arXiv:2302.05181v1 [math.NT] 10 Feb 2023

某些伽罗瓦表示的二分欧拉系统

CHANDRAKANT ARIBAM 和 PRONAY KUMAR KARMAKAR

Abstract. 设 $E/\mathbb{Q}$ 是一个在素数 p处具有普通约化的椭圆曲线， K 是一个虚二次域。反圆分 Iwasawa 主猜想根据 $L(E/K,s)$的函数方程符号，预言了 K的反圆分塔上 $E/\mathbb{Q}$ 的塞尔默群的变化。Bertolini 和 Darmon 关于这一猜想的一些关键思想，由 Howard 通过二分欧拉系统这一概念抽象为一个公理化框架，并假设 $E[p]$ 是 G_K的不可约表示。我们仅假设（$E[p]$）$^{G_K}=0$，从而推广了这项工作。我们运用 Howard、Nekov´aˇr 和 Castella $et\ al.$ 的结果，以及 Mazur 和 Rubin 关于 Kolyvagin 系统的研究，证明了反圆分主猜想在两种符号下的一侧整除关系。另一侧整除关系则可归结为证明，与一族彼此同余的模形式相联系的足够多个 p-进 L-函数均不为零。

Contents

1. 引言 1 2. 塞尔默群 4 3. 关键引理 7 4. 阿廷环上的二分欧拉系统 9 5. Stub模 12 6. Iwasawa 理论 17 6.1. Λ 17上的塞尔默模 6.2. Λ 19上的欧拉系统6.3. 定理 6.6 的证明 22 参考文献 24

1. 引言

设 $E/\mathbb{Q}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、导子为 $N=N^+N^-$ 的椭圆曲线， K 是 $\mathbb{Q}$ 的一个虚二次域扩张，其中 N^+（分别是 N^-）仅被在 K 中分裂（分别保持惰性）的素数整除。设 D_K 是 K 的判别式，满足 $(D_K,N)=1$。设 $L(E/K,s)$ 是 E 的 Hasse-Weil L-函数， ϵ 是与扩张 $K/\mathbb{Q}$ 相关联的二次特征。根据 Gross 和 Zagier 的研究，函数方程 $L(E/K,s)$ 的符号为 $-\epsilon(N^-)$。现在设 p 是一个有理素数，使得 E 在 p 处有良好常规约化， $p\nmid 6D_KN$，并设 K^{ac} 是 K 的反圆分 $\mathbb{Z}_p$ 扩张，且 $\Gamma^-=\mathrm{Gal}(K^{ac}/K)$。设 $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\Gamma^-]]$ 是

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11G05、11G40、11R23。

Γ^- 的岩泽代数。关于 E 的反圆分主猜想预言：当 $\epsilon(N^-) = 1$（称为不定情形）时， p^∞-塞尔默群 $\text{Sel}_{p^\infty}(K^{ac}, E[p^\infty])$ 的余秩为一，且其 Λ-余挠子模的特征理想可用海格纳点表示；当 $\epsilon(N^-) = -1$（称为定情形）时，预言 $\text{Sel}_{p^\infty}(K^{ac}, E[p^\infty])$ 是 Λ-余挠的，其特征理想与 p-进 L-函数相关。

从 Bertolini 和 Darmon 关于这一猜想的开创性基础工作 [BD] 开始，在定情形下，当剩余表示 $\overline{\rho}_E : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ 的椭圆曲线 E E 不可约且具有满射像，并且附属于 E 的模形式 f 是 p-孤立的情况，我们已经有了许多了解。不定情形的某些方面也在 [Be] 中得到研究。当剩余表示 $\overline{\rho}_E$ 可约时，Castella 等人在 [CGLS] 中利用 Kolyvagin 系统理论证明了不定情形下的一些情形，其前提是海格纳假设成立，并要求 N^- 等于 1。这些工作都依赖许多作者的成果，但它们都受到 Bertolini 和 Darmon 的工作 [BD] 的启发。

借鉴 Mazur 和 Rubin 关于 Kolyvagin 系统的工作（[MR]），Howard 在 [H3], 中将 Bertolini 和 Darmon 的论证公理化，从而能够同时处理定情形和不定情形。事实上，利用这一公理化框架，在 [BCC] 中同时处理了定情形和不定情形，其中 $E[p]$ 不可约。Howard 通过二分欧拉系统这一概念进行公理化，下面简要说明。设 f 是附属于 $E/\mathbb{Q}$ 的模形式（依据 Wiles、Taylor-Wiles 和 Diamond 的工作）。给定正整数 k，可以定义 k-容许素数集 $\mathcal{L}_k$，其中所有素数在 K 中均为惰性，并且具有如下性质：对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k$ （ $\mathcal{L}_k$ 中素数的无平方因子乘积集合），存在一个层为 $\mathfrak{n}N^-$ 、与 f 模 p^k 同余的模形式 $f_{\mathfrak{n}}$。接着考虑一个图，其顶点为 $\mathcal{N}_k$ 中的元素；对于每个与 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k$ 互素的 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}_k$，用一条边连接 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{nl}$。由 $n \in \mathbb{N}$ 生成的顶点 $\mathfrak{n}$，根据 $\epsilon(nN^-)$ 是 -1 还是 1，分别称为定顶点或不定顶点。这样便得到该图的二分划分：每条边都连接一个定顶点和一个不定顶点。在 [H3], 的公理化框架中，Howard 与 [MR], 一样，考虑定义在主阿廷局部环 A 上的秩二模 T，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，并且其上有 G_K 的连续作用，以及一个取值于 $A(1)$ 的完美 G_K-等变交错配对。在这一框架中，定义了 K 的容许素数集 $\mathcal{L}$，其由 K 中的素数 $\mathfrak{l}$ 组成；这些素数均为惰性，且弗罗贝尼乌斯在 T 上的特征值为 $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{l})$ 和 1。 $\mathcal{L}$ 的无平方因子乘积集合记为 $\mathcal{N}$。于是，对每个 $\mathfrak{n}$，都将塞尔默群 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$ 定义为 $H^1(K, T)$ 的一个子空间，并在素数 $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}$ 处施加非分歧条件，在 $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{n}$ 处施加普通条件。

此外，仿照 [MR], ，Howard 通过在偶顶点 $\mathfrak{n}$ 处附上模 A，在奇顶点处附上 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$，并在边 $e(\mathfrak{n}, \mathfrak{nl})$ 处附上 $H^1(K_{\mathfrak{l}}, T)$ 的适当子模，来定义欧拉系统层。对每个 $k \in \mathbb{N}$，考虑 $\mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p$-模 $E[p^k]$。于是，在不定顶点处，模形式 $f_{\mathfrak{n}}$ 允许定义上同调类 $\kappa_{\mathfrak{n}} \in \varprojlim_m H^1(K_m, E[p^k])$；该类是海格纳点在与 $f_{\mathfrak{n}}$ 对应的阿贝尔簇上的库默尔像。在定顶点处，可以在 $f_{\mathfrak{n}}$ 上附加一个 p-进 L-函数 $\lambda_{\mathfrak{n}} \in \Lambda/p^k\Lambda$。任意两个相邻顶点处的元素之间都满足互反律，这些族

$$\{\kappa_{\mathfrak{n}} | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k, \mathfrak{n} \text{ indefinite } \} \quad \{\lambda_{\mathfrak{n}} | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k, \mathfrak{n} \text{ definite } \}$$

构成一个二分欧拉系统。Howard 证明，非平凡性充分强的二分欧拉系统可用于给 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$ 的长度提供上界；他还证明了一个刚性定理，为所有顶点处的这些上界给出一致估计。

在这篇手稿中，我们将 Howard 在 [H3] 中的工作从假设 $\overline{\rho}_E$ 不可约的情形，推广到 $(E[p])^{G_K} = 0$ 的情形。注意，当 $E[p]$ 是 G_K 的不可约表示时，$(E[p])^{G_K} = 0$ 自动成立。尝试这样做时，我们面临一个问题

：缺少切博塔廖夫密度定理。在不可约情形中，要利用欧拉系统得到塞尔默群的界，这一定理至关重要。在 $(E[p])^{G_K}=0$ 的情形下，我们使用 [CGLS], 的结果；该结果进一步依赖于 Nekov´a˘r [Ne], 的工作，使我们能够得到一个类似于切博塔廖夫密度定理的结果，但适用于某个非平凡特征 α 对 Γ^- 的扭曲 $T=E[p^k]\otimes\alpha$ （见下文 §3）。我们记作 $A=\mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p$。

定理A（引理 3.7）。设 $\mathrm{length}(A) > \varepsilon_0 = r(C_1+C_2+C_\alpha)$。那么，对任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}$ 以及任意循环自由 A-模 $C\subset \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$，都存在无穷多个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，使得 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}$ 将 C同构地映到 $H^1_{unr}(K_\mathfrak{l},T)$。

在上述定理中取 $\varepsilon_0=0$，即可得到 H3 的 [引理 2.3.3]。然而，放宽不可约性条件会导致塞尔默群长度的界出现误差（见定理 4.7）。

定理B（定理 4.7）。设 $\mathrm{length}(A) > \varepsilon_0$。对于 $(T,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 的任意奇类型自由欧拉系统，任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}$ 均有 $\pi^\varepsilon\lambda_\mathfrak{n}\in\mathrm{Stub}_\mathfrak{n}$，且任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$ 均有 $\pi^\varepsilon\kappa_\mathfrak{n}\in\mathrm{Stub}_\mathfrak{n}$。等价地，就分解 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}\cong A^{e(\mathfrak{n})}\oplus M_\mathfrak{n}\oplus M_\mathfrak{n}$ 中的 A-模 $M_\mathfrak{n}$ 而言，我们有

$$\mathrm{length}(M_\mathfrak{n})\le\begin{cases}\mathrm{ind}(\lambda_\mathfrak{n},A)+\varepsilon & \text{if } \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}\\ \mathrm{ind}(\kappa_\mathfrak{n},\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T))+\varepsilon & \text{if } \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}.\end{cases}$$

我们面临的第二个问题，是在仅假设（$E[p])^{G_K}=0$的情况下，尝试得到一个类似于 [H3, 定理 2.51] 的刚性定理（见定理 5.14）；更准确地说，是尝试刻画核心顶点（见 [H3]中的定义 2.4.2）。然而，如[MR] 或 [H3], 中所述，将核心顶点定义为其 Stub模为 A 的顶点（更准确地说，若 $\mathrm{length}(M_\mathfrak{n})=0$，则 $\mathfrak{n}$ 为核心），并不合适，因为我们会得到一个误差项 ε_0（在不可约情形下，此误差项为零）。因此，我们考察那些使 $\mathrm{length}(M_\mathfrak{n})$ 最小的顶点 $\mathfrak{n}$。将这个长度记为 u，则 Stub模同构于 $\mathfrak{m}^uA$；我们称这些顶点为绝对核心顶点（见定义5.1）。我们通过用局部化下的消失来刻画这些顶点，证明这一概念定义良好，并称它们为普遍平凡顶点（见定义5.4）。利用这些绝对核心顶点，我们证明所考察的图是路径连通的（见命题 5.11）。由此，我们在定理 5.14 中得到所需的刚性定理。

对于每个 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_k$，考虑素数 $\mathfrak{l}\mid\mathfrak{n}$ 处的普通条件，由此我们可以定义塞尔默群 $\mathcal{S}_\mathfrak{n}(K^{ac},E[p^k])\subset\varprojlim_m H^1(K_m,E[p^k])$，其中 $1\le k\le\infty$（见下文定义 6.3）。记 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1(K^{ac},T_p)$ 和 X 分别为 $\mathrm{Sel}(K^{ac},E[p^\infty])$ 的 Pontryagin 对偶，并假设随着 k 变化，$\kappa_\mathfrak{n}$ 和 $\lambda_\mathfrak{n}$ 的族彼此相容，则有特征元 $\lambda^\infty\in\Lambda$ 和 $\kappa^\infty\in\mathcal{S}$。

于是我们得到主定理，它给出了塞尔默群的一个界以及一个等式成立条件。作为推论，该定理可应用于某些可约伽罗瓦表示的反圆分 Iwasawa 主猜想。

定理 C（定理 6.6）。设特征元 λ^∞、κ^∞ 非零，并令 X_{tor} 表示 X 的 Λ-挠子模。那么，我们有：

(i) 秩公式：

$$\mathrm{rank}_\Lambda\,\mathcal{S}=\mathrm{rank}_\Lambda\,X=\begin{cases}0 & if\quad \epsilon(N^-)=-1\\ 1 & if\quad \epsilon(N^-)=1.\end{cases}$$

(ii) 对于 Λ 的任意高度一素理想 $\mathfrak{P}$，我们有

$$\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(\mathrm{char}\,(X_{tor}))\le 2.\begin{cases}\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(\lambda^\infty) & if\quad \epsilon(N^-)=-1\\ \mathrm{ord}_\mathfrak{P}(\mathrm{char}\,(\mathcal{S}/\Lambda\kappa^\infty)) & if\quad \epsilon(N^-)=1.\end{cases}$$

(iii) 若满足以下条件，则不等式 (ii) 取等号：存在一个正整数 s，使得对于所有 $t \geq s$，集合

$$\{\lambda_{\mathfrak{n}} \in \Lambda/p^t\Lambda | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_t^{definite}\}$$

含有一个在 $\Lambda/(\mathfrak{P}, p^s)$ 中非零的元素。

2. Selmer Groups

本节回顾阿廷环上的塞尔默群的一些基本事实，内容参照 Mazur-Rubin [MR] 和 Howard [H3]。这些参考文献中已介绍局部上同调群的分解以及修正塞尔默群的定义。我们也沿用 [H3] 中引入的许多记号。不同之处在于假设 2.8：我们放宽了剩余表示不可约这一假设。

