arXiv:2302.05190v2 [cs.LO] 9 May 2023

对于类型论元理论，内部 Sconing 已足够

RafaëlBocquet ！厄特沃什·罗兰大学，
布达佩斯，匈牙利
AmbrusKaposi ！厄特沃什·罗兰大学，
布达佩斯，匈牙利
ChristianSattler ！
瑞典查尔姆斯理工大学

摘要

关于类型论的元定理通常通过将语法解释到利用范畴粘合构造的模型中来证明。我们提出只使用 sconing（沿全局截面函子进行粘合），而不使用一般的粘合。sconing 在预层范畴内部进行，并通过外部化恢复原始的粘合模型。

我们的方法依赖于涉及两种模型概念的构造：一阶模型（带有显式上下文）和高阶模型（不带显式上下文）。sconing 将展示高阶模型转换为展示的一阶模型。

借助这些构造，我们为类型论语法推导出专门的归纳原理。这类归纳原理的输入是对其动机和方法的无样板代码描述，无须提及上下文；输出则是一个截面，其计算规则以相同的内部语言指定。我们通过证明类型论的规范性、规范化和句法参数性来展示这一框架。

2012年美国计算机协会 **主题分类** 计算理论 → 逻辑

关键词和短语 类型论、预层、规范性、规范化、sconing、粘合

经费支持 *Ambrus Kaposi*：获匈牙利科学院博雅伊奖学金资助，并获得匈牙利国家研究、开发与创新基金“特定应用领域高可靠信息技术解决方案”项目的资助；该项目由主题卓越计划 TKP2020-NKA-06 资助计划提供经费。

1 引言

类型论的语法可以表示为广义代数理论（GAT）的模型范畴中的始对象，也就是说，可以表示为商归纳-归纳类型（QIIT）。初始性为语法提供了一个归纳原理，即 QIIT 的依赖消去子。随后，可以通过仔细构造定义在语法之上的理论模型，或等价地构造归纳原理的动机和方法，来证明语法的元理论性质，例如规范性或规范化。然而，将语法表示为 QIIT，意味着要显式编码该理论的代换演算；特别是，每个类型构造子或项构造子都附有一条代换规则。如果将复杂模型的所有组成部分都显式写出，就必须证明它们都保持代换。更重要的是，如果只在这种一般性层面上工作，就难以将证明方法抽象为可复用的定理。

作为（一次）广义代数表示的一种替代方案，可以将类型论表示为二阶或高阶理论，例如使用逻辑框架 [21]或 Uemura 的可表示映射范畴 [38]。高阶表示使我们能够使用高阶抽象语法（HOAS），其中绑定子由元理论函数编码。在实践中，这意味着对替换的稳定性是隐

含的。从语义上看，HOAS 可以在预层范畴的内部语言中得到解释 [23]。在预层范畴的内部语言中，所有构造都自动对基范畴的态射保持稳定。

在这项工作中，我们提出了一种结合一阶表示与高阶表示各自优势的方法。我们考虑类型论模型的两种概念：一阶模型对应一阶表示，而高阶模型对应高阶表示。通常，一阶模型是类型论的范畴模型（带有附加结构的带族范畴），而高阶模型则近似为在该理论的类型构造子下封闭的宇宙。这两种概念在预层范畴的外部和内部语言中都有意义。我们还有展示的高阶模型和展示的一阶模型的概念，分别对应归纳原理的动机和方法。我们介绍了少量在外部模型、内部模型、一阶模型和高阶模型之间切换的构造。这些构造单独来看都很简单，但可以组合起来，推导出证明元理论结果所需的归纳原理。下文列出了这些构造（FOM =一阶模型，HOM = 高阶模型）。限制和外部化操作也可以应用于展示的一阶模型和一阶模型的态射。

构造	输入	输出
内化	FOM $\mathcal{M}$	HOM $\mathbb{C}$在 **预层范畴**($\mathcal{M}$)中
集合-上下文化	HOM $\mathbb{M}$	FOM **集合**$_{\mathbb{M}}$
望远镜式上下文化	HOM $\mathbb{M}$	FOM **电传**$_{\mathbb{M}}$
限制	函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$， FOM $\mathcal{M}$在 **预层范畴** ($\mathcal{D}$) 中	FOM $F^*(\mathcal{M})$ 在 **预层范畴** ($\mathcal{C}$) 中
外部化	FOM $\mathcal{M}$在 **预层范畴** ($\mathcal{D}$) 中	外部 FOM $1^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$
Scone-上下文化	FOM $\mathcal{M}$, 显示的 HOM $\mathbb{M}^\bullet$ 之上 $\mathcal{M}$	显示的 FOM **Scone**$_{\mathbb{M}^\bullet}$ 之上 $\mathcal{M}$

最值得注意的运算是语境化[1]，，它们将高阶模型转化为一阶模型。**集合**-上下文化将从宇宙构造一阶模型的过程加以推广；其底层范畴始终是集合范畴。望远镜式上下文化是**集合**-上下文化的上下文核心；它将底层范畴限制为望远镜范畴。**Scone**-上下文化是将**集合**-上下文化推广到显示的高阶模型和一阶模型的一种方式，它们分别对应归纳原理的动机和方法；其底层范畴始终是某个一阶模型的 Sierpiński 锥，也称为 scone $\mathcal{M}_!$。

我们的主要观察是，在预层范畴内部进行 sconing（即 **Scone**-上下文化），从外部看对应于一种更复杂的粘合构造。例如，[13] 中的规范化模型可以恢复为：对在重命名范畴上的预层中构造的展示高阶模型进行 **Scone**-上下文化，再将其外部化。

这些构造的主要预期用途，是陈述并证明相对归纳原理。通常，对类型论语法进行归纳所得的结果，只在某些句法上下文中成立，或者只在某些句法替换下保持稳定。例如，规范性只在空上下文中成立。规范化在所有上下文中都成立，但只在重命名下保持稳定。这种情况由一个函子描述，该函子映入语法 $F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$：归纳所得的结果

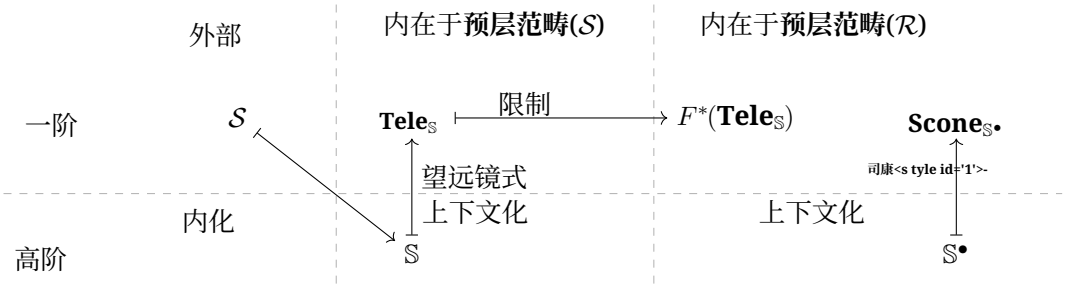
[1] “上下文化”一词反映了这些运算会使上下文显式化这一事实。它与上下文式模型这一概念无关。

应在 $\mathcal{R}$的态射下保持稳定。Sterling [34], 将这些函子称为“图形形状”；它们也与 Twelf [31]中的世界有关。我们证明以下函子的相对归纳原理。

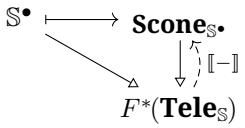
$1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ 规范性 [13] (定理 14)$\mathbf{Ren}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ 规范化 [4, 13] (定理 18)$\square \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$ 立方类型论的（同伦/严格）规范性 [14] (定理 33)$\mathcal{A}_{\square} \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$ 立方类型论的规范化 [36] (定理 36)

我们还展示了如何通过实例化 $1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$和 $\mathbf{Ren}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$的相对归纳原理来证明规范性和规范化。我们没有证明立方类型论的规范性或规范化，但我们认为，目前已知的证明可以重新表述为 $\square \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$ 和 $\mathcal{A}_{\square} \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$的相对归纳原理的实例。

