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{-1} \end{bmatrix} S$$

是 $(\mathcal{U},\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的系统节点，其传递函数为 $\widetilde{\mathcal{G}}(s) = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{G}(s)$，并且还满足 $\begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}} & \\ & -I \end{bmatrix} \widetilde{S}$ 是耗散的。由于里斯映射是等距变换，我们有 $\|\widetilde{\mathcal{G}}(s)\|_{L(\mathcal{U})} = \|\mathcal{G}(s)\|_{L(\mathcal{U},\mathcal{U}^*)}$；此外，(3.3) 的适定性等价于与 S 相关联的~系统的适定性。由于 S 是端口哈密顿系统节点，与 S 相关联的系统在 [33] 的意义下是阻抗无源的。于是可由 [33, 定理 5.1] 得到所需结论。□

我们对耗散节点的定义涉及能量空间 $\mathcal{X}_h$，而能量空间又是通过拟 Gelfand 三元组的概念由哈密顿量构造而成的。“更自然”的情况是，给定了作用于 $(\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上的耗散节点（其中 $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$ 已被识别）。接下来，我们将提出一个判据，以判断在某种意义下它是否对应于作用于 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点。原则上，这种构造可以按如下方式进行：首先将耗散节点 M 在 $(\mathcal{X},\mathcal{U})$ 上限制到空间

$$\mathcal{Z} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \left(\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}\right) \cap \operatorname{dom} M \,\middle|\, F\&G\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_h \right\}, \tag{3.5}$$

它是 $\operatorname{dom} M$ 和 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$ 的子空间。此外，$\mathcal{Z}$ 的构造得出 $M\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$。也就是说，我们得到一个算子

$$\widetilde{M} : \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} \widetilde{M} := \mathcal{Z} \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*, \qquad \widetilde{M}\begin{pmatrix} x' \\ u \end{pmatrix} := M\begin{pmatrix} x' \\ u \end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix} x' \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}. \tag{3.6}$$

随后，我们取该算子的闭包，此时该算子被视为从 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$的一个子空间映射到 $\mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$的算子。

命题 3.14（($\mathcal{X}$,$\mathcal{U}$) 上的耗散节点）。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{U}$ 为希尔伯特空间，且 $h\colon \operatorname{dom} h \times \operatorname{dom} h \to \mathbb{C}$ with $\operatorname{dom} h \subset \mathcal{X}$ 是一个稠密定义的闭正半双线性型。设 $(\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}, \mathcal{X}_h)$ 为与 h 相关联的拟 Gelfand 三元组。设 $M = \begin{pmatrix} F & G \\ K & L \end{pmatrix} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} M \to \mathcal{X} \times \mathcal{U}^*$ 是 ($\mathcal{X}$,$\mathcal{U}$) 上的耗散节点（在此，我们将 $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$ 视为同一对象），并具有以下性质：

(a) 空间

$$\mathcal{V} := \{x \in \mathcal{X}_h^* \cap \operatorname{dom} F \,|\, Fx \in \mathcal{X}_h\},$$

在 $\mathcal{X}_h^*$ 中稠密，并且存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}_+$，使得空间

$$\left(F - \lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}\right)\mathcal{V}$$

在 $\mathcal{X}_h$中稠密。

(b) 对所有 $u \in \mathcal{U}$，都存在某个 $x \in \mathcal{X}_h^*$，使得 $\binom{x}{u} \in \operatorname{dom} M$ with

$$M\binom{x}{u} \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*.$$

(c) 对于所有 $y \in \mathcal{U}$，存在某个 $x \in \mathcal{X}_h^*$，使得 $\binom{x}{y} \in \operatorname{dom} M^*$ with

$$M^*\binom{x}{y} \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*.$$

于是，对于如（3.5）中的 $\mathcal{Z}$，如（3.6）中的算子 M 是可闭的（作为定义在 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$ 的子空间上并映射到 $\mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$ 的算子）。其闭包

$$\overline{\widetilde{M}} =: \begin{bmatrix} F_c \& G_c \\ K_c \& L_c \end{bmatrix} : \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} \overline{\widetilde{M}} \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*. \tag{3.7}$$

是 ($\mathcal{X}_h$,$\mathcal{U}$) 上的一个耗散节点。

证明。步骤 1：我们证明 M 是可闭的，并且具有耗散的闭包：假设 (a) 和 (b) 推出，如（3.5）中的 $\mathcal{Z}$ 在 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$ 中是稠密的。此外，M 的耗散性结合命题 2.17 (b) 给出

$$\forall \binom{x}{u} \in \mathcal{Z}: \quad \operatorname{Re}\left\langle \binom{x}{u}, \widetilde{M}\binom{x}{u} \right\rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} = \operatorname{Re}\langle \binom{x}{u}, M\binom{x}{u} \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{X} \times \mathcal{U}^*} \leq 0.$$

总之，这意味着 M 是稠密定义且耗散的。于是，[13,命题 3.14 (iv)] 得出它是可闭的，其闭包 M 是耗散的。

步骤 2：我们证明 $F_c \& G_c\colon \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \operatorname{dom} F_c \& G_c \to \mathcal{X}_h$（其中 $\operatorname{dom} F_c \& G_c = \operatorname{dom} M$）是闭的。根据引理 2.3，只需证明存在某个常数 $C > 0$，使得

$$\|K_c \& L_c \binom{x'}{u}\|_{\mathcal{U}^*} \leq C\left(\|\binom{x'}{u}\|_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}} + \|F_c \& G_c \binom{x'}{u}\|_{\mathcal{X}_h}\right) \quad \forall \binom{x'}{u} \in \operatorname{dom} \overline{\widetilde{M}}.$$

为导出矛盾，我们假设其逆命题成立，这意味着存在某个序列 $\left(\binom{x_n'}{u_n}\right)$ in $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$，使得

$$(\|K_c \& L_c \binom{x_n'}{u_n}\|_{\mathcal{U}^*}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

$$\text{and } (\|F_c \& G_c \binom{x_n'}{u_n}\|_{\mathcal{X}_h}), (\|\binom{x_n'}{u_n}\|_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}}) \text{ bounded.}$$

由于 $\overline{\widetilde{M}}$是 $\widetilde{M}$的闭包，不失一般性，我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$, $\binom{x_n'}{u_n} \in (\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}) \cap \operatorname{dom} M$，都有 $F \& G \binom{x_n'}{u_n} \in \mathcal{X}_h$。

巴拿赫-施泰因豪斯定理 [2, 定理 7.3] 表明，存在某个 $y \in \mathcal{U}$，使得

$$\left(\langle y, K_c \& L_c \binom{x_n'}{u_n}\rangle_{\mathcal{U},\mathcal{U}^*}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

此外，根据 (c)，存在某个 $x \in \mathcal{X}_h^*$，使得 $\binom{x}{y} \in \operatorname{dom} M^*$，且 $M^*\binom{x}{y} \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$。然后由命题 2.17 (b) 可得

$$\begin{aligned}\infty \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \; & \langle y, K_c \& L_c \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{U},\mathcal{U}^*} + \langle x, F_c \& G_c \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} \\ &= \langle \binom{x}{y}, \widetilde{M} \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}, \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*} \\ &= \langle \binom{x}{y}, M \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{X} \times \mathcal{U}^*} \\ &= \langle M^* \binom{x}{y}, \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{U}^*, \mathcal{X} \times \mathcal{U}} = \langle M^* \binom{x}{y}, \binom{x_n'}{u_n} \rangle_{\mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*, \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}}.\end{aligned}$$

但这与序列 $\left(\binom{x_n'}{u_n}\right)$ 在 $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U}$ 中的有界性矛盾。

$\widetilde{\widetilde{\ }}$步骤 3：我们得出结论，所需结果成立，即 (3.7) 中的 M 是 $\widetilde{\widetilde{\ }}(\mathcal{X}_h, \mathcal{U})$ 上的耗散节点。由步骤 1 可知，M 是闭的且具有耗散性。M 的闭性

$$F_c \& G_c : \operatorname{dom} \widetilde{\widetilde{M}} \supset \mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}_h$$

$\widetilde{\widetilde{\ }}$已在步骤 2 中得到证明。此外，假设 (b) 直接意味着 M 具有定义 3.4 中的性质 (c)。最后，我们可以直接从假设 (a) 得出，

$$F_c - \lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h} : \mathcal{X}_h^* \supset \operatorname{dom} F_c \to \mathcal{X}_h$$

$\widetilde{\widetilde{\ }}$具有稠密值域。至此，证明了 M 是一个耗散节点。 □

注 3.15（$(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ 上的耗散节点）。对 $\left(F - \lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}\right)\mathcal{V}$ 的稠密性假设是为了保证 F_c 的极大耗散性；根据命题 2.13，这等价于 F_c^* 的耗散性。作者尚不确定后者是否也可由 $\left(F - \lambda \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}\right)\mathcal{V}$ 的稠密性推出

$$\mathcal{W} := \{x \in \mathcal{X}_h^* \cap \operatorname{dom} F^* \,|F^* x \in \mathcal{X}_h\} \text{ in } \mathcal{X}_h.$$

4. Applications

接下来，我们将展示几类带边界控制和观测的偏微分方程如何符合我们的端口哈密顿系统框架。

4.1. 带狄利克雷边界控制的对流扩散方程。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ 是一个有界利普希茨区域，其外法向量为 $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$（定义在边界上）；设 $a \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$ 是逐点厄米且正定的，并且 $a^{-1} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$；再设 $b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 是实值无散函数，且其法向迹为零，即 $\operatorname{div} b = 0$，并且 $\nu^\top b = 0$ 于 $\partial\Omega$ 上。
考虑带狄利克雷边界控制和诺伊曼边界观测的对流扩散方程，即：

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial t} x(t,\xi) &= \operatorname{div} a(\xi) \nabla x(t,\xi) + b(\xi)^\top \nabla x(t,\xi), && t \geq 0, \xi \in \Omega, \\ u(t,\xi) &= x(t,\xi), \quad y(t,\xi) = \nu(\xi)^\top a(\xi) \nabla x(t,\xi), && t \geq 0, \, \xi \in \partial\Omega.\end{aligned} \tag{4.1}$$

我们将证明该系统符合我们的端口哈密顿系统框架。设 $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$，并取最标准的哈密顿量 $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\|x\|_{L^2(\Omega)}^2$。也就是说，底层的半双线性型 h 只是 $L^2(\Omega)$ 中的标准内积，因此 $\operatorname{dom} h = \mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = L^2(\Omega)$ 且 $\widetilde{H} = I_{L^2(\Omega)}$。