在全文中，我们固定一个代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}$、一个素数 $p > 2$，以及嵌入 $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ 和 $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$。令 $G_{\mathbb{Q}} =$ 为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$，$G_K =$ 为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$；对于 K 的每个素位 w，令 $G_w \subset G_K$ 表示分解群，I_w 表示其惯性子群。我们用 $\mathrm{Frob}_w \in G_w/I_w$ 表示素位 w 处的算术 Frobenius。对于素数 $v \mid p$，令 G_v 表示分解群，它通过嵌入 ι_p 与 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 相认同。对于 K 的任意素位 w，将 K_w 的最大非分歧扩张记为 K_w^{unr}。

令 K^{ac} 表示 K 的反圆分扩张 $\mathbb{Z}_p$，并令 $\Gamma^- = \mathrm{Gal}(K^{ac}/K)$。我们用 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^-]]$ 表示反圆分岩泽代数。固定一个拓扑生成元 $\gamma \in \Gamma^-$ 后，通过 $T^- = \gamma - 1$ 可得到一个非典范同构 $\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[[T^-]]$。

设 A 是一个主阿廷局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m} = \pi A$，剩余特征为 $p \geq 3$。值得注意的是，离散赋值环模去其极大理想的某个 k 次幂所得的商是这样的环；反过来，不难证明每个主局部阿廷环都是某个离散赋值环的商。设 T 是一个秩二自由 A-模，并且带有某个数域 K 的 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 在离散拓扑下的连续作用。我们假设 T 具有一个完美的、G_K-等变的交替 $A(1)$ 值配对。

定义 2.1. 对于 K 的每个素数 w，若 T 在该处非分歧，则对 K 的最大非分歧扩张 K^{unr}，非分歧上同调定义为

$$H^1_{unr}(K_w, T) := ker[H^1(K_w, T) \longrightarrow H^1(K_w^{unr}, T)].$$

定义 2.2. (i) T 上的塞尔默结构 $(\mathcal{F}, \Sigma_{\mathcal{F}})$ 是 K 的一个有限素位集 $\Sigma_{\mathcal{F}}$，其中包含阿基米德素位、T 分歧处的素数以及 p 上方的所有素数；并且对 K 的每个素位 w，选取一个子模 $H^1_{\mathcal{F}}(K_w, T) \subset H^1(K_w, T)$，使得对所有 $w \notin \Sigma_{\mathcal{F}}$，$H^1_{\mathcal{F}}(K_w, T) = H^1_{unr}(K_w, T)$。

(ii) 若塞尔默结构 $\mathcal{F}$ 的子模 $H^1_{\mathcal{F}}(K_w, T)$ 在（对称的）局部泰特配对下是极大各向同性的，则称该结构是自对偶的

$$H^1(K_w, T) \times H^1(K_w, T) \longrightarrow H^2(K_w, A(1)) \cong A$$

对每个有限处 $w \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ 均成立。

（iii）对于每个素位 w，在从 $\overline{K}$ 到 $\overline{K}_w$ 的嵌入下（该嵌入固定），我们考虑由限制给出的局部化映射：

$$\mathrm{loc}_w : H^1(K, T) \longrightarrow H^1(K_w, T).$$

（iv）定义 与 $\mathcal{F}$ 相关的塞尔默模或群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}} = \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}}(K, T)$，由.....的正合性 f

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}} \longrightarrow H^1(K, T) \xrightarrow{\oplus_w \mathrm{loc}_w} \bigoplus H^1(K_w, T)/H^1_{\mathcal{F}}(K_w, T),$$

其中我们仍用记号 loc_w 表示与商映射复合后的局部化映射。

注 2.3. (i) T上的塞尔默结构 $(\mathcal{F},\Sigma_{\mathcal{F}})$ 以自然方式在一个 G_K-子模（分别为商） S上诱导出塞尔默结构，其中 S是 T的子模。若 S是 T的子模，则对 K的每个素位 w，在 $H^1(K_w,S)\longrightarrow H^1(K_w,T)$下， $H^1_{\mathcal{F}}(K_w,T)$的原像（分别是在 $H^1(K_w,T)\longrightarrow H^1(K_w,S)$下， $H^1_{\mathcal{F}}(K_w,T)$的像）定义了一个塞尔默结构。由[MR，引理 1.1.9]，对每个 $w\notin\Sigma_{\mathcal{F}}$， $H^1_{\mathcal{F}}(K_w,S)=H^1_{unr}(K_w,S)$，因此这是良定义的。(ii) 对于 $p\neq 2$，我们有 $H^1(K_w,T)=0$，对所有 w阿基米德的均成立。

定义 2.4. 与 $\Sigma_{\mathcal{F}}$ 不相交的 K 的素数集 $\mathcal{L}$，并且满足

(i) 对所有 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$， $N(\mathfrak{l})\not\equiv 1$ (模 p)；(ii) 对所有 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，弗罗贝尼乌斯 $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}$ 在 T 上的作用的特征值为 $N(\mathfrak{l})$ 和 1，

称为容许素数集，记作 $\mathcal{L}$。

定义 2.5. 对每个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$， $T\cong A\oplus A(1)$ 是一个 $G_{K_{\mathfrak{l}}}$-模，且分解唯一。于是普通上同调定义为

$$H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T):=\mathrm{image}[H^1(K_{\mathfrak{l}},A(1))\longrightarrow H^1(K_{\mathfrak{l}},T)].$$

由局部 Tate 对偶性可知，对所有 $\mathfrak{l}\notin\Sigma_{\mathcal{F}}$， $H^1_{\mathcal{F}}(K_{\mathfrak{l}},T)=H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)$ 是极大各向同性的。对每个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，由引理 [H3 和引理 2.2.1], ，这些上同调群作为局部上同调群的 $G_{K_{\mathfrak{l}}}$-模的直和项出现：

$$H^1(K_{\mathfrak{l}},T)\cong H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)\oplus H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T). \tag{2.1}$$

这里的每个直和项都是 A 上的秩一自由模，并且在局部泰特配对下是极大各向同性的。

上述塞尔默结构可以通过引入新的素数进行修改。

定义 2.6. 令 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{L}$中素数的无平方因子乘积集合。对于任意 $\mathfrak{abc}\in\mathcal{N}$，我们定义塞尔默结构 $(\mathcal{F}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c})\,\Sigma_{\mathcal{F}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c})})$ 如下：$\Sigma_{\mathcal{F}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c})}$是 $\Sigma_{\mathcal{F}}$与 $\mathfrak{abc}$的所有素因子的并，

$$H^1_{\mathcal{F}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c})}(K_w,T)=H^1_{\mathcal{F}}(K_w,T)$$

对于与 $\mathfrak{abc}$互素的 w 素数，以及

$$H^1_{\mathcal{F}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c})}(K_{\mathfrak{l}},T)=\begin{cases}H^1(K_{\mathfrak{l}},T) & \text{if } \mathfrak{l}\mid\mathfrak{a},\\ 0 & \text{if } \mathfrak{l}\mid\mathfrak{b}\\ H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T) & \text{if } \mathfrak{l}\mid\mathfrak{c}.\end{cases}$$

当 $\mathfrak{a}$、 $\mathfrak{b}$、 $\mathfrak{c}$ 中任意一个为空乘积时，记号中省略该项。

定义 2.7. 塞尔默结构 $(\mathcal{F},\Sigma_{\mathcal{F}})$ 称为笛卡尔的，若对 T 的每个商 $T/\mathfrak{m}^iT$、每个素位 $w\in\Sigma_{\mathcal{F}}$ 以及任意生成元 $\pi\in\mathfrak{m}$，同构

$$T/\mathfrak{m}^iT\longrightarrow T[\mathfrak{m}^i]$$

诱导一个同构 $H^1_{\mathcal{F}}(K_w,T/\mathfrak{m}^iT)\cong H^1_{\mathcal{F}}(K_w,T[\mathfrak{m}^i])$。

在本节余下部分，我们作如下假设：

假设 2.8。(i) $(T/\mathfrak{m}T)^{G_K}=0$,
(ii) $\mathcal{F}$ 是笛卡尔的。

引理 2.9. 对任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$，塞尔默结构 $\mathcal{F}(\mathfrak{n})$ 都是笛卡尔的。对于任意选取的生成元$\pi \in \mathfrak{m}$ 以及任意 $0 \leq i \leq$长度(A)，复合映射

$$T/\mathfrak{m}^i T \xrightarrow{\pi^{\text{length}\, A-i}} T[\mathfrak{m}^i] \longrightarrow T$$

诱导同构 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}^i) \cong \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T[\mathfrak{m}^i]) \cong \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)[\mathfrak{m}^i]$。

证明。 $\mathcal{F}(\mathfrak{n})$ 的笛卡尔结构的证明与 [MR，引理 3.5 中完全相同。4]，假设 $(T/\mathfrak{m}T)^{G_K} = 0$。我们可以看到 $H^1(K, T/\mathfrak{m}^i) \cong H^1(K, T[\mathfrak{m}^i]) \cong H^1(K, T)[\mathfrak{m}^i]$，由此可得该引理。□

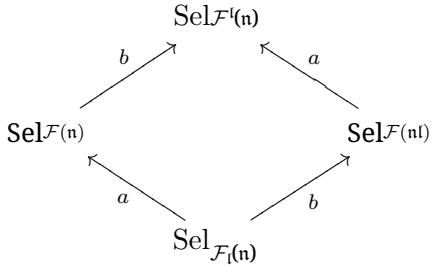
现在我们汇总 Mazur 和 Rubin（[MR]）以及 Howard 关于塞尔默群结构的一些结果。注意，这些结果的证明不需要假设 $T/\mathfrak{m}T$ 的不可约性或可约性，但需要对 Cassels-Tate 配对作修改，并满足关于 T 和 $\mathcal{F}$ 的自对偶假设。

命题 2.10。

(i) [H3, 2.2.7] 对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$，存在一个（非典范的）分解

$$\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})} \cong A^{e(\mathfrak{n})} \oplus M_{\mathfrak{n}} \oplus M_{\mathfrak{n}} \ \textit{with}\ e(\mathfrak{n}) \in \{0, 1\}.$$

(ii) [H3, 命题 2.2.9] 对于任意 $\mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N}$，存在非负整数 a, b，使得 $a + b =$图表中的长度(A)



其中箭头上的标记分别表示相应商的长度。这里，四个商都是循环 A-模，并且

$$a = \text{length}(\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})})), b = \text{length}(\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})})).$$

(iii) [H3，推论 2.2.13] 固定 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$。令 $e(\mathfrak{n})$ 如 (i) 所述，并设

$$\rho(\mathfrak{n}) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)).$$

则 $e(\mathfrak{n}) \equiv \rho(\mathfrak{n})$（模 2），且对任意与 $\mathfrak{n}$ 互素的 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ 素数

$$\rho(\mathfrak{n}\mathfrak{l}) = \rho(\mathfrak{n}) + 1 \iff \text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) = 0$$
$$\rho(\mathfrak{n}\mathfrak{l}) = \rho(\mathfrak{n}) - 1 \iff \text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \neq 0$$

这里 $\rho(\mathfrak{n})$ 保持不变，并且如果将 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)$ 在所有地方替换为 $\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)[\mathfrak{m}]$，这些等价关系仍然成立。

定义 2.11. 令 $\mathcal{N}^{odd}$ 表示 $\mathcal{N}$ 中满足 $e(\mathfrak{n}) = 1$ 的子集，令 $\mathcal{N}^{even} \subset \mathcal{N}$ 表示满足 $e(\mathfrak{n}) = 0$ 的子集，其中 $e(\mathfrak{n})$ 如命题 2.10(i) 第一条陈述中所定义。

由上面的 (iii)，对于 $\mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N}$，

$$\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even} \iff \mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N}^{odd}. \tag{2.2}$$

命题 2.12。 [H3，推论 2.2。12] 设 $\mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N}$，并令 a 和 b 如命题 2.10(ii) 中所述。则

$$\text{length}(M_{\mathfrak{n}}) = \begin{cases} \text{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) + a & \textit{if}\ \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even} \\ \text{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) - b & \textit{if}\ \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}. \end{cases}$$

3. The Key Lemma

设 $\Gamma^- =$ 伽罗瓦群(K^{ac}/K)。则 $\Gamma^- \cong \mathbb{Z}_p$，并记 γ 为 Γ^-的一个拓扑生成元。令T_p为 E的塔特模，并令 ρ_E： $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T_p)$ 表示与椭圆曲线 E相关联的表示。令 $U = \mathbb{Z}_p{}^{\times} \cap \mathrm{image}(\rho_E)$。设 R 为 $\mathbb{Q}_p$的一个有限扩张的整数环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$ ，且 v_p 是 R上的标准化赋值。考虑一个特征α： $\Gamma^- \longrightarrow R^{\times}$。按照 [Ne、CGLS], ，我们定义

$$\begin{aligned} C_1 &:= \min\{v_p(u-1) \mid u \in U\} \\ C_2 &:= \min\{m \geq 0 \mid p^m \operatorname{End}_{\mathbb{Z}_p}(T_p) \subset \rho_E(\mathbb{Z}_p[G_{\mathbb{Q}}])\} \\ C_\alpha &:= \begin{cases} v_p(\alpha(\gamma)-1), & \text{if } \alpha \neq 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