通常，范畴 $\mathcal{R}$ 可以描述为某个结构化范畴范畴中的始对象。相对于函子 F 的相对归纳原理，是一种结合了 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$泛性质的归纳原理。在我们之前的工作中 [10], ，相对归纳原理是用“无上下文扩展的展示模型”和“相对截面”这两个相当临时的概念来表述的。在本文中，相对归纳原理的输入是一个展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$，结果则只是一个（第一阶）截面 $[\![-]\!]$，属于$\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$。先前的“无上下文扩展的展示模型”这一概念，在以$F^*$（$\mathbf{Tele}_{\mathbb{S}}$）为底的展示高阶模型这一特殊情形下得以恢复。下图说明了相对归纳原理（$F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$）的陈述和证明中涉及的构造。



$\mathbb{S}^\bullet$ 和$\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ 都显示在内部一阶模型 $F^*(\mathbf{Tele}_{\mathbb{S}})$ 上。



我们工作的一个重要特点是，截面 $[\![-]\!]$ 具有良好的计算行为，尽管我们并未正式分析这种行为。事实上，我们的部分理解来自考察高阶观测类型论 [33, 6], 中同余运算 ap 的计算行为；该运算在预层（其底层是 H.O.T.T. 的语法）内部也是一个（一阶）模型的态射。

相关工作

逻辑关系与范畴粘合。这项工作的最初动机，是理解依赖类型理论中代数化且无约简的规范化证明。范畴粘合的变体曾被用于证明简单

类型 [2, 16, 37], System F [3], 和依赖类型 [4, 13, 15]的规范性或规范化。这些方法可与基于归约的规范化证明相对照，例如 [1, 32]。

逻辑关系曾被用于证明类型论的句法参数性 [9, 5]以及简单类型 λ 演算的可定义性 [26]。已有研究表明，范畴粘合同时推广了句法参数性和规范性证明 [28]。

逻辑框架与高阶抽象语法。高阶抽象语法（HOAS）是指使用元理论函数来指定句法绑定符。Hofmann [23]解释了如何在预层范畴的内部语言中解释 HOAS。

Uemura [38] 基于这些思想给出了类型论的一般定义，我们将其称为二阶广义代数理论（SOGAT）。它推广了 Fiore 和 Mahmoud [17]研究过的二阶代数理论的概念。Harper 提出了一种逻辑框架的等式变体 [20]，用于定义与 SOGAT 对应的带绑定的理论。我们认为，本文中的构造可以推广到任意 SOGAT。Gratzer 和 Sterling [19] 提出使用局部笛卡尔闭范畴（LCCC）来定义高阶理论（不附加可表示性条件），这类理论对应于我们的高阶模型；不过，我们也考虑一阶模型。

合成 Tait 可计算性。合成 Tait 可计算性（STC, [34, 35]）是一种依赖于托普斯的 Artin 粘合的内部语言的方法，通常通过粘合句法托普斯和语义托普斯来构造。可以使用一对开/闭模态，在 Artin 粘合的内部语言中区分句法部分和语义部分。STC 已被应用于立方类型论 [36], 多模态类型理论 [18] 和单纯形类型论 [39]的规范化证明。

STC 和我们的方法都为元定理的证明提供了一个综合性的框架。我们的方法在某些方面或许更简单，例如，我们不使用任何模态，也不需要使用重新对齐；我们承认，这在一定程度上是偏好的问题。与 STC 相比，我们的方法的主要优势在于，我们对归纳原理的结果有一个内部规范。

Sterling 在其学位论文中 [34], 简要讨论了高阶理论的 Henkin 模型概念。Henkin 模型是一种高阶模型，其中对依赖积采用了非标准解释。我们注意到，Henkin 模型与一阶模型密切相关：二阶理论的 Henkin 模型等价于民主一阶模型（即 [38, 定理 7。30]）。

贡献

本文的主要结论是，使用高阶抽象语法时，即使在内在语境下，我们也不应舍弃一阶表示。具体而言，恰当的展示高阶模型概念（归纳原理的输入）是建立在一阶模型之上的。归纳原理的输出同样是一阶模型的截面，且仍然是内在的。

技术贡献如下：相对归纳原理结合了底层范畴的初始性与语法的初始性；我们推导出了四种这样的归纳原理；内化、上下文化和外部化构造使我们能够表述相对归纳原理；通过分析截面范畴，推导出内部截面。主要结论得到了这些归纳原理的应用支持：无需繁琐样板代码即可证明规范性、规范化和句法参数性。据我们所知，这

篇论文是首篇在综合性框架中定义后者的论文。截面这一概念是在内部指定的，这一特点使我们能够在后续归纳中直接复用它。我们在范式唯一性的证明中利用了这一点：该证明在规范化之后作为独立步骤进行，并依据截面如何计算范式。

论文结构

在第 2 节中，我们定义了一个示例类型论的一阶模型和高阶模型，以及将二者联系起来的构造。在第 3 节中，我们定义了展示高阶模型，它们汇集了归纳原理的动机和方法。我们还定义了 sconing，它将展示高阶模型转化为其一阶变体，并提供截面的概念。随后我们转向应用：在第 4 节中，我们使用相对于空上下文的归纳原理证明规范性（定理 14），这是前述定义的一个直接推论。在第 5 节中，我们使用相对于重命名的归纳原理证明规范化（定理 18）。这个归纳原理是用第 6 节中介绍的方法证明的。附录 B 描述了定理 14 的另一项应用（句法参数性），附录 C 则证明了上述归纳原理的立方变体。

背景

我们假定读者对类型论的范畴语义 [11, 5] 以及将外延类型论用作预层范畴内部语言的方式 [22] 有一定了解。

我们使用局部可表依赖预层的概念来编码上下文扩展（见定义 21）。这个定义是可表示自然变换概念的一种更具指标化的表述；Awodey 曾用该概念给出上下文与类型族的一种替代定义，称为自然模型 [8]。

2 一阶模型与高阶模型

贯穿全文的例子是一种最简依赖类型论 $\mathcal{T}$，其中只有 Π-类型，但我们的构造可直接推广到更丰富的类型论。附录中还讨论了其他一些类型论，包括带宇宙的依赖类型论和立方类型论。将其推广到任意二阶广义代数理论留待未来工作。

我们为 $\mathcal{T}$ 定义高阶模型和一阶模型的概念。高阶模型本质上是一个在依赖积下封闭的宇宙，而一阶模型则是一个配备了 Π-类型的带族范畴（上下文与类型族）。高阶模型是某个高阶理论 $\mathcal{T}^{\mathsf{ho}}$ 的模型（该理论的运算可以具有高阶排序；由某个局部笛卡尔闭范畴分类），而一阶模型则是某个（一阶）本质代数理论 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}}$ 的模型（该理论的运算具有一阶排序；由某个有限完备范畴分类）。

[2] 广义代数理论与本质代数理论之间的区别与本文无关。

2.1 定义

▶**定义 1.** $\mathcal{T}$ 的一个高阶模型 由以下族和运算组成：

Ty : 集合，Tm :Ty $\to$ 集合，$\Pi : \forall(A : \text{类型})(B : \mathsf{Tm}(A) \to \text{类型}) \to \text{类型}$，应用 : $\forall A\ B\ (f : \mathsf{Tm}(\Pi(A,\ B)))\ (a : \mathsf{Tm}(A)) \to \mathsf{Tm}(B(a))$，λ抽象 : $\forall A\ B\ (b : (a : \mathsf{Tm}(A)) \to \mathsf{Tm}(B(a))) \to \mathsf{Tm}(\Pi(A,\ B))$，

满足与 β-规则和 η-规则相对应的方程：

$$\lambda\text{抽象}(\lambda a \mapsto \text{应用}(f,\ a)) = f, \qquad \mathsf{app}(\mathsf{lam}(b), a) = b(a). \quad \lrcorner$$

▶**定义 2.** $\mathcal{T}$的一个一阶模型是一个配备了 Π-类型的上下文与类型族 $\mathcal{C}$ 。 $\lrcorner$

一阶模型的概念可以由一阶广义代数理论 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}}$ 来呈现。等价地，一阶模型是一个带有终对象 $1_{\mathcal{C}}$ 的范畴 $\mathcal{C}$，以及一个在 **预层范畴($\mathcal{C}$)** 中对 $\mathcal{T}$ 的（全局）高阶模型 $\mathbb{C}$，其中依赖预层 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}$ 是局部可表的。高阶模型 $\mathbb{C}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的内化。