为恰当引入上述边界控制问题的合适表述和空间，考虑迹算子 γ：$W^{1,2}(\Omega) \to W^{1/2,2}(\partial\Omega)$，它将 $x \in W^{1,2}(\Omega)$ 映射到其边界迹 $x|_{\partial\Omega}$，其中 $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ 表示分数阶 $1/2$ [1] 的索об列夫空间。

根据迹定理 [15, Thm. 1.5.1.3], γ 是有界且满射的。此外， $H(\mathrm{div}, \Omega)$ 是所有平方可积函数构成的空间，其中这些函数的弱散度存在且平方可积。也就是说，令 $W^{1,2}_0(\Omega) := \ker \gamma$,

$$z = \operatorname{div} x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega): \ -\langle \nabla \varphi, x \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} = \langle \varphi, z \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

定义 $W^{-1/2,2}(\partial\Omega) := W^{1/2,2}(\partial\Omega)^*$， $x \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ 的法向迹由 $w = \gamma_N x \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ 良定义，其中

$$\forall z \in W^{1,2}(\Omega): \ \langle w, \gamma z \rangle_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega), W^{1/2,2}(\partial\Omega)} = \langle \operatorname{div} x, z \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle x, \nabla z \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)}.$$

格林公式 [35, 第 16] 章表明，事实上，对于所有 $\xi \in \partial\Omega$，若 $\partial\Omega$ 且 x 光滑，则有 $w(\xi) = \nu(\xi)^\top x(\xi)$。进一步地， $\gamma_N: \ H(\mathrm{div}, \Omega) \to W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ 是有界且满射的 [35, 引理 20.2]。由于 Ω 有界，且光滑函数同时包含于 $L^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$ 中，因此 $L^2(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中稠密。由此，我们关于 b 的条件等价于

$$b \in L^\infty(\Omega) \ \wedge \ \forall z \in W^{1,1}(\Omega): \ \langle \nabla z, b \rangle_{L^1(\Omega;\mathbb{C}^d), L^\infty(\Omega;\mathbb{C}^d)} = 0, \tag{4.2}$$

其中，后者表示 L^1 和 $L^\infty \cong (L^1)^*$ 的典范对偶积。注意，由于 Ω 有界，我们有 $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$，因此 $b \in H(\text{散度}, \Omega)$。

现在，我们引入与具有狄利克雷边界控制和诺伊曼观测的对流扩散方程相对应的耗散节点，即 $M = \begin{bmatrix} F \& K & G \& L \end{bmatrix}$，其中

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} M &= \operatorname{dom} F \& G \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1/2,2}(\partial\Omega) \,\middle|\, a\nabla x \in H(\operatorname{div}, \Omega) \ \wedge \ \gamma x = u \right\} \end{aligned} \tag{4.3a}$$

and

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M: \quad F \& G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \operatorname{div}\left(a\nabla x\right) + b^\top \nabla x, \ \ K \& L \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = -\gamma_N(a\nabla x). \tag{4.3b}$$

命题 4.1（具有狄利克雷控制和诺伊曼观测的对流扩散方程的耗散节点）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ 为有界利普希茨区域。此外，设 $a \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$ 逐点厄米且正定，满足 $a^{-1} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$，并设 $b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$，其中散度 $\operatorname{div} b = 0$ 且 $\gamma_N b = 0$。那么，(4.3) 中的 M 是 $(\mathcal{X}_h, \mathcal{U})$ 上的耗散节点，满足 $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = L^2(\Omega)$ 以及 $\mathcal{U} = W^{1/2,2}(\partial\Omega)$, $\mathcal{U}^* = W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$。

证明。我们依次证明 M 满足定义 3.4 中的 (a)–(d)。

(a) 第 1 步：我们证明 M 是耗散的。设 $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M$。弱导数乘积法则 [2, 定理 4.25] 给出 $x\overline{x} \in W^{1,1}(\Omega)$，使得

$$\tfrac{1}{2}\nabla(x\overline{x}) = \operatorname{Re}(x\nabla\overline{x}) \in L^1(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

因此，利用 b 为实值函数这一事实，

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle x, b^\top \nabla x \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \operatorname{Re}(x\nabla\overline{x}), b \rangle_{L^1(\Omega;\mathbb{C}^d), L^\infty(\Omega;\mathbb{C}^d)} \\ &= \tfrac{1}{2}\langle \nabla(x\overline{x}), b \rangle_{L^1(\Omega;\mathbb{C}^d), L^\infty(\Omega;\mathbb{C}^d)} \overset{(4.2)}{=} 0. \end{aligned}$$

利用 $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M$，我们得到 $u = \gamma x$，因此（为简洁起见，我们省略表示空间的下标）

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\rangle &= \operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{div}(a\nabla x) + b^\top \nabla x \\ -\gamma_N(a\nabla x) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle x, \operatorname{div}(a\nabla x) \rangle + \operatorname{Re}\langle x, b^\top \nabla x \rangle - \langle u, \gamma_N(a\nabla x) \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}\langle x, \operatorname{div}(a\nabla x)\rangle + \underbrace{\operatorname{Re}\langle b\, x, \nabla x\rangle}_{=0} - \operatorname{Re}\langle \underbrace{u}_{=\gamma x}, \gamma_N(a\nabla x)\rangle \\
&= -\operatorname{Re}\langle \nabla x, a\nabla x\rangle + \operatorname{Re}\langle \gamma_N(a\nabla x), \gamma x\rangle - \operatorname{Re}\langle \gamma x, \gamma_N(a\nabla x)\rangle \\
&= -\operatorname{Re}\langle \nabla x, a\nabla x\rangle \le 0,
\end{aligned}
$$

其中后者由 a 的逐点正定性成立。

步骤 2：我们证明 $M - \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right]$ 是满射。设 $z \in L^2(\Omega)$ 且 $w \in W^{-1/2}(\partial\Omega)$。由 Lax-Milgram 引理 [15, Lem. 2.2.1.1], ，存在某个 $x \in W^{1,2}(\Omega)$，使得

$$
\begin{aligned}
\forall\, \varphi \in W^{1,2}(\Omega): \quad \langle \nabla\varphi, \nabla x\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \langle \varphi, x\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi, b^\top \nabla x\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \gamma\varphi, a\gamma x\rangle_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \\
= -\langle \varphi, z\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \gamma\varphi, w\rangle_{W^{1/2,2}(\partial\Omega), W^{-1/2,2}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}
$$

根据弱导数和诺伊曼迹的定义，后者意味着，对于 $u = \gamma x \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$,

$$
\left(M - \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right]\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right).
$$

步骤 3：我们证明 M 是闭的。

由于根据步骤 1，2 M 是耗散的，且 $M - \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right]$ 是满射，因此后一个算子有一个有界逆算子，其算子范数小于或等于 1。这表明 $M - \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \end{smallmatrix}\right]$ 是闭的，因此 M 也是闭的。

(b) 我们证明 $F\&G$: dom $M \to L^2(\Omega)$ 是闭的。由 (a) 可知 M 是闭的，因此根据引理 2.3，只需证明 $K\&L \in L(\mathrm{dom}(F\&G)\ W^{-1/2,\ 2}(\partial\Omega))$。为此，考虑满足下述条件的序列 (x_n) 和 (u_n),

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ u_n \end{smallmatrix}\right)\right) \quad &\text{is bounded in } L^2(\Omega) \times W^{1/2,2}(\partial\Omega), \\
\left(F\&G\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ u_n \end{smallmatrix}\right)\right) \quad &\text{is bounded in } L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

我们需要证明 $(K\&L\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ u_n \end{smallmatrix}\right))$ 在 $W^{-1/2,\ 2}(\partial\Omega)$ 中有界。

步骤 1：我们首先证明 (x_n) 在 $W^{1,\ 2}(\Omega)$ 中有界。由于迹算子γ： $W^{1,\ 2}(\Omega) \to W^{1/2,\ 2}(\partial\Omega)$ 有界且满射，因此它存在一个有界右逆 γ^-。也就是说， $\gamma^- \in L(W^{1/2,\ 2}(\partial\Omega)\ W^{1,\ 2}(\Omega))$，且 $\gamma\gamma^- = I_{W^{1/2,\ 2}(\partial\Omega)}$。那么序列 $(x_n - \gamma^- u_n)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $x_n - \gamma^- u_n \in W^{1,\ 2\,0}(\Omega)$。利用 a^{-1} 的逐点正定性和本质有界性,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle x_n - \gamma^- u_n, F\&G\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ u_n \end{smallmatrix}\right)\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\operatorname{Re}\langle \nabla x_n - \nabla\gamma^- u_n, a\nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \operatorname{Re}\langle x_n - \gamma^- u_n, b^\top \nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\langle \nabla x_n, a\nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \operatorname{Re}\langle \nabla\gamma^- u_n, a\nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} \\
&\quad + \operatorname{Re}\langle x_n, b^\top \nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega)} - \operatorname{Re}\langle \gamma^- u_n, b^\top \nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\le -\|a^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}^{-1} \|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)}^2 + \|\nabla\gamma^- u_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} \\
&\quad + \|x_n\|_{L^2(\Omega)}\, \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \|\gamma^- u_n\|_{L^2(\Omega)}\, \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)}.
\end{aligned}
$$

利用（x_n）在 $L^2(\Omega)$ 中有界，且（$\gamma^- u_n$）在 $W^{1,\ 2}(\Omega)$ 中有界，可知存在常数 c_1、$c_2 > 0$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$
\|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)}^2 \le c_1 + c_2 \|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)}.
$$

这表明实数序列 $(\|\nabla x_n\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)})$ 是有界的。进一步利用 (x_n) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛这一事实，可知 (x_n) 是 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列。

步骤 2：我们证明 $(K\&L\binom{x_n}{u_n})$ 是 $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ 中的有界序列。为此，根据巴拿赫-施泰因豪斯定理 [2,Thm. 7.3], ，只需证明对于所有$y \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$，标量序列

$$\left(\langle y, K\&L\binom{x_n}{u_n}\rangle_{W^{1/2,2}(\partial\Omega),W^{-1/2,2}(\partial\Omega)}\right)$$

是有界的。由于 $y \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$，迹算子的满射性意味着存在某个 $w \in W^{1,2}(\Omega)$，使得 $\gamma w = y$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle w, F\&G\binom{x_n}{u_n}\rangle_{L^2(\Omega)} = &-\langle \nabla w, a\nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \langle w, b^\top \nabla x_n\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &+ \langle y, \gamma_N(a\nabla x_n)\rangle_{W^{1/2,2}(\partial\Omega),W^{-1/2,2}(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