备注 3.1（[CGLS，备注 3.3.5]）。正如 Castella 等人所指出的，如果 ρ_E 是满射的，那么显然有 $C_1 = 0$; 如果 $E[p]$ 是不可约的，那么 $C_2 = 0$。特别地，如果 ρ_E 是满射的，则有 $C_1 = C_2 = 0$ 。

我们将 π 记作 $\mathfrak{m}$ 的一致化子。对于 $k \geq 1$，令 $R^{(k)} = R/\mathfrak{m}^k R$、 $T^{(k)} = T_p/\mathfrak{m}^k T_p$ ，并设 ℓ 为一个有理素数。对于每个 $\mathfrak{l}|\ell \in \mathcal{L}$，令 I_ℓ 为包含（$\ell+1$）的最小理想，使得弗罗贝尼乌斯元素 $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}} \in G_{K_{\mathfrak{l}}}$ 在 $T_p/I_{\mathfrak{l}}T_p$、 $\mathcal{L}_k = \{\mathfrak{l} \in \mathcal{L} \mid I_\ell \subset p^k\mathbb{Z}_p\}$ 上平凡作用，并令 $\mathcal{N}_k$ 为 $\mathcal{L}_k$ 中素数的无平方因子乘积集合。

为简洁起见，我们记

(i) $r :=$ 秩$_{\mathbb{Z}_p}(R)$。(ii) $\varepsilon_0 := r(C_1 + C_2 + C_\alpha)$。(iii) $A := R^{(k)}$，这是一个主局部环，其极大理想仍记为 $\mathfrak{m}$。(iv) $T_\alpha := T^{(k)} \otimes A(\alpha)$，它是由特征 α扭曲的 G_K-模 $T^{(k)}$。(v) $\mathcal{L} := \mathcal{L}_k$。

定义 3.2。设 M 是一个有限生成的 A-模。那么

(i) $x \in M$ 的阶记为

$$\mathrm{ord}(x) := \min\{m \geq 0 : \pi^m . x = 0\},$$

(ii) $x \in M$ 的指数记为

$$\exp(M) := \min\{n \geq 0 : \pi^n M = 0\} = \max\{\mathrm{ord}(x) : x \in M\},$$

(iii) x 在 M 中的整除指数记为

$$\mathrm{ind}(x, M) := \max\{j \leq \infty | x \in \mathfrak{m}^j M\}.$$

假设 s： $C \longrightarrow D$ 是两个有限生成 A-模之间的满射，则对于 $x \in C$

$$\mathrm{ind}(x, C) \leq \mathrm{ind}(s(x), D). \tag{3.1}$$

我们继续假设假设 2.8 成立。

定理 3.3（[H1，引理 1.6.2],[BD，定理 3.2]）。假设 $T^{(k)}/\mathfrak{m}T^{(k)}$ 作为 G_K的表示是不可约的，且 $c \in H^1(K, T^{(k)}/\mathfrak{m}T^{(k)})$ 非零。那么存在无穷多个素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ ，使得 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(c) \neq 0$。

注记 3.4. 值得注意的是，利用上述定理，在不可约情形下，我们无需用非平凡特征 α 对 $T^{(k)}$ 进行扭曲。换言之，在这种情形下，我们可以取 $\alpha = 1$ ，且$C_\alpha = 0$。

基于 Nekov´aˇr [Ne 的结果（引理 6.6.1(iii)、命题 6.1.2、推论 6.3.4] ），以下结果由 Castella 等人证明。

定理 3.5（[CGLS，命题 3.3.6]）。设 $\alpha \neq 1$ 和 $c_1, c_2 \in H^1(K, T_\alpha)$ 是余循环，使得$Ac_1 + Ac_2$包含一个与 $\mathfrak{m}^{d_1}A \oplus \mathfrak{m}^{d_2}A$同构的子模，其中某个 $d_1, d_2 \geq 0$。那么，对于任意$c_3 \in H^1(K, T_\alpha)$，存在无穷多个 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}_k$，使得 $\mathrm{ord}(\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c_3)) \geq \mathrm{ord}(c_3) - \varepsilon_0$。

命题 3.6。设 $k > \varepsilon_0$ 和 $\alpha \neq 1$。那么，对于 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T_\alpha)$ 中包含的任意秩一循环自由 A-子模 $C = Ac$，存在无穷多个素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$，使得 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c) \neq 0$。

证明。为简洁起见，我们记 T为 T_α。由于 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \cong A^{e(\mathfrak{n})} \oplus M_\mathfrak{n} \oplus M_\mathfrak{n}$，且它包含一个非零子模 C，因此有 $e_\mathfrak{n} \neq 0$ 或 $M_\mathfrak{n} \neq 0$。只需证明以下情形中的结论。

情形 I：设 $M_\mathfrak{n} \neq 0$。则 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \supseteq M_\mathfrak{n} \oplus M_\mathfrak{n} \neq 0$。设 $x \in M_\mathfrak{n}$是一个非零上同调类。设 x 不是挠元。则 Ax 是一个自由的 A-子模，且 $Ax \oplus Ax$ 包含一个与 $A \oplus A$同构的子模。

设 x 是 A-挠元，并设 $t = \mathrm{ord}(x)$。则 $t < k$, $\pi^t x = 0$，且自然映射 $A \longrightarrow Ax$ 的核由 π^t生成，而自然满射 $A \twoheadrightarrow \pi^{k-t}A$ 通过 $\pi^t A$分解。因此，$\pi^{k-t}A \cong A/\pi^t A \cong Ax$。

令 c_1 等于来自 $M_\mathfrak{n}$ 的 x，并令 c_2 来自另一个直和项 $M_\mathfrak{n}$，可知子模 $xA \oplus xA$ 含有一个与 $\mathfrak{m}^t A \oplus \mathfrak{m}^t A$ 同构的子模。于是我们得到两个上同调类 $c_1, c_2 \in \mathrm{Sel}_\mathcal{F}(K, T)$，使得 $c_1 A \oplus c_2 A \supset \mathfrak{m}^t A \oplus \mathfrak{m}^t A$。现在由定理 3.5 可得

$$\mathrm{ord}(\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c)) \geq \mathrm{ord}(c) - r(C_1 + C_2 + C_\alpha) \geq k - \varepsilon_0 > 0$$

因此，由定理 3.5 可知，存在无穷多个 $\mathfrak{l}$，使得 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c) \neq 0$。

情形 II：设 $e_\mathfrak{n} = 1, M_\mathfrak{n} = 0$。那么 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) = Ax \cong A$，其中 x 是某个生成元。我们先证明，要么 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \neq H^1(K, T)$，要么对所有整除 $\mathfrak{n}\}$ 的 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}\backslash\{$ 个素数，都有 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)) \neq 0$。

反设同时成立这两个等式，即，

$$\begin{cases} \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) = H^1(K, T), \text{ and} \\ \mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)) = 0 \text{ for some } \mathfrak{l} \in \mathcal{L}\backslash\{ \text{ primes dividing } \mathfrak{n}\}. \end{cases}$$

这里 $\mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N}$。根据定义，

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_\mathfrak{l}(\mathfrak{n})}(K, T) = \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \cap \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T) = H^1(K, T) \cap \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T) = \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T).$$

Then

$$\mathrm{length}(\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T))) = 0 \text{ and } \mathrm{length}(\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T))) = 0.$$

这就产生了矛盾，因为这些长度之和等于长度$(A) = k$，根据 [H3, 命题 2.2.9]。这就证明了我们的断言，因为 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \neq 0$。

若 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \neq H^1(K, T)$，取 $c_2 \in H^1(K, T)$，使其在商$H^1(K, T)/\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)$ 中非零。由 x 和 c_2 生成的子模包含一个与某个 $A \oplus \mathfrak{m}^b$ 同构的子模，其中 $a, b \geq 0$。这里同样，对于自由子模 $Ac = C$，由定理 3.5 可得无穷多个 $\mathfrak{l}$，使得 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c) \neq 0$。

另一种情况下，$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) = H^1(K, T) \cong A$，因此 $Ac = H^1(K, T)$，显然我们有无穷多个 $\mathfrak{l}$，使得 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(c) \neq 0$。至此，证明完成。□

我们现在有如下关键引理。

引理 3.7. 设 length(A) $> \varepsilon_0$。那么，对任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ 以及任意循环自由秩一 A-子模$C \subset \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)$，都存在无穷多个 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$，使得 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(C) \cong H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}}, T)$。

证明。设 C 由 c生成，即$C = Ac \cong A$。假设 $k =$ 的长度为 length(A)，则 ord(c) $= k$。由前一个命题，存在无穷多个 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ 使得

$$\text{ord}(\text{loc}_{\mathfrak{l}}(c)) \geq \text{ord}(c) - \varepsilon_0 \geq k - \varepsilon_0 > 0.$$

因此，$\text{loc}_{\mathfrak{l}}$将 C单射映入 $H^1_{unr}(K, T)$，而根据等式 (2.1)，后者同构于 A。于是 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(C) \cong H^1_{unr}(K, T)$。□

推论 3.8。设 length(A) $> \varepsilon_0$。那么对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ 以及任意秩为一的自由 A-子模 $C \subset \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)$，都存在无穷多个 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$使得 $C/\mathfrak{m} \cong H^1_{unr}(K, T/\mathfrak{m}T)$。特别地，对于无穷多个素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$，有 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \neq 0$。

证明。B 根据上述引理，对于无穷多个素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$，我们有一个同构 :

$$C \xrightarrow{\text{loc}_{\mathfrak{l}}} H^1_{unr}(K, T) \cong A,$$

该同构诱导出模 $\mathfrak{m}$ 的以下同构:

$$C/\mathfrak{m} \xrightarrow{\text{loc}_{\mathfrak{l}}} H^1_{unr}(K, T/\mathfrak{m}T) \cong A/\mathfrak{m}.$$

对于这些素数 $\mathfrak{l}$中的每一个，由于 $C/\mathfrak{m} \hookrightarrow \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)/\mathfrak{m}\,\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \cong \text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)$, 我们有 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \neq 0$。□

引理 3.9。设 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \neq 0$，其中 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ 和 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$, $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}$。则我们有一个同构 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \cong A$。

证明。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T) & \xrightarrow{\text{loc}_{\mathfrak{l}}} & H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}}, T) \cong A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T/\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\text{loc}_{\mathfrak{l}}} & H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}}, T/\mathfrak{m}) \cong A/\mathfrak{m}. \end{array}$$

假设 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \ncong A$。由于 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \neq 0$，我们有 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \neq 0$。因此，由于下方的水平映射是 $A/\mathfrak{m}$-向量空间同态，我们有 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \cong A/\mathfrak{m}$。根据命题 2.10 (ii)，我们有 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) = 0$。然而，可以看出 length($\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \neq$length($A$)，因此 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T)) \neq 0$。由此可得 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T/\mathfrak{m}T)) \cong A/\mathfrak{m}$，这产生了矛盾。因此 $\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\text{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K, T)) \cong A$。□

注记 3.10。在不可约情形下，正如定理 3.3 中所提到的，不会出现误差项 ε_0 。

4. Bipartite Euler System over Artinian Rings

我们继续使用第 2 节和第 3 节中引入的记号，以及假设 2.8。我们仍然用 T 表示 T_α 。按照 Howard [H3, Def 2.3.2], , 我们将二分欧拉系统定义如下:

定义 4.1。对于 $(T, \mathcal{F}, \mathcal{L})$，奇类型的二分欧拉系统是一对族

$$\{\kappa_{\mathfrak{n}} \in \text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K, T) \mid \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}\} \text{ and } \{\lambda_{\mathfrak{n}} \in A \mid \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}\}$$

由以下互反律联系:

(i) 对任意 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}\in\mathcal{N}^{odd}$，存在一个 A-模的同构

$$A/(\lambda_{\mathfrak{n}}) \cong H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T)/A.\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}),$$

(ii) 对任意 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}\in\mathcal{N}^{even}$，存在一个 A-模同构

$$A/(\lambda_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) \cong H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)/A.\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}}).$$

偶型二分欧拉系统的定义方式相同，只需在定义中处处交换偶项与奇项。若对于某个 $\mathfrak{n}$，有 $\lambda_{\mathfrak{n}}\neq 0$，则称欧拉系统是非平凡的。根据互反律，这等价于说，对于某个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，有 $\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}\neq 0$。

命题 4.2. 设 length$(A) > \varepsilon_0$。则对于 $(T,\mathcal{F},\mathcal{L})$，不存在偶型的非平凡欧拉系统。

证明. 假设存在一个偶型的非平凡欧拉系统。则对于某个 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$，$\lambda_{\mathfrak{n}}\neq 0$。由于 $e_{\mathfrak{n}}=1$，$\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$ 包含一个秩为 1 的自由 A-模，并且根据引理 3.7，$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T))\neq 0$，其中某个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$。由此可得单射

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)/\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})}(K,T) \longrightarrow H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)\cong A$$

是一个同构。由命题 (ii)，我们得到 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T) = \mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K,T)$。因此，$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) = 0$，这与互反律矛盾。□

命题 4.3。设 length$(A) = k > \varepsilon_0$，并考虑关于 $(T,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 的一个奇类型非平凡欧拉系统。令 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)\cong A^{e_{\mathfrak{n}}}\oplus M_{\mathfrak{n}}\oplus M_{\mathfrak{n}}$ 如命题 2.10(i) 中所述。我们有

(i) 对于 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}$，若 $\lambda_{\mathfrak{n}}\neq 0$，则 $\mathfrak{m}^{k-1}M_{\mathfrak{n}}=0$；(ii) 对于 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$，若 $\kappa_{\mathfrak{n}}\neq 0$ 且包含于 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 的一个循环 A-自由秩一子模 C 中，则 $\mathfrak{m}^{k-1}M_{\mathfrak{n}}=0$。