我们用黑板粗体字母 $\mathbb{M}$、$\mathbb{N}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{S}$、$\mathbb{R}$ 等表示高阶模型，用花体字母 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 等表示一阶模型。我们尽量用对应的字母表示一阶模型底层的内部高阶模型。例如，若 $\mathcal{C}$ 是一个外部一阶模型，我们用 $\mathbb{C}$ 表示它在 **预层范畴($\mathcal{C}$)** 中底层的内部高阶模型。我们用 $\mathbb{C}.\mathsf{Ty}$、$\mathcal{C}.\mathsf{Tm}$、$\mathcal{C}.\Pi$等表示模型的组成部分。

我们将 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 记作 $\mathcal{T}$ 的一阶模型所构成的 1-范畴，将 $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ 或简称为 $\mathcal{S}$ 记作其始对象（字母“S”同时代表语法和代换）。

2.2 上下文化

一般来说，我们几乎从不希望显式构造一阶模型的所有组成部分，因为若不依赖预层模型的内部语言，检查函子性和自然性条件会很繁琐。不过，对于某些模型，函子性和自然性条件是平凡成立的。类型论在集合范畴上的“标准模型”就是这种情形：在内涵类型论中定义该标准模型时，所有自然性和函子性条件在定义上都成立。

标准模型的构造可以推广为从高阶模型构造一阶模型，下面我们将对此进行描述。

▶ **构造 3 (集合-上下文化)。** 设 $\mathbb{M}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个高阶模型。我们构造一个一阶模型 **集合**$_{\mathbb{M}}$，称为 $\mathbb{M}$ 的**集合-上下文化**。其底层范畴是集合的范畴**集合** 。

$\mathit{Set}_{\mathbb{M}}$ 的类型和项是 $\mathbb{M}$ 的类型和项的指标族： $\Gamma \in \mathit{Set}$ 上的类型是一个函数 $\Gamma \to \mathbb{M}.\mathit{Ty}$。沿函数 $f : \Delta \to \Gamma$ 进行类型代换，就是与 f 进行前复合。类型为 $A : \Gamma \to \mathbb{M}.\mathit{Ty}$ 的项是一个依赖函数 $(\gamma : \Gamma) \to \mathbb{M}.\mathit{Tm}(A(\gamma))$。沿函数 $f : \Delta \to \Gamma$ 进行项代换，就是与 f 进行前复合。代换的函子性就是函数复合的结合律。

上下文扩张由**集合**中的依赖和给出：

$$(\Gamma.A) \triangleq (\gamma : \Gamma) \times \mathbb{M}.\mathsf{Tm}(A(\gamma)).$$

类型论运算都按点定义：

$$\begin{aligned}&\mathbf{集合}_{\mathbb{M}}.\Pi(\Gamma,\ A,\ B) \triangleq \lambda\gamma \mapsto \mathbb{M}.\Pi(A(\gamma)\ \lambda a \mapsto B(\gamma,\\ &a)),\ \mathbf{集合}_{\mathbb{M}}.\text{应用}(\Gamma,\ f,\ a) \triangleq \lambda\gamma \mapsto \mathbb{M}.\text{应用}(f(\gamma)\ a(\gamma)),\\ &\mathbf{集合}_{\mathbb{M}}.\lambda\text{抽象}(\Gamma,\ b) \triangleq \lambda\gamma \mapsto \mathbb{M}.\lambda\text{抽象}(\lambda a \mapsto b(\gamma,\ a))。\end{aligned}$$

$\mathbf{集合}_{\mathbb{M}}$ 的 β-规则和 η-规则由 $\mathbb{M}$ 的相应规则作为推论成立。

自然性条件都很简单。例如，对于 Π 类型构造子的情形，我们需要检验 $\Pi(\Gamma, A, B)[f] = \Pi(\Delta, A[f], B[f^+])$ 对任意 f： $\Delta \to \Gamma$ 都成立，其中 $f^+(\gamma, a) = (f(\gamma)\ a)$。这相当于检验等式

$$(\lambda\gamma \mapsto \mathbb{M}.\Pi(A(\gamma), \lambda a \mapsto B(\gamma, a))) \circ f = (\lambda\gamma \mapsto \mathbb{M}.\Pi((A \circ f)(\gamma), \lambda a \mapsto (B \circ f^+)(\gamma, a))).$$ 」

▶ 注记 4. 请注意，底层范畴 **Set** 的 $\mathbf{Set}_{\mathbb{M}}$ 现在具有两种上下文与类型族结构：一种内层上下文与类型族结构，如构造 3 中所定义。另一种外层上下文与类型族结构，对应于集合范畴上通常的上下文与类型族结构，用于建模外延类型论。

它们共同构成双层类型论的一个模型 [7]。

2.3 望远镜式上下文化

如果一阶序模型中的每个对象都能唯一地写成从空上下文开始的迭代上下文扩张，则称该模型为上下文式。一阶上下文式模型构成了$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{cxl}}$的一个余反射子范畴：$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的包含 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{cxl}} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 具有右伴随 cxl：上下文核心 cxl($\mathcal{C}$) 的对象是 $\mathcal{C}$ 在空上下文之上的迭代上下文扩张，也称为望远镜。

▶ **定义 5.** 设 $\mathbb{M}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个高阶模型。望远镜式上下文化$\mathbf{Tele}_{\mathbb{M}}$ 是**Set**-上下文化 $\mathbf{Set}_{\mathbb{M}}$ 的上下文核心。」

根据上下文核心的一般性质，存在一个模型态射 $\lfloor - \rfloor$：$\mathbf{Tele}_{\mathbb{M}} \to \mathbf{Set}_{\mathbb{M}}$，它在类型和项上是双射。（在一阶模型上存在一个余纤维生成分解系统，其右类由这类态射构成。上下文式模型恰好属于左类。）

在某个预层范畴$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$中进行内部研究时，另一个相关构造涉及由 よ：$\mathsf{Ob}_{\mathcal{C}} \to \mathsf{Set}$ 张成的内部子范畴，其中 $\mathsf{Ob}_{\mathcal{C}}$ 是对象集上的离散预层，而 よ 将 Yoneda 嵌入内部化。Hu 等人 [24] 曾使用这个“Yoneda 宇宙”为上下文式类型赋予语义。

2.4 内部一阶模型

由于一阶模型的概念由一个本质代数理论描述，因此可以在任意有限完备范畴中解释。特别地，在任何小预层范畴 $\mathcal{C}$ 中都有内部一阶模型的概念：在模型的定义中，将 Set 替换为预层拓扑斯$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$的 Hofmann-Streicher 宇宙即可。

▶**命题 6.** 以下三个概念等价：**1.** 在 $\mathcal{T}$ 中**预层范畴**($\mathcal{C}$)的一阶模型；

2. 有限极限保持函子 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}} \to \widehat{\mathcal{C}}$，其中 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}}$ 是对 $\mathcal{T}$ 的一阶模型进行分类的有限完备范畴；
3. 函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{op}}$。

证明。 这是众所周知的 [25, D1.2。14]。(1) 与 (2) 等价，这是因为 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}}$ 对 $\mathcal{T}$ 的一阶模型进行分类。(2) 与 (3) 等价，则是因为 $\widehat{\ }$ 有限极限在 $\mathcal{C}$ 中是逐点计算的。◀

2.5 限制与外部化

对一阶模型的另一项重要操作，是沿函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 将一阶模型 $\mathcal{M}$ 限制到 **预层范畴**$(\mathcal{D})$ 内部。这个受限模型 $F^*(\mathcal{M})$ 是一个内部于 **预层范畴**$(\mathcal{C})$ 的一阶模型。如果将 $\mathcal{M}$ 视为函子 $\mathcal{D} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{op}}$，那么限制 $F^*(\mathcal{M})\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{op}}$ 就只是前复合 $(\mathcal{M} \circ F)$。如果改为将 $\mathcal{M}$ 视为保持有限极限的函子 $\mathcal{T}^{\mathsf{fo}} \to$ **预层范畴** $(\mathcal{D})$，那么 $F^*(\mathcal{M})$ 就是与逆像函子 F^* : **预层范畴**$(\mathcal{D})$ $\to$ **预层范畴**$(\mathcal{C})$ 后复合。这两个定义在命题 6 的等价意义下相同；因此它们关于基范畴是自然的。

▶ 备注 7. 可以在$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$的内部语言中，借助伴随（$F_! \dashv F^*$）所对应的依赖右伴随，对限制进行更明确的计算。当 $\mathcal{M}$ 是高阶模型的$\mathbf{Set}$或望远镜式上下文化时，依赖右伴随使得在处理 $F^*(\mathcal{M})$时可以使用高阶抽象语法。」