现在利用第 1 步中 (x_n) 是 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列这一事实，可知由 y 和 $\gamma_N(a\nabla x_n)$ 的对偶积构成的序列必定有界。由于 $\gamma_N(a\nabla x_n) = K\&L\binom{x_n}{u_n}$，结论得证。

(c) 我们证明，对于所有 $u \in W^{1/2,2}(\Omega)$，都存在某个 $x \in L^2(\Omega)$，使得 $\binom{x}{u} \in \mathrm{dom}\ M$。令 $u \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$。由于存在某个 $x_D \in W^{1,2}(\Omega)$，使得 $u = \gamma x_D$，Lax-Milgram 引理进一步推出存在某个 $x_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}\forall\, \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega): \quad &\langle \nabla\varphi, a\nabla x_0\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \langle \varphi, x_0\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi, b^\top\nabla x_0\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -\langle \nabla\varphi, a\nabla x_D\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} - \langle \varphi, x_D\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \varphi, b^\top\nabla x_D\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

那么 $x = x_0 + x_D$ 满足 $\gamma x = u$ 且

$$\forall\, \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega): \quad -\langle \nabla\varphi, a\nabla x\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \langle \varphi, b^\top\nabla x\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, x\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

由于后者意味着 $\mathrm{div}\ a\nabla x = x \in L^2(\Omega)$，我们得到 $\binom{x}{u} \in \mathrm{dom}\ F\&G$。

(d) 我们证明 $F - I$ 是满射。设 $z \in L^2(\Omega)$。再次利用 Lax-Milgram 引理，我们得到存在某个 $x \in W^{1,2}_0(\Omega)$，使得

$$\forall\, \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega): \quad \langle \nabla\varphi, \nabla x\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^d)} + \langle \varphi, x\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi, b^\top\nabla x\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \varphi, z\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

由于后者蕴含 $\mathrm{div}\, a\nabla x - x = z$ 以及 $\gamma x = 0$，故命题得证。

□

备注 4.2（狄利克雷控制、诺伊曼观测与适定性）。请注意，系统 (4.1) 在定义 2.10 的意义下并非适定，特别是，备注 2.11 中的映射 $\mathfrak{B}_T$无界 [30]。

4.2. JACOB and ZWART 的类别。教科书 [19] （另见 [4–7]）中讨论的系统类型，基本上由一类单空间变量的边界控制双曲系统构成。此类系统包含多种具有实际应用意义的系统，例如一维波动方程、电报方程和铁木辛柯梁。

设 $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$、$m \in \mathbb{N}$、$a$、$b \in \mathbb{R}$、$a < b$ 逐点厄米且正定，并满足 $H^{-1} \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$。对于 $\mathcal{X} = L^2([a,b];\mathbb{C}^m)$，考虑哈密顿量$\mathcal{H}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$其中

$$\mathcal{H}(x) = \tfrac{1}{2}\langle x, Hx\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \tfrac{1}{2}\int_a^b x(\xi)^* H(\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.4}$$

在此， H 称为哈密顿密度。
假设 $P_0 \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点耗散，并令 $P_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为厄米且可逆。考虑偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t,\xi) = P_0(\xi)H(\xi)x(t,\xi) + P_1\frac{\partial}{\partial \xi}\big(H(\xi)x(t,\xi)\big), \qquad t \geq 0, \xi \in [a,b]. \tag{4.5}$$

为构造输入和输出，令 $W_B, W_C \in \mathbb{C}^{m\times 2m}$ 满足

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^*. \tag{4.6}$$

我们考虑由适当的边界求值构成的输入和输出。这些量以形式化的方式表示为

$$u(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H(b)\,x(t,b) \\ H(a)\,x(t,a) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H(b)\,x(t,b) \\ H(a)\,x(t,a) \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Acc根据第3.1节的结果，空间 $\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h^*$ 配备了内积

$$\langle x, z\rangle_{\mathcal{X}_h} = \langle x, Hz\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \int_a^b z(\xi)^* H(\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4.8a}$$

$$\langle x, z\rangle_{\mathcal{X}_h^*} = \langle x, H^{-1}z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \int_a^b z(\xi)^* H(\xi)^{-1}x(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4.8b}$$

而对偶积就是 $L^2([a,b];\mathbb{C}^m)$ 中的内积，即

$$\langle x, z\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} = \langle x, z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \int_a^b z(\xi)^* x(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.8c}$$

根据 H 和 H^{-1} 有界这一假设，我们有 $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = \mathcal{X} = L^2([a,b];\,\mathbb{C}^m)$。输入和输出空间由 $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* = \mathbb{C}^m$ 给出，我们考虑耗散节点 $M = \begin{bmatrix} F\&K & G_{\&L} \end{bmatrix}$，其中

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} M &= \operatorname{dom} F\&G \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \in W^{1,2}([a,b];\mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m \,\middle|\, \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix} = u \right\} \end{aligned} \tag{4.9a}$$

and

$$\forall \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M: \quad F\&G \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = P_0 z + P_1 \frac{\partial}{\partial \xi} z, \tag{4.9b}$$

$$K\&L \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix}. \tag{4.9c}$$

命题 4.3（空间区间上双曲系统的耗散节点）。设 a、$b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$，设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点厄米且正定，且 $H^{-1} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{m\times m})$。设 $P_0 \in L^\infty([a,b];\,\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点耗散，并设 $P_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 厄米且可逆。此外，设 W_B、$W_C \in \mathbb{C}^{m\times 2m}$ 满足 (4.6)。
那么， M如 (4.9) 中所示，是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点，具有 $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = L^2([a,b];\,\mathbb{C}^m)$ 和$\mathcal{U} = \mathcal{U}^* = \mathbb{C}^m$，其中 $\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h^*$配备了如 (4.8) 中所示的内积和对偶积。

证明。由 (4.6) 可得 $W_B \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right] W_B{}^* = 0$，且 W_B 满行秩。于是根据定理 2.37]， M 是 $(\mathbb{C}^m, L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\ \mathbb{C}^m)$ 上的系统节点。现在，利用注释 3.7(d) 和命题 3.6，只需证明 $M\colon\ L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\ \supset \operatorname{dom}\ M \to$

$L^2([a,b];\mathbb{C}^m)$ 是耗散的。为此，取 $\left(\begin{smallmatrix} z \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{dom} M$。由于 P_1 是常数且为厄米矩阵，分部积分得到

$$\operatorname{Re}\langle z, \tfrac{\partial}{\partial\xi} P_1 z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \tfrac{1}{2}\, z(\xi)^* P_1 z(\xi)\big|_a^b .$$

由 (4.6) 可推知 $\left[\begin{smallmatrix} W_B \\ W_C \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ 可逆。因此，对于

$$y := \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix},$$

并利用

$$u = \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \tfrac{\partial}{\partial\xi} z, P_1 z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} &= \tfrac{1}{2}\, z(\xi)^* P_1 z(\xi)\big|_a^b \\
&= \tfrac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(a) \\ z(b) \end{pmatrix} \right)^* \left(\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(a) \\ z(b) \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{4} \left(\sqrt{2} \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \right)^* \left(\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \sqrt{2} \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^* \right)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \operatorname{Re}(u^* y).
\end{aligned}$$

于是，耗散性可由

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_0 z + P_1 \frac{\partial}{\partial\xi} z \\ -y \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m} \\
&= \operatorname{Re}\langle z, P_0 z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} + \operatorname{Re}\langle z, \tfrac{\partial}{\partial\xi} P_1 z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} - \operatorname{Re}(u^* y) \\
&= \operatorname{Re}\langle z, P_0 z\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} \le 0,
\end{aligned}$$

其中后者成立是因为 P_0的逐点耗散性。 □

注 4.4（空间区间上的双曲系统）。

(a) 文献 [19, 第 13 节2] 证明，在本节始终采用的假设下，(4.5)&(4.7) 构成一个符合定义 2.10 意义下的适定系统。(b) 文献 [19], 考察了一些更一般的输入输出边界配置，它们导出的能量平衡具有如下形式：

$$\mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x_0) \le \int_0^t \begin{pmatrix} u(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix}^* S \begin{pmatrix} u(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau$$

其中 $S \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ 是某个厄米矩阵。请注意，这类端口（即输入和输出的集合）并非经典意义上的端口哈密顿系统 [37]。

为便于后文使用，我们记录如下关于 M 在 (4.9) 中的伴随算子的引理。粗略地说，该伴随算子由 M 通过反射空间区间 $[a,b]$得到。证明与 [4,命题 3.4.3], 类似，后者讨论了具有 $u = 0$ 的高阶系统。因此略去证明。

引理 4.5（耗散节点 (4.9) 的伴随算子）。设 $a,b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$，设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点厄米且正定，且 $H^{-1} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{m\times m})$。设 $P_0 \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点耗散，并设 $P_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 厄米且可逆。此外，设 $W_B, W_C \in \mathbb{C}^{m\times 2m}$ 使得 (4.6) 成立。

那么，对于 $\mathcal{X} = \mathcal{X}^* = L^2([a,b];\mathbb{C}^m)$，$M\colon \mathcal{X}\times\mathcal{U} \to \mathcal{X}\times\mathcal{U}^*$ 在 (4.9) 中的伴随算子为 $M^* = \begin{bmatrix} [F & K] \\ [G & L]^d \end{bmatrix}$，其中

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} M^* &= \operatorname{dom} [F\&G]^d \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \in W^{1,2}([a,b];\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m \,\middle|\, \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(a) \\ z(b) \end{pmatrix} = v \right\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\forall \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M^*\colon \quad [F\&G]^d \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} &= P_0^* z - P_1 \tfrac{\partial}{\partial\xi} z, \\ [K\&L]^d \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(a) \\ z(b) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 4.6（部分齐次边界条件）。在 [19], 中，也考虑了输入-输出配置以及一些额外的齐次边界条件。也就是说，对于某些 $m_1 \le m$, $W_{B,1}, W_{C,1} \in \mathbb{C}^{m_1\times 2m}$, $W_{B,2} \in \mathbb{C}^{m_2\times 2m}$, $m_2 := m - m_1$，使得 $\begin{bmatrix} W_B \\ W_{B,2} \end{bmatrix}$ 满行秩，并且

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{m_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \\ W_{C,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \\ W_{C,1} \end{bmatrix}^*,$$

我们考虑带有输入和输出的 (4.5)

$$\begin{aligned} u(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_{B,1} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H(b)\,x(t,b) \\ H(a)\,x(t,a) \end{pmatrix}, \\ y(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_{C,1} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H(b)\,x(t,b) \\ H(a)\,x(t,a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以及齐次边界条件

$$0 = W_{B,2} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H(b)\,x(t,b) \\ H(a)\,x(t,a) \end{pmatrix}.$$