证明. (i) 令 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}$ 使得 $\mathfrak{m}^{k-1}M_{\mathfrak{n}}\neq 0$。这意味着 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 含有一个秩一自由子模，记为 C。令 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$ 使得 $\mathfrak{l}\nmid\mathfrak{n}$ 且 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(C)\cong H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)$（使用引理 3.7）。由命题 2.10 (ii)，$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K,T)) = 0$，由此得到 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) = 0$。根据第一互反律，$\lambda_{\mathfrak{n}}=0$，这就导出了矛盾。

(ii) 令 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$ 使得 $\mathfrak{m}^{k-1}M_{\mathfrak{n}}\neq 0$。由命题 2.10(i)，我们知道 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 含有一个秩二自由子模，记为 D。因此，根据等式 (2.1)，下述映射的核为，

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}:\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)\longrightarrow H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)$$

即 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 对任意 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$ 都包含一个秩一自由子模。由于 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})}(K,T)\subset\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}(K,T)$，且 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}\in\mathcal{N}^{even}$，因此 $\mathfrak{m}^{k-1}M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}\neq 0$；否则 $\mathfrak{m}^{k-1}\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})}(K,T)=0$。由部分 (i)，$\lambda_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}=0$。由第二互反律，我们有，对于所有 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L},\mathfrak{l}\nmid\mathfrak{n}$，$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}})=0$。对于 $\kappa_{\mathfrak{n}}\neq 0$，这导致矛盾，因为存在无穷多个素数 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，使得 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(C)\cong A$（由引理 3.7）。□

定义 4.4. 若一个奇类型的非平凡欧拉系统满足：对每个 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$, $\kappa_{\mathfrak{n}}$，它都包含在 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 的一个循环子模中，且该子模是 A-自由的秩一子模，则称其为自由的。

定义 4.5. [H3，定义 2.2.8] 对于 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}$，我们回顾 Stub模的定义

$$\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}} = \begin{cases}\mathfrak{m}^{\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}})}A, & \text{if } \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}\\ \mathfrak{m}^{\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}})}\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}, & \text{if } \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}.\end{cases}$$

$\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}$ 的 Stub 模彼此之间的关系如下 r.

命题 4.6（[H3，推论 2.2.13]）。设 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}\in\mathcal{N}$。则存在一个 A-模的同构

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}})\cong\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}},\ \ \textit{if}\ \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$$

and

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}})\cong\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}},\ \ \textit{if}\ \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}.$$

设 $\rho_0:=\max\{\rho(\mathfrak{n}):\ \mathfrak{n}\in\mathcal{N}\}$。对于 S 一个有限素数集，令 G_S 表示 K 在 S 之外非分歧的 K的极大扩张的伽罗瓦群。于是，根据 Hermite-Minkowski 定理，$\dim_{A/\mathfrak{m}}H^1(G_S,T/\mathfrak{m}T)$ 是有限的。因此，ρ_0被 di $\mathfrak{m}_{A/\mathfrak{m}}H^1(G_S,T/\mathfrak{m}T)$ 从上方界定。定义 $\varepsilon:=\varepsilon_0\rho_0$。于是，$\varepsilon$ 是一个与 A的长度无关的非负整数。

定理 4.7。设 length$(A)>\varepsilon_0$。对于 $(T,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 的任意奇类型自由欧拉系统，对每个 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}$，都有 $\pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}}\in$ Stub$_{\mathfrak{n}}$；对每个 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}$，都有 $\pi^{\varepsilon}\kappa_{\mathfrak{n}}\in$Stub$_{\mathfrak{n}}$。等价地，就分解 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}\cong A^{e_{\mathfrak{n}}}\oplus M_{\mathfrak{n}}\oplus M_{\mathfrak{n}}$ 中的 A-模 $M_{\mathfrak{n}}$ 而言，我们有

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}})\leq\begin{cases}\mathrm{ind}(\lambda_{\mathfrak{n}},A)+\varepsilon & \textit{if}\ \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}\\ \mathrm{ind}(\kappa_{\mathfrak{n}},\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T))+\varepsilon & \textit{if}\ \mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{odd}.\end{cases}$$

证明。我们对 $\rho(\mathfrak{n})$ 作归纳证明。若 $\mathfrak{n}$ 为偶且 $\rho(\mathfrak{n})=0$，则 length$(M_{\mathfrak{n}})=0$，因此 $M_{\mathfrak{n}}=0$。于是 Stub $_{\mathfrak{n}}=A$。类似地，若 $\rho(\mathfrak{n})=1$ 且 $\mathfrak{n}$ 为奇，则同样有 $M_{\mathfrak{n}}=0$。故结论成立。现在假设 $\rho(\mathfrak{n})\geq 2$，从而 length$(M_{\mathfrak{n}})\neq 0$。

首先假设 $\exp(M_{\mathfrak{n}})\leq\varepsilon_0$。那么由 $M_{\mathfrak{n}}$ 作为 A-模的结构可知，length$(M_{\mathfrak{n}})\leq\rho_0.\varepsilon_0$。

现在假设 $\exp(M_{\mathfrak{n}})>\varepsilon_0$，且 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^{even}$。那么 Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T)$ 包含一个元素，记为 c，使得对某个 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，ord(loc$_{\mathfrak{l}}(c)$) $>$ ord(c) $-\varepsilon_0>0$。取任意一个与 $\mathfrak{n}$ 互素的 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$ 素数，使得 loc$_{\mathfrak{l}}$(Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T/\mathfrak{m}T)$) $\neq 0$。此外，我们还假设 $\lambda_{\mathfrak{n}}\neq 0$。由命题 2.10(iii) 和归纳假设，$\pi^{\varepsilon}\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}\in$Stub$_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}$，因此我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) &= \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}})+a\\ &\leq \mathrm{ind}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}},\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})})+a+\rho_0\varepsilon_0\\ &\leq \mathrm{ind}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}),\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}))+a+\rho_0\varepsilon_0\end{aligned}$$

其中 a 如命题 2.10(ii) 中所述。由第一互反律可得

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(\lambda_{\mathfrak{n}},A) &= \mathrm{ind}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}),H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T))\\ &= \mathrm{ind}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}),\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}))+\mathrm{length}(H^1_{ord}(K_{\mathfrak{l}},T)/\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}))\\ &= \mathrm{ind}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}),\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})})+\mathrm{length}(A)-b.\end{aligned}$$

由于由命题 2.10(ii) 可知，$a+b=$ length(A)，因此 length$(M_{\mathfrak{n}})\leq$ ind$(\lambda_{\mathfrak{n}},A)+\varepsilon$。

现在假设 $\exp(M_{\mathfrak{n}})>\varepsilon_0$ 和 $\mathfrak{n}$ 是奇数。设 $C_{\mathfrak{n}}$ 是 Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}$ 中的一个自由 A-模。考虑一个与 $\mathfrak{n}$ 互素的素数 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}$，使得 loc$_{\mathfrak{l}}$ 将 $C_{\mathfrak{n}}$ 同构地映入 $H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T)$（使用引理 3.7）。由命题 2.10(iii)，我们有 $\rho(\mathfrak{n}\mathfrak{l})=\rho(\mathfrak{n})-1<\rho$ $(\mathfrak{n})$。因此，由归纳假设，我们有 length$(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}})\leq$ ind$(\lambda_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}},A)+\varepsilon$。由命题 2.12 和第二互反律，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}})=\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) &\leq \mathrm{ind}(\lambda_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}},A)+\varepsilon\\ &= \mathrm{ind}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}}),H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},T))+\varepsilon\\ &= \mathrm{ind}(\kappa_{\mathfrak{n}},\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})})+\varepsilon.\end{aligned}$$

□

注 4.8。(i) 上述长度界的证明见 [H3, Theorem 2.3.7], ，其中假设 $T/\mathfrak{m}T$是 G_K的一个不可约表示。这里不会出现误差项 ε。取 $\varepsilon = 0$ ，且假设 $T/\mathfrak{m}T$ 不可约，即可由上述定理推出 Howard 的结果。(ii) 上述定理可与 [CGLS, Theorem 3.2.1]作比较。该处也有一个误差项。

5. Stub 模

我们简要回顾 [H3] 中关于 Stub 模的一些事实。与上一节一样，我们将扭曲 T_α 记为 T，并沿用上一节中的记号。我们对核心顶点（定义5.1）的定义不同于 Howard 或 Mazur-Rubin 在 [MR] 中的定义，因此称其为绝对核心顶点。设 $\mathcal{X} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个图，其顶点集为 $\mathcal{V} := \{v(\mathfrak{n}) \mid \mathfrak{n} \in \mathcal{N}\}$，边集为 $\mathcal{E} := \{e(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}\}$。如果 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}$ （分别为 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}$），则称顶点 $v(\mathfrak{n})$ 为偶（分别为奇）顶点。我们常根据 $v(\mathfrak{n})$ 是偶顶点还是奇顶点，相应地称 $\mathfrak{n}$ 为偶顶点或奇顶点。与此图相关联的是一个由 A-模构成的欧拉系统层，其在顶点 $v = v(\mathfrak{n})$ 和边 $e = e(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{l})$ 上的定义如下：

$$\mathrm{ES}(v) = \begin{cases} \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})} & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd} \\ A & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even} \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathrm{ES}(e) = \begin{cases} H^1_{unr}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd} \\ H^1_{ord}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}. \end{cases}$$

若 $e = e(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{l})$ 是一条以 v 为端点的边，我们回顾顶点到边映射

$$\psi^e_v : \mathrm{ES}(v) \longrightarrow \mathrm{ES}(e)$$

其定义如下。若 v 为奇，则

$$\psi^e_v = \mathrm{loc}_\mathfrak{l} : \begin{cases} \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})} \longrightarrow H^1_{unr}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } v = v(\mathfrak{n}) \\ \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})} \longrightarrow H^1_{ord}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } v = v(\mathfrak{n}\mathfrak{l}). \end{cases}$$

若 v 为偶，则我们利用等式 (2.1) 固定一个同构

$$\psi^e_v : A \cong \begin{cases} H^1_{unr}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } v = v(\mathfrak{n}\mathfrak{l}) \\ H^1_{ord}(K_\mathfrak{l}, T) & \text{if } v = v(\mathfrak{n}). \end{cases}$$

这里，我们为每条边 e 和每个偶顶点 v 固定一个这样的同构。

在每个顶点 $v = v(\mathfrak{n})$ 和边 $e = e(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{l})$ 上，Stub 层 $\mathrm{Stub}(\mathcal{X})$ 定义如下

$$\mathrm{Stub}(v) := \mathrm{Stub}_\mathfrak{n} \subset \mathrm{ES}(v) \quad \text{and} \quad \mathrm{Stub}(e) := \begin{cases} \mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Stub}_\mathfrak{n}) & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd} \\ \mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Stub}_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}. \end{cases}$$

若 v 是偶顶点，且 v' 为奇，并且有边 $e = e(v, v')$，则顶点到边映射 $\psi^e_{v'} : \mathrm{Stub}(v') \longrightarrow \mathrm{Stub}(e)$ 是满射。由推论 4.6 可知，映射 ψ^e_v 给出一个同构 $\mathrm{Stub}(v) \cong \mathrm{Stub}(e)$。

定义 5.1。 (i) 设 $u = \min\{\mathrm{length}(M_\mathfrak{n}) | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}\}$。如果 $\mathrm{Stub}(v) \cong \mathfrak{m}^u A$，则称 $\mathcal{X}$ 的顶点 v 为绝对核心顶点。(ii) 绝对核子图 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}} \subset \mathcal{X}$ 是这样一个图：其顶点为 $\mathcal{X}$ 的绝对核心顶点；当且仅当 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 中的两个顶点通过 $\mathcal{X}$ 中的一条边相连时，它们才通过 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 中的一条边相连。我们将 $\mathrm{Stub}(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 上的限制记为 $\mathrm{Stub}(\mathcal{X}_{\mathrm{abs}})$。

注 5.2. 在 $T/\mathfrak{m}T$ 不可约的特殊情形下，根据 [H3，引理 2.4，9], 最小长度为 $u = 0$，我们得到 [H3，定义 2.4，2] 以及 [MR，定义 4.1，8]中核心顶点的定义。换言之，在不可约情形下，绝对核心顶点是满足以下条件的顶点： $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ 使得 $\mathrm{Stub}_\mathfrak{n} \cong A$ （见 [H3]）。

定义 5.3. (i) 从 v 中的一个顶点到另一个顶点 v' 的路径是顶点的有限序列$v = v_0$、 v_1、 ……、 $v_r = v'$ ，其中 v_i 通过一条边 e_i与 v_{i+1} 相连。对于局部循环层 Stub($\mathcal{X}$)，如果顶点到边映射

$$\psi_{v_{i+1}}^{e_i} : \mathrm{Stub}(v_{i+1}) \longrightarrow \mathrm{Stub}(e_i)$$

对每个 i 都是一个同构。我们以相同的方式定义 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 中的路径。

(ii) 如果图中任意两个顶点之间都存在一条满射路径，则称该图为路径连通。根据 [H3，引理 2.4， $\mathcal{X}$ 中的路径 v_0，.....， v_r 是满射的，当且仅当对每个 i

$$\mathrm{length}(\mathrm{Stub}(v_{i+1})) \leq \mathrm{length}(\mathrm{Stub}(v_i)).$$

定义 5.4. (i) 设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}$，则称顶点 v（$\mathfrak{n}$）是普遍平凡的，如果 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}) = 0 \forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}$,