限制的一个特殊情形是内部一阶模型的外部化。

▶**定义 8.** 设 $\mathcal{C}$ 是任意具有终对象 $1_{\mathcal{C}}$的范畴，并考虑选取该终对象的函子$1_{\mathcal{C}}\colon\ 1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{C}$。对于$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$中的任意内部一阶模型 $\mathcal{M}$，都有一个外部一阶模型 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathcal{M})$，称为$\mathcal{M}$的外部化。」

对于$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$中的任意高阶模型 $\mathbb{M}$，我们都可以构造其望远镜一阶模型的外部化 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{Tele}_{\mathbb{M}})$。在同构意义下，所有外部上下文一阶模型都可表示为望远镜式上下文化的外部化。

▶**引理 9.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个外部一阶模型，其底层内部高阶模型为 $\mathbb{C}$。那么 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{C}})$ 是 $\mathcal{C}$的上下文核心。

证明。 参见推论 24。◀

特别地，由于初始模型 $\mathcal{S}$ 是上下文式的，其望远镜式上下文化的外部化 $1_{\mathcal{S}}^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})$ 同构于 $\mathcal{S}$。

我们还可以构造高阶模型的内部 $\mathbf{Set}$-上下文化的外部化 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{Set}_{\mathbb{C}})$。$1_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{Set}_{\mathbb{C}})$ 的底层范畴是 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴（限制在某个宇宙层级内）；而 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{Set}_{\mathbb{C}})$ 是双层类型论的一个外部模型（其底层范畴是将 $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 限制在某个宇宙层级内）。回想一下，在 $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 内部，存在一个一阶模型的态射 $\lfloor - \rfloor$:$\mathbf{Tele}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Set}_{\mathbb{C}}$。这个态射也可以外部化，从而得到一个一阶模型的外部态射 $1_{\mathcal{C}}^*(\lfloor - \rfloor)\colon 1_{\mathcal{C}}^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{C}}) \to 1_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{Set}_{\mathbb{C}})$。当 $1_{\mathcal{C}}^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{C}$ 时，这便是将 $\mathcal{C}$ 嵌入双层类型论预层模型的一种简单构造。

3 展示高阶模型

3.1 动机和方法

现在我们定义展示高阶模型的概念，它汇集了归纳原理的动机和方法。我们可能会预期，展示高阶模型应展示在一个基高阶模型之上。相反，我们定义的是基于一阶模型的展示高阶模型概念；借助上下文化，总是可以将高阶模型转化为一阶模型，但并非每个一阶模型都能以这种方式得到。

▶ **定义 10.** 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}$的一个一阶模型。$\mathbb{M}^\bullet$ 上的一个展示高阶模型由以下数据组成：

$\mathsf{Ty}^\bullet : \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(1_\mathcal{M}) \to$ 集合, $\mathsf{Tm}^\bullet : \forall(A : \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(1_\mathcal{M}))\ (A^\bullet : \mathsf{Ty}^\bullet(A)) \to \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}, A)$ $\to$ 集合,$\Pi^\bullet : \forall(A : \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(1_\mathcal{M}))\ (A^\bullet : \mathsf{Ty}^\bullet(A))\ (B : \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(1_\mathcal{M}.A))\ (B^\bullet : \forall(a : \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}, A))(a^\bullet : \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, a)) \to \mathsf{Ty}^\bullet(B[a]) \to \mathsf{Ty}^\bullet(\Pi(A, B))$, 应用$^\bullet$: $\forall A\ A^\bullet\ B\ B^\bullet(f : \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}, \Pi(A, B)))\ (f^\bullet : \mathsf{Tm}^\bullet(\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet)\ f))\ (a : \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}, A))\ (a^\bullet : \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, a)) \to \mathsf{Tm}^\bullet(B^\bullet(a^\bullet), \mathsf{app}(f, a))$, λ抽象$^\bullet$: $\forall A\ A^\bullet\ B\ B^\bullet\ (b : \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}.(a : A)\ B[a]))\ (b^\bullet : \forall(a : \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_\mathcal{M}, A))(a^\bullet : \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, a)) \to \mathsf{Tm}^\bullet(B^\bullet(a^\bullet)\ b[a]) \to \mathsf{Tm}^\bullet(\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet), \mathsf{lam}(b))$,

使得以下等式成立：

$$\mathsf{app}^\bullet(\mathsf{lam}^\bullet(b^\bullet), a^\bullet) = b^\bullet(a^\bullet), \qquad \mathsf{lam}^\bullet(\lambda a^\bullet \mapsto \mathsf{app}^\bullet(f^\bullet, a^\bullet)) = f^\bullet.$$ ⌟

展示高阶模型的大多数组件只依赖于 $\mathcal{M}$的闭类型和项；只有绑定子需要引用开放类型和项。

请注意，终端一阶模型上的展示高阶模型的数据等价于非显示高阶模型的数据。

3.2 展示上下文化

给定任意 $\mathbb{M}^\bullet$ 上方、位于 $\mathcal{M}$之上的展示高阶模型，我们构造一个 $\mathcal{M}$上的展示一阶模型。此构造是**集合**-上下文化的展示化推广。

此构造的底层展示范畴是 $\mathcal{M}$的*Sierpiński*锥，即 scone。带有终对象的范畴 $\mathcal{C}$ 的 scone 是逗号范畴（**集合** $\downarrow \Gamma_\mathcal{C}$），其中 $\Gamma_\mathcal{C} :\ \mathcal{C} \to$ **集合** 是全局截面函子 $\Gamma_\mathcal{C} = \mathcal{C}(1_\mathcal{C},\ -)$。

▶**构造 11**（展示上下文化）。 固定一个基于一阶模型 $\mathcal{M}$的展示高阶模型 $\mathbb{M}^\bullet$。我们构造一个基于 $\mathcal{M}$的展示一阶模型$\mathbf{Scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$，称为 $\mathbb{M}^\bullet$的展示上下文化。

基于 $\Gamma \in \mathcal{M}$ 的$\mathbf{Scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$ 中的一个对象是一个族

$$\Gamma^\dagger : \mathcal{M}(1_\mathcal{M}, \Gamma) \to \mathrm{Set}$$

在 Γ 的全局元素（即闭合代换）上。

10 对于类型理论元理论，内部 Sconing 已足够

- 从 $\Gamma^\dagger$ 到 $\Delta^\dagger$、基于基态射 $f:\ \mathcal{M}$（Γ、Δ）的 $\mathbf{scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$ 态射是一族

  $$f^\dagger : \forall(\gamma : \mathcal{M}(1_{\mathcal{M}}, \Gamma)) \to \Gamma^\dagger(\gamma) \to \Delta^\dagger(f \circ \gamma).$$

  恒等展示态射定义为

  $$\mathsf{id}^\dagger \triangleq \lambda\gamma\ \gamma^\bullet \mapsto \gamma^\bullet,$$

  而两个展示态射 $f^\dagger$ 和 $g^\dagger$ 的复合为

  $$f^\dagger \circ^\dagger g^\dagger \triangleq \lambda\gamma\ \gamma^\bullet \mapsto f^\dagger(g^\dagger(\gamma^\bullet)).$$

- 对象 $\Gamma^\dagger$ 和类型 $A : \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(\Gamma)$ 上的 $\mathbf{Scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$ 类型是一个函数

  $$A^\dagger : \forall\gamma\ (\gamma^\dagger : \Gamma^\dagger(\gamma)) \to \mathsf{Ty}^\bullet(A[\gamma]).$$

  $A^\dagger$ 沿展示态射 $f^\dagger$ 的限制为

  $$A^\dagger[f^\dagger] \triangleq \lambda\gamma^\bullet \mapsto A^\dagger(f^\dagger(\gamma^\bullet)).$$

- 对象 $\Gamma^\dagger$ 上类型为 $A^\dagger$ 的 $\mathbf{scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$ 项，以及项 $a:\ \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(\Gamma, A)$ 是一个函数

  $$a^\dagger : \forall\gamma\ (\gamma^\bullet : \Gamma^\dagger(\gamma)) \to \mathsf{Tm}^\bullet(A^\dagger(\gamma^\bullet), a[\gamma]).$$

  $a^\dagger$ 沿展示态射 $f^\dagger$ 的限制为

  $$a^\dagger[f^\dagger] \triangleq \lambda\gamma^\bullet \mapsto a^\dagger(f^\dagger(\gamma^\bullet)).$$