通过简单的线性代数可知，我们可以用一些 $W_{C,2} \in \mathbb{C}^{m_2\times 2m}$ 扩充，使得 (4.6) 对于 $W_B := \begin{bmatrix} W_B \\ W_{B,2} \end{bmatrix}$, $W_C := \begin{bmatrix} W_C \\ W_{C,2} \end{bmatrix}$ 成立。显然，该系统的哈密顿量仍由 (4.4) 给出。为了构造相应的耗散节点，我们先取 (4.9) 中的节点（其输入和输出仍然过多），然后应用命题 3.9 并结合 $\mathcal{U}_{\text{new}} = \mathcal{U}_{\text{new}}^* = \mathbb{C}^{m_1}$ and 对其进行约化

$$U = \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m_1}.$$

注 4.7（高阶双曲系统）。在 [4,40], 中，考虑了一类更一般的边界控制双曲系统（例如，它允许纳入欧拉-伯努利梁），其空间变量为一个，即对于哈密顿量密度 $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{d\times d})$ 和 $P_0\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{d\times d}$，在满足上述假设的情况下，$N \in \mathbb{N}$, $P_k = (-1)^{k+1} P_k^* \in \mathbb{C}^{d\times d}$，其中 $k = 1,\dots,N$，且 P_N 可逆，考虑偏微分方程

$$\tfrac{\partial}{\partial t} x(t,\xi) = P_0(\xi) H(\xi) x(t,\xi) + \sum_{k=1}^{N} P_k \tfrac{\partial^k}{\partial \zeta^k} \big(H(\xi) x(t,\xi)\big), \qquad t \ge 0, \xi \in [a,b]. \tag{4.10}$$

对于 $m := Nd$ 和 $W_B, W_C \in \mathbb{C}^{m\times 2m}$，其中

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^*,$$

输入和输出定义为

$$u(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} \Lambda & -\Lambda \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w(t,1) \\ w(t,0) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \begin{bmatrix} \Lambda & -\Lambda \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w(t,1) \\ w(t,0) \end{pmatrix},$$

其中

$$w(t,\xi) = \begin{pmatrix} H(\xi)x(t,\xi) \\ \frac{\partial}{\partial\xi} H(\xi)x(t,\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{N-1}}{\partial\xi^{N-1}} H(\xi)x(t,\xi) \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & P_N \\ -P_2 & -P_3 & \cdots & -P_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{N-1}P_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

确实可以证明，这也构成了本文意义下的端口哈密顿系统。由于技术性较强且下标数量较多，这里略去相关内容。

4.3. JACOB and ZWART 的类别——扩展至奇异哈密顿密度。我们重新考察前一节讨论的类别。不过，现在我们放宽对哈密顿量的假设，使本文关于哈密顿量与拟 Gelfand 三元组的理论得以真正发挥作用。我们不再要求哈密顿密度及其逐点逆有界，而是假设对于 $m \in \mathbb{N}$、a、$b \in \mathbb{R}$，且 $a < b$，厄米正定值函数 $H\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足

$$H, H^{-1} \in L^1\left([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\right).$$

粗略地说，H 现在可以有零点和低阶奇异性。哈密顿量仍由式 (4.4) 定义，这意味着其底层半双线性型 h 为

$$h(x,z) = \langle x, Hz\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} = \int_a^b z(\xi)^* H(\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$\operatorname{dom} h = \left\{ x \in L^2([a,b];\mathbb{C}^m) \,\middle|\, H^{1/2}x \in L^2([a,b];\mathbb{C}^m) \right\},$$

其中，$H^{1/2}\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ 是 H的逐点矩阵平方根。由 H的逐点正定性可立即得出 h 的正定性。此外，可以看出

$$\begin{aligned} \iota\colon \quad L^2([a,b];\mathbb{C}^m) &\to \operatorname{dom} h, \\ x &\mapsto (I_m + H)^{-1/2}x, \end{aligned}$$

是等距同构。因此，型 h是闭的。由下式可得，dom h在 L^2([a,b];$\mathbb{C}^m$)中的稠密性

$$L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m) \subset \operatorname{dom} h,$$

其中，后者可结合 $H \in L^1$([a,b]; $\mathbb{C}^{m\times m}$)和 H¨older 不等式得到。由于 $\mathcal{X}_h$ 和 $\mathcal{X}_h^*$ 中的内积分别由（4.8a）和（4.8b）给出，因此可以得出

$$\mathcal{X}_h = H^{-1/2}\cdot L^2([a,b];\mathbb{C}^m), \quad \mathcal{X}_h^* = H^{1/2}\cdot L^2([a,b];\mathbb{C}^m). \tag{4.11}$$

根据拟 Gelfand 三元组的构造，$\langle x, z\rangle_{\mathcal{X}_h^*}$，$\mathcal{X}_h$与（4.8c）一样，是 z(ξ)*x(ξ)在 [a,b]上的积分。此外，Riesz 同构由乘法算子给出

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}\colon \quad \mathcal{X}_h &\to \mathcal{X}_h^*, \\ x &\mapsto Hx. \end{aligned} \tag{4.12}$$

以下辅助结果给出了另一项性质。

引理 4.8（$\mathcal{X}_h$和 $\mathcal{X}_h^*$包含于 L^1）。设 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$，设 $m\in\mathbb{N}$，并设 $H\in L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点厄米且正定，满足 $H^{-1}\in L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$。那么空间 $\mathcal{X}_h,\mathcal{X}_h^*$均包含于 $L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$。

证明。利用线性代数中的一个基本结论：H 的迹等于 $H^{1/2}$各项平方之和，我们由 $H\in L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$得到 $H^{1/2}\in L^2([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$。然后结合 (4.11) 和 H¨older 不等式可得

$$z=H^{1/2}\cdot H^{-1/2}z\in L^1([a,b];\mathbb{C}^m)\quad\forall z\in\mathcal{X}_h^*.$$

$\mathcal{X}_h\subset L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$的证明完全类似，因为只需沿用上述论证，并将 H 替换为 H^{-1}即可。□

与第 4.2 节一样，我们假设 $P_0\in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$是逐点耗散的，且$P_1\in\mathbb{C}^{m\times m}$是厄米且可逆的。在对哈密顿量作出修改后的假设下，我们考虑空间一维的双曲偏微分方程 (4.5)。输入和输出也按上一节中的方式选取。也就是说，对于满足 (4.6) 的 W_B、$W_C\in\mathbb{C}^{m\times 2m}$，输入和输出由 (4.7) 中的边界值构成。特别地，$\mathcal{U}=\mathcal{U}^*=\mathbb{C}^m$。

为了构造相应的耗散节点，我们按照第 3.3 节末尾所述进行：首先取 (4.9) 中的耗散节点 M，随后将其限制到 (3.5) 中的空间 $\mathcal{Z}$。对该算子取闭包，最终得到一个算子

$$\overline{\widetilde{M}}:\mathcal{X}_h^*\times\mathcal{U}\supset\operatorname{dom}\overline{\widetilde{M}}\to\mathcal{X}_h^*\times\mathcal{U},$$

下面证明该算子是 $(\mathcal{X}_h,\mathcal{U})$ 上的耗散节点。特别地，我们将证明，对光滑函数进行代入时，这个通过取闭包得到的算子确实取经典导数。首先，将在 a 和 b 处消失的连续可微函数空间记为 $C_0^1([a,b];\mathbb{C}^m)$。

命题 4.9（耗散节点）。设 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$，设 $m\in\mathbb{N}$，并设 $H\in L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点厄米且正定，满足 $H^{-1}\in L^1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$。设 $P_0\in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ 逐点耗散，并设 $P_1\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 厄米且可逆。此外，设 $W_B,W_C\in\mathbb{C}^{m\times 2m}$ 满足 (4.6)。则算子满足以下性质

$$M=\left[\begin{smallmatrix}F\&G\\K\&L\end{smallmatrix}\right]:L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m\supset\operatorname{dom}M\to L^2([a,b];\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m$$

如 (4.9) 中所示，以及如 (4.11) 中的空间 $\mathcal{X}_h,\mathcal{X}_h^*$：

(a) 对所有 $u\in\mathbb{C}^m$，存在某个 $z\in C^1([a,b];\mathbb{C}^m)$，使得 $\left(\begin{smallmatrix}z\\u\end{smallmatrix}\right)\in\operatorname{dom}M$。(b) 对所有 $y\in\mathbb{C}^m$，存在某个 $w\in C^1([a,b];\mathbb{C}^m)$，使得 $\left(\begin{smallmatrix}w\\y\end{smallmatrix}\right)\in\operatorname{dom}M^*$。(c) 空间 $C_0^1([a,b];\mathbb{C}^m)\subset L^2([a,b];\mathbb{C}^m)$ 在 $\mathcal{X}_h^*$ 中稠密。此外，对于

$$\mathcal{W}:=\left\{z\in\mathcal{X}_h^*\cap C^1([a,b];\mathbb{C}^m)\,\middle|\,W_B\begin{bmatrix}P_1&-P_1\\I_m&I_m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z(b)\\z(a)\end{pmatrix}=0\right\},$$

空间

$$(F-\mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\,\mathcal{W}$$

在 $\mathcal{X}_h$中稠密。

(d) M 到

$$\{\left(\begin{smallmatrix}z\\u\end{smallmatrix}\right)\in(\mathcal{X}_h^*\times\mathbb{C}^m)\cap\operatorname{dom}M\mid M\left(\begin{smallmatrix}z\\u\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{X}_h^*\}$$

作为定义在 $\mathcal{X}_h^*\times\mathbb{C}^m$ 的子空间上并映射到 $\mathcal{X}_h\times\mathbb{C}^m$ 的算子是可闭的。其闭包

$$\overline{\widetilde{M}}=:\left[\begin{smallmatrix}F_c\&G_c\\K_c\&L_c\end{smallmatrix}\right]:\mathcal{X}_h^*\times\mathbb{C}^m\supset\operatorname{dom}\overline{\widetilde{M}}\to\mathcal{X}_h\times\mathbb{C}^m$$

是 $(\mathcal{X}_h, \mathbb{C}^m)$ 上的耗散节点。

证明。
(a) 设 $u \in \mathbb{C}^m$。由此可得结论，因为通过简单的插值，存在某个$z \in C^1([a,b];\mathbb{C}^m)$，使得

