arXiv:2302.05182v1 [math.ST] 10 Feb 2023

可分解尾部图模型

Adrian Casey † 和**Ioannis Papastathopoulos**†*

†数学学院和麦克斯韦研究所，爱丁堡大学，爱丁堡，EH9 3FD a.casey2@exseed.ed.ac.uk
i.papastathopoulos@ed.ac.uk

摘要

我们通过给出适用于多种极端依赖类型的结果，建立了可分解图模型中极值的渐近理论。具体而言，我们研究在给定一个极端分量的条件下，经过适当归一化的随机向量分布的弱极限，其中该随机向量的条件独立关系由一个弦图描述。在温和的假设下，与弱极限中的分布相对应的随机向量（称为尾部图模型）继承了原弦图的图结构。我们的理论适用于广泛的可分解图模型，包括渐近依赖图模型和渐近独立图模型。此外，对于极端依赖不同的联结函数类别的组合，在我们的假设无法保证以条件变量为基准进行归一化的情形下，我们也对其进行了分析。我们证明，在块图中，以与分隔集相关的随机变量为基准归一化的随机向量，其分布弱收敛于一个我们称为尾部噪声的分布。特别地，我们研究了归一化随机向量的极限，其中团分布属于两类广泛使用的联结函数类别：高斯联结函数和极值稳定联结函数。

关键词 条件极值；条件独立；多元极值；图模型；尾部图模型

1 引言

评估多元极端事件带来的风险，对于从气候科学和水文学到金融与保险等广泛应用至关重要。然而，Extremes 的依赖结构可能极其复杂，其概率建模和统计建模也面临重大挑战。即使在二维情况下，极值建模也可能十分困难，因为两个随机变量之间的极端关联类型存在两种可能性。一方面是，渐近独立：两个变量在中等极端水平上可能具有很强的依赖性，但最终最大的极端值却独立发生；另一方面是，渐近依赖：最大的极端值可能联合发生。当考虑高维 $d \gg 2$ 实值随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ 的 Extremes 时，这些挑战会进一步加剧，因为随机变量之间可能存在的极值依赖类型不仅呈组合爆炸式增长，而且联合尾部区域中的数据也十分稀缺。联合尾部区域中通常可获得的信息，使经验估计和统计模型都变得不可靠

*通讯作者

，尤其是具有饱和或非结构化依赖形式的情况下。我们通过聚焦于可分解图模型这一类别来应对这些挑战。可分解图模型是一类简约且灵活的统计模型，能够随随机向量 d的维度 $\boldsymbol{X}$扩展。这些模型还允许团分布呈现渐近依赖或渐近独立，并且可以在同一个图模型中结合这两种特性。

在简单图结构上研究多元极值，最早可追溯至Smith（1992年）的工作。他研究了正再生实值马尔可夫链的尺度性质，并假设马尔可夫链中相邻随机变量的边缘分布属于二元极值稳定分布的吸引域。Smith （1992年）指出，当对初始状态超过某个高值的马尔可夫过程进行条件化时，随着极端程度的阈值趋近于边缘分布的上端点，重新缩放后的马尔可夫过程依分布收敛到一个随机游走，称为尾链。极限过程继承了原始马尔可夫链的图结构，这在实践中有一项重要意义：它为将具有结构的极限过程作为候选极值统计模型提供了依据。关于具有极端初始状态的更一般 $\mathbb{R}^d$值马尔可夫过程的类似渐近理论，由Perfekt （1997年）、Yun （1998年）以及Janssen andSegers （2014年）给出。

近年来，图结构中的极值研究取得了丰硕成果。Engelke 和 Hitz (2020年) 提出了多元广义帕累托分布条件独立的一般理论，并开辟了一种构建保持稀疏性的统计极值模型的途径，这类模型称为极值图模型。Engelke 和 Hitz(2020年) 以及Engelke 和 Volgushev (2022) 展示了极值图模型的推断和图学习方法。在这些论文以及Segers(2020年)、Asenova 等人 (2020年)、Engelke 和 Ivanovs (2021年)、Engelke 和 Volgushev (2022) 以及Hentschel 等人 (2022) 中，研究重点都放在使用 Hüsler-Reiss 广义帕累托分布构建易于处理的模型上。多元广义帕累托分布是经重归一化的多元超越的唯一非平凡极限分布（Rootzén 和 Tajvidi 2006年），并具有诸多吸引人的理论和实践性质。首先，它们是广义帕累托分布（Pickands 1975年）的多元类比，因为它们是唯一的阈值稳定多元分布（Kiriliouk 等人 2019年）。如果一个随机向量服从多元广义帕累托分布，那么多元超越的条件分布就是原分布的位置尺度变换。阈值稳定性质的实践意义在于，模型形式在更高水平的阈值下不会改变，这对于向尾部外推很有用。其次，基于多元广义帕累托分布的统计模型往往具有简单且易于计算的似然函数；与之形成鲜明对比的是，其对应的多元极值稳定分布是独立同分布随机向量的分量最大值经重归一化后唯一的非平凡极限分布。

然而，前述所有方法的一个关键假设是，所考虑的图模型在锥 $\mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ (Resnick 2007）的内部是多元正则变差的，这意味着这类过程在马尔可夫链中的所有滞后阶上，或图模型中的所有随机变量之间，都表现出渐近依赖。尽管这一假设适用于对单变量极值进行建模，但对于多元超阈值峰值类比方法及其基于分量最大值的对应方法而言，这一假设预设了一项基本的依赖假设，即这两种方法都假设$\chi_V > 0$ 其中，渐近依赖系数χ_A 更一般地定义为任意非空随机变量子集$A \subseteq V$的

$$\chi_A = \lim_{q \to 1} \mathbb{P}(F_i(X_i) > 1 - q \,:\, i \in A)/(1-q), \tag{1}$$

其中， F_i 表示 X_i的分布函数。这一依赖假设意味着，无论维度 d 有多大，所有变量都可能同时达到其最大值。观测数据中经常缺乏这种形式的极值依赖，这促使我们研究更广泛模型的渐近理论。

我们关注与连通弦图条件独立图相关的图模型。我们的方法基于对任意变量进行条件化 X_v ，使其超过一个高阈值，并研究经由条件变量的函数进行仿射重新归一化后的随机向量的极限行为。我们方法的关键区别与优势在于选择了指数尾边缘分布，这使我们能够研究仿射重新归一化，并揭示通过重尾边缘分布的重新缩放可能遗漏的结构。我们的方法基于 Heffernan–Resnick–Tawn 的渐近理论（Heffernan 和 Tawn（2004）、Heffernan 和 Resnick（2007）），并遵循Papastathopoulos 等人（2017年）提出的类似研究路线。他们建立了一个统一理论，涵盖完全渐近依赖和完全渐近独立的时间齐次实值马尔可夫链；并证明，在假设边缘分布具有指数尾且采用仿射重新归一化的情况下，缩放自回归过程是重新归一化后的马尔可夫链的弱极限。这一结果将尾链的概念推广至隐尾链。下文中，我们用“尾部图模型”这一通用术语指代归一化极限中的随机向量，但在此指出，我们的工作本质上是对Papastathopoulos 等人（2023年）所研究的隐尾链的类比。在温和的假设下，我们证明，经仿射归一化的随机向量 $\boldsymbol{X}$存在弱极限，且极限随机向量继承了该随机向量的图结构。我们研究了广泛使用的可分解图模型例子，并详细阐释了这一结构：每个极大团对应的随机子向量服从极值稳定 Hüsler-Reiss 分布和高斯分布，分别呈渐近依赖和渐近独立。

在本研究中，我们还针对团分布呈现不同极端依赖类型的图模型，提出了一种类似的方法。为简化起见，我们将分析范围限定在块图，即极大团仅在一个顶点处相交的可分解图。对于这类情形，我们找出了标准渐近理论失效的情况，并因此引入了尾部噪声这一概念，用以描述这样一种弱极限：当使用与交集处变量相关的函数，而非与条件变量相关的函数，对随机向量 $\boldsymbol{X}$ 进行归一化时，该弱极限便会出现。据我们所知，这是首项同时考察图模型中两种极端依赖类型的研究，因此通过涵盖更广泛的可分解图模型，拓展了先前的研究。

本文结构如下。在第 2 节中，我们介绍图模型和极值理论的背景知识。特别是，第 2.2 节讨论多元正则变差，并给出两个初步结果：其一，证明具有正则变化团分布的马尔可夫随机场属于极值图模型的吸引域；其二，给出相应条件，使渐近相关团能够在条件独立图上与渐近独立团相连。在第 2.3 节中，我们介绍条件极值理论，并将在第 3节中继续使用。第 3 节给出我们的主要定理结果：其中一个涉及仿射重归一化图模型弱收敛到尾部图模型，另一个与第 4 节有关，该节给出将相关分析应用于两种广泛使用的多元分布的例子。附录 A总结了相关的图论材料。所有证明均列于附录B 和C中。

1.1 一些记号

集合 V表示整数序列 $\{1,\ldots,d\}$。记号 $|A|$表示集合A的基数，例如 $|V|=d$。记号 $C_b(\mathbb{R}^d)$表示 $\mathbb{R}^d$上的连续有界实函数空间。如果测度 μ_t 和 μ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足：对于每个 $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$， $\mu_t f\to\mu f$ as $t\to\infty$，则称 μ_t w$\longrightarrow\mu$。当 F_t w$\longrightarrow F$时，我们记作 $\boldsymbol{X}_t\xrightarrow{d}\boldsymbol{X}$，其中 F_t 和 F 分别表示 $\boldsymbol{X}_t$ 和 $\boldsymbol{X}$的分布。我们使用记号 $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ 表示均值为 $\boldsymbol{\mu}$ 、协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$的 d 维多元正态分布。对于任意非空子集 $A\subset V$，令 $\boldsymbol{x}_A=(x_v:\ v\in A)$，因此 $\boldsymbol{x}_A\in\mathbb{R}^{|A|}$。一个$|A|\times|A|$ 乘矩阵记作 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}_A=\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$ 中的任意一个；对于 D和 E这两个 V的任意非空子集，令$\boldsymbol{\Sigma}_{D,E}=(\sigma_{vv'})_{v\in D,v'\in E}$表示 $\boldsymbol{\Sigma}$的一个 $|D|\times|E|$ 子矩阵。向量上的所有算术运算均按元素进行。按照约定，若 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$，则$f(\boldsymbol{x})=(f(x_1)\ldots,\ f(x_d))$。如果 $\boldsymbol{x}$是一个以图 $\mathcal{G}$的顶点 V为索引的 d维向量，那么$\boldsymbol{x}_{V\setminus v}$表示由顶点 $V\setminus v$诱导的子图所索引的 $d-1$维向量。同样，对于$S\subset V$， $\boldsymbol{x}_{V\setminus S}$表示由 $V\setminus S$索引的 $d-|V\cap S|$ 维向量。我们将把这一记号扩展到一些从技术上并不恰当的表达式，例如 $\boldsymbol{X}_{C\setminus v}$ 和 $\boldsymbol{X}_{C\setminus S}$，其中索引分别遍历子图 $C\setminus v$ 和 $C\setminus S$ 的顶点。可测函数 $g:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 在无穷远处以 $\rho\in\mathbb{R}$为指标正则变差，记作 $g\in\mathrm{RV}_\rho$；如果对于任意 $x>0$， $g(tx)/g(t)\to x^\rho$ as $t\to\infty$。

2 背景

2.1 可分解图模型

这里总结我们将在全文中使用的可分解图模型的最重要性质。关于图论的更多入门材料和术语见附录A。若一个随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_d)$的分布满足相对于条件独立图 $\mathcal{G}=(V,E)$的成对马尔可夫性质 $F_{\boldsymbol{X}}$，则称其服从一个图模型 $\mathcal{G}$，即$X_i\perp\!\!\!\perp X_j\mid\boldsymbol{X}_{V\setminus\{i,j\}}$对所有 $(i,j)\notin E$均成立。若一个图模型的条件独立图 $\mathcal{G}$ 是弦图，则称该模型为可分解图模型。对于连通弦图，我们总能将（极大）团的集合排序为 $\{C_1,\ldots,C_N\}$，使得对所有 $i=2,\ldots,N$，

$$S_i:=C_i\cap(\cup_{j=1}^{i-1}C_j)\subset C_k\quad\text{for some }\ k<i. \tag{2}$$

这一条件称为运行交性质。从现在起，我们始终讨论连通弦图，并将其团的集合排序，使表达式（2）成立。我们用 $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ 表示这个有序集合。

将集合 $\mathcal{M}(\mathcal{G})$视为树的顶点（我们称之为节点）会很有用；若 $C_i\cap C_j\neq\varnothing$ 对于任意 $C_i,C_j\in\mathcal{M}(\mathcal{G})$成立，则在节点之间连一条边。以 $\mathcal{M}(\mathcal{G})$为节点的这类树称为连接树，记作 $\mathcal{G}^*$；若对于任意两个不同的节点 C_i 和 C_j，连接树中连接 C_i 和C_j 的唯一路径上的每个节点所代表的团都包含交集 $C_i\cap C_j$，则称其为连接树。图 $\mathcal{G}$ 是弦图，当且仅当存在连接树 $\mathcal{G}^*$ （Lauritzen 1996，见命题 2.27）。图 2 和图 3 展示了两个弦图及其连接树。

注1。 在运行交性质中， C_1 的选择是任意的（Lauritzen 1996，见引理 2.18）。等价地，在连接树上表示各团时，我们可以任选一个节点作为根节点，例如见图 1。

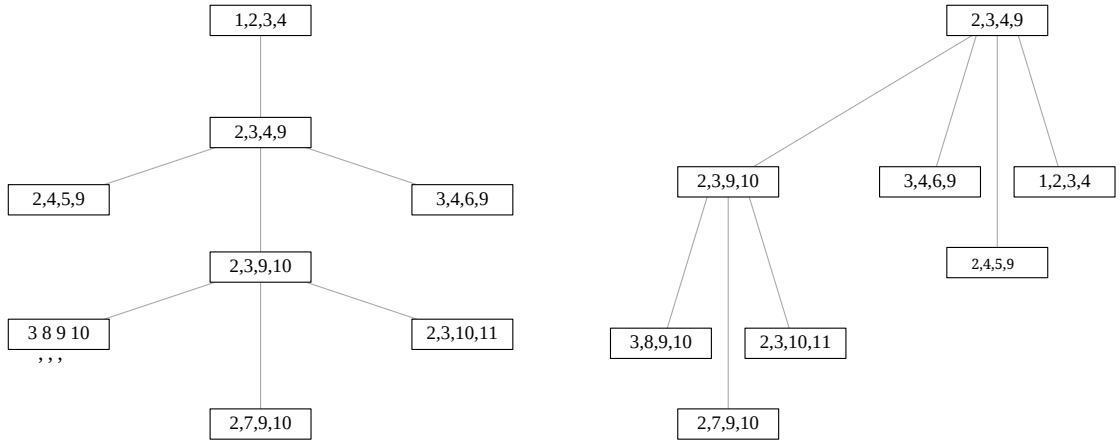

图1：Goldner-Harary 图（图3）的连接树，其中选择了两个不同的团作为根节点。根节点显示在顶部。

可分解图模型的一项重要限制是，子向量的分布必须满足相容性，即对于任意两个团 C， $C' \in \mathcal{G}^*$，若 $S = C \cap C' \neq \emptyset$，则将分布 $F_{\boldsymbol{X}_C}$和 $F_{\boldsymbol{X}_{C'}}$分别对由 $C \setminus S$和 $C \setminus S'$索引的变量进行边缘化后，必须得到相同的分布 $F_{\boldsymbol{X}_S}$。满足这一限制时，存在唯一的分布 $F_{\boldsymbol{X}_{C \cup C'}}$(Dawid 和 Lauritzen 1993）。如果一个随机向量的条件独立性质可由一个具有单点分隔集（称为块图）的图描述，那么这种相容性意味着与这些单点分隔集相关联的单变量边缘分布相同。如果图模型