- 空展示上下文是族

  $$1^\dagger \triangleq \lambda_ \mapsto \mathbf{1}.$$

- 展示上下文 $\Gamma^\dagger$ 按展示类型 $A^\dagger$ 扩展后得到的族为

  $$(\Gamma^\dagger.A^\dagger) \triangleq \lambda\langle\gamma, a\rangle \mapsto (\gamma^\bullet : \Gamma^\dagger(\gamma)) \times A^\dagger(\gamma^\bullet, a).$$

- 所有类型和项构造子都通过逐点使用 $\mathbb{M}^\bullet$ 的相应分量来定义：

  $$\begin{aligned}
  &\Pi^\dagger(A^\dagger,\ B^\dagger)\ \triangleq \lambda\gamma^\bullet \mapsto \Pi^\bullet(A^\dagger(\gamma^\bullet)\ \lambda a^\bullet \mapsto B^\dagger(\gamma^\bullet,\ a^\bullet)),\\
  &\text{应用}^\dagger(f^\dagger,\ a^\dagger)\ \triangleq \lambda\gamma^\bullet \mapsto \text{应用}^\bullet(f^\dagger(\gamma^\bullet)\ a^\dagger(\gamma^\bullet)),\ \text{λ抽象}\\
  &{}^\dagger(b^\dagger) \triangleq \lambda\gamma^\bullet \mapsto \text{λ抽象}^\bullet(\lambda a^\bullet \mapsto b^\dagger(\gamma^\bullet,\ a^\bullet))。
  \end{aligned}$$

- β-规则和 η-规则成立，这是 $\mathbb{M}^\bullet$ 的 β-规则和 η-规则的推论。
- 所有自然性条件都是平凡的。 ⌟

注意，当 $\mathbb{M}$ 是一个被视为终端一阶模型之上的展示高阶模型的高阶模型时，$\mathbf{Scone}_{\mathbb{M}}$ 等价于 $\mathbf{集合}_{\mathbb{M}}$。

3.3 展示高阶模型的截面

展示高阶模型的概念对应于归纳原理的动机和方法。现在我们定义展示高阶模型的截面这一概念，它对应于应用归纳原理的结果：它简单地定义为展示上下文化的截面。

▶**定义 12.** 展示高阶模型 $\mathbb{M}^\bullet$ 的截面 是其展示上下文化$\mathbf{Scone}_{\mathbb{M}^\bullet}$ （在$\mathbf{Mod}_T$中）的一个截面 $[\![-]\!]$ 。」

展示高阶模型 $\mathbb{M}^\bullet$ 在 $\mathcal{M}$ 上的截面定义可展开为以下组成部分：

- 对于每个对象 $\Gamma : \mathcal{M}$，一个环境族

$$[\![\Gamma]\!] : \mathcal{M}(1_{\mathcal{M}}, \Gamma) \to \mathbf{Set}$$

的环境。
- 对于每个态射 $f :\ \mathcal{M}(\Gamma,\ \Delta)$，都有一个

$$[\![f]\!] : \forall \gamma \to [\![\Gamma]\!](\gamma) \to [\![\Delta]\!](f \circ \gamma)$$

环境之间的映射族。
- 对于每个类型 $A :\ \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(\Gamma)$，都有一个

$$[\![A]\!] : \forall \gamma\ (\gamma^\bullet : [\![\Gamma]\!](\gamma)) \to \mathsf{Ty}^\bullet(A[\gamma])$$

在 A 的闭包之上的展示类型族。
- 对于每个项 $a :\ \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(\Gamma,\ A)$，都有一个

$$[\![a]\!] : \forall \gamma\ (\gamma^\bullet : [\![\Gamma]\!](\gamma)) \to \mathsf{Tm}^\bullet([\![A]\!](\gamma^\bullet), a[\gamma])$$

在 a 的闭包之上的展示项族。
- 满足函子性和自然性方程：

$$[\![\mathsf{id}]\!](\gamma^\bullet) = \gamma^\bullet,$$
$$[\![f \circ g]\!](\gamma^\bullet) = [\![f]\!]([\![g]\!](\gamma^\bullet)),$$
$$[\![A[f]]\!](\gamma^\bullet) = [\![A]\!]([\![f]\!](\gamma^\bullet)),$$
$$[\![a[f]]\!](\gamma^\bullet) = [\![A]\!]([\![f]\!](\gamma^\bullet)).$$

- 使上下文扩张得以保持：

$$[\![1_{\mathcal{M}}]\!](\star) = \{\star\},$$
$$[\![\Gamma.A]\!](\gamma, a) = (\gamma^\bullet : [\![\Gamma]\!](\gamma)) \times (a^\bullet : \mathsf{Tm}^\bullet([\![A]\!](\gamma^\bullet), a)),$$
$$[\![\lambda\gamma \mapsto (\delta(\gamma), a(\gamma))]\!](\gamma) = ([\![\delta]\!](\gamma), [\![a]\!](\gamma)).$$

- 对于每种类型和项构造子，都有相应的计算规则：

$$[\![\lambda\gamma \mapsto \Pi(A(\gamma), \lambda a \mapsto B(\gamma, a))]\!](\gamma^\bullet) = \Pi^\bullet([\![A]\!](\gamma^\bullet), \lambda a^\bullet \mapsto [\![B]\!](\gamma^\bullet)),$$
$$[\![\lambda\gamma \mapsto \mathsf{app}(f(\gamma), a(\gamma))]\!](\gamma^\bullet) = \mathsf{app}^\bullet([\![f]\!](\gamma^\bullet), [\![a]\!](\gamma^\bullet)),$$
$$[\![\lambda\gamma \mapsto \mathsf{lam}(b(\gamma))]\!](\gamma^\bullet) = \mathsf{lam}^\bullet(\lambda a^\bullet \mapsto [\![b]\!](\gamma^\bullet, a^\bullet)).$$

12 对于类型理论元理论，内部 Sconing 已足够

当 x 是 $\mathcal{M}$的闭类型或项时，我们用 $[\![x]\!]$ 表示 x 在空环境中的解释 $[\![x]\!](\star)$。我们可以用带下划线的名称来区分开放项的变量。例如，我们可以写作 $[\![\mathsf{app}(f,\ a)]\!][f \mapsto f', a \mapsto a']$，而不是$[\![\lambda(f,\ a) \mapsto \mathsf{app}(f,\ a)]\!](f',\ a')$。

▶ 注 13. 设 $\mathbb{S}^\bullet$ 是预层范畴 $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 中定义在一阶模型 $F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})$ 上的展示高阶模型，其中函子为 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$。展示上下文化 $\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ 是定义在 $F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})$ 上的展示一阶模型。于是，其外部化 $1^*_{\mathcal{C}}(\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet})$ 是一个定义在 $1^*_{\mathcal{C}}(F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})) = 1^*_{\mathcal{S}}(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})$ 上的外部展示一阶模型。忽略同构 $1^*_{\mathcal{S}}(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}}) \cong \mathcal{S}$ 后，外部化的 $\mathbf{Scone}$-上下文化 $1^*_{\mathcal{C}}(\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet})$ 与粘合一致。其底层范畴是逗号范畴 $(\mathcal{S} \downarrow N_F)$，其中 $N_F : \mathcal{S} \to \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 是神经函子 $\mathcal{S} \nrightarrow \mathbf{Psh}(\mathcal{S}) \xrightarrow{F^*} \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$。

4 示例：规范性证明

作为相对归纳原理及其应用的第一个示例，我们证明，将 Bool（由类型构造子 Bool、构造子 true 和 false，以及带有两条计算规则的依赖消去子 $\mathsf{elim}_{\mathsf{Bool}}$ 给出）加入 $\mathcal{T}$后，其规范性成立。

我们使用相对于函子 $1_{\mathcal{S}} : 1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{S}$ 的归纳原理，该函子在语法 $\mathcal{S}$ 中选取终对象。事实证明，要证明这个特定的相对归纳原理是轻而易举的。

▶ **定理 14** （相对于 $1_{\mathcal{S}} : 1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{S}$ 的 $\mathbb{S}$ 归纳原理）。
设 $\mathbb{S}^\bullet$ 是初始模型 $\mathcal{S}$上的一个展示高阶模型，或者等价地，是$1^*_{\mathcal{S}}$（$\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}}$）上的一个展示高阶模型。那么，$\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ 在 $\mathcal{S}$ 上存在一个截面 $[\![-]\!]$。