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix} = u.$$

(b) 由上述论证以及引理 4.5 可知， M的伴随算子满足与 M相同的假设，因此结论成立。

(c) H¨older 不等式与 $H^{-1} \in L^1([a,b];\, \mathbb{C}^{m\times m})$结合可得 $L^\infty([a,b];\, \mathbb{C}^m) \subset \mathcal{X}_h^*$，这确实推出 $C_0^1([a,b];\, \mathbb{C}^m) \subset \mathcal{X}_h^*$。接下来证明该包含关系是稠密的。为此，根据 Hahn-Banach定理 [2, Thm. 6.15], , 只需证明任意满足 $z \in \mathcal{X}_h$的

$$\langle \varphi, z\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{W} \tag{4.13}$$

必为零。假设 $z \in \mathcal{X}_h$ 满足 (4.13)。利用引理 4.8，可得 $z \in L^1([a,b];\mathbb{C}^m)$，使得

$$\langle \varphi, z\rangle_{L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m), L^1([a,b];\mathbb{C}^m)} = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a,b];\mathbb{C}^m) \subset \mathcal{W}.$$

变分法基本引理 [11,定理 6.3-2] 现在可得 $z = 0$。接下来，我们证明 $(F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\,\mathcal{W}$在 $\mathcal{X}_h$ 中稠密。我们证明等价的命题：只有 $z = 0$满足 $0 = \langle z,\ (F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h}$对所有 $\varphi \in \mathcal{W}$均成立。

假设 $z \in \mathcal{X}_h^*$ 满足

$$0 = \langle z, (F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{W}.$$

由于 $\mathcal{W} \subset L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)$，并且结合 (4.12) 与引理 4.8 可得

$$H^{-1} z \in \mathcal{X}_h \subset L^1([a,b];\mathbb{C}^m),$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle z, (F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} \\ &= \langle z, P_0\varphi + P_1 \tfrac{\partial}{\partial\xi}\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} - \langle z, \varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*} \\ &= \langle P_0^* z, \varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} + \langle P_1 z, \tfrac{\partial}{\partial\xi}\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} - \langle z, \varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*} \\ &= \langle P_0^* z, \varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)} + \langle P_1 z, \tfrac{\partial}{\partial\xi}\varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)} \\ &\quad - \langle H^{-1} z, \varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)}. \end{aligned}$$

由于上述等式特别对所有 $\varphi \in C_0^1([a,b];\, \mathbb{C}^m)$ 都成立，且 $z, H^{-1}z \in L^1([a,b];\, \mathbb{C}^m)$，弱导数的定义可得 $z \in W^{1,1}([a,b];\, \mathbb{C}^m)$，满足

$$0 = P_0^* z - P_1 \tfrac{\partial}{\partial\xi} z - H^{-1} z.$$

这意味着 $z \in L^\infty([a,b];\ \mathbb{C}^m) \subset \mathcal{X}_h$，从而进一步有 $\frac{\partial}{\partial\xi} z \in \mathcal{X}_h$。现在进行分部积分可得，对所有 $\varphi \in \mathcal{W}$，有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle z, (F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})\varphi\rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} \\ &= \langle P_0^* z, \varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)} + \langle P_1 z, \tfrac{\partial}{\partial\xi}\varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)} \\ &\quad - \langle H^{-1} z, \varphi\rangle_{L^2([a,b];\mathbb{C}^m)} \\ &= \langle P_0^* z - P_1 \tfrac{\partial}{\partial\xi} z - H^{-1} z, \varphi\rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)} + \varphi(\xi)^* P_1 z(\xi)\big|_a^b \end{aligned}$$

$= \varphi(\xi)^* P_1 z(\xi)|_a^b$.

利用 $\left[\begin{smallmatrix} W_B \\ W_C \end{smallmatrix}\right]$ 可逆（这是(4.6)的一个直接推论），并且

$$W_B \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi(b) \\ \varphi(a) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.14}$$

我们有，对于

$$u_z := \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_B \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix},$$
$$y_z := \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix}, \qquad y_\varphi := \tfrac{1}{\sqrt{2}} W_C \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi(b) \\ \varphi(a) \end{pmatrix},$$

that

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\xi)^* P_1 z(\xi)|_a^b \\ &= \tfrac{1}{2} \left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi(b) \\ \varphi(a) \end{pmatrix} \right)^* \left(\left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} z(b) \\ z(a) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\left[\begin{smallmatrix} W_B \\ W_C \end{smallmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_\varphi \end{pmatrix} \right)^* \left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} W_B \\ W_C \end{smallmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} u_z \\ y_z \end{pmatrix} \right) \\ &\overset{(4.6)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ y_\varphi \end{pmatrix}^* \left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_z \\ y_z \end{pmatrix} \right) \\ &= y_\varphi^* u_z \end{aligned} \tag{4.15}$$

$\left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right]$ 的可逆性表明，通过如(a)&(b)中的简单插值论证，我们可以对所有满足 $\varphi \in C^1([a,b];\mathbb{C}^m)$的 $y_\varphi \in \mathbb{C}^m$ 找到某个

$$\begin{pmatrix} \varphi(b) \\ \varphi(a) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \left[\begin{smallmatrix} P_1 & -P_1 \\ I_m & I_m \end{smallmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{smallmatrix} W_B \\ W_C \end{smallmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_\varphi \end{pmatrix}.$$

接着，由于(4.15)对所有满足(4.14)的 $\varphi \in C^1([a,b];\mathbb{C}^m)$均成立，我们得到 $u_z = 0$。换言之，$z \in \operatorname{dom} F$，并通过类似于命题 4.3证明中的论证，我们得到

$$0 = \operatorname{Re}\langle z, (F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1}) z \rangle_{\mathcal{X}_h^*, \mathcal{X}_h} = \operatorname{Re}\langle (P_0^* - H^{-1}) z, z \rangle_{L^1([a,b];\mathbb{C}^m), L^\infty([a,b];\mathbb{C}^m)}.$$

现在，P_0 的逐点耗散性与 H 的逐点正定性共同导致 $z = 0$。(d) 我们有

$$C_0^1([a,b];\mathbb{C}^m) \subset \mathcal{V} := \{ x \in \mathcal{X}_h^* \cap \operatorname{dom} F \,|\, Fx \in \mathcal{X}_h \},$$

因此，根据(c)，$\mathcal{V}$在 $\mathcal{X}^*$中稠密。此外，由 $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$以及$(F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})$ $\mathcal{W}$在 $\mathcal{X}_h$中稠密这一事实可知，$(F - \mathcal{R}_{\mathcal{X}_h}^{-1})$ $\mathcal{V}$在 $\mathcal{X}_h$中同样稠密。也就是说，命题 3.14中的假设(a)得以满足。此外，由于(a)和(b)意味着命题 3.14中的假设(b)&(c)对 M成立，我们有 M是$(\mathcal{X}_h, \mathbb{C}^m)$上的耗散节点。

□

注 4.10（部分齐次边界条件）。注 4.6 中的陈述也完全适用于本节所介绍的设置。

例 4.11（振动弦）。一个可能的应用由空间区间 $[a,b]$、$a < b$ [19] 上的线性波动方程给出。用紧凑记号表示为

$$\tfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t,\xi) \\ \mathbf{p}(t,\xi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & -d(\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T(\xi)\ \mathbf{q}(t,\xi) \\ \rho(\xi)^{-1} \mathbf{p}(t,\xi) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,\ \xi \in [a,b],$$

其中，$T\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 为杨氏模量，$\rho\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 为纵向质量密度，$d\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 表示分布式阻尼。随时间变化的变量 q 和 p

分别表示应变和动量。
我们假设弦的左端固定，而通过右端的力进行控制；输出由同点的速度构成。即

$$u(t) = -T(b)\,\mathbf{q}(t,b), \quad y(t) = \rho(b)^{-1}\mathbf{p}(t,b), \quad 0 = \rho(a)^{-1}\mathbf{p}(t,a).$$

我们的假设是，ρ和 T取正值，且 ρ、ρ^{-1}、T、$T^{-1} \in L^1([a,b])$。我们进一步假设，$d \in L^\infty([a,b])$取非负值。
这属于本节所处理的类别（特别参见备注 4.6 和 4.10），在该类别的记号下，我们有

$$H = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$W_{B,1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{B,2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{C,1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

能量空间及其对偶空间可表示为

$$\mathcal{X}_h = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \middle| T^{1/2}\mathbf{q}, \rho^{-1/2}\mathbf{p} \in L^2([a,b]) \right\}, \quad \mathcal{X}_h^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \middle| T^{-1/2}\mathbf{F}, \rho^{1/2}\mathbf{v} \in L^2([a,b]) \right\}.$$

从物理角度看，哈密顿量由势能与动能之和构成，而 $\mathcal{X}_h^*$的元素由力与速度对构成。因此，$\mathcal{X}_h$ 确实由所有分别对应于有限势能和动能的应变与动量对构成。注意，假设 ρ、$T^{-1} \in L^1([a,b])$ 分别意味着弦具有有限质量和正的弹簧刚度。作者不了解 ρ^{-1}、$T \in L^1([a,b])$ 的物理解释。结合命题 4.9、定理 3.11 和命题 2.8，我们还可以进一步了解该系统的解的行为。特别地，算子

$$A : \mathcal{X}_h \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{X}_h, \quad A \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & -d(\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T\mathbf{q} \\ \rho^{-1}\mathbf{p} \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{dom} A = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_h \middle| \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & -d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T\mathbf{q} \\ \rho^{-1}\mathbf{p} \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_h \text{ with } (\rho^{-1}\mathbf{p})(a) = (T\mathbf{q})(b) = 0 \right\}$$

在 $\mathcal{X}_h$上生成一个压缩半群。

注 4.12（传输线与铁木辛柯梁）。由电报方程建模的传输线，配备了由边界处的电压和电流构成的某些输入与输出（参见 [19,练习 7.4]），也属于本节讨论的类别。我们对哈密顿量的假设意味着，纵向电感L：$[a,b] \to \mathbb{R}$ 以及横向电容 C：$[a,b] \to \mathbb{R}$ 均为正值，且$L, L^{-1}, C, C^{-1} \in L^1([a,b]; \mathbb{R})$。

同样，对于铁木辛柯梁（参见 [19,例 7.1.4]），纵向质量密度ρ：$[a,b] \to \mathbb{R}$、横截面的转动惯量 I_ρ：$[a,b] \to \mathbb{R}$、杨氏模量与截面惯性矩的乘积 EI：$[a,b] \to \mathbb{R}$，以及横截面的惯性矩K：$[a,b] \to \mathbb{R}$，在我们的设定中均可假定为正值，且

$$\rho, \rho^{-1}, I_\rho, I_\rho^{-1}, EI, (EI)^{-1}, K, K^{-1} \in L^1([a,b]; \mathbb{R}).$$