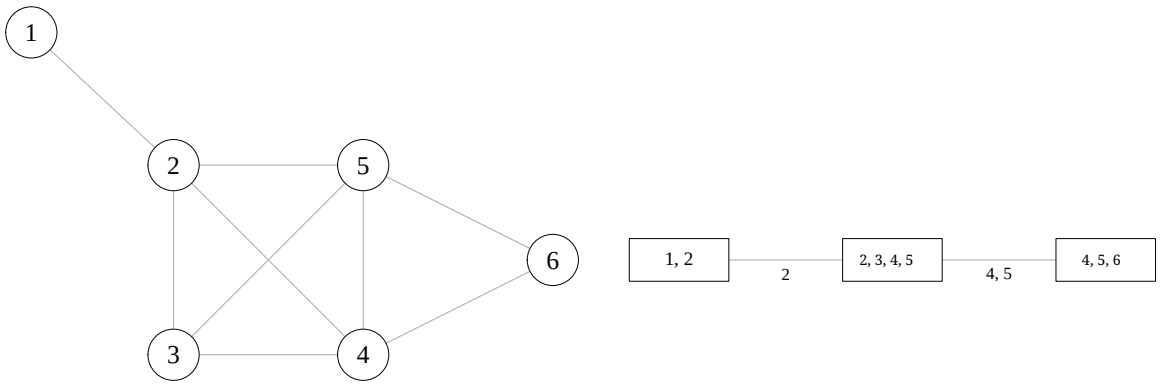

图2：左侧：可分解图示例。右侧：其连接树。连接树中的顶点是图的团，边上的标签表示分隔集。

$\boldsymbol{X}$ 具有严格正的　联合密度 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$，那么密度分解为

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} f_{\boldsymbol{X}_{C_i}}(\boldsymbol{x}_{C_i}) \Big/ \prod_{i=2}^{N} f_{\boldsymbol{X}_{S_i}}(\boldsymbol{x}_{S_i}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $f_{\boldsymbol{X}_A}$ 表示随机向量 $\boldsymbol{X}_A$的密度，其中 $A \subseteq V$， $A \neq \emptyset$ (Lauritzen 1996)。我们在第 2.2 节中，在具有正则变化团分布且满足

勒贝格密度。在更一般的结果中，我们不假设联合密度存在，而只依赖于如下形式的马尔可夫转移概率核 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_{C_i \setminus S_i} \in A \mid \boldsymbol{X}_{S_i} = \boldsymbol{x}_{S_i})$ 的存在，其中 C_i 是一个团， S_i 是连接 C_i 与相邻团的分隔集，并且，

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_{C_i \setminus S_i} \in A \mid \boldsymbol{X}_{V \setminus \{C_i \setminus S_i\}} = \boldsymbol{x}_{V \setminus \{C_i \setminus S_i\}}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X}_{C_i \setminus S_i} \in A \mid \boldsymbol{X}_{S_i} = \boldsymbol{x}_{S_i}) \quad i = 2, \ldots, N.$$

根据构造，这些转移概率核的存在确保了图 $\mathcal{G} = (V, E)$ 所蕴含的条件独立关系。可分解图提供了一个广泛而多样的子集

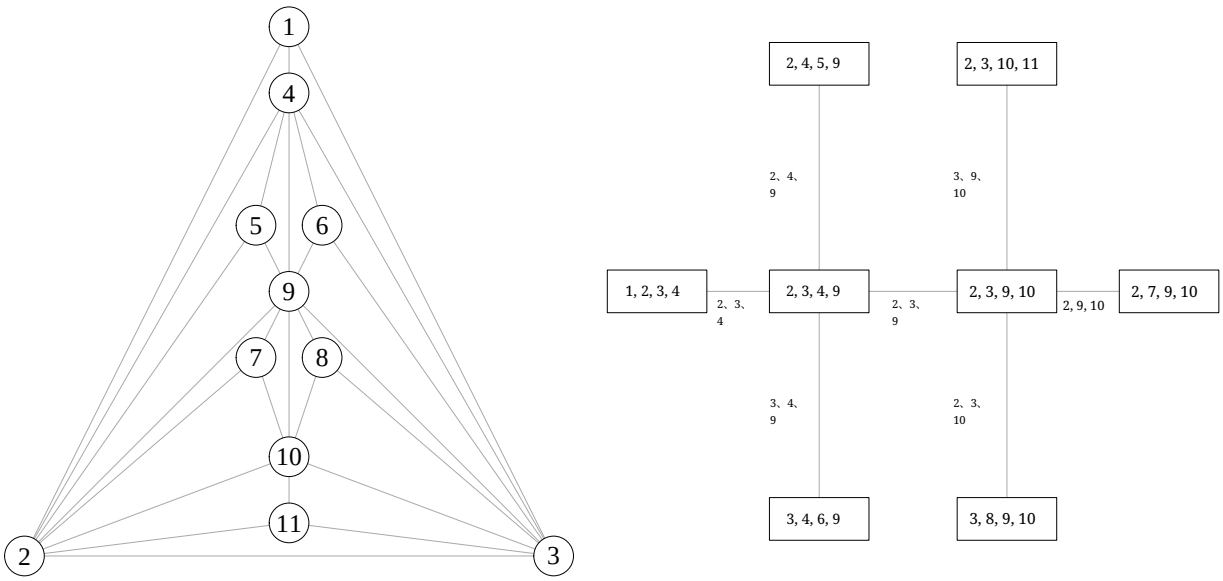

图 3：左：Goldner-Harary 图。右侧：其连接树。连接树中的节点是该图的团，边上的标签显示了分隔集。

所有图模型，并且能够编码丰富的依赖结构。我们用两个图来说明这一点：一个是简单示例（图 2），另一个是 Goldner-Harary 图（图 3），它展示了可分解图能够描述的各种依赖结构。
Goldner-Harary 图及其连接树还展示了连接树作为分析工具的强大之处：它能够以清晰、简洁的形式说明团之间的条件独立性。

2.2 多元正则变差

多元正则变差是描述随机向量分布尾部概率行为时最常用的假设，并广泛应用于多元极值的各种统计方法。若一个 d维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 在锥$\mathbb{E} = [0, \infty)^V \setminus \{\mathbf{0}_{|V|}\}$上具有指数为 $\alpha > 0$的多元正则变差，则对于任意相对紧的 $B \subset \mathbb{E}$，存在一个极限测度ν ，使得

$$t\,\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}/b(t) \in B\right) \to \nu(B), \quad \text{as } t \to \infty, \tag{3}$$

其中 $\nu(\partial B) = 0$, $b(t) \in \mathrm{RV}_{1/\alpha}$。极限测度 ν 必然具有 $(-\alpha)$-齐次性。为便于表述，我们采用标准化的 Fréchet(1) 边际分布来表达收敛 (3)，下文均作此假设；也就是说，假设随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的边缘分布满足 $F_{X_v}(x) = \exp(-1/x)$, $x > 0$，对所有 $v \in V$ 均成立。关于边际分布形式的这一假设意味着 $b(t) = t$ 且 $\alpha = 1$。集合 B

通常取为 $[\mathbf{0}_{|V|}, \boldsymbol{x}]^c$， $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^V$，由此得到指数测度，其定义为 $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \nu([\mathbf{0}_{|V|}, \boldsymbol{x}]^c)$。在采用这种边际分布形式，并利用极限测度 ν的齐次性后，多元正则变差 (3) 通常用径向—角向分解来表示

$$\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \in A, \|\boldsymbol{X}\| > t\, r \;\middle|\; \|\boldsymbol{X}\| > t\right) \to H(A)\, r^{-1}, \quad r \geq 1,$$

其中 $\|\cdot\|$： $\mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}_+$ 是任意范数， $A \subset \mathbb{S}_{|V|-1} = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}_+^{|V|}: \ \|\boldsymbol{w}\| = 1\}$，且 H 是$\mathbb{S}_{|V|-1}$上的拉东测度，称为极限指数测度 Λ的谱测度。

多元正则变差意味着分布 $F_{\boldsymbol{X}}$具有吸引域性质。令$\{(X_v^i: \ v \in V): \ i = 1, \ldots\ldots, \ n\}$ 表示来自 $F_{\boldsymbol{X}}$ 的随机样本，并令 $\boldsymbol{M}_n = \left(\bigvee_{i=1}^n X_v^i: \ v \in V\right)$ 表示逐分量最大值向量。那么， $F_{\boldsymbol{X}}$ 属于某个最大稳定分布的吸引域，即

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\boldsymbol{M}_n \leq n\, \boldsymbol{y}\right) = \exp\left\{-\Lambda(\boldsymbol{y})\right\}, \tag{4}$$

对于 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$，它们是极限的连续点。此处及下文中， $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$表示 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$且 $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$表示 $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$。类似地，随机向量 $\boldsymbol{X}$ （Rootzén 等人 2018）的标准化多元超越向量依分布收敛至多元帕累托分布，即

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\left(\boldsymbol{X} \leq t\, \boldsymbol{y} \;\middle|\; \|\boldsymbol{X}\|_\infty > t\right) = \frac{\Lambda\left(\boldsymbol{y} \wedge \mathbf{1}\right) - \Lambda\left(\boldsymbol{y}\right)}{\Lambda\left(\mathbf{1}\right)}, \tag{5}$$

对于 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$ ，它们是极限的连续性点。

ν 赋予质量的 $\mathbb{E}$ 部分，或者等价地， H 赋予质量的 $\mathbb{S}_{|V|-1}$ 各面，展示了 $\boldsymbol{X}$的宏观极值依赖结构。锥 $\mathbb{E}$ 可分解为不相交并集 $\mathbb{E} = \bigcup_A \mathbb{E}_{A \subseteq V,\ A \neq \emptyset}$，其中

$$\mathbb{E}_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{x}_A > \mathbf{0}_{|A|} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x}_{V\setminus A} = \mathbf{0}_{|V\setminus A|}\}.$$

若 $\nu(\mathbb{E}_A) > 0$，则以 $\boldsymbol{X}_A$ 为索引的变量可以同时取其最极端值，而 $X_{V\setminus A}$ 的连通分支则是非极端的。下文中，我们采用相同的记号来表示低维锥 $\mathbb{E}^M$ 的各部分：$= [0,\infty)^M \setminus \{\mathbf{0}\}$，其中 $M \subset V$满足 $M \neq \emptyset$，因此，对于任意$A \subseteq M$， $\mathbb{E}_A^M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^M: \ \boldsymbol{x}_A > \mathbf{0}_{|A|}$ 且 $\boldsymbol{x}_{M\setminus A} = \mathbf{0}_{|M\setminus A|}\}$

支撑现有各种图模型极端值刻画方法的一个常见假设（Kulik 和 Soulier 2015、Engelke和Hitz, 2020年、Segers 2020年、Asenova 和 Segers 2021年）是，假设随机向量 $\boldsymbol{X}$ 具有多元正则变异性，其极限测度ν 的全部质量都位于 $\mathbb{E}_V$的内部 $\mathbb{E}$，即 ν（$\mathbb{E} \setminus \mathbb{E}_V$） $= 0$ （或等价地，其谱测度满足 H（$\mathbb{S}_{|V|-1} \setminus \partial\, \mathbb{S}_{|V|-1}$） $= 0$）。在这一假设下，再加上 $\boldsymbol{X}$ 的团分布具有勒贝格密度这一额外要求，我们便可以确定指数测度 Λ 的密度，该指数测度表示 $\boldsymbol{X}$的极值稳定吸引域。

命题 1。设 $\boldsymbol{X}$ 是定义在可分解图 $\mathcal{G}$ 上、在 $\mathbb{R}_+^d$ 上具有勒贝格密度 $f_{\boldsymbol{X}}$ 的图模型。假设对于 $\mathcal{G}$ 的每个团 C_i， $\boldsymbol{X}_{C_i}$ 在 $\mathbb{E}^{C_i} = [0,\infty]^{|C_i|}\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上具有多元正则变异性，其极限测度 ν^{C_i} 满足

(*i*) $\nu^{(C_i)}(\mathbb{E}^{C_i} \setminus \mathbb{E}_{C_i}^{C_i}) = 0$;

(*ii*) 指数测度 $\Lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{y}) = \nu^{(C_i)}([\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c)$ 关于勒贝格

测度在 $\mathbb{E}^{C_i}$ 上绝对连续，其密度为 $\lambda^{(C_i)}$，也就是说 $\Lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{y}) = \int \lambda(\boldsymbol{x}_{C_i})\, I(\boldsymbol{x}_{C_i} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{y}_{C_i}]^c)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{C_i}$。

进一步假设，当 $n \to \infty$

$$n^{|C_i|+1} f_{\boldsymbol{X}_{C_i}}(n\, \boldsymbol{x}_{C_i}) \to \lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{x}_{C_i}), \quad 1, \ldots, N, \tag{6}$$

在勒贝格测度为零的集合之外成立。则 $F_{\boldsymbol{X}}$ 属于某个极值稳定分布的吸引域（等价地，$F_{\boldsymbol{X}}$ 属于某个多元帕累托分布的吸引域）。极限多元极值稳定分布和多元帕累托分布的指数测度 Λ 关于 $\mathbb{E}$ 上的勒贝格测度绝对连续，并且具有密度

$$\lambda(\boldsymbol{y}) = \lambda^{(C_1)}(\boldsymbol{y}_{(C_1)}) \prod_{i=2}^{N} \{\lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{y}_{(C_i)}) / \lambda^{(S_i)}(\boldsymbol{y}_{S_i})\}, \tag{7}$$