证明。 由 $\mathcal{S}$的初始性。 ◀

我们现在构造展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$ over $1^*_{\mathcal{S}}(\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}})$，以用于证明规范性。闭类型 $A : \mathcal{S}.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{S}})$ 上的展示类型 $A^\bullet$ 是定义在类型为 A 的闭项上的、取值于 Set 的逻辑谓词：

$$\mathsf{Ty}^\bullet(A) \triangleq \mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, A) \to \mathrm{Set}.$$

类型 $A^\bullet$ 的展示项 $a^\bullet$，对应于闭项 $a : \mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, A)$，是逻辑谓词 $A^\bullet$ 在 a 处取值所得的一个元素：

$$\mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, a) \triangleq A^\bullet(a).$$

给定逻辑谓词 $A^\bullet$ 和 $B^\bullet$，逻辑谓词 $\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet)$ 表示函数 $f : \mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, \Pi(A, B))$ 应当保持这些逻辑谓词。

$$\begin{aligned}
&\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \triangleq \lambda(f : \mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, \Pi(A, B))) \mapsto (\forall a\ a^\bullet \to B^\bullet(a^\bullet, \mathsf{app}(f, a))),\\
&\mathsf{app}^\bullet(f^\bullet, a^\bullet) \triangleq f^\bullet(a^\bullet),\\
&\mathsf{lam}^\bullet(b^\bullet) \quad \triangleq \lambda a^\bullet \mapsto b^\bullet(a^\bullet).
\end{aligned}$$

容易验证，所展示的 β-规则和 η-规则都成立。逻辑谓词 $\mathsf{Bool}^\bullet : \mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, \mathsf{Bool}) \to \mathrm{Set}$ 定义为一个具有两个构造子的归纳族：$\mathsf{true}^\bullet : \mathsf{Bool}^\bullet(\mathsf{true})$ 和 $\mathsf{false}^\bullet : \mathsf{Bool}^\bullet(\mathsf{false})$。所展示的消去子 $\mathsf{elim}^\bullet_{\mathsf{Bool}}$ 使用 $\mathsf{Bool}^\bullet$ 的消去原理定义，所展示的 β-律也成立。至此，$\mathbb{S}^\bullet$ 的所有组成部分均已定义完毕。

▶ **定理 15**。 初始模型 $\mathbb{S}$ 满足规范性：任意封闭布尔项 b： $\mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, \mathsf{Bool})$都是规范的，即恰好等于 true 或 false 之一。

证明。根据相对归纳原理定理 14，展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$具有一个截面 $[\![-]\!]$。现在给定一个封闭布尔项 b： $\mathcal{S}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}}, \mathsf{Bool})$，我们有 $[\![b]\!]$： $\mathsf{Tm}^\bullet([\![\mathsf{Bool}]\!], b)$。根据 Bool 截面的计算规则，$\mathsf{Tm}^\bullet([\![\mathsf{Bool}]\!], b) = \mathsf{Bool}^\bullet(b)$。因此， $[\![b]\!]$: $\mathsf{Bool}^\bullet(b)$ 见证了 b 具有规范性这一事实。

由于 $[\![\mathsf{true}]\!] = \mathsf{true}^\bullet$、 $[\![\mathsf{false}]\!] = \mathsf{false}^\bullet$ 以及 $\mathsf{true}^\bullet \neq \mathsf{false}^\bullet$，我们知道 $\mathsf{true} \neq \mathsf{false}$。 ◀

注意，在规范性证明中，我们不需要计算截面 $[\![-]\!]$ 在非闭类型或项上的值。只有在遇到绑定子时，通常才需要计算截面在开放类型和项上的值：计算截面在一个闭绑定子上的值，取决于计算截面在一个开放类型或项上的值。下面是计算截面 $[\![-]\!]$ 在布尔取反函数 λ 抽象($\lambda b \mapsto \mathsf{elim}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{Bool}, \mathsf{false}, \mathsf{true}\ b)$) 应用于 true 上的值的示例。

$$
\begin{aligned}
&[\![\text{应用}(\lambda\text{抽象}(\lambda b \mapsto \text{消去}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{Bool}, \mathsf{false}, \mathsf{true}\ b)), \mathsf{true})]\!] \\
&= [\![\lambda\text{抽象}(\lambda b \mapsto \text{消去}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{Bool}, \mathsf{false}, \mathsf{true}\ b))]\!]([\![\mathsf{true}]\!]) = \\
&(\lambda b^\bullet \mapsto [\![\text{消去}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{Bool}, \mathsf{false}, \mathsf{true}\ b)]\!][b \mapsto b^\bullet])(\mathsf{true}^\bullet) \\
&= [\![\text{消去}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{Bool}, \mathsf{false}, \mathsf{true}\ b)]\!][b \mapsto \mathsf{true}^\bullet] = \text{消去}^\bullet_{\mathsf{Bool}} \\
&(\mathsf{Bool}^\bullet, \mathsf{false}^\bullet, \mathsf{true}^\bullet, \mathsf{true}^\bullet) = \mathsf{false}^\bullet.
\end{aligned}
$$

5 示例：规范化证明

本节中，我们证明初始模型 $\mathcal{S}$ 相对于 F **重命名**$_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$的归纳原理的规范化，其中 F **重命名**$_{\mathcal{S}}$ 是 $\mathcal{S}$的重命名范畴，即其态射是由变量构成的 $\mathcal{S}$ 代换所在的范畴。我们采用 [10] 给出的 **重命名**$_{\mathcal{S}}$ 的替代定义，将其视为一阶重命名代数范畴中的始对象。

5.1 重命名范畴

▶ **定义 16**。 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$的一个一阶模型。其上的一个高阶重命名代数$\mathbb{C}$由以下部分组成：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}.\mathsf{Var} : \mathcal{C}.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{C}}) \to \mathcal{U}, \\
&\mathbb{C}.\mathsf{var} : (A : \mathcal{C}.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{C}})) \to \mathbb{C}.\mathsf{Var}(A) \to \mathcal{C}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{C}}, A).
\end{aligned}
$$

⌟

▶ **定义 17**。 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{T}$的一个一阶模型。其上的一个一阶重命名代数 $\mathcal{D}$ 是一个范畴 $\mathcal{C}$，它带有一个终对象，以及一个函子 F： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，该函子保持终对象，并带有一个全局高阶重命名代数 $\mathbb{C}$在 $F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{D}})$ 上的结构，使得 $\mathbb{C}.\mathsf{Var}$ 局部可表，且 $\mathbb{C}.\mathsf{var}$ 严格保持上下文扩展。⌟

等价地， $\mathcal{D}$ 上的一阶重命名代数是一个上下文与类型族 $\mathcal{C}$，连同一个上下文与类型族态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其在类型上的作用是双射。（存在一个余纤维生成分解系统，其右类由此类态射构成。重命名代数是左类中的对象。） $\mathcal{S}$ 上的一阶重命名代数范畴是局部

有限呈示的，并且存在一个初始一阶重命名代数 **重命名代数**$_{\mathcal{S}}$。范畴**重命名代数**$_{\mathcal{S}}$ 是 $\mathcal{S}$的重命名范畴；在本节中，我们将函子 F :**重命名代数**$_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$记作 F 。

5.2 相对归纳原理

我们提出 $\mathcal{S}_F \triangleq F^*(\mathbf{Tele}_{\mathbb{S}})$； $\mathcal{S}_F$ 是 $\mathbf{Psh}(\mathbf{Ren}_{\mathcal{S}})$中的内部一阶模型。

▶ **定理 18** （相对于 F 的 $\mathbb{S}$ 归纳原理：$\mathbf{Ren}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$）。
设 $\mathbb{S}^\bullet$ 是位于 $\mathcal{S}_F$ 之上的展示高阶模型。给定以下附加数据：

$$\mathsf{var}^\bullet : \forall(A : \mathcal{S}_F.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{S}_F}))\ (A^\bullet : \mathsf{Ty}^\bullet(A))\ (x : \mathsf{Var}(A)) \to \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, \mathsf{var}(x)),$$

展示上下文化 $\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ 具有一个截面 $[\![-]\!]$，该截面满足附加计算规则 $[\![\mathsf{var}_A\ (x)\ ]\!] = \mathsf{var}^\bullet\ ([\![A]\!],\ x)$。

证明。 参见附录 A.4。 ◀

注意，$\mathsf{var}_A(x)$ 始终是 $\mathcal{S}_F$ 的闭项，因此 $[\![\mathsf{var}_A(x)]\!]$ 不依赖于任何环境。