$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_1}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}) \cong A$ 对某个 $\mathfrak{l}_1 \nmid \mathfrak{n}\mathfrak{l} \implies \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_2}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1)}) = 0 \forall \mathfrak{l}_2 \nmid \mathfrak{n}$,

对于某个 $\mathfrak{l}_{2k-1} \nmid \mathfrak{n}\mathfrak{l} \cdots \mathfrak{l}_{2k-2} \implies \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-1})}) = 0 \forall \mathfrak{l}_{2k} \nmid \mathfrak{n}$， $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k-1}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-2})}) \cong A$

这一过程将无限持续下去。

(ii) 设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}$，则称顶点 $v(\mathfrak{n})$ 为普遍平凡的，若对于某个 $\mathfrak{l}_1 \nmid \mathfrak{n} \implies$ $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_2}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1)}) = 0 \forall \mathfrak{l}_2 \nmid \mathfrak{n}$， $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_1}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}) \cong A$， 对于某个 $\mathfrak{l}_3 \nmid \mathfrak{n} \implies \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_4}$ $(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3)}) = 0 \forall \mathfrak{l}_4 \nmid \mathfrak{n}$， $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_3}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2)}) \cong A$，

…… $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2r-1}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2r-2})}) \cong A$ 对于某个 $\mathfrak{l}_{2r-1} \nmid \mathfrak{n}$， $\implies \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2r}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(}$ $^{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2r-1})}) = 0 \forall \mathfrak{l}_{2r} \nmid \mathfrak{n}$

…… ……

该过程无限期地继续。

注 5.5. 根据引理 3.7，对于任意奇顶点 $v(\mathfrak{a})$，存在无穷多个 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ 使得 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{a})}) \cong A$，因此上述过程无限期地继续，并且这两个概念确实是定义良好的。

命题 5.6. (i) 如果 $\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) = u$，则 $\mathfrak{n}$ 是普遍平凡的。(ii) 设 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathcal{N}$ 中任意两个普遍平凡的顶点。那么

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{a}}).$$

证明。(i) 首先，设 $\mathfrak{n}$ 为偶顶点，满足 $\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) = u$，且 $\mathfrak{n}$ 不是普遍平凡的。于是，存在素数 $\mathfrak{l}$、$\mathfrak{l}_1$、 $\cdots$、 $\mathfrak{l}_{2k}$，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}) = 0 \quad \forall \quad \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}$$

如果 $\mathfrak{l}_1 \nmid \mathfrak{n}$ 满足 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_1}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})}) \cong A$，那么 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_2}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1)}) = 0 \quad \forall \quad \mathfrak{l}_2 \nmid \mathfrak{n}$

…… …… …… ……

$\mathfrak{l}_{2k-1} \nmid \mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-2}$具有 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k-1}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-2})}) \cong A$但 $\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-1})}) \neq 0$具有 $\mathfrak{l}_{2k} \nmid \mathfrak{n}$.

由命题 2.12 很容易看出，$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) = \ldots = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_{2k-1}})$，并且

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}\ldots\mathfrak{l}_{2k-1}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}\ldots\mathfrak{l}_{2k}}) + a_{2k}$$

其中， a_{2k} 如命题 2.12 所述，且 $a_{2k} \neq 0$ （根据上述假设）。这与 u是最小的矛盾。因此， $\mathfrak{n}$ 普遍平凡。

当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时，证明与上述证明类似。事实上，设 $\mathfrak{n}$ 为奇数，length($M_{\mathfrak{n}}$) $=u$，但并非普遍平凡。于是存在素数 $\mathfrak{l}_1$、...、 $\mathfrak{l}_r$，对于某个 $r \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_1}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}) \cong A, \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_2}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1)}) = 0, ..., \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2r-1}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2...\mathfrak{l}_{2r-2})}) \cong A$$

but

$$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2r}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2...\mathfrak{l}_{2r-1})}) \neq 0.$$

由命题 2.12 可得

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1}) = ... = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1...\mathfrak{l}_{2r-1}})$$

and

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1...\mathfrak{l}_{2r-1}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1...\mathfrak{l}_{2r}}) + a_{2r}$$

其中， a_{2r} 是一个非零正整数。这与长度($M_{\mathfrak{n}}$) $= u$ 最小矛盾。由此完成了命题第一部分的证明。

在我们 证明命题第二部分之前，先证明下面的引理 .

引理 5.7. 设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2...\mathfrak{l}_s$ 是一个普遍平凡的顶点。设 $\mathfrak{n}$ 是满足长度($M_{\mathfrak{n}}$) $= u$的任意顶点。则存在一个普遍平凡的顶点 $\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ，使得长度($M_{\mathfrak{n}}$) =长度($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$)。

证明。情形 I：设 $\mathfrak{n}$ 为偶数。那么由命题 2.12，length($M_{\mathfrak{n}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1}$)，且 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1$ 为奇且普遍平凡。由引理 3.7，存在一个素数 $\mathfrak{l}_1'$ ，使得 length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1}$) =length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1'}$)（命题 2.12），并且 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1'$ 为偶且普遍平凡。如此继续，并添加素数 $\mathfrak{l}_2$、 $\mathfrak{l}_2'$、 $\cdots$、 $\mathfrak{l}_s$，我们得到一个普遍平凡的顶点 $\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$，使得对某个 $\mathfrak{a}'$，length($M_{\mathfrak{n}}$) =length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$)。

情形 II：设 $\mathfrak{n}$ 为奇数。那么由引理 3.7，存在一个素数 $\mathfrak{l}_1'$ ，使得 length($M_{\mathfrak{n}}$) =length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1'}$)（由命题 2.12 ）。由于 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1'$ 为偶且普遍平凡，再次使用命题 2.12，可得 length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1'}$) $=$ length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1'\mathfrak{l}_1}$)。继续如此，对某个 $\mathfrak{a}' \in \mathcal{N}$，我们得到 length($M_{\mathfrak{n}}$) =length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$)，因为 $\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1'$ 又是一个普遍平凡的顶点。□

(ii) 现在继续证明命题 5.6。回忆一下， $M_{\mathfrak{n}}$ 的长度为最小长度 u，因此根据前一个引理，$M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ 是最小的。我们通过对 $\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$ 的素因子个数进行归纳来证明该命题的第二部分：构造一条从 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$的满射路径，使得 length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$) $=$ length($M_{\mathfrak{a}}$)。设 $\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$ 的素因子个数大于一。

偶数情形：设 $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$为偶。由命题 2.12，length($M_{\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'/\mathfrak{l}}$) =length($M_{\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'}$) $- b$。由于 length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$) 是最小的， $b = 0$，因此根据部分 (i)， $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'/\mathfrak{l}$ 是普遍平凡的。根据归纳假设，存在一条从 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'/\mathfrak{l}$ 的满射路径，使得 length($M_{\mathfrak{a}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'/\mathfrak{l}}$)。因此 length($M_{\mathfrak{a}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$)。

奇数情形：设 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$ 为奇。若存在 $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$ 使得 loc$_{\mathfrak{q}}$(Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}$) $\cong A$，则由命题 2.12 可得 length($M_{\mathfrak{b}/\mathfrak{q}}$) =length($M_{\mathfrak{b}}$)，并且根据归纳假设，结论成立。

对所有 $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$，有 loc$_{\mathfrak{q}}$(Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}$) $\ncong A$ 。令 $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{b}$ 满足 loc$_{\mathfrak{l}}$(Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}$) $\cong A$。由命题 2.12，我们有 length($M_{\mathfrak{b}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}}$) $= u$。由于 $\mathfrak{b}\mathfrak{l}$ 是偶数，由最小性可知，对任意 $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}\mathfrak{a}'$，都有 length($M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}}$) $= u$ 。可以看出， v ($\mathfrak{b}$) v($\mathfrak{b}\mathfrak{l}$) v($\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}$) 是一条满射路径，且 length($M_{\mathfrak{b}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}}$) $=$ length($M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}}$)。再次，如果存在这样的素数 $\tau \mid (\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})$，使得 loc$_{\tau}$(Sel$^{\mathcal{F}(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})}(K,T) \cong A$，那么由归纳假设即可得证。现在假设

对所有 $\tau|(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})$，有 $\mathrm{loc}_\tau(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})}) \not\cong A$。那么，记 $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}$，由引理 3.9 可知，对所有 $\tau|\mathfrak{b}'$，都有 $\mathrm{loc}_\tau(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})}) = 0$。接着

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b}')} = \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}'\mathfrak{l}/\mathfrak{q}}(\mathfrak{a})} \subset \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}'/\mathfrak{q}}(\mathfrak{a})} = \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}\,.$$

由于右侧 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}$ 的长度最小，因此处处都取等号，这与 $\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b})}) \cong A$ 矛盾。因此，存在 τ 使得 $\mathrm{loc}_\tau(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{b}')}) \cong A$。于是，$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{b}'}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{b}'/\tau})$，且 $v(\mathfrak{b})$ $v(\mathfrak{b}\mathfrak{l})$ $v(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q})$ $v(\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}\tau)$ 是一条满射路径，使得

$$\mathrm{length}(M_\mathfrak{b}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}/\mathfrak{q}\tau}).$$

由归纳假设，结论成立。 □

注 5.8. 注意，命题 5.6 表明，$\mathfrak{n}$ 是绝对核心顶点当且仅当它普遍平凡。

引理 5.9. 设 v 是 $\mathcal{X}$ 的任意一个顶点。那么，存在一个绝对核心顶点 v_0，以及一条在 $\mathcal{X}$ 中从 v_0 到 v 的满射路径。此外，对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$，存在一个顶点 $\mathfrak{n}' \in \mathcal{N}$ 满足 $\mathfrak{n}|\mathfrak{n}'$，使得 $v(\mathfrak{n}')$ 是一个绝对核心顶点。这个 $\mathfrak{n}'$ 可以选在 $\mathcal{N}^{even}$ 中，也可以选在 $\mathcal{N}^{odd}$ 中。

证明。我们归纳地构造一列顶点 $w_i = w(\mathfrak{n}_i)$，其中 $w_0 = v_0$。若 $w_i = w(\mathfrak{n}_i)$ 是绝对核心，则结论成立。因此，首先假设 w_i 是偶的且不是绝对核心。根据绝对核心顶点的定义，存在素数 $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_{2k}$，使得

$$\begin{gathered}
\mathrm{loc}_\mathfrak{l}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i)}) = 0 \quad \forall \quad \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}_i, \\
\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_1}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l})}) \cong A, \text{ and } \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_2}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1)}) = 0 \text{ with } \quad \mathfrak{l}_2 \nmid \mathfrak{n}_i \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k-1}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k-2})}) \cong A, \text{ but } \mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k-1})}) \neq 0 \text{ with } \mathfrak{l}_{2k} \nmid \mathfrak{n}_i.
\end{gathered}$$

由命题 2.12 可得 $\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}_i}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1}) = \ldots = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k-1}})$。由于对 $\mathfrak{l}_{2k} \nmid \mathfrak{n}_i$，$\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}_{2k}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k-1})}) \neq 0$，故有

$$\mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k-1}}) = \mathrm{length}(M_{\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k}}) + a$$

其中 $a > 0$。令 $w_{i+1} = w(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_{2k})$，得到

$$\mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_i)) < \mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_{i+1})).$$

若 $w_i = w(\mathfrak{n}_i)$ 是奇的，利用引理 3.7，选取一个不整除 $\mathfrak{n}_i$ 的素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$，使得在 $\mathfrak{l}$ 处的局部化将 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n}_i)}$ 的一个自由秩一子模同构地映到 $H^1_{unr}(K_\mathfrak{l}, T)$，并令 $w_{i+1} = w(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l})$。由命题 2.10(iii) 可得

$$\mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_i)) = \mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_{i+1})),$$

因为 $a =$ 长度(A) 且 $b = 0$。以此继续，我们得到一条从绝对核心顶点 $v_0 = w_k$ 到任意给定顶点 v的所需路径，并且我们还有

$$\mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_i)) \leq \mathrm{length}(\mathrm{Stub}(w_{i+1}))$$

对所有 i 均成立。根据 [H3，第 2.4 引理。8] 路径 w_k，...，w_0 是一条从 v_0 到 v的满射路径。显然，如果 v_0 是绝对核心且为偶（分别为奇），那么根据普遍平凡的定义，它可以连接到一个奇（分别为偶）的绝对核心顶点。□

对于任意 $\mathfrak{a} \in \mathcal{N}$，令 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs},\mathfrak{a}}$ 为 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 的子图，其顶点由满足 $\mathfrak{a}|\mathfrak{n}$ 的绝对核心顶点 v（$\mathfrak{n}$）组成。当且仅当两个顶点在 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs}}$ 中通过一条边相连时，它们才在 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs},\mathfrak{a}}$ 中通过一条边相连。

推论 5.10。设 $\mathrm{length}(A) > \varepsilon_0$ and $v(\mathfrak{a})$ 是一个绝对核心顶点。那么子图 $\mathcal{X}_{\mathrm{abs},\ \mathfrak{a}}$是路径连通的。

证明。由命题 5.6 的证明可得。 □

命题 5.11。绝对核子图 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$ 是路径连通的，并且同时包含偶顶点和奇顶点。对于 $\mathcal{X}$ 的任意顶点 v 以及 $\mathcal{X}$ 的任意绝对核心顶点 v_0，存在一条从 v_0 到 v 的满射路径。