其中 $\lambda^{(A)}(\boldsymbol{y}_A) = \|\boldsymbol{y}_A\|^{-(|A|+1)}\, h^A(\boldsymbol{y}_A/\|\boldsymbol{y}_A\|)$、$\boldsymbol{y}_A \in \mathbb{E}^A$ 和 $h^A(\boldsymbol{\omega}_A)$，$\boldsymbol{\omega}_A \in \mathbb{S}_{|A|-1}$ 是与极限测度 ν^A相关的谱测度 H^A 的密度。

命题 1 的证明见附录 B.1。由于对应于任意分隔集的随机子向量，无论该分隔集包含于哪个团中，都必须具有相同的分布，因此我们可以证明关于对应于这些团的正则变差随机向量的渐近性质的以下结果。

命题 2。 设 $\boldsymbol{X}$ 是相对于可分解图 $\mathcal{G} = (V, E)$的图模型。那么，对于任意两个团 C和 C'，若 $C \cap C' = S \neq 0$使得极限$\lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_S/t \in [0, \boldsymbol{x}_S]^c)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_C/t \in B\right) = \lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_{C'}/t \in B'\right), \tag{8}$$

对于任意两个集合 $B = \mathbb{E}^{C\setminus S} \times [0, \boldsymbol{x}_S]^c$ 和 $B' = \mathbb{E}^{C'\setminus S} \times [0, \boldsymbol{x}_S]^c$。

命题 2 的证明见附录 B.2。

尽管正则变差假设在数学上十分便利，但它意味着方程 1 中的极值依赖系数 $\chi_V > 0$，这意味着 $\boldsymbol{X}$ 的最大极值会同时发生。因此，现有的一些方法排除了这样一类随机向量：它们在有限水平下表现出强依赖，但其最大极值在极限下却独立发生，例如由协方差矩阵严格正定的任意高斯分布所产生的高斯随机向量。对于将这类不同的极值依赖类型纳入统一框架的方法，目前尚付阙如。这正是第2.3节的主要关注点。

2.3 条件极值理论

在本文余下部分中，我们采用基于条件极值理论的Heffernan 和 Tawn（2004）、Heffernan 和 Resnick（2007）方法。该方法的关键在于假设各边缘分布属于贡贝尔分布的极大吸引域，且不具有正则变差性。为简洁明了起见，我们作出如下假设。

假设 $A_{0\infty}$ $\boldsymbol{X}_E$ 的边缘分布均为单位指数分布，即 $\mathbb{P}(X_{E,\ v} \leq x) = (1-\exp(-x))+$，对任意 $v \in V$ 均成立。

条件极值理论是一种强有力的方法，可用于刻画给定极端事件发生时随机向量的分布。具体而言，条件极值理论假定存在规范化函数 $\boldsymbol{a}_{V\setminus v}^{(v)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^{d-1}$, $\boldsymbol{b}_{V\setminus v}^{(v)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^{d-1}$，以及一个支集位于 $\mathbb{R}^{|V|-1}$、边缘分布非退化的分布函数 $G_{V\setminus v}^{(v)}$，使得当 $t \to \infty$ 时，

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{E,v} - t > x_v, \frac{\boldsymbol{X}_{E,V\setminus v} - \boldsymbol{a}_{V\setminus v}^{(v)}(X_{E,v})}{\boldsymbol{b}_{V\setminus v}^{(v)}(X_{E,v})} \leq \boldsymbol{z}_{V\setminus v} \;\middle|\; X_{E,v} > t \right) = \exp(-x_v)\, G_{V\setminus v}^{(v)}\left(\boldsymbol{z}_{V\setminus v}\right), \quad (9)$$

在极限分布函数的连续点 $(x_v, \boldsymbol{z}_{V\setminus v}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{|V|-1}$ 处。

为说明这种方法的普适性，我们指出，在给定的边缘分布选择下，当收敛 (9) 满足 $\boldsymbol{a}_{V\setminus v}(t) = t\mathbf{1}$ 且 $\boldsymbol{b}_{V\setminus v}(t) = \mathbf{1}$ 时，收敛 (9) 等价于 $\exp(\boldsymbol{X}_{E,v})$ 具有多元正则变差性质，且其极限测度将质量集中在 $\mathbb{E}$ 的内部（Asenova 和 Segers 2021）。然而，当收敛 (9) 满足 $\boldsymbol{a}_{V\setminus v}^{(v)}(t)/t \to \boldsymbol{\alpha}_{V\setminus v}^{(v)} \in [0,1)^{d-1}$ 且 $t \to \infty$ 时，对指数边缘分布进行仿射规范化，有助于揭示在对正则变差边缘分布进行仿射规范化时隐藏于 $\mathbb{E}$ 子面中的结构。因此，条件极值理论还有一项重要优势，即可用于刻画渐近依赖和渐近独立随机向量的极值。

下一节中，我们将通过适当的条件来分析可分解图模型。这些条件与定义联合分布马尔可夫结构的条件分布的弱收敛有关，具体而言，是指在团中的某个变量 $X_{E上v}$ 出现极端事件的条件下，团分布的弱收敛，以及转移概率核的弱收敛。因此，我们将利用可分解图模型的马尔可夫性质，从而在适当条件下得到收敛（9），即关于整个随机向量 $\boldsymbol{X}_{E的V\setminus v}$ 仿射规范化函数可用变量 $X_{E来表示v}$。这种要求团分布和转移概率核具有特定极限行为的方法，与以往针对连续状态空间上的时齐马尔可夫链的条件极值理论研究十分相似（Papastathopoulos 等人 2017年、2023年）。本文的重点则是可分解图模型。

3 可分解图模型的极端

3.1 可分解尾部图模型

不失一般性，对于任意 $v \in V$，我们都可以选择一个团 C_1，使其满足运行交性质（2），且顶点 $v \in C_1$ 属于该团，见备注 1。在一般的可分解图中，一个参考顶点可能属于多个团，例如图 3所示的$v = 2$ 位于该图 8 个极大团中的 6 个之中。在这种情况下，我们任意选择一个C_1，使得 $v \in C_1$，并将连接树的根节点设为团 C_1。由于运行交性质在团之间诱导了全序，我们可以非正式地设想：在观测到极端事件 $X_v > t$后，其中 t 相对于边缘单位指数分布而言较大，系统中冲击 X_v 的影响会按照这一全序传播到任意顶点 $j \in V \setminus v$。我们的下一项假设保证能够找到位置和尺度规范化函数，使得条件

仿射重归一化状态的分布 $\boldsymbol{X}_{E,\ C_1\setminus v}$ 在给定 $X_{E,\ v} > t$ 的条件下，在 $\mathbb{R}^{|C_1|-1}$ 上弱收敛至一个非退化的极限分布。

假设 A_1。存在可测函数 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{|C_1|-1}$ 和 $\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{|C_1|-1}_{+}$，使得 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}(t)+\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}(t)\boldsymbol{z}_C\to\infty\mathbf{1}_{|C_1|-1}$ 当 $t\to\infty$ 时，对所有 $\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\in\mathbb{R}^{|C_1|-1}$ 均成立；并且存在一个支集为 $\mathbb{R}^{|C_1|-1}$ 的分布函数 $G^{(v)}_{C_1\setminus v}$，其边缘分布非退化，使得当 $t\to\infty$ 时，

$$\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,C_1\setminus v}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_{E,v})}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_{E,v})}\le\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\;\middle|\;X_{E,v}=t\right)\xrightarrow{\text{w}}G^{(v)}_{C_1\setminus v}\left(\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\right),\qquad\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\in\mathbb{R}^{|C_1|-1}.\tag{10}$$

现在，随着我们逐渐远离初始团，需要确保给定由分隔集索引的变量后，由团索引的变量的条件分布弱收敛。下一个假设正是为此而提出，它要求在给定 $\boldsymbol{X}_{S_i}$ 以适当速度增长的条件下，可以找到位置和尺度泛函，使得 $\boldsymbol{X}_{C_i\setminus S_i}$ 关于 X_{S_i} 进行仿射标准化后，弱收敛到一个非退化分布。这种方法类似于 Papastathopoulos 等人(2023年) 针对高阶马尔可夫链特殊情形所采用的方法，但此处将其扩展到了可分解图模型的情形。

假设 A_2。(i) 存在向量值可测函数 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{V\setminus v}\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{|V|-1}_{+}$，以及 $\boldsymbol{b}^{(v)}_{V\setminus v}\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{|V|-1}_{+}$，使得 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{V\setminus v}(t)+\boldsymbol{b}^{(v)}_{V\setminus v}(t)\ \boldsymbol{z}\to\infty\mathbf{1}_{|V|-1}$，当 $t\to\infty$ 时对所有 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{|V|-1}$ 均成立。此外，$\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}$、$\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}$ 是假设 A_1 中指定的规范化函数。对于 $i=2,\ldots\ldots,N$，存在向量值可测函数 $\boldsymbol{a}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\colon\mathbb{R}^{|S_i|}_{+}\to\mathbb{R}^{|C_i\setminus S_i|}_{+}$ 和 $\boldsymbol{b}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\colon\ \mathbb{R}^{|S_i|}_{+}\to\mathbb{R}^{|C_i\setminus S_i|}_{+}$，以及连续更新函数 $\boldsymbol{\psi}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\colon\ \mathbb{R}^{|S_i|}\to\mathbb{R}^{|C_i\setminus S_i|}$ 和 $\boldsymbol{\phi}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\colon\ \mathbb{R}^{|S_i|}\to\mathbb{R}^{|C_i\setminus S_i|}_{+}$，使得对所有 $\boldsymbol{z}_{S_i}\in\mathbb{R}^{|S_i|}$,

$$\boldsymbol{\psi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})=\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\{\boldsymbol{T}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)\}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)}\quad and\quad\boldsymbol{\phi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})=\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\{\boldsymbol{T}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)\}}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)},\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{T}^{(v)}{}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)=\boldsymbol{a}^{(v)}_{S_i}(t)+\boldsymbol{b}^{(v)}_{S_i}(t)\boldsymbol{z}_{S_i}$ 且余项，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)&=\frac{\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)-\boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\{T^{(v)}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)\}+\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)\boldsymbol{\psi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})}{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\{T^{(v)}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)\}}\ and\\ \boldsymbol{B}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)&=1-\frac{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(t)\boldsymbol{\phi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})}{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\{\boldsymbol{T}^{(v)}_{S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i},t)\}},\end{aligned}\tag{12}$$

当 $t\to\infty$ 时，余项趋于零，且关于 $\boldsymbol{z}_{S_i}\in\mathbb{R}^{|S_i|}$ 在紧集上一致收敛。

(ii) 对于 $i=2$、……、N，存在分布 $G^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}$，其支集为 $\mathbb{R}^{|C_i\setminus S_i|}$，且具有非退化边缘分布，使得当 $t\to\infty$ 时，

$$\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,C_i\setminus S_i}-\boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{X}_{E,S_i})}{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{X}_{E,S_i})}\le\boldsymbol{y}_{C_i\setminus S_i}\;\middle|\;\frac{\boldsymbol{X}_{E,S_i}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{S_i}(t)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{S_i}(t)}=\boldsymbol{z}_{S_i}\right)\xrightarrow{\text{w}}G^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}\left(\boldsymbol{y}_{C_i\setminus S_i}\right),\tag{13}$$

关于变量 $\boldsymbol{z}_{S_i} \in \mathbb{R}^{|S_i|}$ 在紧集上一致收敛。

注 2. 为便于后续论文的讨论，定义 $S_1 = \{v\}$，并令 $\boldsymbol{\psi}^{(S_1)\, C_1 \setminus S_1}(\boldsymbol{x}_{S_1}) = 0$和 $\boldsymbol{\varphi}^{(S_1)\, C_1 \setminus S_1}(\boldsymbol{x}_{S_1}) = 1$，对所有 $\boldsymbol{x}_{S_1} \in \mathbb{R}^{|S_1|}$ 均成立。

在这些假设的基础上，我们可以陈述第一个主要定理。

定理 1. 设 $\boldsymbol{X}_E$ 是相对于连通无向弦图 $\mathcal{G}$ 的图模型，且满足假设 A_0、A_1 和 A_2。那么，当 $t \to \infty$ 时，

$$\left(X_{E,v} - t, \frac{\boldsymbol{X}_{E,V\setminus v} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{V\setminus v}(X_{E,v})}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{V\setminus v}(X_{E,v})} \right) \;\middle|\; \{X_{E,v} > t\} \xrightarrow{d} (E_v, \boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}), \tag{14}$$

其中

(i) E_v 是一个与 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ 相互独立的单位指数随机变量，

(ii) 对于 $i = 1$、.....、N，

$$\boldsymbol{Z}^{(v)}_{C_i\setminus S_i} = \boldsymbol{\psi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{Z}^{(v)}_{S_i}) + \boldsymbol{\phi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{Z}^{(v)}_{S_i})\, \boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}, \tag{15}$$

其中 $Z^{(v)}_v = 0$ 几乎必然，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}_{C_i\setminus S_i} \sim G^{(S_i)\, C_i\setminus S_i}$ 对于 $i = 1, \ldots, N$，随机向量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}_{C_{i_1}\setminus S_{i_1}}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}_{C_{i_2}\setminus S_{i_2}}$ 在 $i_1 \neq i_2$时相互独立。

3.2 块图的尾部噪声

这里，我们将考察范围限定为条件独立关系由块图（即弦图）描述的图模型 $\mathcal{G}$，其中所有分隔集 S_i 在运行交集（2）中均满足 $|S_i| = 1$。我们主要关注通过团分布$F_{\boldsymbol{X}_{E,C_i}}$指定的块图模型，其中各团具有不同的极值依赖结构。特别是，我们关注某些团表现出渐近依赖，而其他团表现出渐近独立的图模型。尽管这类图模型很容易构造，但在极值图模型的文献中尚未受到关注。

为了理解此类块图模型中极端事件的行为，我们首先指出，当某个团中的规范化函数与其相邻团中的规范化函数增长尺度不同时，假设 A_2 可能不成立。我们证明，在假设 A_2 不成立的情况下，仍可使用与分隔集相关变量的规范化函数来证明收敛，而不是使用与被条件化为取大值的变量相关的规范化函数。这种规范化函数的改变使我们能够考虑各种不同团分布的组合。