5.3 范式

中性项和范式在内部定义于 $\mathbf{Psh}(\mathbf{Ren}_{\mathcal{S}})$ 中，作为归纳族

$$\mathsf{Ne}, \mathsf{Nf} : \forall(A : \mathcal{S}_F.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{S}_F}))\ (a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)) \to \mathrm{Set},$$

由以下构造子生成：

$$\begin{aligned}&\mathsf{var}^{\mathsf{ne}} : (x : \mathsf{Var}(A)) \to \mathsf{Ne}_A(\mathsf{var}(x)),\text{应用}^{\mathsf{ne}} : \mathsf{Ne}^{\Pi(A,B)}(f)\\ &\to \mathsf{Nf}_A(a)\ \to \mathsf{Ne}^{B[a]}(\text{应用}(f, a)),\lambda\text{抽象}^{\mathsf{nf}} : ((a : \mathsf{Var}(A))\\ &\to \mathsf{Nf}^{B[a]}(b[a]))\ \to \mathsf{Nf}^{\Pi(A,B)}(\lambda\text{抽象}(b)).\end{aligned}$$

规范化的目标是证明每个项都有唯一的范式：

$$\forall(A : \mathcal{S}_F.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{S}_F}))\ (a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)) \to \mathrm{isContr}(\mathsf{Nf}_A(a)).$$

这分两步完成。首先，根据相对归纳原理得到一个正规化函数，从而证明范式的存在性。然后，由正规化的稳定性推出范式唯一性；这一事实通过对中性项和范式进行互归纳得到证明。

5.4 正规化展示高阶模型

现在，我们构造建立在 $\mathcal{S}_F$ 之上的正规化展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$ 。

在类型 A： $\mathcal{S}_F.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{S}_F})$ 上方、基于类型 $A^\bullet : \mathsf{Ty}^\bullet(A)$ 的展示类型，是一个三元组 $(A^\bullet_p, A^\bullet_u, A^\bullet_q)$，由以下部分组成：一个逻辑谓词 $A^\bullet_p$： $\mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A) \to \mathsf{Set}$，它定义在类型 A 的项上，取值于集合宇宙；一个去商（或反射）函数 $A^\bullet_u : (a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)) \to \mathsf{Ne}_A(a) \to A^\bullet_p(a)$，用于证明任意中性项都满足逻辑谓词 $A^\bullet_p$；一个编码（或重ification）函数 $A^\bullet_q : (a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)) \to A^\bullet_p(a) \to \mathsf{Nf}_A(a)$，用于证明满足逻辑谓词 $A^\bullet_p$ 的项具有范式。一个展示项

$a^\bullet$ 在项 $a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)$ 上方的类型 $A^\bullet$，是 $A^\bullet_p(a) : \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, a) \triangleq A^\bullet_p(a)$ 的一个元素。Π-类型的逻辑谓词定义方式与规范性模型中的相同。

$$\Pi^\bullet_p(A^\bullet, B^\bullet)(f) \triangleq (\forall a\ a^\bullet \to B^\bullet_p(a^\bullet, \mathsf{app}(f, a))).$$

反引用函数依赖于陪域的反引用函数和定义域的引用函数。

$$\Pi^\bullet_u(A^\bullet, B^\bullet)(f^{\mathsf{ne}}) \triangleq \lambda a^\bullet \mapsto B^\bullet_u(a^\bullet, \mathsf{app}^{\mathsf{ne}}(f^{\mathsf{ne}}, A^\bullet_q(a^\bullet))).$$

引用函数表明，Π-类型的任何元素都是 λ抽象，这由 η-规则所蕴含。它依赖于陪域的引用函数、定义域的反引用函数，以及每个变量都是中性项这一事实。

$$\Pi^\bullet_q(A^\bullet, B^\bullet)(f^\bullet) \triangleq \mathsf{lam}^{\mathsf{nf}}(\lambda a \mapsto \mathsf{let}\ a^\bullet = A^\bullet_u(\mathsf{var}^{\mathsf{ne}}(a))\ \mathsf{in}\ B^\bullet_q(a^\bullet, f^\bullet(a^\bullet))).$$

这就完成了展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$ 的定义。接下来需要验证相对归纳原理的最后一个假设：

$$\mathsf{var}^\bullet : \forall A\ A^\bullet\ (x : \mathsf{Var}(A))\ \to \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet,\ \mathsf{var}(x)),$$

$$\mathsf{var}^\bullet(A^\bullet,\ x) \triangleq A^\bullet_u(\mathsf{var}^{\mathsf{ne}}(x))。$$

根据相对归纳原理（定理 18），我们得到一个 $[\![-]\!]$ **scone**$_{\mathbb{S}^\bullet}$ 的截面。然后可以如下定义正规化函数：

$$\mathsf{norm} : \forall A\ (a : \mathcal{S}_F.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{S}_F}, A)) \to \mathsf{Nf}_A(a),$$

$$\mathsf{norm}_A(a) \triangleq [\![A]\!]_q([\![a]\!]).$$

5.5 规范化的稳定性与范式唯一性

最后，我们证明如下的范式唯一性 [27]：我们证明规范化是稳定的，也就是说，对于项 a 的每个范式，都等于通过正规化函数从 a 得到的范式。由于证明依赖于截面 $[\![-]\!]$ 的大部分计算规则，因此这是一个关于截面进行计算的良好示例。

▶ **引理19**（稳定性）：给定任意范式 a^{nf}：$\mathsf{Nf}_A(a)$，有 $a^{\mathsf{nf}} = \mathsf{norm}_A(a)$。

证明：我们通过对中性项和范式进行互归纳，证明以下两个事实：

$$(a^{\mathsf{ne}} : \mathsf{Ne}_A(a)) \to [\![a]\!] = [\![A]\!]_u(a^{\mathsf{ne}}), \qquad (a^{\mathsf{nf}} : \mathsf{Nf}_A(a)) \to a^{\mathsf{nf}} = [\![A]\!]_q([\![a]\!]).$$

每种情形都会用到 $[\![-]\!]$ 的一些计算规则。

情形 $a^{\mathsf{ne}} = \mathsf{var}^{\mathsf{ne}}(A,\ x)$

$$\begin{aligned}
&[\![\mathsf{var}_A(x)]\!] \\
&\quad = \mathsf{var}^\bullet([\![A]\!], x) && \text{（根据 } [\![\mathsf{var}(-)]\!] \text{ 的计算规则）} \\
&\quad = [\![A]\!]_u(a^{\mathsf{ne}}). && \text{（根据 } \mathsf{var}^\bullet \text{ 的定义）}
\end{aligned}$$

情形 $a^{\mathsf{ne}} = \text{应用}^{\mathsf{ne}}(f^{\mathsf{ne}}, a^{\mathsf{nf}})$

$$\begin{aligned}
&[\![\mathsf{app}(f, a)]\!] \\
&\quad = \mathsf{app}^\bullet([\![f]\!], [\![a]\!]) && \text{(by the computation rule for } [\![\mathsf{app}(-)]\!]) \\
&\quad = [\![f]\!]([\![a]\!]) && \text{(by definition of } \mathsf{app}^\bullet) \\
&\quad = [\![\Pi(A, B)]\!]_u(f^{\mathsf{ne}}, [\![a]\!]) && \text{(by the induction hypothesis for } f^{\mathsf{ne}}) \\
&\quad = [\![B[a]]\!]_u(\mathsf{app}^{\mathsf{ne}}(f^{\mathsf{ne}}, a^{\mathsf{nf}})). \\
& && \text{(by definition of } \Pi^\bullet_u \text{ and the induction hypothesis for } a^{\mathsf{nf}})
\end{aligned}$$