4.4. 麦克斯韦方程组。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为具有外法向量ν：$\partial\Omega \to \mathbb{R}^3$的有界利普希茨区域，设 $\epsilon, \mu \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$ 逐点厄米且正定，并且$\epsilon^{-1}, \mu^{-1} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$，另设 $g \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$ 满足 $-g$逐点耗散。我们考虑 Ω 上的麦克斯韦方程组，其紧凑形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{B}(t,\xi) \\ \mathbf{D}(t,\xi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{curl} \\ \operatorname{curl} & -g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu(\xi)^{-1}\mathbf{B}(t,\xi) \\ \epsilon(\xi)^{-1}\mathbf{D}(t,\xi) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \xi \in \Omega \tag{4.16a}$$

其中，B 和 D 分别表示磁通量和电位移， μ 为磁导率， ϵ 为电容率。量 $\mathrm{H} := \mu^{-1}\mathrm{B}$、$\mathrm{E} := \epsilon^{-1}\mathrm{D}$ 分别为磁场强度和电场强度。

通常，麦克斯韦方程组还附加以下条件：$\operatorname{div}\mathrm{H} = 0, \operatorname{div}\mathrm{E} = \rho$，其中某个标量场 $\rho : \Omega \to \mathbb{C}$（其物理含义是电荷密度）。利用亥姆霍兹分解，即将函数正交分解为一个无散函数和一个梯度场（并进一步利用后者的旋度为零，因此在时间上为常数这一事实），这些条件可以编码在初始条件中。

作为输入，我们选择电场的一个切向条件，即

$$u(t,\xi) = \nu(\xi) \times \big(\epsilon(\xi)^{-1}\mathbf{D}(t,\xi)\big), \quad t \geq 0, \xi \in \partial\Omega, \tag{4.16b}$$

其中，外法向量满足 $\nu \in L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$（相对于 $\partial\Omega$ 上的曲面测度），因为 Ω 是一个利普希茨区域。考虑函数 $\pi\colon\ \partial\Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$，它将 $\xi \in \partial\Omega$ 映射为 $\partial\Omega$ 在 ξ 处切空间上的正交投影。利用

$$\pi(\xi)w = (\nu(\xi)\times w)\times\nu(\xi) = w - (\nu(\xi)^\top w)\nu(\xi) \quad \forall\, w \in \mathbb{C}^3 \text{ and almost all } \xi \in \partial\Omega,$$

我们有 $\pi \in L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})$。我们的输出由磁场的切向分量构成。也就是说，

$$y(t,\xi) = \pi(\xi)\big(\mu(\xi)^{-1}\mathbf{B}(t,\xi)\big), \quad t \geq 0,\ \xi \in \partial\Omega.$$

为了说明该系统符合端口哈密顿系统节点的框架，我们接下来介绍所涉及的空间。取 $\mathcal{X} = L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2,$，哈密顿量为 $\mathcal{H}\colon\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$其中

$$\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{D}\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \mu(\xi)^{-1}\|\mathbf{B}(\xi)\|^2 + \epsilon(\xi)^{-1}\|\mathbf{D}(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi \tag{4.16c}$$

也就是说，这是电能和磁能之和。关于磁导率和电容率的有界性假设表明，与 $\mathcal{H}$相关联的半双线性型是有界且强制的。因此，根据注释 3.7(d)，能量空间及其反对偶满足 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = (L^2(\Omega;\ \mathbb{C}^3))^2$。与前几节类似，这些空间赋予内积

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{D}_1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{B}_2\\ \mathbf{D}_2\end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{X}_h} = \int_\Omega \mathbf{B}_2(\xi)^*\mu(\xi)^{-1}\mathbf{B}_1(\xi) + \mathbf{D}_2(\xi)^*\epsilon(\xi)^{-1}\mathbf{D}_1(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4.17a}$$

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{H}_1\\ \mathbf{E}_1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{H}_2\\ \mathbf{E}_2\end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{X}_h^*} = \int_\Omega \mathbf{H}_2(\xi)^*\mu(\xi)\mathbf{H}_1(\xi) + \mathbf{E}_2(\xi)^*\epsilon(\xi)\mathbf{E}_1(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4.17b}$$

而对偶积就是 $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ 中的内积，即，

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{H}\\ \mathbf{E}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{D}\end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{X}_h^*,\mathcal{X}_h} = \int_\Omega \mathbf{B}(\xi)^*\mathbf{H}(\xi) + \mathbf{D}(\xi)^*\mathbf{E}(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.17c}$$

请注意，上述三种乘积的物理量纲均为能量。

选择合适的输入和输出空间更为复杂；这将在下文讨论，该部分的灵感来源于 [10,31,41]。我们首先引入切向量场空间，定义如下：

$$L^2_\tau(\partial\Omega) := \pi L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) = \left\{ w \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \,\middle|\, \nu^\top w = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

以及切向分量迹算子 π_τ，它将迹映射为切空间上的逐点投影。换言之，我们将切向投影与边界迹逐点相乘，

$$\begin{aligned}\pi_\tau :\qquad & W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3) \to L^2_\tau(\partial\Omega),\\ & \mathbf{A} \mapsto \pi\left(\gamma\mathbf{A}\right),\end{aligned}$$

其中 $\gamma\colon W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3) \to W^{1/2,2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ 是迹算子。根据连续嵌入$_{W^{1/2,2}}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \subset L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ 和 $\pi \in L^\infty(\partial\Omega\ \mathbb{R}^{3\times3})$，我们有

$$\pi_\tau \in L(W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3), L^2_\tau(\partial\Omega)).$$

现在我们定义

$$V_\pi := \pi_\tau W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3),$$

其配备的范数为

$$\|h\|_{V_\pi} := \inf\left\{ \|\mathbf{A}\|_{W^{1/2,2}(\Omega;\mathbb{C}^3)} \,\middle|\, \mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega) \wedge h = \pi_\tau \mathbf{A} \right\}.$$

迹定理 [15, Thm. 1.5.1.3] 现在推出，$\pi_\tau\colon W^{1,2}(\Omega) \to V_\pi$ 是有界的，而满射性则由 V_π 的定义得出。此外，$V_\pi \subset L^2_\tau(\partial\Omega)$ 和切向分量迹算子也可视为从 $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3)$ 到 $L^2_\tau(\partial\Omega)$ 的有界映射。

$\mathrm{A} \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3)$ 的切向迹是 A 的边界迹与外法向量 $\nu \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 的逐点叉积，即 $\widetilde{\gamma}_\tau \mathrm{A} := \nu \times \gamma \mathrm{A} \in L^2_\tau(\partial\Omega)$，其中后者由 $(\nu \times \gamma \mathrm{A}) \perp \nu$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立（相对于 $\partial\Omega$ 上的曲面测度）。已在 [41,Prop. 4.3] 中证明，$\widetilde{\gamma}_\tau$ 可唯一延拓为一个（不一定是满射的）有界映射

$$\gamma_\tau\colon \qquad H(\mathrm{curl},\Omega) \to V_\pi^*,$$

其中，$H(\mathrm{curl},\Omega)$ 由 $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ 中所有弱旋度仍属于 $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ 的元素构成。这是一个希尔伯特空间，其范数为

$$\|\mathbf{A}\|_{H(\mathrm{curl},\Omega)} = \left(\|\mathbf{A}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} + \|\operatorname{curl}\mathbf{A}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)}\right)^{1/2}.$$

其基本要素是格林公式

$$\forall\, \varphi \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3),\ \mathbf{A} \in H(\mathrm{curl},\Omega):$$
$$\langle \operatorname{curl}\mathbf{A}, \varphi\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \mathbf{A}, \operatorname{curl}\varphi\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} = \langle \gamma_\tau \mathbf{A}, \pi_\tau\varphi\rangle_{V_\pi^*,V_\pi}, \quad (4.18)$$

如果 φ 和 A 都属于 $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^3)$ [10, Chap. 7]，则后一个表达式可限制为一个 L^2-内积 $\langle \gamma_\tau \mathrm{A}\, \pi_\tau\varphi\rangle_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)}$。这些空间确实构成一个盖尔范三元组，其中 $V_\pi \subset L^2_\tau(\partial\Omega) \subset V_\pi^*$。

现在考虑内积空间

$$H(\mathrm{curl},\Omega,\tau) = \left\{ \mathbf{A} \in H(\mathrm{curl},\Omega) \,\middle|\, \gamma_\tau \mathbf{A} \in L^2_\tau(\partial\Omega) \right\},$$
$$\|\mathbf{A}\|_{H(\mathrm{curl},\Omega,\tau)} = \left(\|\mathbf{A}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} + \|\operatorname{curl}\mathbf{A}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} + \|\gamma_\tau\mathbf{A}\|^2_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)}\right)^{1/2},$$

如 [41, Prop. 4.3] 所示，它甚至是一个希尔伯特空间。$H(\mathrm{curl},\Omega\ \tau)$ 的构造表明，切向迹算子可视为一个从 $H(\mathrm{curl},\Omega\ \tau)$ 到 $L^2_\tau(\partial\Omega)$ 的有界（甚至是压缩）算-子。因此，我们可以考虑沿 $\ker\ \gamma_\tau$ 的正交投影算子 $P_\tau \in L(H(\mathrm{curl},\Omega\ \tau))$。我们引入半双线性型

$$\begin{aligned} h_\tau\colon \quad & \operatorname{dom} h_\tau \times \operatorname{dom} h_\tau \to \mathbb{C}, \qquad \operatorname{dom} h_\tau = \gamma_\tau H(\mathrm{curl},\Omega,\tau), \\ & (f,g) \mapsto \langle P_\tau \mathbf{A}_f, P_\tau \mathbf{A}_g\rangle_{H(\mathrm{curl},\Omega)} \quad \text{for some } \mathbf{A}_f, \mathbf{A}_g \in H(\mathrm{curl},\Omega,\tau) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{with } f = \gamma_\tau \mathbf{A}_f,\ g = \gamma_\tau \mathbf{A}_g. \end{aligned} \quad (4.19)$$

容易看出，这个型是良定义的。投影定理 [2, 定理 4.3] 此外还意味着

$$\forall\, f \in \gamma_\tau H(\mathrm{curl},\Omega,\tau):$$
$$h_\tau(f,f) = \inf\left\{ \|\mathbf{A}\|^2_{H(\mathrm{curl},\Omega)} \,\middle|\, \mathbf{A} \in H(\mathrm{curl},\Omega,\tau) \text{ with } \gamma_\tau \mathbf{A} = f \right\}. \quad (4.20)$$