假设 B_1。设 $\mathcal{G}$ 是一个连通块图。对于所有 $C_i \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ 以及任意顶点 $v_i \in C_i$，存在可测函数 $\boldsymbol{a}^{(v_i)\, C_i\setminus v_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{|C_i|-1}$ 和 $\boldsymbol{b}^{(v_i)\, C_i\setminus v_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{|C_i|-1}_+$，使得 $\boldsymbol{a}^{(v_i)\, C_i\setminus v_i}(t) + \boldsymbol{b}^{(v_i)\, C_i\setminus v_i}(t)\, \boldsymbol{y}_C \to \infty \mathbf{1}_{|C_i|-1}$ 在 $t \to \infty$ 时对所有 $\boldsymbol{y}_{C_i\setminus v_i} \in \mathbb{R}^{|C_i|-1}$ 均成立；并且存在一个分布函数 $G^{(v_i)\, C_i\setminus v_i}$，其支集包含于 $\mathbb{R}^{|C_i|-1}$，且具有非退化边缘分布，使得当 $t \to \infty$ 时，

$$\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,C_i\setminus v_i} - \boldsymbol{a}^{(v_i)}_{C_i\setminus v_i}(X_{E,v_i})}{\boldsymbol{b}^{(v_i)}_{C_i\setminus v_i}(X_{E,v_i})} \leq \boldsymbol{z}_{C_i\setminus v_i} \;\middle|\; \{X_{E,v_i}\} = t \right) \xrightarrow{d} G^{(v_i)}_{C_i\setminus v_i}\left(\boldsymbol{z}_{C_i\setminus v_i}\right), \quad \boldsymbol{z}_{C_i\setminus v_i} \in \mathbb{R}^{|C_i|-1}. \tag{16}$$

在这些假设下，我们根据 $\boldsymbol{X}_{S_i}$ 进行归一化，并得到归一化随机向量在 $t \to \infty$ 时的弱极限。我们将该弱极限称为尾部噪声。

定理 2。 设 $\boldsymbol{X}_E$ 是相对于连通无向块图 $\mathcal{G}$的图模型。若 $\boldsymbol{X}_E$ 满足假设 A_0 和 B_1，则当 $t \to \infty$时，

$$\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,C_i \setminus S_i} - \boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(X_{E,S_i})}{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(X_{E,S_i})} : i = 1, \ldots, N \right) \;\Big|\; \{X_{E,S_1} > t\} \xrightarrow{d} \left(\boldsymbol{Z}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i} : i = 1, \ldots, N \right), \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{Z}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i} \sim G^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i})$ 且 $\boldsymbol{Z}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{Z}^{(S_j)}_{C_j \setminus S_j}$，对 $i \neq j$成立。

这里我们指出，使用“尾部噪声”这一术语，是为了体现对于所有 $i \neq j$， $\boldsymbol{Z}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}$与 $\boldsymbol{Z}^{(S_j)}_{C_j \setminus S_j}$ 相互独立。每个 $\boldsymbol{Z}^{S_i}_{C_i \setminus S_i}$、 $i = 1$，……， N中的元素不必相互独立。

4 例子

4.1 多元最大稳定分布的转移概率核的渐近行为

我们假设 $\Lambda^{(C)}$（即由随机变量 $\boldsymbol{X}_E$、C的分布得到的式 (4) 中的指数测度）具有各阶混合导数，这意味着 $\boldsymbol{X}_C$ 的联合分布存在联合概率密度函数（Coles 和 Tawn（1991））。令 Π_J为 $J \subseteq C$和 $\Lambda^{(C)}_J(\boldsymbol{y}) = \partial^{|J|}\Lambda^{(C)} / \prod_{j \in J} \partial x_j$的所有划分组成的集合。令 $\Lambda^{(S)}(\boldsymbol{y}_S) = \partial^{|J|}\Lambda^{(S)}(\boldsymbol{y}_S)$：$\lim_{\boldsymbol{y}_{C \setminus S} \to \infty \mathbf{1}_{|C \setminus S|}} \Lambda^{(C)}(\boldsymbol{y})$，且对于任意非空 $J \subseteq S$， $\Lambda^{(S)}_J(\boldsymbol{y}_S) = \partial^{|J|}\Lambda^{(S)}_J(\boldsymbol{y}_S) / \prod_{j \in J} \partial x_j$。转移概率核等于

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_{E,C \setminus S} \leq \boldsymbol{x}_{C \setminus S} \mid \boldsymbol{X}_{E,S} = \boldsymbol{x}_S \right) = \frac{\sum_{p \in \Pi_S} (-1)^{|p|} \prod_{J \in p} \Lambda^{(C)}_J(\boldsymbol{y})}{\sum_{p \in \Pi_S} (-1)^{|p|} \prod_{J \in p} \Lambda^{(S)}_J(\boldsymbol{y}_S)} \exp\left\{ \Lambda^{(S)}(\boldsymbol{y}_S) - \Lambda^{(C)}(\boldsymbol{y}) \right\}, \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{y} = -1/\log\{1 - \exp(-\boldsymbol{x})\}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d_+$。

我们寻求一个泛函 $\boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}(\boldsymbol{x}_S)$，使概率 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_{E,C \setminus S} \leq \boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}(\boldsymbol{X}_{E,S}) \mid \boldsymbol{X}_{E,S} = t\,\mathbf{1}_{|S|} + \boldsymbol{z}_S)$ 收敛到区间 (0, 1) 内的某个值。类似分析见 Papastathopoulos 等人（2023）。取方程（18），并令 $\boldsymbol{x}_S = t\mathbf{1}_{|S|} + \boldsymbol{z}_S$ 和 $\boldsymbol{x}_{C \setminus S} = a^{(S)}_{C \setminus S}(t\,\mathbf{1}_{|S|} + \boldsymbol{z}_S)$，则当 $t \to \infty$时，方程（18）化简为，

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_{E,C \setminus S} \leq \boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}(\boldsymbol{X}_{E,S}) \mid \boldsymbol{X}_{E,S} = t\,\mathbf{1}_{|S|} + \boldsymbol{z}_S \right) = \{\Lambda^{(C)}_S(\boldsymbol{y}) / \Lambda^{(S)}_S(\boldsymbol{y}_S)\}(1 + o(1)) \quad \text{as } t \to \infty,$$

并且对于满足以下条件的任意连续泛函 $\boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}$

$$\exp[\boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}\{\log(t\,\boldsymbol{x}_S)\}] = t\,\exp[\boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}\{\log(\boldsymbol{x}_S)\}], \tag{19}$$

我们得到

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_{E,C \setminus S} \leq \boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}(\boldsymbol{X}_S) \mid \boldsymbol{X}_{E,S} = t\,\mathbf{1}_S + \boldsymbol{z}_S \right) = \frac{\Lambda^{(C)}_S\{\exp(\boldsymbol{z}_S), \exp(\boldsymbol{a}^{(S)}_{C \setminus S}(\boldsymbol{z}_S)\}}{\Lambda^{(S)}_S\{\exp(\boldsymbol{z}_S))\}}. \tag{20}$$

4.2 具有Hüsler–Reiss极值稳定团的可分解图模型

设 $\boldsymbol{X}_E = F_E^{-1}\{F_F(\boldsymbol{X}_F)\}$，其中 $\boldsymbol{X}_F$是具有单位Fréchet边缘分布的图模型。这里我们考虑团分布为极值稳定分布的图模型，即 $^F\boldsymbol{x}_{F,C}(\boldsymbol{x}_C) = \exp\{-\Lambda^{(C)}(\boldsymbol{x}_C)\}$，其中 $\boldsymbol{X}_C \in \mathbb{R}_+^{|C|}$， $\Lambda^{(C)}(\boldsymbol{x}_C)$ 表示 Hüsler–Reiss极值稳定分布的指数测度，其定义见（21）。Hüsler–Reiss极值稳定分布由变异函数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_C = (\Gamma_{ij})_{i,j\in C} \in \mathbb{R}^{|C|\times|C|}$ 参数化（Kabluchko等，2009年；Engelke和Hitz，2020年），也就是说，该分布由满足 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{\Gamma}_C) = 0$ 且对任意$\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in C} \in \mathbb{R}^{|C|}$ （其中 $\sum_{i\in C} a_i = 0$）成立的严格条件负定矩阵参数化。指数测度 $\Lambda^{(C)}$ 定义为

$$\Lambda^{(C)}(\boldsymbol{x}_C;\boldsymbol{\Gamma}_C) = \sum_{c\in C}\frac{1}{x_c}\Phi_{|C|-1}\left\{\log\left(\frac{\boldsymbol{x}_{C\setminus c}}{x_c}\right) + \frac{\boldsymbol{\Gamma}_{c,C\setminus c}}{2}; \mathbf{0}_C, \boldsymbol{\Sigma}^{(c)}_{C\setminus c}\right\}, \tag{21}$$

其中 $2\,\boldsymbol{\Sigma}^{(c)}_{C\setminus c} = \boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus c,\ c}\mathbf{1}^\top + (\boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus c,\ c}\mathbf{1}^\top)^\top + \boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus c}$以及 $\Phi_{|C|-1}(\cdot;\ \mathbf{0}_C,\ \boldsymbol{\Sigma}^{(c)}_{C\setminus c})$ 表示均值向量为 $\mathbf{0}_C$ 、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}^{(c)}_{C\setminus c}$的多元正态分布的累积分布函数。假设$A_1$ 成立，这是因为根据 Engelke 等人 (2015)（公式47），对于所有 $v \in V$ 以及任意满足 $v \in C_1$的团 C_1 ，有

$$G^{(v)}_{C_1\setminus v}(\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}) = \Phi_{|C_1|-1}\left(\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}, -\operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{(v)}_{C_1})/2,\ \boldsymbol{\Sigma}^{(v)}_{C_1}\right).$$

引理 A_2 中给出了假设1所述的经重新标准化的转移概率核的极限分布。

引理*1.* 对于 $i = 1,\dots,N$，令 $s_1 = v$，并在 $v \in S_i$时令 $s_i = v$。否则，如果 $v \notin S_i$，则令 s_i为 S_i中的任意顶点。令 $\boldsymbol{Q}^{(S_i)}_{C_i} = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus s_i}\right)^{-1}$，并定义矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i,S_i}$ 为 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C\setminus S,S\setminus s} = \boldsymbol{Q}^{(s_i)}{}_{C\setminus S,S\setminus s}$ 以及 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i,s_i} = -\boldsymbol{Q}^{(s_i)}{}_{C_i\setminus S_i,C_i\setminus s_i}\mathbf{1}_{|C_i\setminus s_i|}$。取 $\boldsymbol{a}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_{S_i}) = -\left(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i,S_i}\,\boldsymbol{x}_{S_i}$ 以及 $\boldsymbol{b}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_{S_i}) = 1$，则假设 A_2 满足

$$G^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{y}_{C_i\setminus S_i}) = \Phi_{|C_i\setminus S_i|}\left(\boldsymbol{y}_{C_i\setminus S_i};\boldsymbol{m}_{C_i\setminus S_i},(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i})^{-1}\right),\quad \boldsymbol{\psi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_{S_i}) = \boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_{S_i}),\quad \boldsymbol{\varphi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_{S_i}) = 1, \tag{22}$$

where $\boldsymbol{m}_{C_i\setminus S_i} = -\left(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i,C_i\setminus s_i}\,\boldsymbol{\Gamma}_{C_i\setminus s_i}/2.$

引理1的证明见附录C.1。根据 Engelke 和 Hitz（2020）的引理1，表达式 $\boldsymbol{a}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i,S_i}$ 和 $\boldsymbol{m}_{C_i\setminus S_i}$ 不依赖于 $s_i \in S_i$ 的选择；该引理指出，当 $s_i \in S_i$时， $\boldsymbol{Q}^{(s_i)}{}_{C_i\setminus S_i}$ 与 s_i 相互独立。因此，由定理1可得， $\boldsymbol{Z}^{(S_1)}{}_{S_1} = 0$ 几乎必然成立， $\boldsymbol{Z}^{(S_1)}_{C_1\setminus S_1} \sim G^{(S_1)}{}_{C_1\setminus S_1}$且

$$\boldsymbol{Z}^{(S_1)}_{C_i\setminus S_i} = -(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i,S_i}\,\boldsymbol{Z}^{(S_1)}_{S_i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{C_i\setminus S_i},\quad i = 1,\dots N, \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{C_i\setminus S_i} \sim G^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}$， $G^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}$ 由表达式（22）给出。为了完整描述 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ 的分布，我们引入一些额外记号。对于任意一个由顶点子集$V_1 \subset V\setminus v$和 $V_2 \subset V\setminus v$索引的矩阵 $\boldsymbol{M} = [M_{nm}]_{n\in V_1,m\in V_2}$，定义 $(|V|-1)\times(|V|-1)$ 维矩阵 $\breve{\boldsymbol{M}} = [M_{nm}]_{n,m\in V}$，使得对于 $n \in V_1$ 和 $m \in V_2$， $M_{n,m} = M_{n,m}$；否则， $M_{n,m} = 0$。

应用关于稀疏精度矩阵逆矩阵的结果（Johnson 和 Lundquist 1998年），我们推导出高斯随机向量 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ （随机向量的弱极限）的均值和精度表达式

$$\left(\boldsymbol{X}_{E,V\setminus v} - t\mathbf{1}_{V\setminus v} \mid X_{E,v} = t\right)\quad \text{as}\quad t\to\infty, \tag{24}$$

命题 3. 设 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ 为（24）中的弱极限，则 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ 服从分布 $\mathcal{N}_{d-1}(\boldsymbol{\mu}^{v}_{V\setminus v}, \boldsymbol{\Sigma}^{v}_{V\setminus v})$，其中均值向量 $\boldsymbol{\mu}^{v}_{V\setminus v}$ 通过以下迭代方式定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^{(v)}_{C_i} &= -\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{(v)}_{C_i})/2, \quad \text{when } C_i \cap \{v\} \neq \emptyset, \text{ and}\\ \boldsymbol{\mu}^{(v)}_{C_i\setminus S_i} &= -(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i, S_i}\,\boldsymbol{\mu}^{(v)}_{S_i} + \boldsymbol{m}_{C_i\setminus S_i}, \quad \text{otherwise,}\end{aligned}$$

且协方差矩阵 $(\boldsymbol{Q}^{v}_{V\setminus v}) := (\boldsymbol{\Sigma}^{v}_{V\setminus v})^{-1}$ 的逆满足

$$\boldsymbol{Q}^{v}_{V\setminus v} = \sum_{i=1}^{N}\breve{\boldsymbol{Q}}^{i} - \sum_{i=2}^{N}\breve{\boldsymbol{P}}^{i-1},$$

其中 $\boldsymbol{Q}^{i}$ 和 $\boldsymbol{P}^{i-1}$ 通过以下方式迭代定义，

$$\boldsymbol{Q}^{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i} + \boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i, S_i}\boldsymbol{P}^{i-1}\Big(\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i, S_i}\Big)^{T} & -\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i, S_i}\boldsymbol{P}^{i-1} \\ -\boldsymbol{P}^{i-1}\Big(\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i, S_i}\Big)^{T} & \boldsymbol{P}^{i-1}\end{bmatrix} \quad \text{when } C_i \cap \{v\} = \emptyset,$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i, S_i} = -\Big(\boldsymbol{Q}^{(s_i)}_{C_i\setminus S_i}\Big)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{C_i\setminus S_i, S_i} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{P}^{i-1} = \Big[\Big(\{\boldsymbol{Q}^{i-1}\}^{-1}\Big)_{S_i, S_i}\Big]^{-1}. \tag{25}$$