证明。证明过程与 [H3, 命题 2.4.11] 中的类似。绝对核子图同时包含偶顶点和奇顶点，这一点从引理 5.9 的证明中显然可见。考虑 $v(\mathfrak{a})$ 和 $v(\mathfrak{b})$，它们是绝对核子图 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$ 的两个顶点。根据引理 5.9，我们可以选择一个被 $\text{lcm}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ 整除的 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$，使得 $v(\mathfrak{n})$ 是绝对核心顶点。根据推论 5.10，我们知道在 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$、$_{\mathfrak{a}}$ 中存在一条从 $v(\mathfrak{a})$ 到 $v(\mathfrak{n})$ 的路径；类似地，在 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$、$_{\mathfrak{b}}$ 中存在一条从 $v(\mathfrak{b})$ 到 $v(\mathfrak{n})$ 的路径。由于 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$、$_{\mathfrak{a}}$ 中的任意路径以及 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$、$_{\mathfrak{b}}$ 中的任意路径也都是 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$ 中的路径，因此存在一条从 $v(\mathfrak{a})$ 到 $v(\mathfrak{b})$ 的路径。由于 $\mathcal{X}_{\text{abs}}$ 中的任意路径都是满射路径，任意两个绝对核心顶点都可以通过一条满射路径连接。现在，给定 $\mathcal{X}$ 中的任意 v，根据引理 5.9，我们知道存在一个绝对核心顶点 v_0 以及一条从 v 到 v_0 的满射路径。□

定义 5.12. 层 $\text{Stub}(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}$ 上的整体截面 s 是定义在 $\mathcal{X}$ 的顶点和边上的函数，

$$v \mapsto s(v) \in \text{Stub}(v)$$
$$e \mapsto s(e) \in \text{Stub}(e),$$

使得对每条边 e（其端点为 v 和 v'）

$$\psi_v^e(s(v)) = s(e) = \psi_{v'}^e(s(v'))$$

都属于 $\text{Stub}(e)$。类似地，可以定义 $\text{ES}(\mathcal{X})$ 的整体截面。

推论 5.13. 对于 $\text{Stub}(\mathcal{X})$ 的任意整体截面 s，存在唯一的 $\delta_0 = \delta(s)$，使得 $0 \leq \delta_0 \leq \text{length}(A) - u$，并且对 $\mathcal{X}$ 的每个顶点 v，$s(v)$ 都生成 $\mathfrak{m}^{\delta_0}\text{Stub}(v)$。整体截面 s 由其在任意绝对核心顶点处的取值唯一确定。

证明. 令 v_0 为一个绝对核心顶点。定义 δ_0 使得 $s(v_0)$ 生成 $\mathfrak{m}^{\delta_0}\text{Stub}(v_0)$。由于 v_0 是绝对核心顶点，我们有 $0 \leq \delta_0 \leq \text{length}(A) - u$。根据命题 5.11，对于 $\mathcal{X}$ 中的任意顶点v，考虑一个满射 $\text{Stub}(v_0) \longrightarrow \text{Stub}(v)$，它将 $s(v_0)$ 映到 $s(v)$。于是，像 $s(v)$ 生成 $\mathfrak{m}^{\delta_0}\text{Stub}(v)$。□

我们现在得到了如下刚性定理。这可与 [H3，第 2.5 条1]相比较。

定理 5.14。（刚性定理）假设满足假设 2.8。此外，假设我们对于 $(T, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ 有一个非平凡的奇类型自由欧拉系统，使得 $\pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}} \neq 0$。那么存在唯一的整数 δ，且与 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ 无关，使得对于每个 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}$，$\pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}}$ 生成 $\mathfrak{m}^{\delta}\text{Stub}_{\mathfrak{n}}$，并且对于每个 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}$，$\pi^{\varepsilon}\kappa_{\mathfrak{n}}$ 生成 $\mathfrak{m}^{\delta}\,\text{Stub}_{\mathfrak{n}}$。此外，$\delta$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\delta &= \min\{\text{ind}(\pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}}, \mathfrak{m}^u A) | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}\} \\ &= \min\{\text{ind}(\pi^{\varepsilon}\kappa_{\mathfrak{n}}, \mathfrak{m}^u \,\text{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}) | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd}\}.\end{aligned}$$

证明。设 $v(\mathfrak{n})$ $v(\mathfrak{n}\mathfrak{l})$ 是图 $\mathcal{X}$ 的两个顶点，其边为 $e = e(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{l})$。考虑由下式定义的 $\text{Stub}(\mathcal{X})$ 的全局截面 $s(v)$ $s(e)$：

$$s(v) = \begin{cases} \pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}} \text{ if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even} \\ \pi^{\varepsilon}\kappa_{\mathfrak{n}} \text{ if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad s(e) = \begin{cases} \pi^{\varepsilon}\,\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}}) \text{ if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{odd} \\ \pi^{\varepsilon}\,\text{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}) \text{ if } \mathfrak{n} \in \mathcal{N}^{even}. \end{cases}$$

根据定理 4.7，这些映射是良定义的，并且 s 是欧拉系统层 $ES(\mathcal{X})$ 的非平凡整体截面。根据定理 4.7，这个整体截面实际上是子层

Stub($\mathcal{X}$) $\subset$ES($\mathcal{X}$) 的整体截面。根据推论 5.13，存在唯一的 $0 \leq \delta <$长度(A) $- u$，使得对于每个顶点 v， $s(v)$ 都生成 $\mathfrak{m}^{\delta}$Stub(v)。对于任何满足 $s(v) \neq 0$ 的其他顶点 v，我们有

$$\delta = \mathrm{ind}(s(v), \mathrm{Stub}(v)) \leq \mathrm{ind}(s(v), \mathfrak{m}^u \,\mathrm{ES}(v)) = \begin{cases} \mathrm{ind}(s(v), \mathfrak{m}^u A), & \text{if } v \text{ is even} \\ \mathrm{ind}(s(v), \mathfrak{m}^u \,\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}), & \text{if } v \text{ is odd} \end{cases}$$

当且仅当 length($M_{\mathfrak{n}}$) $= u$，即， v 是绝对核心时取等号。由于根据命题 5.9 存在偶数个绝对核心顶点，我们有

$$\delta = \min\{\mathrm{ind}(s(v), \mathfrak{m}^u \,\mathrm{ES}(v)) | v \text{ is even}\}$$

将偶替换为奇时同样成立。 □

6. Iwasawa Theory

回顾一下， K 是一个判别式为 D_K、二次特征为 ϵ 的虚二次域， $\mathbb{Q}$ 为其 $\mathbb{Q}$， $p \geq 5$ 是一个有理素数，使得导子为 N 的椭圆曲线 $E/\mathbb{Q}$ 在 p 处具有良好普通约化或乘法约化。另假设 (D_K, pN) $= 1$，并令 N^-为 N的满足 (N^-, p) $= 1$且对所有素数 $q|N^-$都有 $\epsilon(q) = 1$ 的最大因子。记 $N^+ = N/N^-$，于是$N = N^+N^-$。

如前所述，令 K^{ac} 为 K 的反圆分 $\mathbb{Z}_p$ 扩张，使得伽罗瓦群 Γ^- :=Gal(K^{ac}/K) $\cong \mathbb{Z}_p$ 由以下条件刻画：对所有 $\sigma \in \Gamma^-$ 均有 $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$，并令 τ 为一个固定的复共轭。对于任意 $m \geq 0$，考虑子域 $K \subset K_m \subset K^{ac}$，其满足 $[K_m : K] = p^m$，并令 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^-]]$ 为 Γ^- 在 $\mathbb{Z}_p$上的岩泽代数。

在本节中，我们始终假设以下假设成立。

假设 6.1. (i) N^- 是无平方因子的；(ii) ($E[p]$)$^{G_K} = 0$。

6.1. 关于 Λ 的塞尔默模。

定义 6.2. 若二次素数 $\mathfrak{l} \nmid N$ 属于 K，则称其为 k-容许的，如果

$$N(\mathfrak{l}) \neq 1 \pmod{p}$$
$$E[p^k] \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \oplus \mu_{p^k} \quad \text{as} \quad \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{l}}^{un}/K_{\mathfrak{l}}) - \text{module}.$$

令 $\mathcal{L}_k$ 表示 k-容许素数的集合，并令 $\mathcal{N}_k$ 表示由 $\mathcal{L}_k$ 中素数组成的无平方因子乘积的集合。 $\mathcal{L}$ 的 1-容许素数集简称为容许素数。

令 T_p 表示椭圆曲线 E E 的塔特模。由于 N^- 是无平方因子的，对于任意满足 $q \mid N^-$ 的有理素数 q， E 在 q 处有乘法约化，因此在 K 中位于 q 上方的素数 $\mathfrak{q}$ 处有分裂乘法约化。根据泰特参数化， T_p 上的 $G_{K_{\mathfrak{q}}}$-表示给出 $G_{K_{\mathfrak{q}}}$-模的一个滤子

$$0 \subset \mathrm{Fil}_q(T_p) \subset T_p$$

其中 Fil$_q$(T_p) $\cong \mathbb{Z}_p$(ϵ_{cyc})，且 ϵ_{cyc} 是 $G_{K_{\mathfrak{q}}}$的圆分特征。对于任意扩张 $F/K_{\mathfrak{q}}$，我们将普通子模定义为

$$H^1_{ord}(F, T_p) := \mathrm{image}\left(H^1(F, \mathrm{Fil}_q(T_p) \longrightarrow H^1(F, T_p)\right).$$

类似地，我们也定义 H^1_{ord}($F, E[p^k]$)^{。对于一个 k-可容许素数 $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}_k$，对任意扩张 $F/K_{\mathfrak{l}}$，我们都有类似的局部条件 H^1_{ord}($F, E[p^k]$)。由于 T_p 是普通的，我们有一个 $G_{\mathbb{Q}_p}$-模的滤子：

$$0 \subset \mathrm{Fil}_p(T_p) \subset T_p$$

在该滤子上， p 处的惯性子群通过圆分特征作用于 $\mathrm{Fil}^p(T_p)$。我们将 p 处的普通局部条件定义为

$$H^1_{ord}(F,T_p) := \text{image}\left(H^1(F,\mathrm{Fil}_p(T_p)) \longrightarrow H^1(F,T_p)\right)$$

对于任意有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$。

将 T_p 替换为 $E[p^k]$ 和 $E[p^\infty]$，我们可以为这些模定义普通上同调群。类似地，我们为特征 α （属于 Γ^-）对应的扭曲 $T_p\otimes\alpha$ 定义普通上同调和塞尔默群。记 T 为 $T_p\otimes\alpha$，并对每个整数 $m\geq 0$，我们定义：

$$H^1_{ord}(K_{m,\mathfrak{l}},T) = \bigoplus_{w|\mathfrak{l}} H^1_{ord}(K_{m,w},T)$$
$$H^1_{unr}(K_{m,\mathfrak{l}},T) = \bigoplus_{w|\mathfrak{l}} H^1_{unr}(K_{m,w},T).$$

由 [H3，引理 3.1.2]，，对于任意 k-可容许素数 $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}_k$，模 $\varinjlim_m H^1_{ord}(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^k])$ 和 $\varprojlim_m H^1_{unr}(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^k])$ 是秩一自由 $\Lambda/p^k\Lambda$-模。

定义 6.3（塞尔默群）。我们将紧塞尔默群定义为

$$\mathcal{S}(K^{ac},T_p) = \varprojlim_m \ker\left[H^1(K_m,T_p)\longrightarrow\left(\bigoplus_{\mathfrak{l}\nmid pN^-}\frac{H^1(K_{m,\mathfrak{l}},T_p)}{H^1_{unr}(K_{m,\mathfrak{l}},T_p)}\bigoplus_{\mathfrak{l}|pN^-}\frac{H^1(K_{m,\mathfrak{l}},T_p)}{H^1_{ord}(K_{m,\mathfrak{l}},T_p)}\right)\right]$$

我们记作 $\mathcal{S}:=\mathcal{S}(K^{ac},T_p)$。类似地，将 T_p 替换为 $E[p^k]$，我们定义 $\mathcal{S}(K^{ac},E[p^k])$。我们定义反圆分 $\mathbb{Z}_p$-扩张上的标准塞尔默群：

$$\mathrm{Sel}(K^{ac},E[p^\infty]) = \varinjlim_m \ker\left[H^1(K_m,E[p^\infty])\longrightarrow\left(\bigoplus_{\mathfrak{l}\nmid pN^-}\frac{H^1(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^\infty])}{H^1_{unr}(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^\infty])}\bigoplus_{\mathfrak{l}|pN^-}\frac{H^1(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^\infty])}{H^1_{ord}(K_{m,\mathfrak{l}},E[p^\infty])}\right)\right]$$

我们还记 $X:=\mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}(K^{ac},E[p^\infty])\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$，并且对于任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_k$：

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{n}}(K^{ac},E[p^k])\subset\varprojlim_m H^1(K_m,E[p^k])$$

为在整除 $\mathfrak{n}pN^-$ 的素数处为普通、并在所有其他素数处分歧的类所构成的 Λ-子模。于是 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1(K^{ac},E[p^k])$。

设 $V_p=T_p\otimes\mathbb{Q}_p$。则有一个正合列

$$0\longrightarrow T_p\longrightarrow V_p\longrightarrow E[p^\infty]\longrightarrow 0$$

考虑 Λ 中的高度一素理想 $\mathfrak{P}\neq p\Lambda$，并令 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 表示 $\Lambda/\mathfrak{P}$ 的整闭包，将其视为具有平凡作用的伽罗瓦模。于是， $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 的商域 $L_{\mathfrak{P}}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。令 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 的极大理想为 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{P}}$。令 $T_{\mathfrak{P}}=T_p\otimes\Lambda$ 通过非平凡的自然映射 $G_K\longrightarrow\Lambda^\times$ 视为 G_K-模。与 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 张量后，我们得到一个 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}[[G_K]]$-模的正合列

$$0\longrightarrow T_{\mathfrak{P}}\longrightarrow V_{\mathfrak{P}}\longrightarrow W_{\mathfrak{P}}\longrightarrow 0.$$