为了证明具有上述输入输出配置的麦克斯韦方程构成第 3 节意义下的端口哈密顿系统，我们接下来的目标是引入输入和输出空间$\mathcal{U}$、$\mathcal{U}^*$。[10]通过证明这些空间对于某些切向微分算子具有特定的（分数阶）正则性，可以得到这样的空间。我们的方法不那么具体，但也——至少在我们看来——更加便于使用。我们基于枢轴空间 $L^2_\tau(\partial\Omega)$，从一个拟 Gelfand 三元组构造输入和输出空间；这种方法与 [31]中的方法类似。具体而言，这将基于半双线性型 h_τ来完成。

命题 4.13（ h_τ的性质）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界利普希茨区域。那么，(4.19) 中的 h_τ 是定义在 $L^2_\tau(\partial\Omega)$ 上的稠密定义闭正半双线性型。

证明。 $H(\mathrm{curl}, \Omega\ \tau)$ 的完备性直接蕴含 h_τ 的闭性，而 h_τ 的正性则由构造可知。由于 $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C}^3)$ 在 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 中稠密，故 $\mathrm{dom}\ h_\tau$ 在 $L^2_\tau(\partial\Omega)$ 中稠密，并且

$$\gamma_\tau \mathbf{A} = \nu \times \gamma \mathbf{A} \in L^2_\tau(\partial\Omega) \quad \forall\, \mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C}^3).$$

□

我们将输入空间 $\mathcal{U}$ 定义为由半双线性型 h_τ 诱导的能量空间，参见定义 3.2。因此，($\mathcal{U}^*, L^2_\tau(\partial\Omega)\ \mathcal{U}$) 是与 h_τ 相关联的拟 Gelfand 三元组。利用 $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C}^3) \subset H(\mathrm{curl}, \Omega\ \tau) \subset H(\mathrm{curl}, \Omega)$，可得 $H(\mathrm{curl}, \Omega\ \tau)$ 在 $H(\mathrm{curl},\Omega)$ 中稠密。此外，(4.20) 可推出

$$\forall \mathbf{A} \in H(\mathrm{curl}, \Omega, \tau): \quad \|\gamma_\tau \mathbf{A}\|^2_{\mathcal{U}} = h_\tau(\gamma_\tau \mathbf{A}, \gamma_\tau \mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|^2_{H(\mathrm{curl},\Omega)}.$$

因此，切向迹算子可扩展为一个从 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 到 $\mathcal{U}$ 的有界算子。根据 $\mathcal{U}$ 的构造，该算子是满射，下文也将其记为 γ_τ。因此，输入方程 (4.16b) 可改写为

$$\gamma_\tau\big(\epsilon^{-1}\mathbf{D}(t)\big) = u(t) \in \mathcal{U}, \qquad t \geq 0.$$

为了恰当地改写输出方程，受 (4.18) 启发，我们将切向分量迹算子重新定义为 π_τ: $H(\mathrm{curl}, \Omega) \to \mathcal{U}^*$，其中

$$\forall\, \mathbf{A}, \mathbf{C} \in H(\mathrm{curl}, \Omega): \langle \pi_\tau \mathbf{A}, \gamma_\tau \mathbf{C} \rangle_{\mathcal{U}^*,\mathcal{U}} := \langle \mathbf{A}, \mathrm{curl}\, \mathbf{C} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \mathrm{curl}\, \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)}. \tag{4.21}$$

γ_τ: $H(\mathrm{curl}, \Omega) \to \mathcal{U}$ 的满射性表明 π_τ 定义良好。此外，由 (4.18) 可知， γ_τA 确实是“经过充分检验的切向分量迹”，如果 $\mathbf{A} \in W^{1,\ 2}(\Omega; \mathbb{C}^3)$。据此，输出方程 (4.16c) 可改写为

$$\pi_\tau\big(\mu^{-1}\mathbf{B}(t)\big) = y(t) \in \mathcal{U}^*, \qquad t \geq 0.$$

现在我们可以引入与系统 (4.16) 相对应的耗散节点。

命题 4.14（麦克斯韦方程组的耗散节点）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 Lipschitz 区域， ϵ, $\mu \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$ 逐点厄米且正定，并且 $\epsilon^{-1}, \mu^{-1} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$，另设 $g \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{3\times3})$，使得 $-g$ 逐点耗散。此外，设 ($\mathcal{U}^*, L^2_\tau(\partial\Omega)\ \mathcal{U}$) 是与半双线性型 h_τ 相关联的拟 Gelfand 三元组，如 (4.19) 中所述。则对于 $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^* = (L^2(\Omega; \mathbb{C}^3))^2$，其内积如 (4.17) 所示，算子$M$: $\mathcal{X}_h^* \times \mathcal{U} \supset \mathrm{dom}\ M \to \mathcal{X}_h \times \mathcal{U}^*$，其中

$$\mathrm{dom}\, M = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \in H(\mathrm{curl}, \Omega)^2 \times \mathcal{U} \,\middle|\, u = \gamma_\tau \mathbf{E} \right\}, \qquad M \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{curl} \\ \mathrm{curl} & -g \\ -\pi_\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

是 ($\mathcal{X}_h$,$\mathcal{U}$) 上的耗散节点。

证明。我们依次验证 M 满足定义 3.4 中的条件 (a)–(d)。根据备注 3.7 (d)，不失一般性，可假设 $\mathcal{X}_h$ 和 $\mathcal{X}_h^*$ 均配备标准的 L^2-内积（等价地，$\mu = \epsilon \equiv 1$）。

(a) 我们首先证明 M 是耗散的。根据式 (4.21) 中切向分量迹算子的定义，可得

$$\begin{aligned}
\forall \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M: \quad & \operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}\times\mathcal{U},\mathcal{X}\times\mathcal{U}^*} \\
&= \operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ \gamma_\tau \mathbf{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{curl}\mathbf{E} \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} - g\mathbf{E} \\ -\pi_\tau \mathbf{H} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}\times\mathcal{U},\mathcal{X}\times\mathcal{U}^*} \\
&= -\operatorname{Re}\langle \mathbf{E}, g\mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} \\
&\quad + \operatorname{Re}\left(\langle \mathbf{E}, \operatorname{curl}\mathbf{H}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \operatorname{curl}\mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \pi_\tau \mathbf{E}, \gamma_\tau \mathbf{H}\rangle_{\mathcal{U}^*,\mathcal{U}}\right) \\
&= -\operatorname{Re}\langle \mathbf{E}, g\mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} \le 0.
\end{aligned}$$

接下来证明 M 是闭的。假设

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_n \\ \mathbf{E}_n \\ u_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \text{ in } L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2 \times \mathcal{U}, \qquad M \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n \\ \mathbf{E}_n \\ u_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \\ w \end{pmatrix} \text{ in } L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2 \times \mathcal{U}^*.$$

根据 M 的定义，我们得到 (H_n) 和 (E_n) 都是 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 中的柯西序列，因而收敛。于是，根据 L^2 收敛分别趋于 H 和 E，序列 (H_n) 和 (E_n) 在 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 中分别收敛至 H 和 E。这尤其表明，($\operatorname{curl}\mathrm{H}_n$) 和 ($\operatorname{curl}\mathrm{E}_n$) 在 $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ 中分别收敛至 curl H 和 curl E。直接可得 $\mathrm{A} = -\operatorname{curl}\mathrm{E}$ 且 $\mathrm{C} = \operatorname{curl}\mathrm{H} - g\mathrm{E}$。此外，由 $\gamma_\tau: H(\mathrm{curl}, \Omega) \to \mathcal{U}$ 和 $\pi_\tau: H(\mathrm{curl}, \Omega) \to \mathcal{U}^*$ 的有界性可得

$$\begin{aligned}
u \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} u_n = \gamma_\tau \mathbf{E}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma_\tau \mathbf{E}, \\
w \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} -\pi_\tau \mathbf{H}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\pi_\tau \mathbf{H},
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M, \qquad M \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \\ w \end{pmatrix}.$$

(b) 这可以通过与 (a) 中完全相同的论证来实现。

(c) 设 $u \in \mathcal{U}$。由切向迹算子 $\gamma_\tau: H(\text{旋度}; \Omega) \to \mathcal{U}$ 的满射性，存在某个 $\mathrm{E} \in H(\text{旋度}, \Omega)$，使得 $u = \gamma_\tau \mathrm{E}$。于是

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} M.$$

(d) 考虑主算子

$$F : \operatorname{dom} F = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \in H(\operatorname{curl}; \Omega)^2 \,\middle|\, \gamma_\tau \mathbf{E} = 0 \right\}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{curl} \\ \operatorname{curl} & -g \end{bmatrix}.$$

步骤 1：我们证明 $\operatorname{dom} F^* = \operatorname{dom} F$ with

$$F^* = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{curl} \\ -\operatorname{curl} & -g^* \end{bmatrix}.$$

对于 $\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} F$，(4.21) 中切向分量迹算子的定义给出

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{curl}\mathbf{E} \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} - g\mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} \\
&= -\langle \mathbf{A}, \operatorname{curl}\mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} + \langle \mathbf{C}, \operatorname{curl}\mathbf{H}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \mathbf{C}, g\mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} \\
&= -\langle \operatorname{curl}\mathbf{A}, \mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} + \langle \operatorname{curl}\mathbf{C}, \mathbf{H}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle g^*\mathbf{C}, \mathbf{E}\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)}
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{curl}\mathbf{C} \\ -\operatorname{curl}\mathbf{A} - g^*\mathbf{C} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2}.$$

接下来只需证明 dom $F^* \subset$ dom F。假设 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \in$ dom F^*。那么存在某个 $\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$，使得对所有 $\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \in$ dom F，

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{curl}\mathbf{E} \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} - g\mathbf{E} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2}.$$

首先令 $\mathbf{E} = 0$，我们得到

$$\forall \mathbf{H} \in H(\operatorname{curl},\Omega): \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{H} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} = \langle \mathbf{C}, \operatorname{curl}\mathbf{H} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3).}$$

首先选取紧支撑光滑函数作为 H，根据弱旋度的定义可得 $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{C}$，而式 (4.21) 中切向分量迹算子的定义给出

$$\forall \mathbf{H} \in H(\operatorname{curl},\Omega):$$

$$\langle \operatorname{curl}\mathbf{C}, \mathbf{H} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} = \langle \mathbf{C}, \operatorname{curl}\mathbf{H} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} = \langle \operatorname{curl}\mathbf{C}, \mathbf{H} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3).} + \langle \pi_\tau \mathbf{C}, \gamma_\tau \mathbf{H} \rangle_{\mathcal{U}^*,\mathcal{U}}.$$