4.3 可分解元高斯图模型

设 $\boldsymbol{X}_E = F_E^{-1}(\Phi(\boldsymbol{X}_N))$，其中 $\boldsymbol{X}_N \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R})$ 是定义在可分解图 $\mathcal{G}$ 上的零均值高斯图模型，其正定协方差矩阵为 $\boldsymbol{R} = (\rho_{ij})_{ij=1}^{d}$, $\rho_{ij} > 0$, $\rho_{ii} = 1$。设 $\boldsymbol{\rho}_{A,v} = (\rho_{iv} : \ i \in A)$，对任意 $A \subseteq V$，并记 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{ij=1}^{d} = \boldsymbol{R}^{-1}$ 为该多元正态分布的精度矩阵。Heffernan 和 Tawn（2004）证明，假设 A_1 成立，且 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{C}(t) = \boldsymbol{\rho}^{2}_{C\setminus v}\,t$ 和 $\boldsymbol{b}^{(v)}_{C}(t) = t^{1/2}\boldsymbol{1}_{|C|}$。表达式 (10) 中的极限分布为 $G^{(v)}_{C}(\boldsymbol{x}_C) = \Phi_{|C|}(\boldsymbol{x}_C; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}^{C}_{v})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|C|}$，其中 $\boldsymbol{R}^{(v)}_{C} = (2\rho_{iv}\rho_{jv}(\rho_{ij} - \rho_{iv}\rho_{jv}))_{i,j\in C}$。

Papastathopoulos 等人 的示例 1（2023年）的结果可以推广，从而表明，对于泛函的选择

$$\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_S) = \Big(-\boldsymbol{Q}^{-1}_{C\setminus S}\boldsymbol{Q}_{C\setminus S, S}\,|\boldsymbol{x}_S|^{1/2}\Big)^{2} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{b}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_S) = \boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_S)^{1/2}, \qquad \boldsymbol{x}_S \in \mathbb{R}^{S},$$

假设 A_2 成立，表达式（13）中的极限分布等于 $G^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_S) = \Phi(\boldsymbol{x}_S; \boldsymbol{0}, 2\,\boldsymbol{Q}^{-1}_{C\setminus S})$，并且 $\boldsymbol{\psi}^{S}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}}(\boldsymbol{\rho}^{2}_{S,v})\,\boldsymbol{x}_S$ 以及 $\boldsymbol{\phi}^{(S_i)}{}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{x}_S) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}}(\boldsymbol{\rho}^{2}_{S,v})^{1/2}$，其中 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}}: \ \mathbb{R}^{|S|} \to \mathbb{R}^{|C\setminus S|\times|S|}$ 表示在 $\boldsymbol{x}_S$ 处计算的 $\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}$ 的雅可比矩阵，并且 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}}(\boldsymbol{x}_S)^{1/2}$ 中的平方根按元素解释。表达式（14）中的极限向量 $\boldsymbol{Z}^{(v)}_{V\setminus v}$ 是一个协方差矩阵为 $\boldsymbol{R}^{(v)}_{V\setminus v} = [2\rho_{iv}\rho_{jv}(\rho_{ij} - \rho_{iv}\rho_{jv})]_{i,\ j\in V\setminus v}$ 的零均值高斯图模型。协方差矩阵的逆为 $\boldsymbol{R}^{(v)}_{V\setminus v} = \mathrm{diag}(1/(\sqrt{2}\boldsymbol{\rho}_{V\setminus v,v}))\boldsymbol{Q}_{V\setminus v}\mathrm{diag}(1/(\sqrt{2}\boldsymbol{\rho}_{V\setminus v,v}))$，其中 diag 表示对角矩阵，$\boldsymbol{Q}_{V\setminus v}$ 是去掉其第 v 行和第 v 列后的矩阵 $\boldsymbol{Q}$。

我们在此强调，$V\setminus v$ 的收敛也可以直接利用Heffernan 和 Tawn (2004年的结果得到，因为对于此图模型，联合分布是直接在整个

图 $\mathcal{G}$上指定的。这与第4.2节介绍的图模型不同，后者在图 $\mathcal{G}$ 上的联合分布是通过其低维团分布间接指定的。

4.4 具有不同极值依赖的团的块图

可以通过采用属于不同分布族的各个团分布来构造有效的可分解图模型。如果每个团分布中对应于分隔集的子向量分布相同，则可以进行这种构造，即 $F_{\boldsymbol{X}_C}(\boldsymbol{x}_S,\ \infty) = F_{\boldsymbol{X}_{C'}}(\boldsymbol{x}_S,\ \infty)$ 对于$C \cap C' = S \neq \varnothing$ 其中 $C,\ C' \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$。对于具有标准化单变量边缘分布的块图，这一约束显然成立。考虑图中顶点 $\{1,2,3,4,5\}$ 所诱导的子图，该图见图（2）。此图由两个团 $C_1 = \{1,2\},\ C_2 = \{2,3,4,5\}$组成。

假设 $\boldsymbol{X}_{E,\ C_1}$ 服从具有单位指数边缘分布和变异函数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_{ij})_{i,\ j=1}^{2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$的二元极值稳定 Hüsler-Reiss 分布，其中 $\Gamma_{12} > 0$ 且 $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = 0$。进一步假设$\boldsymbol{X}_{E,\ C_2}$ 服从高斯分布，其单变量边缘分布同样为单位指数分布，协方差矩阵为 $[\rho_{i,j}]_{i,\ j\in\{2,\ldots,5\}}$。令 $v = 1$。根据第 4.2 节和第 4.3 节中的例子分析可知，当 $t \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{E,2} - X_{E,1} \le z_2^{(1)} \mid X_{E,1} = t\right) \xrightarrow{\text{w}} \Phi(z_2^{(1)},\ -\Gamma_{12},\ 2\Gamma_{12}),\\
&\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,\{3,4,5\}} - \boldsymbol{\rho}_{2,\{3,4,5\}}^2 X_{E,2}}{{X_{E,2}}^{1/2}} \le \boldsymbol{\epsilon}_{345}^{(2)} \,\middle|\, X_{E,2} = t + z_2^{(1)}\right) \xrightarrow{\text{w}} \Phi(\boldsymbol{\epsilon}_{345}^{(2)}, 0, \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = [2\rho_{2,i}\rho_{2,j}(\rho_{i,\ j} - \rho_{2,\ i}\rho_{2,\ j})]_{i,\ j\in\{3,4,5\}}$。相关随机向量 $\boldsymbol{\epsilon}_{\{3,4,5\}}^{(2)}$ 和随机变量 $Z_2^{(1)}$ 相互独立。如果我们可以找到函数 $\boldsymbol{a}_{\{3,4,5\}}^{(1)}(t)$ 和 $\boldsymbol{b}_{\{3,4,5\}}^{(1)}(t)$，使得

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{(t + z_2^{(1)})\boldsymbol{\rho}_{2,\{3,4,5\}}^2 - \boldsymbol{a}_{\{3,4,5\}}^{(1)}(t)}{\boldsymbol{b}_{\{3,4,5\}}^{(1)}(t)} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{(t + z_2^{(1)})^{1/2}\mathbf{1}_3}{\boldsymbol{b}_{\{3,4,5\}}^{(1)}(t)} > 0. \tag{26}
$$

如果令 $\boldsymbol{b}_{345}^{(1)}(t) = t^{1/2}\mathbf{1}_3$ 且 $\boldsymbol{a}_{345}^{(1)}(t) = t\boldsymbol{\rho}_{2,\ \{3,4,5\}}^2$，则表达式（26）中极限的存在性可以得到保证。在这种情况下，当 $t \to \infty$ 时，我们得到一个均值为（$-\Gamma_{12}$，0，0，0）的非退化高斯分布 $G_{\{2,3,4,5\}}^{(1)}$，其协方差由一个对角分块矩阵构成，元素为 $2\Gamma_{12}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$。

采用 $v \in C_2 \setminus \{2\}$ 进行类似构造会失败，因为假设 A_2 中要求的收敛（见 26）无法通过任何 $\boldsymbol{a}_{C_1}^{(v)}(t)$ 和 $\boldsymbol{b}_{C_1}^{(v)}(t)$的选择来保证。其原因在于两个团分布所要求的尺度归一化不同。为说明这一问题，令 $v = 3$，并考虑从团 2 到团 1 的转移。假设 A_2 要求

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{\rho_{2,3}^2 t + t^{1/2} z_3^{(2)} - a_1^{(3)}(t)}{b_1^{(3)}(t)} \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{b_1^3(t)} > 0.
$$

若对所有 $b_1^3(t) = \beta$ 均满足 $t > 0$ 其中 β 是正常数，则第二个关系成立；但若如此，则 $a_1^{(3)}(t)$无解。不过在这种情况下，我们仍然可以应用定理2 并

发现当 $t \to \infty$ 时，

$$\mathbb{P}\left(X_{E,1} - X_{E,2} \le \epsilon_1^2, \frac{\boldsymbol{X}_{E,\{2,4,5\}} - \boldsymbol{\rho}^2_{3,\{2,4,5\}} X_{E,3}}{\sqrt{X_{E,3}}} \le \boldsymbol{z}^{(3)}_{2,4,5} \,\middle|\, X_{E,3} = t\right) \xrightarrow{\text{w}} \Phi\left(\{\epsilon_1^{(2)}, \boldsymbol{z}^{(3)}_{2,4,5}\}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{S}\right).$$

随机元素 $\varepsilon_1^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{Z}^{(3)}_{\{2,4,5\}}$ 彼此独立，且服从联合高斯分布，其参数为 $\boldsymbol{m} = (-\Gamma_{12}, 0, 0, 0)$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{S}$，由元素为 $2\Gamma_{12}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}^{(3)}$的对角分块矩阵组成，其中 $\Sigma^{(3)} = [2\rho_{3,i}\rho_{3,j}(\rho_{i,\ j} - \rho_{3,\ i}\rho_{3,\ j})]_{i,\ j\in\{2,4,5\}}$。

附录 A 图论与记号

本节内容取自 Grimmett（2018）。图 $\mathcal{G}$ 是一个二元组 (V, E)，其中 $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ 是由称为顶点的元素构成的有限集合，而 $E \subseteq V \times V$。E 中的每个元素都是一对无序顶点 v_i, v_j，记作 (v_i, v_j)。具有相同顶点对的两条边称为平行边，形如 (v_i, v_i) 的边称为自环。本文中的图既不含平行边，也不含自环，并且都假设为无向图，因为边是无序顶点对。若图 V 中的两个顶点 v_i 和 v_j满足 $e = (v_i, v_j) \in E$，则称它们相邻。在这种情况下，v_i 和 v_j 称为e的端点。图 G 的一条路径定义为交替序列 $v_0, e_0, v_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$，其中顶点 v_i和边 $e_i = (v_i, v_{i+1})$各不相同。该路径的长度为 n，称其连接 v_0 和 v_n。长度为 0 的路径称为平凡路径。图 $\mathcal{G}$的一个环是交替序列 $v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-1}, v_n, e_n, v_0$，满足$v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-1}, v_n$是一条路径，且 $e_n = (v_n, v_0)$。从 v到 v'的图论距离定义为图 $\mathcal{G}$ 中从 v 到 v'的最短路径所含边数。若存在一条连接 v 和 v'的路径，我们记作 $v \leftrightsquigarrow v'$。关系 $\leftrightsquigarrow$ 是一个等价关系，其等价类称为 $\mathcal{G}$的连通分支。若图 $\mathcal{G}$ 只有一个连通分支，则称其为连通图；若此外还不含环，则称其为树。若一个图中每个长度大于四的环都有一条边连接环上两个不相邻的顶点，则称该图为弦图。图 $\mathcal{G}$的子图是一个图 $\mathcal{H} = (W, F)$，其中$W \subseteq V$且 $F \subseteq E \cap (W \times W)$。若子图 $\mathcal{H}$ 满足 $V = W$ 且 $\mathcal{H}$ 是树，则称其为 $\mathcal{G}$ 的生成树。任何连通图 $\mathcal{G}$都有生成树。顶点诱导子图 $\mathcal{G}_W$为 $(W, E \cap (W \times W))$。若一个子图中所有顶点都彼此相邻，则称该子图为完全子图。图 $\mathcal{G}$ 的完全子图称为团；若团不存在严格更大的团作为其超集，则称其为极大团。

附录B 证明

B.1 命题 1 的证明

证明。由于 $\boldsymbol{X}$ 具有勒贝格密度，且假设其条件独立图可分解，因此我们有

$$n^{d+1} f(n\boldsymbol{x}) = n^{d+1} f_{C_1}(n\boldsymbol{x}_{C_1}) \prod_{i=2}^{N} \frac{f_{C_i}(n\boldsymbol{x}_{C_i})}{f_{S_i}(n\boldsymbol{x}_{S_i})} = n^{d+1+K+|C_1|+1} f_{C_1}(n\boldsymbol{x}_{C_1}) \prod_{i=2}^{N} \frac{n^{|C_i|+1} f_{C_i}(n\boldsymbol{x}_{C_i})}{n^{|S_i|+1} f_{S_i}(n\boldsymbol{x}_{S_i})}, \quad \text{(A.1)}$$

其中 $K = -1 - |C_1| - \sum_{i=2}^{N} [|C_i| - |S_i|]$。由于每个 $\nu^{(C_i)}$ 都将所有质量置于 $\mathbb{E}^{C_i}$和$\Lambda^{(C_i)}$ 的内部，且假设其可微，因此与 $H^{(C_i)}$ 相关联的谱测度 $\Lambda^{(C_i)}$ 在 h_{C_i} 的内部具有密度 $\mathbb{S}_{|C_i|-1}$（Coles 和 Tawn（1991））。直接应用论文中的定理 1

即可得到

$$\lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{y}_{C_i}) = \frac{\partial^{|C_i|}}{\partial \boldsymbol{y}_{C_i}} \Lambda^{(C_i)}(\boldsymbol{y}_{C_i}) = \|\boldsymbol{y}_{C_i}\|^{-(|C_i|+1)} h^{C_1}(\boldsymbol{y}_{C_i}/\|\boldsymbol{y}_{C_i}.\|) \tag{A.2}$$

结合（A.1）与（A.2），并利用以下事实：对于任意可分解图 $\mathcal{G}$，关系 $|C_1| + \sum_{i=2}^{N} [|C_i| - |S_i|] = d$ 始终成立，我们得到 $n^{d+1} f_{\boldsymbol{X}}(n\,\boldsymbol{x}) \to \lambda(\boldsymbol{x})$ 除勒贝格测度为零的集合外，其中 λ 定义见表达式（7）。