现在对于一个任意 K 的素数 $\mathfrak{l}$，以及 $T_{\mathfrak{P}}$、$V_{\mathfrak{P}}$ 或 $W_{\mathfrak{P}}$ 中的任一个 M，我们定义子模

$$H^1_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K_{\mathfrak{l}},M)\subset H^1(K_{\mathfrak{l}},M)$$

如下。首先假设 $M=V_{\mathfrak{P}}$。我们定义

$$H^1_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K_{\mathfrak{l}},V_{\mathfrak{P}}) = \begin{cases} H^1_{unr}(K_{\mathfrak{l}},V_{\mathfrak{P}}) & \text{if } \mathfrak{l}\nmid pN^- \\ \text{image}\left[H^1(K_{\mathfrak{l}},\mathrm{Fil}_q(T_p)\otimes L_{\mathfrak{P}})\longrightarrow H^1(K_{\mathfrak{l}},V_{\mathfrak{P}})\right] & \text{if } \mathfrak{l}\mid pN^-, \end{cases}$$

如果 $M = T_{\mathfrak{P}}$ 或 $W_{\mathfrak{P}}$，那么 $H^1_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K_{\mathfrak{l}}, M)$ 是由 $H^1_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K_{\mathfrak{l}}, V_{\mathfrak{P}})$ 得到的（参见注释 2.3）。这些局部子模定义了全局塞尔默群，我们将其记为 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, M)$。

6.2. 关于 Λ 的欧拉系统。

定义 6.4. 对于 $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_1$，令 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n\mathcal{O}_K = \mathfrak{n}$。称 $\mathfrak{n}$ 为定号的，如果$\epsilon(nN^-) = -1$；称其为不定号的，如果 $\epsilon(nN^-) = 1$。令 $\mathcal{N}_k^{definite} \subset \mathcal{N}_k$表示由定号素数的乘积组成的子集，令 $\mathcal{N}_k^{indefinite}$ 表示不定号素数的乘积集合。

我们还假设，对于任意正整数 k，给定一对族 es:

$$\{\kappa_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{n}}(K^{ac}, E[p^k]) | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k^{indefinite}\} \quad \text{and} \quad \{\lambda_{\mathfrak{n}} \in \Lambda/p^k\Lambda | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_k^{definite}\} \tag{6.1}$$

它们与映射 $\Lambda/p^{k+1}\Lambda \to \Lambda/p^k\Lambda$、 $E[p^{k+1}] \to E[p^k]$ 以及包含映射$\mathcal{N}_{k+1} \subset \mathcal{N}_k$ 相容，其中 k 变化。我们还假设其满足第一互反律和第二互反律:

(i) 对于任意 $\mathfrak{nl} \in \mathcal{N}_k^{indefinite}$，存在一个 Λ-模的同构

$$\varprojlim_m H^1_{ord}(K_{m,\mathfrak{l}}, E[p^k]) \cong \Lambda/p^k\Lambda, \text{ with } \mathrm{image}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{nl}})) = \lambda_{\mathfrak{n}}, \tag{6.2}$$

(ii) 对任意 $\mathfrak{nl} \in \mathcal{N}_k^{definite}$，存在一个 Λ-模同构

$$\varprojlim_m H^1_{unr}(K_{m,\mathfrak{l}}, E[p^k]) \cong \Lambda/p^k\Lambda, \text{ with } \mathrm{image}(\mathrm{loc}_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n}})) = \lambda_{\mathfrak{nl}}. \tag{6.3}$$

由于 对每个 k，空乘积都属于 $\mathcal{N}_k$，因此我们得到两个特定元素 s

$$\begin{aligned} &\lambda^\infty \in \Lambda \quad \text{if} \quad \epsilon(N^-) = -1 \\ &\kappa^\infty \in \mathcal{S} \quad \text{if} \quad \epsilon(N^-) = 1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

其定义为当 k 变化时， λ_1 与 κ_1 的逆极限。

引理 6.5（[H3，引理 3.2.2]） 。 Λ-模 $\mathcal{S}$ 是无挠的。

关于 $\mathcal{S}$ 的秩以及 X 的挠部分的特征幂级数，我们有以下定理，这就是这里的主定理。

定理 6.6。设特征元 λ^∞、κ^∞ 均非零，并令 X_{tor} 表示 X的挠子模。则有如下结论。

(i) The rank formulas: $\mathrm{rank}_\Lambda \mathcal{S} = \mathrm{rank}_\Lambda X = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \epsilon(N^-) = -1 \\ 1 & \text{if} \quad \epsilon(N^-) = 1. \end{cases}$

(ii)对于任意高度一素理想 $\mathfrak{P}$，有 Λ

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathrm{char}(X_{tor})) \le 2. \begin{cases} \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\lambda^\infty) & \text{if} \quad \epsilon(N^-) = -1 \\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathrm{char}(\mathcal{S}/\Lambda\kappa^\infty)) & \text{if} \quad \epsilon(N^-) = 1. \end{cases} \tag{6.5}$$

(iii) 如果存在 $s \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $t \ge s$，集合

$$\{\lambda_{\mathfrak{n}} \in \Lambda/p^t\Lambda | \mathfrak{n} \in \mathcal{N}_t^{definite}\}$$

包含一个在 $\Lambda/(\mathfrak{P}, p^s)$ 中非零的元素，则不等式 (6.5) 取等号。

在给出一些预备结果后，我们将在下文第 6.3 节证明这一结果。

命题 6.7（[H3，命题 3.3.2]）。Shapiro 引理、自然映射 $T_p\otimes\Lambda\longrightarrow T_{\mathfrak{P}}$ 及其对偶诱导出映射

$$\mathcal{S}/\mathfrak{P}\mathcal{S}\longrightarrow \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,T_{\mathfrak{P}}),\quad \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})\longrightarrow \mathrm{Sel}(K^{ac},E[p^{\infty}])[\mathfrak{P}]$$

第一个映射是单射。存在有限个高度一素理想组成的集合，记作 Σ_Λ of Λ，使得若$\mathfrak{P}\notin\Sigma_\Lambda$，则这些映射的核与余核均为有限群，且其阶由一个仅依赖于 $[\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}:\Lambda/\mathfrak{P}]$ 、而不依赖于 $\mathfrak{P}$ 本身的常数所界定。

证明。证明过程与 [MR, 命题 5.3.13, 5.3.14] 中相同。那里需要塞尔默结构关于 $T/\mathfrak{m}T$ 的笛卡尔性质，以界定第二个映射（在该文献中记作 $\pi^*_{\mathfrak{P}}$ ）的核与余核。在我们的情形下，当我们有 $E[p]^{G_K}=0$ 时，塞尔默结构关于 $T/\mathfrak{m}T$ 的笛卡尔性质仍然成立，因此我们可以用它来界定核与余核（参见 [MR, 命题 5.3.14] 的证明的最后一段）。□

引理 6.8（[MR，引理 3.7.1]）。设 $S_{\mathfrak{P}}:=\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,T_{\mathfrak{P}})$。则自然映射

$$S_{\mathfrak{P}}/p^kS_{\mathfrak{P}}\longrightarrow \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,T_{\mathfrak{P}}/p^kT_{\mathfrak{P}})$$

是单射，其中 $T_{\mathfrak{P}}/p^kT_{\mathfrak{P}}$ 上的塞尔默结构由 $T_{\mathfrak{P}}$上的塞尔默结构诱导（见注 2.3）。

设 k、 j为正整数，使得对于 5.1 中定义的阿廷环 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 上的塞尔默群，有 $k\leq j$且 $u_k=\min\{\mathrm{length}(M^{(k)}_{\mathfrak{n}})\mid\mathfrak{n}\in\mathcal{N}\}$。令

$$\begin{aligned}\delta_{\mathfrak{P}}(k,j) &= \min\{\mathrm{ind}(\pi^{\varepsilon}\lambda_{\mathfrak{n}},\pi^{u_k}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})\mid\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{definite}\}\\ &= \min\{\mathrm{ind}(\lambda_{\mathfrak{n}},\pi^{u_k}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})\mid\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{definite}\}+\varepsilon\end{aligned}$$

对任意 $i\in\mathbb{N}$，令 $T^{(i)}=T_{\mathfrak{P}}/p^iT_{\mathfrak{P}}$ 和 $R^{(i)}=\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^i\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$。

注 6.9。注意，非平凡的反圆分特征 $\Gamma^-\longrightarrow\mathbb{Z}_p^\times$作用于 $T_{\mathfrak{P}}$，因而也作用于 $W_{\mathfrak{P}}$。因此，第 3、4 和 5 节中的结果适用于 $T^{(j)}$的塞尔默群。

给定 $T_{\mathfrak{P}}$上的塞尔默结构 $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ ，令 $T^{(j)}$ 上的塞尔默结构 $\mathcal{F}$ 由注 2.3 给出。类似地，我们也将由 $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ 诱导到 $W_{\mathfrak{P}}$ 再到 $W_{\mathfrak{P}}[p^j]$ 的塞尔默结构记为 $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$。注意，$\varprojlim_m H^1(K_m,E[p^j])\cong H^1(K,E[p^j]\otimes\Lambda)$。应用映射

$$\begin{aligned}\Lambda/p^j\Lambda&\longrightarrow R^{(j)}\\ \varprojlim_m H^1(K_m,E[p^j])&\longrightarrow H^1(K,T^{(j)})\end{aligned}$$

对于 (6.1) 中的欧拉系统，我们得到如下两族

$$\{\overline{\kappa}_{\mathfrak{n}}\in\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(j)})\mid\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{indefinite}\}\quad\{\overline{\lambda}_{\mathfrak{n}}\in R^{(j)}\mid\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{definite}\}.\tag{6.6}$$

根据假设和引理 6.8，我们有$\overline{\kappa}_1$ 或 $\overline{\lambda}_1$ 非零（其中 $1\in\mathcal{N}_j$ 是空乘积，取决于 $\epsilon(N^-)=1$ 还是 -1）。

固定 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$的一个一致化子，我们有一个同构 $T^{(j)}\cong W_{\mathfrak{P}}[p^j]$，由此得到如下同构:

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}}(K,T^{(j)})\cong\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}}[p^j])\cong\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})[p^j].\tag{6.7}$$

其中最后一个同构由引理 2.9 得出。

引理 6.10。考虑三元组 $(T_{(j)}\mathcal{F},\mathcal{L}_j)$。于是我们有 $\mathcal{N}_j=\mathcal{N}_j^{odd}\bigsqcup\mathcal{N}_j^{even}$。这给出

$$\mathcal{N}_j^{odd}=\mathcal{N}_j^{indefinite},\quad \mathcal{N}_j^{even}=\mathcal{N}_j^{definite}.$$

此外，(6.6) 中的族构成了一个奇类型的欧拉系统，其对象为 $(T_{(j)}\mathcal{F},\mathcal{L}_j$ $)$.

证明。证明过程与 [H3, 引理 3.3.5] 中所述相同。 □

与 [H3], 中一样，方程 (6.6) 中针对 $(T_{(k)}\mathcal{F},\mathcal{L}_k)$ 的欧拉系统可能不是自由的，但可以通过缩小指标素数集合 $\mathcal{L}_k$来实现自由性。经过适当修改后，Howard 的结果证明仍然成立。

引理 6.11。对于任意 $j\geq 2k$ 和 $k>\varepsilon_0$，这些族

$$\{\overline{\kappa_{\mathfrak{n}}}\in \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(k)})|\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{indefinite}\}\quad and\quad \{\overline{\lambda_{\mathfrak{n}}}\in R^{(k)}|\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{definite}\}$$

构成关于 $(T_{(k)}\mathcal{F},\mathcal{L}_j)$ 的奇类型自由欧拉系统。

证明。该结果的证明与 [H3, 3.3.6] 的证明类似。令 $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_j^{indefinite}$ 和 $j\geq 2k$。由命题 2.10(i), 我们有

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(j)})\cong R^{(j)}\oplus M\oplus M\quad\text{and}\quad \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(k)})\cong R^{(k)}\oplus N\oplus N.$$

对于 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$，我们固定一个一致化子 π。令 e 为 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 的分歧次数。那么 $R^{(k)}$ 的长度为 ek。若 $\mathfrak{m}^{ek-1}N\neq 0$，则由命题 4.3 可得 $\overline{\kappa_{\mathfrak{n}}}=0$，因此无需证明。假设 $\mathfrak{m}^{ek-1}N=0$。由引理 2.9，我们有交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(j)}) & \xrightarrow{\pi^{e(j-k)}} & \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(j)})[\mathfrak{m}^{ek}]\\ \downarrow & \overset{\cong}{\nearrow} & \\ \mathrm{Sel}_{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(k)}) & & \end{array}$$

对角同构表明 $\mathfrak{m}^{ek-1}.\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}(\mathfrak{n})}(K,T^{(j)})[\mathfrak{m}^{ek}]$ 是一个循环模，这意味着 $\mathfrak{m}^{ek-1}M=0$。但是由于 $j\geq 2k$， M 在竖直箭头下的像为零。因此，竖直箭头的像是秩一自由模，并且 $\overline{\kappa_{\mathfrak{n}}}$ 也包含在该像中。证明至此完成。□

为证明主定理 6.6，我们首先证明下面的命题。注意，我们会得到一个误差项，而在不可约情形中不会出现该误差项。

命题 6.12。设 $\epsilon(N^-)=-1$，并假设 $\lambda^{\infty}\in\Lambda$ 在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ 中的像非平凡。那么