这得到 $\pi_\tau \mathbf{C} = 0$，由此可知，如 [10], 所示，$\gamma_\tau \mathbf{C} = 0$。

现在令 $\mathbf{H} = 0$，我们得到

$$\forall \mathbf{E} \in H(\operatorname{curl},\Omega) \text{ with } \gamma_\tau \mathbf{E} = 0 : \langle \mathbf{G} + g^*\mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} = -\langle \mathbf{A}, \operatorname{curl}\mathbf{E} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)},$$

再次为 E 选取紧支撑光滑函数，由弱旋度的定义可得 $\mathbf{G} + g^*\mathbf{C} = -$ 旋度 A。综上可知 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \in$ dom F。S

2 We show that F h作为性质 (d) i n Definiti 3 4

利用步骤 1，对所有 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \in$ dom $F^* =$ dom F，我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, F^* \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} &= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{curl}\mathbf{C} \\ -\operatorname{curl}\mathbf{A} - g^*\mathbf{C} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)^2} \\ &= \langle \mathbf{A}, \operatorname{curl}\mathbf{C} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \mathbf{C}, \operatorname{curl}\mathbf{A} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} - \langle \mathbf{C}, g^*\mathbf{C} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} \\ &= -\langle \mathbf{C}, g^*\mathbf{C} \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)} \le 0. \end{aligned}$$

因此，F^* 是耗散的，我们可以由命题 2.13 得出所需结果。

□

5. 总结

我们介绍了一种针对具有端口哈密顿结构的线性偏微分方程的算子理论方法，尤其涵盖了边界控制与观测的情形。我们的基本工具是 STAFFANS 在 [34] 中提出的“系统节点”理论，以及该作者此前发表在期刊上的相关论文。我们提出的方法也包含一套解理论，并且可以证明解满足耗散不等式。从物理角度看，后者意味着能量平衡。我们将该理论应用于有界利普希茨区域上的平流—扩散方程和麦克斯韦方程组，并考虑边界控制与观测。此外，我们还在所提出理论的背景下分析了 JACOB and ZWART 在 [19]一书中讨论的一维空间区域上的双曲系统，并将其进一步推广到具有某些无界和/或非强制哈密顿密度的系统。

作者认为，许多由物理原理启发的偏微分方程都适用于本文提出的框架。除了考虑更多应用领域（例如流体动力学）之外，还有许多超出本文内容的开放性研究问题。例如，这些课题包括端口哈密顿

系统的互连，以及将本文提出的理论与 [37–39]on中关于（斯托克斯-）狄拉克结构和电阻结构的理论联系起来。

致谢

作者谨向 Nathanael Skrepek（TU BA Freiberg）致以谢意，感谢他就麦克斯韦方程组的边界迹空间的选择提出了极有裨益的意见，并让作者了解了拟 Gelfand 三元组的概念。此外，也感谢 Hans Zwart（U Twente）提供参考文献，并分享了关于第 4.2 节所讨论系统历史的宝贵见解。

参考文献

[1] R. A. Adams 和 J. J. Fournier。《Sobolev空间》，纯粹与应用数学第140卷。学术出版社，阿姆斯特丹、圣迭戈、牛津、伦敦，2003年。第2版。[2] H. W. Alt。《线性泛函分析：面向应用的导论》。Universitext。施普林格，伦敦，2016年。[3] B. D. O. Anderson 和 S. Vongpanitlerd。《网络分析与综合》。普伦蒂斯·霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1973年。[4] B. Augner。《通过耗散边界反馈稳定无限维端口哈密顿系统》。博士学位论文，伍珀塔尔贝吉施大学，2016年。[5] B. Augner。《具有非线性边界反馈的无限维线性端口哈密顿系统的适定性与稳定性》。SIAM 控制与优化杂志，57(3)：1818–1844，2019年。[6] B. Augner 和 B. Jacob。《无限维线性端口哈密顿系统的稳定性与稳定化》。演化方程与控制理论，3(2)：207—229，2014年。[7] G. Bastin 和 J.-M. Coron。《一维双曲系统的稳定性与边界稳定化》，非线性微分方程及其应用进展：控制分册第88卷。比克豪泽，巴塞尔，2016年。[8] C. Beattie、V. Mehrmann、H. Xu 和 H. Zwart。《线性端口-哈密顿微分代数系统》。控制、信号与系统数学，30(4)：17，2018年。[9] J. Behrndt、S. Hassi 和 H. de Snoo。《边值问题、Weyl函数与微分算子》，数学专著第108卷。比克豪泽，巴塞尔，2020年。[10] A. Buffa、M. Costabel 和 D. Sheen。《Lipschitz 区域中 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$的迹》。应用数学与应用分析杂志，276：845–867，2002年。[11] P. Ciarlet。《应用线性与非线性泛函分析》。SIAM 出版社，费城，2013年。[12] J. Diestel 和 J. Uhl。《向量测度》，数学调查与专著第15卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977年。[13] K.-J. Engel 和 R. Nagel。《线性演化方程的单参数半群》，数学研究生教材第194卷。施普林格，纽约，2000年。[14] H. Gernandt、F. E. Haller 和 T. Reis。《处理端口-哈密顿微分代数方程的线性关系方法》。SIAM 矩阵分析与应用杂志，42(2)：1011–1044，2021年。[15] P. Grisvard。《非光滑区域中的椭圆问题》，数学专著与研究第24卷。皮特曼高级出版计划，波士顿、伦敦、墨尔本，1985年。[16] B. Jacob 和 J. Kaiser。《无限维线性端口哈密顿系统的精确能控性》。IEEE 控制系统快报，3(3)：661–661，2019年。[17] B. Jacob、J. T. Kaiser 和 H. Zwart。《端口哈密顿系统的Riesz基》。SIAM 控制与优化杂志，59(6)：4646–4665，2021年。[18] B. Jacob、K. Morris 和 H. Zwart。《波网络的零动态》。Automatica，103：310–321，2019年。[19] B. Jacob 和 H. J. Zwart。《无限维空间上的线性端口哈密顿系统》，算子理论：进展与应用第223卷。施普林格科学与商业媒体，巴塞尔，2012年。[20] C. Johnson。《用有限元方法数值求解偏微分方程》。剑桥大学出版社，纽约，1987年。[21] T. Kato。《线性算子的摄动理论》，数学经典第132卷。施普林格，柏林、海德堡，2013年。1980年版重印。[22] Y. Le Gorrec、H. Zwart 和 B. Maschke。《与斜对称微分算子相关的Dirac结构和边界控制系统》。SIAM 控制与优化杂志，44(5)：1864–1892，2005年。

[23] J. Malinen、O. J. Staffans 和 G. Weiss。《线性系统何时是保守的? 》应用数学季刊，64(1)：61–91，2006年。[24] V. Mehrmann 和 R. Morandin。《端口-哈密顿描述系统的保结构离散化》。载于《2019年 IEEE 第58届决策与控制会议（CDC）》，第6863–6868页，2019年。[25] V. Mehrmann 和 A. van der Schaft。《具有耗散哈密顿结构的微分代数系统》。arXiv，2022年。[26] V. Mehrmann 和 A. van der Schaft。《重新审视线性端口-哈密顿微分代数系统》，2022年。arXiv:2301.04610。[27] M. R. Opmeer 和 O. J. Staffans。《双向无限连续时间轴上的最优控制与互素分解》。SIAM 控制与优化杂志，52(3)：1958–2007，2014年。[28] T. Reis。《关于巴拿赫空间上端口哈密顿系统的一些笔记》。IFAC 在线论文集，54 229，2021 19 223( ): – 。[29] M. Sch¨oberl 和 A. Siuka。《利用微分算子的无限维端口哈密顿系统射流丛表述》。Automatica，50(2)：607–613，2014年。[30] F. Schwenninger。《抛物型边界控制的输入到状态稳定性：线性与半线性系统》。载于 J. Kerner、H. Laasri 和 D. Mugnolo 编，《无限维系统控制理论》，第83–116页，尚，2020年。施普林格国际出版公司。[31] N. Skrepek。《多维空间区域上线性一阶端口-哈密顿系统的适定性》。演化方程与控制理论，10(4)：965–1006，2021年。[32] N. Skrepek。《拟 Gelfand 三元组》，2023年。arXiv:2301.04610。[33] O. J. Staffans。《被动且保守的连续时间阻抗与散射系统。第一部分：适定系统》。控制、信号与系统数学，15(4)：291–315，2002年。[34] O. J. Staffans。《适定线性系统》，数学及其应用百科全书第103卷。剑桥大学出版社，英国剑桥，2005年。[35] L. Tartar。《Sobolev空间与插值空间导论》。意大利数学联合会讲义。施普林格，柏林、海德堡，2007年。[36] M. Tucsnak 和 G. Weiss。《算子半群的观测与控制》。比克豪泽高级教材，巴塞尔教材。比克豪泽，巴塞尔，2009年。[37] A. J. van der Schaft 和 D. Jeltsema。《端口-哈密顿系统理论：入门综述》。系统与控制基础与趋势，1(2-3)：173–378，2014年。[38] A. J. van der Schaft 和 B. Maschke。《具有边界能流的分布参数系统的哈密顿表述》。几何物理学杂志，42(1-2)：166–194，2002年。[39] A. J. van der Schaft 和 B. Maschke。《微分算子Dirac结构》。IFAC 在线论文集，54(19)：198– 203，2021年。[40] J. A. Villegas。《分布参数系统的端口-哈密顿方法》。博士学位论文，屯特大学，2007年。[41] G. Weiss 和 O. J. Staffans。《作为散射被动线性系统的麦克斯韦方程组》。SIAM 控制与优化杂志，51(5)：3722–3756，2002年。[42] E. Zeidler。《应用泛函分析：数学物理应用》，应用数学科学第108卷。施普林格，纽约，2012年。

F. Philipp：数学研究所，数学与自然科学学院，伊尔梅瑙工业大学，德国伊尔梅瑙 电子邮箱：friedrich.philipp@tu-ilmenau.de 网址：https://www.tu-ilmenau.de/obc/team/friedrich-philipp T. Reis：数学研究所，数学与自然科学学院，伊尔梅瑙工业大学，德国伊尔梅瑙 电子邮箱：timo.reis@tu-ilmenau.de 网址：https://www.tu-ilmenau.de/systpde/team/timo-reis

M. Schaller：数学研究所，数学与自然科学学院，伊尔梅瑙工业大学，德国伊尔梅瑙 电子邮箱：manuel.schaller@tu-ilmenau.de 网址：https://www.tu-ilmenau.de/obc/team/manuel-schaller