根据 Scheffé 引理（Billingsley 2008，第 29 页），可知当 $n \to \infty$

$$n\,(1 - F_{\boldsymbol{X}}(n\,\boldsymbol{y})) = \int_{[\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}]^c} n^{d+1} f_{\boldsymbol{X}}(n\,\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int_{[\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}]^c} \lambda(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =: \Lambda(\boldsymbol{y}),$$

在连续 点 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$ 处的极限函数 Λ。因此， $F^n(n\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\mathrm{w}} \exp(-\Lambda(\boldsymbol{x}))$。 □

B.2 命题 2 的证明

证明。 根据概率的并集与交集，我们有：

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_C/t \in B\right) = \mathbb{P}\big(\boldsymbol{X}_{C\setminus S}/t \in \mathbb{E}^{C\setminus S} \cap \boldsymbol{X}_S/t \in [0,\boldsymbol{x}_S]^c\big) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_S/t \in [0,\boldsymbol{x}_S]^c\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X}_{C'}/t \in B'\right),$$

因为 $\boldsymbol{X}_S$ 与 $\boldsymbol{X}_C$ 或 $\boldsymbol{X}_{C'}$ 的某个子向量具有相同的分布。因此，$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_C/t \in B) = \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_{C'}/t \in B') = \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_S/t \in [0,\boldsymbol{x}_S]^c)$。 □

B.3 辅助结果

引理 2 (Kulik 和 Soulier (2015))。 设 $\{\mu_n\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一列概率测度，且弱收敛于 μ 当 $n \to \infty$时。设 $\{\phi_n\}$ 是定义在$\mathbb{R}^d$ 上的一列一致有界可测函数，并满足 ϕ_n 收敛于连续函数 ϕ，其中该收敛在 $\mathbb{R}^d$的紧集上一致。则 $\mu_n(\phi_n) \to \mu(\phi)$ 当 $n \to \infty$时。

引理 3。 设 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的测度族，其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$。假设 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}$ 在 $\mathbb{R}^d$上弱收敛于测度 μ，其中该收敛在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$的紧集上一致。那么，给定一个紧集 $C \subset \mathbb{R}^s$，对于任意 $\delta > 0$，存在一个紧集 $C_\delta \subset \mathbb{R}^d$，使得对所有 $t > U_\delta$以及所有 $\boldsymbol{x} \in C$，都有 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}(C_\delta) > 1 - \delta$。

证明。假设该命题不成立，那么对于所有紧集 $C \subset \mathbb{R}^d$，我们都可以选取一个任意大的 t和一个元素 $\boldsymbol{x} \in C$，使得 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}(\chi) \leq 1 - \delta$。选取一个序列 $t_n \in \mathbb{R}$，使得 $t_n > n$，并选取另一个序列 $\boldsymbol{x}_n \in C$，使得对于某个 δ，$\mu_{t_n,\boldsymbol{x}_n}(C) \leq 1 - \delta$。由于当 $n \to \infty$时 $t_n \to \infty$，且 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) \xrightarrow{w} \mu(d\boldsymbol{y})$ 在紧集 C 上一致成立，测度序列 $\mu_{t_n,\boldsymbol{x}_n}$ 必须弱收敛到 μ。但是，如果该序列弱收敛，那么就存在某个 C_δ 和一个整数 N，使得对所有 $n > N$，$\mu_{t_n,\boldsymbol{x}_n}(\chi_\delta) > 1 - \delta$（Kallenberg 2021，第 105 页），这就产生了矛盾。 □

引理 4（单位分解，Rudin （1976）第 251 页）。 设 C 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个紧集，且有一个有限开覆盖 $\{U_i\}_{i\in 1,\ldots,I}$，那么存在一组连续函数 $\{k_j(\boldsymbol{x})\}_{j=1,\ldots,J}$, $\boldsymbol{x} \in C$，使得：

对于每个 $k_j(\boldsymbol{x})$， $0 \leq k_j(\boldsymbol{x}) \leq 1$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in C$;

对于每个函数 k_j，都存在一个覆盖集合 U_{i_j}，使得 $k_j(\boldsymbol{x}) = 0$ 当 $\boldsymbol{x} \notin U_{i_j}$;

(*iii*) $\sum_{j=1}^{J} k_j(\boldsymbol{x}) = 1$，对所有 $\boldsymbol{x} \in C$ 均成立。

引理 5. 设 $\mu_{t,\boldsymbol{x}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的测度族，其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$。假设当 $t \to \infty$ 时，$\mu_{t,\boldsymbol{x}} \xrightarrow{\text{w}} \mu$ 在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$ 的紧集上一致收敛。令 $\boldsymbol{\psi}: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^d$ 和 $\phi: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^d$ 为连续函数，满足对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$，$\phi(\boldsymbol{x}) > 0$。那么，对于任意 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) \to \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y}), \quad \text{as } t \to \infty,$$

并且，对于变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$，该收敛在紧集上一致进行。

证明。 只需证明：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 U_ϵ 使得

$$\sup_{\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{X}_1} \sup_{\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{X}_2} \left| \int_{\mathbb{R}^s} f(\psi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y}) \right| < \epsilon, \tag{A.3}$$

对于所有 $t > U_\epsilon$，其中集合 $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^s$ 是紧集。由引理 3，存在一个紧集$\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 使得 $\mu_{t,\ \boldsymbol{x}}(\mathcal{Y}) > 1 - \epsilon$ 对于所有 $U > U_1$ 对于某个 U_1成立。表达式（A.3）中的第一项等于，

$$\int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) + \int_{\mathbb{R}^s \setminus \mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}).$$

考虑函数 $h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}$。由于 $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{X}_1$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ 都限制在紧集上，且 $\boldsymbol{\psi}$ 和 ϕ 都是连续函数，因此该函数具有紧像 $h(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}) \subset \mathbb{R}^d$。因此，将连续函数 f 限制在 $h(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y})$ 上是一致连续的。于是，对于任意$\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对于所有 $\xi, \xi' \in h(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y})$，其中 $|\xi - \xi| < \delta$，都有 $|f(\xi) - f(\xi')| < \epsilon$。此外，函数 $f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}))$ 关于变量 $\boldsymbol{y}$ 在紧集 $\mathcal{X}_1$ 上是等度连续的。令 $\sup_{\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{X}_1} |\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)| = M_\phi$，则，

$$|h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) - h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}')| = |\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}')| \leq M_\phi |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'|. \tag{A.4}$$

因此，由于 f 在 $h(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y})$ 上一致连续，对于所有满足 $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'| < \delta/M_\phi$ 的 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{y}'$，我们有 $|f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) - f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}'))| < \epsilon$，对所有 $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{X}_1$ 均成立。集合 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 是紧的，因此我们可以找到一个由半径为 δ/M_ϕ、球心为 $\{\boldsymbol{y}^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, I$ 的开球组成的有限覆盖，使得对于这些开球内的任意点 $\boldsymbol{y}$，都有 $|f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) - f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{(i)}))| < \epsilon$。因此，对于所有球心 $\boldsymbol{y}^{(i)}$，都有 $f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) = f\left(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{(i)}\right) + \left[f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) - f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{(i)})\right] = f\left(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{(i)}\right) + R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{(i)})$，根据构造，对于所有 $\boldsymbol{x}_1$，都有 $|R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')| < \epsilon$。根据引理 4，在此覆盖上存在一个（有限）单位分解 $\{k_j(\boldsymbol{y})\}_{j=1,\ldots,J}$，使得对于所有 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$，都有 $\sum_{j=1}^J k_j(\boldsymbol{y}) = 1$，且每个 $k_j(\boldsymbol{y})$ 的支集都包含在一个以 $\boldsymbol{y}^{(j)}$ 为球心的覆盖开球内，因此对于所有 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$,

$$f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) = f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})) \sum_{j=1}^J k_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^J \left[f(h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{(j)})) + R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{(j)}) \right] k_j(\boldsymbol{y}), \tag{A.5}$$

因为 $k_j(\boldsymbol{y}) = 0$在 t 之外 以 $\boldsymbol{y}^{(j)}$为中心的开覆盖球。回到表达式（A.3）并应用 g

三角不等式，

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| +$$
$$+ \left|\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right|. \tag{A.6}$$

令 M_f 为函数 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$的（全局）上确界。根据公式（A.5）中的构造，我们可以对表达式（A.6）右端的第一项进行界定，使得

$$\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\left|\int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| \leq$$
$$\leq M_f \sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\sum_{j=1}^{J}\left|\int_{\mathcal{Y}} k_j(\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathcal{Y}} k_j(\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{J}\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\left|\int_{\mathcal{Y}} R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{(j)})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y})\right| + \sum_{j=1}^{J}\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\left|\int_{\mathcal{Y}} R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{(j)})\mu(d\boldsymbol{y})\right|.$$

由于 $\mu_{t,\ \boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{x}_2$ 的紧集上一致地弱收敛到 $\mu(d\boldsymbol{y})$，且余项 $R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{(j)})$ 在以 $\boldsymbol{y}^{(j)}$ 为中心、半径为 δ/M_ϕ 的球面上满足 $\left|R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{(j)})\right| < \epsilon$，因此我们可以找到 V_2，使得对于任意 $v > V_2$,

$$\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\left|\int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| < JM_f\epsilon + 2J\epsilon.$$

此外，利用紧集 $\mathcal{Y}$ 的定义，并再次应用三角不等式，表达式（A.6）右端的第二项满足：对于 $t > U_1$,

$$\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\left|\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{Y}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y})\mu(d\boldsymbol{y})\right| < 2M_f\epsilon.$$

因此，通过取 $U_\epsilon > \max(U_1, U_2)$，我们可得到表达式（A.3）的任意小上界 . □

引理 6. 令 C 和 S 分别表示可分解图模型中的一个团和一个分隔集。令 $\boldsymbol{X}_E$ 为满足假设 A_0、A_1 和 A_2 的随机向量。令泛函 $\boldsymbol{a}_S^{(v)}(t)$和 $\boldsymbol{b}_S^{(v)}(t)$如 A_2中所定义。则对于每个 $f \in C_b(\mathbb{R}^{|C\setminus S|})$,

$$\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f(\boldsymbol{y})\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E,C\setminus S} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{C\setminus S}(t)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C\setminus S}(t)} \in d\boldsymbol{y}\middle|\frac{\boldsymbol{X}_{E,S} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{S}(t)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{S}(t)} = \boldsymbol{x}\right) \to$$
$$\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{\psi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right) G^{(S)}_{C\setminus S}(d\boldsymbol{y}),\ \text{as } t\to\infty, \tag{A.7}$$

并且关于变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|S|}$，该收敛在紧集上一致成立。

证明。 由（12），我们有 $\boldsymbol{a}^{(v)}_{C\setminus S}(t) + \boldsymbol{b}^{(v)}_{C\setminus S}(t)\,\boldsymbol{y}$ 等于

$$\boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}\left(\boldsymbol{T}^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right) + \boldsymbol{b}^{(S)}_{C\setminus S}\left(\boldsymbol{T}^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right)\left[\boldsymbol{A}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x},t) + \left(\mathbf{1} - \boldsymbol{B}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x},t)\right)\frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\psi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x})}\right].$$

利用这一关系，我们对表达式（A.7）进行变量替换，以消除对$\boldsymbol{a}^{(v)}_{C\setminus S}$（$t$）和 $\boldsymbol{b}^{(v)}_{C\setminus S}$（$t$）的依赖，即

$$\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f(\boldsymbol{y})\,\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C\setminus S} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{X}_S)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{X}_S)} \in d\boldsymbol{y} \;\middle|\; \boldsymbol{X}_S = \boldsymbol{T}^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right) = \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t))\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y})$$

其中

$$\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) = \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C\setminus S} - \boldsymbol{a}^{(S)}_{C\setminus S}\left(\boldsymbol{T}^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right)}{\boldsymbol{b}^{(S)}_{C\setminus S}\left(T^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right)} \in d\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{X}_S = \boldsymbol{T}^{(v)}_{S}(\boldsymbol{x},t)\right),$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\psi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x},t)}{1 - \boldsymbol{B}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x},t)}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x})}{1 - \boldsymbol{B}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x},t)},$$

为简洁起见，省略下标和上标，我们要求

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left|\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)G(d\boldsymbol{y})\right| \to 0, \text{ as } t\to\infty,$$

其中集合 $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^{|S|}$ 是紧的。应用三角不等式可得，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) - \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)G(d\boldsymbol{y})\right| \\
&\qquad\le \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} \left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\right) - f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)\right|\mu_{t,\boldsymbol{x}}(d\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}} - \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S}} \left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)G(d\boldsymbol{y})\right|. \quad \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

我们分别考虑不等式（A.8）右端的各项。

第一项。令 $\mathcal{X}_1\subset \quad \mathcal{X}_2\subset\mathbb{R}^{|S|}$，其中 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 都是紧的。我们考虑更一般的上确界 ，

$$\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} \left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right) - f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right)\right|\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) \quad \text{(A.9)}$$

由引理 2 可知，对于每个 $\epsilon>0$，都存在一个紧集 $\mathcal{Y}$ 和 $U_1>0$，使得$\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(\mathcal{Y})>1-\epsilon$ 对 $t>U_1$ 成立。由假设 A_2，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t)\to\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)$，且 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\to\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1)$，关于变量 $\boldsymbol{x}_1\in\mathbb{R}^{|S|}$在紧集上一致成立。对于紧集 $\mathcal{Y}$中的 $\boldsymbol{y}$，f 在 $\mathbb{R}^{|C\setminus S|}$ 上的连续性意味着涉及函数 $f\in C_b(\mathbb{R}^{|C\setminus S|})$ 的项一致收敛，因此，

$$\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}}\left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t) + \boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right) - f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right)\right| < \epsilon \quad \text{for all } \boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}, \quad \text{for all } t>U_2.$$

此外，若我们令 $M_f := \sup\{|f(\boldsymbol{x})|: \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|C\setminus S|}\}$，则由三角不等式可知

$$\left| f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t)+\boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right) - f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right) \right| < 2M_f.$$

因此， 右端表达式 (A.8) 中第一项的上确界满足 s

$$\begin{aligned}
&\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}}\left(\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t)+\boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right)-f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right)\right|\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\le \sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\int_{\mathcal{Y}}\left(\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t)+\boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right)-f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right)\right|\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) \\
&\qquad+\sup_{\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}_2}\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}\setminus\mathcal{Y}}\left(\sup_{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}_1}\left|f\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,t)+\boldsymbol{y}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,t)\right)-f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_1)+\phi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}\right)\right|\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y}) \\
&\qquad< \epsilon\int_{\mathcal{Y}}\mu_{t,\boldsymbol{x}_2}(d\boldsymbol{y})+2M_f\epsilon < (1+2M_f)\epsilon.
\end{aligned}$$