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}}))+2\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon)=2.\mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}\lambda^{\infty})+2\varepsilon.$$

设 $\epsilon(N^-)=1$，并假设 κ^{∞} 在 $S_{\mathfrak{P}}/p^kS_{\mathfrak{P}}$ 中的像非平凡。那么

(i) $S_{\mathfrak{P}}$ 是一个秩为一的自由 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-模，(ii) $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})$的 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-余秩为一，并且 (iii) $\mathrm{length}^{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})/\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})_{\mathrm{div}})+2\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon)=2.\mathrm{length}^{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(S_{\mathfrak{P}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}\kappa^{\infty})+2\varepsilon$，其中下标 div 表示 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K,W_{\mathfrak{P}})$ 的最大 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-可除子模。

证明。固定 $j \geq 2(k+\varepsilon)$。空乘积属于 $\mathcal{N}_j^{definite}$ 当且仅当 $\epsilon(N^-) = -1$，在此情形下，$\text{Sel}_{\mathcal{F}}(K, T_{(k+\varepsilon)}) \cong M \oplus M$。由于 λ^∞ 在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$中的像非平凡，因此 $\pi^\varepsilon\lambda^\infty$ 在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^{k+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$中有非平凡像。由定理 5.14 取 $\mathfrak{n} = 1$，可得 $\langle \pi^\varepsilon \overline{\lambda}_{\mathfrak{n}} \rangle =_{\mathfrak{m}^{\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon,j)+\text{长度}^{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(M)}} R^{(k+\varepsilon)}$。因此，

$$\begin{aligned}\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(M) + \delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon, j) = \text{ind}(\pi^\varepsilon\overline{\lambda_1}, R^{(k+\varepsilon)}) = &\quad \text{ind}(\pi^\varepsilon\lambda^\infty, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^{k+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) \\ = &\quad \text{ind}(\lambda^\infty, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^{k+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

由于右端为 $\leq k-1$，由方程 (6.7) 和命题 4.3 可得

$$\text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T^{(k)}) \cong \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}}[p^k]) \cong \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^k] = \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^{k-1}]$$

反复应用命题 4.3 和方程 (6.7)，可得

$$\text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^k] = \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^{k-1}] = \ldots = \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^{\varepsilon_0+1}],$$

因为任意 $x \in \text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})$ 都被 $p^{k-1}$for $k > \varepsilon_0$ 消去。由于 $\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}}) = \cup_{k>\varepsilon_0}\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^k]$，因此 $\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})$ 被 p 的某个幂湮灭，且 $\text{length}(\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})) = \text{length}(M \oplus M)$。于是，

$$\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})) + 2.\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon, j) = 2.\,\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}\lambda^\infty) + 2\varepsilon.$$

现在令 $\epsilon(N^-) = 1$。那么 $\text{Sel}_{\mathcal{F}}(K, T_{(k+\varepsilon)}) \cong R^{(k+\varepsilon)} \oplus M \oplus M$，应用定理 5.14 可得

$$\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(M) + \delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon, j) = \text{ind}(\pi^\varepsilon\overline{\kappa_1}, \text{Sel}_{\mathcal{F}}(K, T^{(k+\varepsilon)})) \leq k - \varepsilon.$$

同上可得 $\text{length}^{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(M) \leq k-1$。将其与方程 (6.7) 结合，可得

$$S_{\mathfrak{P}} \cong \varprojlim_k \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})[p^k]$$

它是一个无挠秩一 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-模。应用引理 6.8，可知约化映射

$$S_{\mathfrak{P}}/p^k S_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \text{Sel}_{\mathcal{F}}(K, T^{(k)})$$

是单射。由此，定理 5.14 给出

$$\begin{aligned}\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})/\text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})_{\text{div}}) + 2.\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon, j) &= \text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(M \oplus M) + 2\delta_{\mathfrak{P}}(k+\varepsilon, j) \\ &= 2.\,\text{ind}(\overline{\kappa_1}, \text{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T^{(k+\varepsilon)})) + 2\varepsilon = 2.\,\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(S_{\mathfrak{P}}/S_{\mathfrak{P}}\kappa^\infty) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

现在取 $j \to \infty$，即可得到所需结果。这就证明了该命题。 □

6.3. 定理 6.6 的证明。令 λ^∞ 或 κ^∞ 非零，分别对应于 $\epsilon(N^-) = -1$ 或 $\epsilon(N^-) = 1$。由引理 6.5，$\mathcal{S}$ 是有限生成的无挠 Λ-模。若 $\epsilon(N^-) = 1$，则对 Λ 中除有限多个以外的所有高度一素理想 $\mathfrak{P}$，κ^∞ 在 $\mathcal{S}/\mathfrak{P}\mathcal{S}$ 中的像均非零。若 $\epsilon(N^-) = -1$，则对 λ^∞ 也有类似论证。因此，取 Λ 的一个有限素理想集合 Σ_Λ，使其足够大，包含 $p\Lambda$ 以及挠子模 X 的特征理想的所有素因子；并且取其足够大，使得对于所有 $\mathfrak{P} \notin \Sigma_\Lambda$，(6.4) 中的特征元在 $\mathcal{S}/\mathfrak{P}\mathcal{S}$ 或 $\Lambda/\mathfrak{P}\Lambda$ 中的像均非零。

(i) 固定 $\mathfrak{P} \notin \Sigma_\Lambda$，并假设 $\epsilon(N^-) = 1$。在此情形下，由命题 6.8 可知，κ^∞在 $\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T_{\mathfrak{P}})$ 中的像非零。根据命题 6.12，$\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T_{\mathfrak{P}})$ 的秩为一，且 $\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})$ 作为 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-模的余秩也为一。由于 $\mathcal{S}$无挠，由命题 6.7 可得，

$$\text{rank}_\Lambda \mathcal{S} = \text{rank}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) = 1.$$

对于 X，由命题 6.7，映射 $\text{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}}) \longrightarrow \text{Sel}(K^{ac}, E[p^\infty])[\mathfrak{P}]$ 的核和余核均有限。取 Pontryagin对偶，便可得 $\text{rank}_\Lambda X = 1$。

类似地，若 $\epsilon(N^-) = -1$，则由前一个命题可知，$\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, W_{\mathfrak{P}})$ 被 p 的某个固定次幂所消去。因此，对于任意 j，$\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T_{(j)})$ 也被 p 的某个固定次幂所消去。由于 $\mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}(K, T_{\mathfrak{P}}) = \varprojlim S_{\mathfrak{P}}/p^k S_{\mathfrak{P}}$，由命题 6.7 可知，$\mathcal{S}/\mathfrak{P}\mathcal{S}$ 被 p 的某个固定次幂所消去。然后由引理 6.5 可知，$\mathcal{S}$ 是 Λ-挠的。类似的论证可得 $\mathrm{rank}_\Lambda X = 0$。这就完成了 (i) 的证明。

(ii) 设 $\mathfrak{P}$ 是 Λ 的一个高度一素理想，由特征多项式 g 生成。对于每个正整数 m，考虑这些高度一素理想

$$\mathfrak{P}_m = \begin{cases} (g + p^m)\Lambda & \text{if } g\Lambda \neq p\Lambda \\ ((\gamma - 1)^m + p)\Lambda & \text{if } g\Lambda = p\Lambda \end{cases}$$

显然，当 m 足够大时，$\mathfrak{P}_m$ 是一个不包含于 Σ_Λ 的素理想。由亨泽尔引理可得 $\Lambda/\mathfrak{P}_m \cong \Lambda/\mathfrak{P}$。于是，如同 [MR 定理 5.3.10] 的证明，并利用命题 6.7，可得

$$\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, W_{\mathfrak{P}_m})/\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, W_{\mathfrak{P}_m})_{\mathrm{div}}) = m.\,\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}).\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathrm{char}(X_{\Lambda_{tor}}$$

当 m 变化时，相应地（模 $O(1)$）。令 $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_m} = \mathrm{Sel}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, T_{\mathfrak{P}_m})$。那么

$$\begin{aligned} \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_m}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}\kappa^\infty) &= m.\,\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}).\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathrm{char}(\mathcal{S}/\Lambda\kappa^\infty)) \\ \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}\lambda^\infty) &= m.\,\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}).\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\lambda^\infty) \end{aligned}$$

相应地，取决于 $\epsilon(N^-) = 1$ 或 -1，当 m 变化时，模 $\mathcal{O}(1)$。设 e 是 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$ 的绝对分歧度。该分歧度与 m 无关。现在，当 k 足够大时，由命题 6.12 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, W_{\mathfrak{P}_m})/\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, W_{\mathfrak{P}_m})_{\mathrm{div}}) + 2e.\delta_{\mathfrak{P}_m}(k+\varepsilon) & \\ = 2.\,\mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}}(\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_m}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}\kappa^\infty) + 2\varepsilon, & \\ \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}_m}}(K, W_{\mathfrak{P}_m})) + 2e.\delta_{\mathfrak{P}_m}(k+\varepsilon) = 2.\,\mathrm{length}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}/\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}\lambda^\infty) + 2\varepsilon & \end{aligned}$$

相应地，当 $\epsilon(N^-) = 1$ 或 -1 时。由于 $\delta_{\mathfrak{P}_m}(k+\varepsilon) \geq 0$，因此取极限 $m \to \infty$，得到 (ii)。

(iii) 我们证明，当 m、k 遍历 $j \geq k_0 > \varepsilon$ 时，$\delta_{\mathfrak{P}_m}(k)$ 有界。设 $n(j) \in \mathcal{N}_j^{definite}$ 满足：$\lambda_{n(j)}$ 在 $\Lambda/(\mathfrak{P}_m, p^{k_0})$ 中的像非零。那么，对于所有 $m \geq k_0$，$\lambda_{n(j)}$ 在 $\Lambda/(\mathfrak{P}_m, p^{k_0})$ 中的像均非平凡。定义

$$C_m = \mathrm{coker}[\Lambda/\mathfrak{P}_m \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}].$$

注意，C_m 是有限的，且在同构意义下不依赖于 m。若 k_1 足够大，使得 $p^{k_1-k_0}$ 消去 C_m，则有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} C_m[p^{k_1}] & \longrightarrow & \Lambda/(\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}, p^{k_1}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}}/p^{k_1}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_m[p^{k_0}] & \longrightarrow & \Lambda/(\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}, p^{k_0}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}}/p^{k_0}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}}. \end{array}$$

由此可知，$\lambda_{n(j)}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}/p^{k_1}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$ 中的像非平凡，因此 $\pi^\varepsilon\lambda_{n(j)}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}/p^{k_1+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$ 中的像非平凡。由定理 5.14，$\pi^\varepsilon\lambda_{n(j)} \in \mathfrak{m}^{u_{k_1+\varepsilon}}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/p^{k_1+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$；根据等式 (3.1) 中的观察，对于 $j \geq k+\varepsilon \geq k_1+\varepsilon$，我们有

$$\delta_{\mathfrak{P}_m}(k+\varepsilon, j) \leq \mathrm{ind}(\pi^\varepsilon\lambda_{n(j)}, \mathfrak{m}^{u_{k+\varepsilon}}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}/p^{k+\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}) < 2e(k_1+\varepsilon).$$

这意味着对于所有 $k \geq k_1$ 以及任意 $m \geq k_0$，都有 $\delta_{\mathfrak{P}_m}(k) < 2e(k_1+\varepsilon)$。 □

References

[Be] M. Bertolini，反圆分 $\mathbb{Z}_p$-扩张中的塞尔默群与海格纳点，Compos. Math. 99(2) (1995), 153–182。[BCC] A. Burungale、F. Castella 和 Chan-Ho Kim，Perrin-Riou 海格纳点主猜想的证明。Algebra Number Theory 15 (2021), no. 7, 1627–1653。[BD] M. Bertolini 和 H. Darmon，椭圆曲线在反圆分 $\mathbb{Z}_p$ 扩张上的岩泽主猜想，Ann. Math. 162(1) (2005), 1–64。[CGLS] F. Castella、G. Grossi、J. Lee 和 C. Skinner，艾森斯坦素数处有理椭圆曲线的反圆分岩泽理论，Invent. Math. 227 (2022), no. 2, 517–580。[Co] C. Cornut，Mazur 关于高阶海格纳点的猜想，Invent. Math. 148(3) (2002), 495–523。[H1] B. Howard，海格纳点科利瓦金系统。Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1439–1472。[H2] B. Howard，阿贝尔簇上海格纳点的岩泽理论， GL_2 型。Duke Math. J. 124 (2004), no. 1, 1–45。[H3] B. Howard，二分欧拉系统。J. Reine Angew. Math. 597 (2006), 1–25。[MR] B. Mazur 和 K. Rubin，Kolyvagin 系统，Mem. Amer. Math. Soc. 168 (2004), no. 799。[Ne] J. Nekov´aˇr，志村曲线上复乘点的欧拉系统方法。L 函数与伽罗瓦表示，471–547，London Math. Soc. Lecture Note Ser., 320, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007。[Ru] K. Rubin，欧拉系统，Ann. Math. Stud. 147, Princeton University Press, Princeton, NJ (2000)，Hermann Weyl Lectures, The Institute for Advanced Study。

Chandrakant S Aribam 数学科学系，IISER Mohali，第 81 区，Manauli 邮政局，旁遮普140306 电子邮件：aribam@iisermohali.ac.in

Pronay KumarKarmakar 数学科学系，IISER Mohali，第 81 区，Manauli 邮政局，旁遮普 140306 电子邮件：pronaykarmakar@iisermohali.ac.in