因此，取 $t > \max(U_1, U_2)$，则可以使表达式 (A.8) 的第一项任意小。

第二项。 由引理 5，可知当 $t\to\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}} \to \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)G(d\boldsymbol{y}),$$

在变量 {v1} 的紧集上均匀 成立。因此，存在 $U_3 > 0$ ，使得对所有 $t > U_3$,

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left|\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} f\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)\mu_{t,\boldsymbol{x}} - \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S}}\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)G(d\boldsymbol{y})\right| < \epsilon$$

因此，对于所有 $t > \max(U_1, U_2, U_3)$，对 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$ 取上确界，右端（A.8）有界于 $\epsilon + (1+2M_f)\epsilon = 2($ $1+M_f)\epsilon$，由此证明了所需结果。 □

注 3。 引理 6 中的结果对于复函数 f 的实积分同样成立，只需在各个不等式中用复平面上的模替代绝对值。类似地，引理2 根据（实）积分的线性性，对复函数也成立。

B.4 定理1的证明

设图 $\mathcal{G} = (V,\ E)$ 的团为 C_1, ..., C_N，它们按照运行交集（2）进行了排序。不失一般性，我们假设 $v\in C_1$，见注释 1。考虑以下测度:

$$\begin{aligned}
\mu^t_{\mathcal{G}}(d\boldsymbol{z}) = \prod_{i=2}^{N}\mathbb{P}&\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C_i\setminus S_i}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(X_v)}\in d\boldsymbol{z}_{C_i\setminus S_i}\ \middle|\ \frac{\boldsymbol{X}_{S_i}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{S_i}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{S_i}(X_v)}=\boldsymbol{z}_{S_i}\right) \\
&\times\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C_1\setminus v}-\boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_v)}\in d\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\ \middle|\ X_v = t+x_v\right)\mathbb{P}\left(X_v - t\in dx_v\ \middle|\ X_v > t\right),
\end{aligned}$$

and

$$\mu_{\mathcal{G}}(d\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{N-1} G^{(S)}_{C_i\setminus S_i}\left(\frac{d\boldsymbol{z}_{C_i\setminus S_i} - \boldsymbol{\psi}^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})}{\phi^{(S_i)}_{C_i\setminus S_i}(\boldsymbol{z}_{S_i})}\right) G^{(v)}_{C_1\setminus v}\left(d\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}\right) F^1_E(dx_v).$$

我们希望证明 $\mu^t_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\text{w}} \mu_{\mathcal{G}}$ as $t\to\infty$，方法是证明特征函数逐点收敛，即对于所有 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^d$，$\chi_{\mu^t_{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\omega}) \to \chi_{\mu_{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\omega})$ as $t\to\infty$，其中 $\iota^2=-1$,

$$\chi_{\mu^t_{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times[0,\infty)} \exp(\iota\,\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{z})\mu^t_{\mathcal{G}}(d\boldsymbol{z}), \qquad \text{and} \qquad \chi_{\mu_{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times[0,\infty)} \exp(\iota\,\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{z})\mu_{\mathcal{G}}(d\boldsymbol{z}),$$

我们为这些测度引入以下简记

$$\mu_{C_i,S_i,v}(d\boldsymbol{z}_{C_i\setminus S_i}) = \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C_i\setminus S_i} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_i\setminus S_i}(X_v)} \in d\boldsymbol{z}_{C_i\setminus S_i} \middle| \frac{\boldsymbol{X}_{S_i} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{S_i}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{S_i}(X_v)} = \boldsymbol{z}_{S_i}\right) \quad i=2,\dots,N,$$

$$\mu_{C_1\setminus v,t}(d\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v}) = \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{C_1\setminus v} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_v)}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_1\setminus v}(X_v)} \in d\boldsymbol{z}_{C_1\setminus v} \;\middle|\; X_v = t + x_v\right), \qquad \text{and}$$

$$\mu_{v,t}(dx_v) = \mathbb{P}\left(X_v - t \in dx_v \;\middle|\; X_v > t\right).$$

我们对 $\{1,\dots,N\}$ 进行归纳法：向一个图中添加一个团，构造出一个含有 $N+1$ 个团的新图。对于 $N=1$，该假设成立，因为这样的图只包含一个团，C_1 因此结论可由假设 A_1 得出。

我们通过嵌套积分来计算含有 $N+1$ 个团的图的特征函数 $\chi_{\mu^t_{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\omega})$，其中包含一个规模为 N 个团的图的特征函数。根据条件独立性,

$$\chi^t_{\mathcal{G}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times[0,\infty)} \exp(\iota\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{z}_{\mathcal{G}}) \times\left[\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} \exp\left(\iota\boldsymbol{t}_{C\setminus S}\cdot\boldsymbol{z}_{C_{N+1}\setminus S_{N+1}}\right)\mu_{C_{N+1},S_{N+1},v}(d\boldsymbol{z}_{C_{N+1}\setminus S_{N+1}})\right] \times \mu_{\mathcal{G}\setminus v,v,t}(d\boldsymbol{z}_{\mathcal{G}\setminus v})\mu_{v,t}(dz_k). \quad \text{(A.10)}$$

聚焦于方括号内的各项，引理 5 和注释 3 表明:

$$\int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{C\setminus S}\cdot\boldsymbol{z}_{C\setminus S}\right)\mu_{C,S,k}(d\boldsymbol{z}_{C\setminus S}) \to \int_{\mathbb{R}^{|C\setminus S|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{C\setminus S}\cdot\boldsymbol{z}_{C\setminus S}\right) G^{(S)}_{C\setminus S}\left(\frac{d\boldsymbol{z}_{C\setminus S} - \boldsymbol{\psi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{z}_S)}{\boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{z}_S)}\right),$$

其中 $t\to\infty$，且在 $\mathbb{R}^{|S|}$ 的紧集上收敛是一致的。此外，由于方括号中的项的实部和虚部均有界，根据引理 2、备注 3以及归纳假设，方程（A.10）右侧趋于

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times[0,\infty)} \exp(\iota\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}\cdot\boldsymbol{z}_{\mathcal{G}})\left[\int_{\mathbb{R}^{|s\setminus c|}} \exp\left(\iota\boldsymbol{\omega}_{C\setminus S}\cdot\boldsymbol{z}_{C\setminus S}\right) G^{(S)}_{C\setminus S}\left(\frac{d\boldsymbol{z}_{C\setminus S} - \boldsymbol{\psi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}})}{\boldsymbol{\phi}^{(S)}_{C\setminus S}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}})}\right)\right]\mu_{\mathcal{G}}(d\boldsymbol{z}_{\mathcal{G}}). \quad \square$$

B.5 定理2的证明

首先，我们需要以下引理。

引理 7。 假设 B_1 成立。令 $H^1(t) = t$，对于 $i = 2, \ldots, N$，令

$$H^i(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) = a_{S_i}^{S_{i-1}} \left\{ H^{i-1}(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_{i-1}}) \right\} + b_{S_i}^{S_{i-1}} \left\{ H^{i-1}(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_{i-1}}) \right\} y_{S_i} \in \mathbb{R}.$$

那么，对于任意紧集 $K^i \subset \mathbb{R}^{i-1}, i = 1, \ldots, N$，其中 $K^0 = \emptyset$，以及任意大的 T，存在T_i，使得 $t > T_i$ 蕴含 $H^i(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) > T$对所有 $(y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) \in K^i$均成立。

引理 7 的证明。证明采用归纳法。对于 $i = 1$，该断言显然成立。假设对于满足 $1 < i < N$ 的 i，该断言成立。只需证明柱集 $K^{i+1} = K^i \times [y_{\min}, y_{\max}]$ 的情形，其中 $y_{S_{i+1}} \in [y_{\min}, y_{\max}]$。我们有 $H^{i+1}(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_{i+1}}) \geq a^{(S_i)}_{S_{i+1}} \left\{ H^i(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) \right\} + b^{(S_i)}_{S_{i+1}} \left\{ H^i(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) \right\} y_{\min}$，并且根据归纳假设，$t > T_i$ 蕴含 $H^i(t, y_{S_2}, \ldots, y_{S_i}) > T$，其中 $T \to \infty$ 时 $\mathbf{1}_{|C_i|-1} \to$ 任意大。由假设可知，B_1 $a^{(S_i)}(\,) + a^{(S_i)}(\,)$ 随着 增大而趋于 T_{i+1}，因此我们可以选择 使得 蕴含 $t > T_{i+1}$。 $C_{i+1} \setminus S_{i+1}$ t $C_{i+1} \setminus S_{i+1}$ t $\boldsymbol{y}_{C_{i+1} \setminus S_{i+1}}$ H^{i+1} t y_{S_2} $\ldots$ $y_{S_{i+1}}$ $> T$ $(\,,\,,\,)$。

□

考虑这些测度，

$$\nu_V^{t,j}(d\boldsymbol{y}_{V \setminus v}) = \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E, C_1 \setminus v} - \boldsymbol{a}^{(v)}_{C_1 \setminus v}(X_{E,v})}{\boldsymbol{b}^{(v)}_{C_2 \setminus v}(X_{E,v})} \in d\boldsymbol{y}_{C_1 \setminus v} \;\middle|\; X_{E,v} = t \right) \nu_{C_i \setminus S_i | S_{i-1}}(d\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i}), \qquad \text{and}$$

$$\nu^j_{V \setminus v}(d\boldsymbol{y}_{V \setminus v}) = G^{(v)}_{C_1 \setminus v}(d\boldsymbol{y}_{C_1 \setminus v}) \prod_{i=2}^{j} G^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(d\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i}),$$

其中

$$\nu_{C_i \setminus S_i | S_{i-1}}(d\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i}) = \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{E, C_i \setminus S_i} - \boldsymbol{a}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(X_{E,S_i})}{\boldsymbol{b}^{(S_i)}_{C_i \setminus S_i}(X_{E,S_i})} \in d\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i} \;\middle|\; \frac{X_{E,S_i} - a^{S_{i-1}}_{S_i}(X_{E,S_{i-1}})}{b^{S_{i-1}}_{S_i}(X_{E,S_{i-1}})} = y_{S_i} \right).$$

接下来需要证明，对于任意 j，当 $t \to \infty$ 时，$\nu^{t,\,j}_{V \setminus v} \xrightarrow{\text{w}} \nu^j_{V \setminus v}$。我们通过对 $\{1, \ldots, N\}$ 进行归纳，证明特征函数逐点收敛，从而证明弱收敛。根据假设 B_1，当 $j = 1$ 时，该结论显然成立。假设对于一个满足 $1 < j < N$ 的 j，该结论成立。通过加入团 C_{j+1} 来扩展该图。

于是，相关的特征函数为

$$\chi^{t,j+1}(\boldsymbol{\omega}_{V^{j+1}}) = \int_{\mathbb{R}^{|V^{j+1}|}} \exp\left(\iota\, \boldsymbol{\omega}_{V^{j+1}} . \boldsymbol{y}_{V^{j+1}}\right) \nu_{C_{j+1} \setminus S_{j+1} | S_j}(d\boldsymbol{y}_{C_{j+1} \setminus S_{j+1}}) \nu_V^{t,j}(d\boldsymbol{y}_{V \setminus v}),$$

and

$$\chi^{j+1}(\boldsymbol{\omega}_{V^{j+1}}) = \int_{\mathbb{R}^{|V^{j+1}|}} \exp\left(\iota\, \boldsymbol{\omega}_{V^{j+1}} . \boldsymbol{y}_{V^{j+1}}\right) G^{S_{j+1}}_{C_{j+1} \setminus S_{j+1}}(d\boldsymbol{y}_{C_{j+1} \setminus S_{j+1}}) \nu_V^{j}(d\boldsymbol{y}_{V \setminus v}).$$

我们还定义了一个与条件概率测度相关联的特征函数

$$\chi^{i+1|i,t}(\boldsymbol{\omega}_{C_{i+1} \setminus S_{i+1}}, y_{S_1} \ldots, y_{S_i}) = \int_{\mathbb{R}^{|C_{i+1} \setminus S_{i+1}|}} \exp\left(\iota\, \boldsymbol{\omega}_{C_{i+1} \setminus S_{i+1}} . \boldsymbol{y}_{C_{i+1} \setminus S_{i+1}}\right) \nu_{C_i \setminus S_i | S_{i-1}}(d\boldsymbol{y}_{C_i \setminus S_i}).$$

Now,

$$\begin{aligned}\chi^{t,j+1}(\omega_{V^{j+1}}) &= \int_{\mathbb{R}^{|V^j|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{V^j}.\boldsymbol{y}_{V^j}\right) \\ &\quad\times \int_{\mathbb{R}^{|V^{|C_{j+1}\setminus S_{j+1}|}|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}.\boldsymbol{y}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}\right)\nu_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}|S_j}(d\boldsymbol{y}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}})\nu_V^{t,j}(d\boldsymbol{y}_{V\setminus v}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{|V^j|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{V^j}.\boldsymbol{y}_{V^j}\right)\chi^{j+1|j,t}(\boldsymbol{\omega}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}, y_{S_1}\ldots, y_{S_j})\nu_V^{t,j}(d\boldsymbol{y}_{V\setminus v}).\end{aligned}$$

由 As 假设 B_1 并且根据引理 7 我们有，对于任意 $(y_{S_1}, \ldots\ldots, y_{S_j})$，均有 $t\to\infty$ ，

$$\chi^{j+1|j,t}(\boldsymbol{\omega}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}, y_{S_1}\ldots, y_{S_j}) \to \int_{\mathbb{R}^{|C_{j+1}\setminus S_{j+1}|}} \exp\left(\iota\,\boldsymbol{\omega}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}.\boldsymbol{y}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}\right) G^{S_{j+1}}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}|}(d\boldsymbol{y}_{C_{j+1}\setminus S_{j+1}}).$$

此外，根据引理 7，后一收敛在 $(y_{S_2}, \cdots y_{S_{j+1}}) \in \mathbb{R}^j$ 的紧集上一致。因此，根据引理 2，可得 $\chi^{t,\ j+1}(\omega_{V^{j+1}}) \to \chi^{j+1}(\omega_{V^{j+1}})$。

附录 C 特定例子的证明

C.1 具有 Hüsler–Reiss 团的可分解图模型

引理 *1* 的证明。 设 $S\neq\emptyset$ 满足 $S\subset C$。指数测度 $\lambda^{(C)}(\boldsymbol{y})$ 的密度 $\Lambda^{(C)}(\boldsymbol{y})$ 可对任意 $i\in C$写为

$$\lambda^{(C)}(\boldsymbol{y}) = y_i^{-2}\prod_{j\in C\setminus i} y_j^{-1}\varphi_{|C|-1}\left\{\log\left(\frac{\boldsymbol{y}_{C\setminus i}}{y_i}\right)+\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus i,i}}{2}, \boldsymbol{\Sigma}_C^{(i)}\right\}, \quad i\in C,$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_C^{(i)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(C)}_{C\setminus s,\ i}\mathbf{1}^\top + (\boldsymbol{\Gamma}^{(C)}_{C\setminus s,\ i}\mathbf{1}^\top)^\top + \boldsymbol{\Gamma}^{(C)}_{C\setminus s,\ C\setminus i}$。接下来，假设若 $v\in C$，则 $s=v$；而否则， s 等于 S 中任意一个顶点。

对于 $\boldsymbol{y}_C\in\mathbb{E}^C$，我们有，

$$\begin{aligned}\Lambda_S^{(C)}(\boldsymbol{y}_C) &= \frac{\partial^{|S|}}{\partial\boldsymbol{y}_S}\lambda^{(C)}(\boldsymbol{y}) = \int_{[\mathbf{0},\,\boldsymbol{y}_{C\setminus S}]}\lambda_S^{(C)}\left(\boldsymbol{x}_{C\setminus S},\boldsymbol{y}_S\right)d\boldsymbol{x}_{C\setminus S}, \\ &= y_i^{-2}\prod_{j\in S\setminus s} y_j^{-1}\frac{|\boldsymbol{Q}_C^{(s)}|^{1/2}}{(2\pi)^{(|C|-1)/2}}\int_{[\mathbf{0},\boldsymbol{y}_{C\setminus S}]}\exp\left(-\boldsymbol{z}_C^\top\boldsymbol{Q}_C^{(s)}\,\boldsymbol{z}_C/2\right)\left|\frac{\partial\boldsymbol{z}_{C\setminus S}}{\partial\boldsymbol{x}_{C\setminus S}}\right|\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{C\setminus S},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{z}_C = (\boldsymbol{z}_{S\setminus s},\boldsymbol{z}_{C\setminus S}) \equiv (\boldsymbol{z}_{S\setminus i}(\boldsymbol{y}_{S\setminus s})\boldsymbol{z}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_{C\setminus S}))$，且

$$(\boldsymbol{z}_{S\setminus s}(\boldsymbol{y}_{S\setminus s}),\boldsymbol{z}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_{C\setminus S})) = \left(\log\left(\boldsymbol{y}_{S\setminus s}/y_s\right)+\boldsymbol{\Gamma}_{S\setminus s,s}/2, \log\left(\boldsymbol{x}_{C\setminus S}/y_s\right)+\boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus S,s}/2\right),$$

以及 $\boldsymbol{Q}_C^{(s)} = (\boldsymbol{\Sigma}_C^{(s)})^{-1}$。将二次型展开为由 $C\setminus S$ 和 $S\setminus s$索引的元素后，我们得到:

应用变量替换 $\boldsymbol{w}_{C\setminus S} = \boldsymbol{z}_{C\setminus S}(\boldsymbol{x}_{C\setminus S})$ 后，得到：

$$\Lambda_S^{(C)}(\boldsymbol{y}_C) = y_s^{-2} \prod_{j\in S\setminus s} y_j^{-1} \frac{|\boldsymbol{Q}_C^{(s)}|^{1/2}}{(2\pi)^{(|C|-1)/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_{S\setminus i}^\top \boldsymbol{Q}_{S\setminus s}^{(s)} \boldsymbol{z}_{S\setminus s}\right) \times$$
$$\times \int_{[-\infty, \boldsymbol{z}_{C\setminus S}(\boldsymbol{y}_{C\setminus S})]} \exp\left[-\boldsymbol{z}_{S\setminus s}^\top \boldsymbol{Q}_{S\setminus s, C\setminus S} \boldsymbol{w}_{C\setminus S} - \{\boldsymbol{w}_{C\setminus S}^\top \boldsymbol{Q}_{C\setminus S}^{(s)} \boldsymbol{w}_{C\setminus S} / 2\}\right] d\boldsymbol{w}_{C\setminus S}.$$

补　　全被积函数自变量中的平方并化简后得到　　t

$$\Lambda_S^{(C)}(\boldsymbol{y}_C) = y_s^{-2} \prod_{j\in S\setminus s} y_j^{-1} \frac{(2\pi)^{(|C\setminus S|-1)/2}|\boldsymbol{Q}_C^{(s)}|^{1/2}}{(2\pi)^{(|C|-1)/2}|\boldsymbol{Q}_{C\setminus S}^{(s)}|^{1/2}} \Phi\left\{\log\left(\frac{\boldsymbol{y}_{C\setminus S}}{y_s}\right) + \frac{\boldsymbol{\Gamma}_{C\setminus S}}{2}; \boldsymbol{\mu}^{(s)}(\boldsymbol{y}_{S\setminus s}), \boldsymbol{\Sigma}_{C\setminus S, C\setminus S}^{(s)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_{S\setminus s}^\top [\boldsymbol{Q}_{S\setminus s, C\setminus S}^{(s)} (\boldsymbol{Q}_{C\setminus S}^{(s)})^{-1} \boldsymbol{Q}_{C\setminus S, S\setminus s}^{(s)} - \boldsymbol{Q}_{S\setminus i, S\setminus s}^{(s)}] \boldsymbol{z}_{S\setminus s}\right\},$$

其中 $\boldsymbol{\mu}^{(s)}(\boldsymbol{y}_{S\setminus s}) = -(\boldsymbol{Q}_{C\setminus S}^{(s)})^{-1} \boldsymbol{Q}_{C\setminus S,\ S\setminus s}^{(s)} \boldsymbol{z}_{S\setminus s}(\boldsymbol{y}_{S\setminus s})$。因此，进一步化简并除以 $\Lambda_S^{(S)}(\boldsymbol{y}_S)$ 后，可得

$$\frac{\Lambda_S^{(C)}(\boldsymbol{y}_C)}{\Lambda_S^{(S)}(\boldsymbol{y}_S)} = \Phi\left\{\log(\boldsymbol{y}_{C\setminus S});\ \boldsymbol{a}_{C\setminus S}^{(S)}(\log(\boldsymbol{y}_S)) + \boldsymbol{m}_{C\setminus S}, (\boldsymbol{Q}_{C\setminus S}^{(s)})^{-1}\right\},$$

其中 $\boldsymbol{a}_{C\setminus S}^{(S)}$ 和 $\boldsymbol{m}_{C\setminus S}$ 定义于第（4.2）节。　□

命题 *3* 的证明。对尾部图模型方程（23）两边取期望，即可得到均值的递推关系。

对于精度矩阵，我们依据一个关于稀疏逆矩阵的矩阵求逆结果（Johnson 和 Lundquist 1998年，定理 1）。设 $\boldsymbol{X}_{V'}$ 是一个任意的高斯随机变量，其条件独立关系由弦图 $\mathcal{G}'$ 描述，该图的顶点为 V'。设 $\mathcal{G}'$ 的团和分隔集分别记为 $\{C_i':\ i = 1, \ldots, N\}$ 以及 $\{S_i':\ i = 2, \ldots, N\}$。此外，设随机子向量 $\boldsymbol{X}_{C_i'}$ 和 $\boldsymbol{X}_{S_i'}$ 的协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\Sigma}_{C_i'}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{S_i'}$，则随机向量 $\boldsymbol{X}_{V'}$ 的精度矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_{V'} = \sum_{i=1}^N \breve{\boldsymbol{Q}}^i - \sum_{i=2}^N \breve{\boldsymbol{P}}^{i-1}, \tag{A.11}$$

其中 $\boldsymbol{Q}^i = (\boldsymbol{\Sigma}_{C_i'})^{-1}$ 且 $\boldsymbol{P}^{i-1} = (\boldsymbol{\Sigma}_{S_i'})^{-1}$。接下来，使用迭代过程推导高斯尾部图模型 $\boldsymbol{Z}_{V\setminus v}^{(v)}$ 的矩阵 $\boldsymbol{Q}^i$ 和 $\boldsymbol{P}^{i-1}$。当 $C_i \cap \{v\} \neq \emptyset$ 时，我们有 $\boldsymbol{Q}^i = (\boldsymbol{\Sigma}_{C_i\setminus v}^{(v)})^{-1}$。特别地，我们始终假设 $C_1 \cap \{v\} \neq \emptyset$，因此 $\boldsymbol{Q}^1 = (\boldsymbol{\Sigma}_{C_1\setminus v}^{(v)})^{-1}$。对于 $i > 1$，分隔集 S_i 是 C_i 和 C_{i-1}的子图。因此，给定 $\boldsymbol{Q}^{i-1}$ 后，我们可以使用以下公式推导 $\boldsymbol{P}^{i-1}$，它是高斯随机向量 $\boldsymbol{Z}_{S_i}^{(v)}$ 的精度

$$\boldsymbol{P}^{i-1} = \left[\left(\{\boldsymbol{Q}^{i-1}\}^{-1}\right)_{S_i, S_i}\right]^{-1}.$$

当 $C_i \cap \{v\} = \emptyset$时，引理1表明，高斯随机向量 $\left(\boldsymbol{Z}_{C_i\setminus S_i}^{(v)} - \boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i,\ S_i} \boldsymbol{Z}_{S_i}^{(v)}, \boldsymbol{Z}_{S_i}^{(v)}\right)$

具有精度为.....的分布

因此，高斯随机向量 $\boldsymbol{Z}_{C_i}^{(v)} = \left(\boldsymbol{Z}_{C_i\setminus S_i}^{(v)}, \boldsymbol{Z}_{S_i}^{(v)}\right)$ 的分布具有精度 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{C_i\setminus S_i}^{(s_i)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}^{i-1} \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{Q}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{C_i\setminus S_i}^{(s_i)} + \boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i,S_i}\boldsymbol{P}^{i-1}\left(\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i,S_i}\right)^T & -\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i,S_i}\boldsymbol{P}^{i-1} \\ -\boldsymbol{P}^{i-1}\left(\boldsymbol{A}_{C_i\setminus S_i,S_i}\right)^T & \boldsymbol{P}^{i-1} \end{bmatrix},$$

分布的精度结果 $\boldsymbol{Z}_{V\setminus v}^{(v)}$ 由（A.11）得出。 □

致谢

A.C 和 I.P 感谢 Graeme Auld 阅读了论文前面的部分，并提出了有助于提高论文清晰度的宝贵意见。

参考文献

Asenova, S.、Mazo, G. 和 Segers, J.（2020年），“关于吸引至 Hüsler-Reiss 分布的潜在马尔可夫树模型中的极值依赖推断”，*Extremes* **24**（3），461–500。

Asenova, S. and Segers, J.（2021），‘块图上马尔可夫随机场的极值：极值稳定极限与结构化 Hüsler-Reiss 分布’，*arXiv:2112.04847* 。

Billingsley, P.（2008），《概率与测度》，John Wiley and Sons。

Coles, S. G. and Tawn, J. A.（1991），‘多元极端事件建模’，《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法学）》**53**(2), 377–392。

Dawid, A. and Lauritzen, S.（1993），‘可分解图模型统计分析中的超马尔可夫定律’，《统计年刊》**21**(3),1272–1317。

Engelke, S. and Hitz, A. S.（2020年），‘极值图模型（附讨论）’，《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法学）》**82**(4), 871–932。

Engelke, S. 和 Ivanovs, J.（2021年），《多元极值的稀疏结构》，《统计学及其应用年度评论》**8**, 241–270。

Engelke, S.、Malinowski, A.、Kabluchko, Z. 和 Schlather, M.（2015），《Hüsler-Reiss分布和Brown-Resnick过程的估计》，《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法学）》**77**（1），239–265。

Engelke, S. 和 Volgushev, S.（2022），《极值树模型的结构学习》，《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法学）》**84**（5），2055–2087。

Grimmett, G.（2018），图上的概率：图与格子上的随机过程，第2版，剑桥大学出版社。

Heffernan, J. E. and Resnick, S. I.（2007），‘具有极端分量的随机向量的极限定律’，应用概率年刊 **17**(2)，537–571。Heffernan, J. E. and Tawn, J. A.（2004），‘多元极值的条件方法（附讨论）’，《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法学）》**66**(3)，497–546。Hentschel, M., Engelke, S. and Segers, J.（2022），‘通过矩阵补全对Hüsler-Reiss图模型进行统计推断’，*arXiv:2210.14292* 。Janssen, A. and Segers, J.（2014），‘马尔可夫尾链’，应用概率杂志 **51**(4)，1133–1153。Johnson, C. R. and Lundquist, M.（1998），‘稀疏逆矩阵的矩阵局部求逆’，线性代数及其应用 **277**(1)，33–39。Kabluchko, Z., Schlather, M. and De Haan, L.（2009），‘与负定函数相关的平稳极大稳定随机场’，概率年刊 **37**(5)，2042–2065。Kallenberg, O.（2021），现代概率论基础，第3版，施普林格。Kiriliouk, A., Rootzén, H., Segers, J. and Wadsworth, J. L.（2019），‘基于多元广义帕累托分布的阈值超越峰值建模’，技术计量学 **61**(1)，123–135。Kulik, R. and Soulier, P.（2015），‘具有极值独立性的重尾时间序列’，*Extremes***18**(2)，273–299。Lauritzen, S. L.（1996），图模型，克拉伦登出版社。Papastathopoulos, I., Casey, A. and Tawn, J. A.（2023），‘高阶马尔可夫链极值相关的隐尾链与依赖参数递推方程’，*arXiv:1903.04059* 。Papastathopoulos, I., Strokorb, K., Tawn, J. A. and Butler, A.（2017），‘马尔可夫链的极端事件’，应用概率进展 **49**(1)，134–161。Perfekt, R.（1997），‘一类取值于 $\mathbb{R}^d$的马尔可夫链的极值理论’，*Adv. Appl.Probab.* **29**(1)，138–164。Pickands, J.（1975），‘利用极端次序统计量进行统计推断’，*Ann. Statist.* **3**，119–131。Resnick, S. I.（2007），重尾现象：概率与统计建模，施普林格。Rootzén, H., Segers, J. and L Wadsworth, J.（2018），‘多元阈值超越模型’，*Extremes***21**(1)，115–145。Rootzén, H. and Tajvidi（2006），‘多元广义帕累托分布’，伯努利**12**，917–930。Rudin, W.（1976），数学分析原理，第3版，麦格劳-希尔。Segers, J.（2020），‘单分量与多分量正则变差及马尔可夫树的极值’，应用概率进展 **52**(3)，855–878。Smith, R. L.（1992），‘马尔可夫链的极值指数’，*J. Appl. Probab.* **29**(1)，37–45。Yun, S.（1998），‘高阶平稳马尔可夫链的极值指数’，应用概率年刊 **8**(2)，408–437。