情形 $a^{\mathsf{nf}} = \lambda抽象^{\mathsf{nf}}(b^{\mathsf{nf}})$

$$
\begin{aligned}
&[\![\Pi(A,B)]\!]_q([\![\mathsf{lam}(b)]\!]) \\
&\quad = \Pi^\bullet_q([\![A]\!], \lambda a^\bullet \mapsto [\![B(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto a^\bullet])(\lambda a^\bullet \mapsto [\![b(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto a^\bullet]) \\
&\qquad\qquad \text{(by the computation rules for } [\![\Pi(-)]\!] \text{ and } [\![\mathsf{lam}]\!]) \\
&\quad = \mathsf{lam}^{\mathsf{nf}}(\lambda a \mapsto \mathsf{let}\ a^\bullet = [\![A]\!]_u(\mathsf{var}^{\mathsf{ne}}(a))\ \mathsf{in}\ ([\![B(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto a^\bullet])_q([\![b(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto a^\bullet]) \\
&\qquad\qquad \text{(by definition of } \Pi^\bullet_q) \\
&\quad = \mathsf{lam}^{\mathsf{nf}}(\lambda a \mapsto ([\![B(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto [\![\mathsf{var}(a)]\!]])_q([\![b(\underline{a})]\!][\underline{a} \mapsto [\![\mathsf{var}(a)]\!]])) \\
&\qquad\qquad \text{(by the computation rule for } [\![\mathsf{var}(a)]\!]) \\
&\quad = \mathsf{lam}^{\mathsf{nf}}(\lambda a \mapsto [\![B[\mathsf{var}(a)]]\!]_q([\![b[\mathsf{var}(a)]]\!])) \qquad \text{(by the naturality of } [\![-]\!]) \\
&\quad = \mathsf{lam}^{\mathsf{nf}}(b^{\mathsf{nf}}). \qquad \text{(by the induction hypothesis for } b^{\mathsf{nf}}) \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}
$$

6 展示的一阶模型的截面范畴

相对归纳原理的证明所需的最后一个工具，是内部展示高阶模型的截面范畴。这替代了我们先前工作 [10]中对展示的插入器的使用。

设 $\mathcal{M}^\bullet$ 是某个预层范畴$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$内部、定义在一阶模型 $\mathcal{M}$之上的全局内部展示的一阶模型。根据命题 6，我们将 $\mathcal{M}$ 视为一个函子 $\mathcal{M} : \mathcal{C} \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}$ 。记$\mathbf{DispMod}_{\mathcal{T}}$ 为这样的外部一阶模型范畴：其对象是一个 $\mathcal{T}$ 的一阶模型，以及其上的一个展示的一阶模型。存在一个遗忘函子 $U : \mathbf{DispMod}_{\mathcal{T}} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$。由于展示的一阶模型这一概念也是本质代数的，我们还可以将 $\mathcal{M}^\bullet$ 视为一个函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{DispMod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}$ ，满足 $U \circ \mathcal{M}^\bullet = \mathcal{M}$。类似地，记$\mathbf{Sect}_{\mathcal{T}}$为这样的范畴：其对象是 $\mathcal{T}$的一个展示的一阶模型及其上的一个截面； $\mathcal{M}^\bullet$ 的一个截面可以对应于一个函子 $[\![-]\!] : \mathcal{C} \to \mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}$ ，满足 $V \circ [\![-]\!] = \mathcal{M}^\bullet$，其中 V 是遗忘函子 $\mathbf{Sect}_{\mathcal{T}} \to \mathbf{DispMod}_{\mathcal{T}}$。

▶**定义 20.** $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 的截面范畴是 $\mathcal{M}^\bullet$ 在 $\mathbf{Cat}$ 中的拉回

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet] & \xrightarrow{[\![-]\!]_0} & \mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_0} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet} & \mathbf{DispMod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}
\end{array}
$$

根据拉回的泛性质， $\mathcal{M}^\bullet$ 的截面数据等价于 $\mathbf{Cat}$ 中 π_0 的截面数据。范畴 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 自身也配备了 $\pi_0^*(\mathcal{M}^\bullet)$ 的一个截面$[\![-]\!]_0$ ，称为 $\mathcal{M}^\bullet$的泛截面 。

为了证明类似定理 18 的归纳原理，我们希望利用 $\mathcal{C}$ 在某个范畴中的初始性来获得 π_0 的截面。例如，当 $\mathcal{C}$ 是重命名范畴时，只需为 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 配备重命名代数结构，并且该结构在 π_0下保持不变。

这通常涉及将 $\mathcal{C}$ 的终对象和上下文扩展提升到$\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$。关于这些有限极限提升的条件见附录 A.3；要提升终对象，需要语法的初始性。

参考文献

1 Andreas Abel、Joakim Öhman 和 Andrea Vezzosi。类型论中的类型论转换的可判定性。《ACM程序设计语言学报》，2(POPL)：23:1–23:29，2018年。doi:10.1145/3158111。2 Thorsten Altenkirch、Martin Hofmann 和 Thomas Streicher。无约简规范化证明的范畴重构。载于 David H. Pitt、David E. Rydeheard 和 Peter T. Johnstone 编，《范畴论与计算机科学》，第六届国际会议，CTCS '95，剑桥，英国，1995年8月7日至11日，会议录，第953卷《计算机科学讲义》，第182–199页。施普林格，1995年。 doi:10.1007/3-540-60164-3_27。3 Thorsten Altenkirch、Martin Hofmann 和 Thomas Streicher。多态系统的无约简规范化。载于《第11届年度IEEE逻辑与计算机科学研讨会会议录》，新不伦瑞克，新泽西州，美国，1996年7月27日至30日，第98–106页。IEEE 计算机学会，1996年。 doi:10.1109/LICS.1996.561309。4 Thorsten Altenkirch 和 Ambrus Kaposi。依赖类型的求值归一化。载于 Delia Kesner 和 Brigitte Pientka 编，《计算与演绎的形式结构第一届国际会议（FSCD 2016）》，第52卷《莱布尼茨国际信息学会议论文集》（LIPIcs），第6:1–6:16页，达格施图尔，德国，2016年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。URL:http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2016/5972, doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2016.6。5 Thorsten Altenkirch 和 Ambrus Kaposi。使用商归纳类型的类型论中的类型论。载于《第43届ACM SIGPLAN-SIGACT编程语言原理研讨会会议录》，POPL '16，第18–29页，纽约，纽约州，美国，2016年。ACM。URL: http://doi.acm.org/10.1145/2837614.2837638, doi:10.1145/2837614.2837638。6 Thorsten Altenkirch、Ambrus Kaposi 和 Michael Shulman。迈向高阶观测类型论。载于 Delia Kesner 和 Pierre-Marie Pédrot 编，《第28届证明与程序类型国际会议（TYPES 2022）》。南特大学，2022年。URL:https://types22.inria.fr/files/2022/06/TYPES_2022_paper_37.pdf。7 Danil Annenkov、Paolo Capriotti、Nicolai Kraus 和 Christian Sattler。双层类型论及其应用。CoRR，abs/1705.03307，2019年。URL: http://arxiv.org/abs/1705.03307,arXiv:1705.03307。8 Steve Awodey。同伦类型论的自然模型。《计算机科学中的数学结构》，28(2)：241–286，2018年。 doi:10.1017/S0960129516000268。9 Jean-Philippe Bernardy、Patrik Jansson 和 Ross Paterson。自由证明——依赖类型的参数性。《函数式编程杂志》，22(02)：107–152，2012年。URL: https://publications.lib.chalmers.se/cpl/record/index.xsql?pubid=135303, doi:10.1017/S0956796812000056。10 Rafaël Bocquet、Ambrus Kaposi 和 Christian Sattler。类型论的相对归纳原理。CoRR，abs/2102.11649，2021年。URL: https://arxiv.org/abs/2102.11649,arXiv:2102.11649。11 Simon Castellan、Pierre Clairambault 和 Peter Dybjer。带族范畴：无类型、简单类型和依赖类型。CoRR，abs/1904.00827，2019年。URL:http://arxiv.org/abs/1904.00827, arXiv:1904.00827。12 Thierry Coquand。类型论的预层模型。可见于 https://www.cse.chalmers.se/~coquand/presheaf.pdf，2013年。13 Thierry Coquand。依赖类型理论的规范性与规范化。《理论计算机科学》，777：184–191，2019年。 doi:10.1016/j.tcs.2019.01.015。14 Thierry Coquand、Simon Huber 和 Christian Sattler。立方类型论的规范性与同伦规范性，2021年。 arXiv:1902.06572。15 Thierry Coquand、Simon Huber 和 Christian Sattler。立方类型论的规范性与同伦规范性。《逻辑方法与计算机科学》，18(1)，2022年。doi:10.46298/lmcs-18(1:28)2022。

18 类型理论元理论：内部 Sconing 已足够

16 Marcelo P. Fiore。带类型 λ 演算中求值归一化的语义分析。载于第四届 *ACM SIGPLAN* 声明式编程原理与实践国际会议论文集，*2002*年*10*月*6*日至*8*日，美国宾夕法尼亚州匹兹堡（与 *PLI 2002* 联合举办），第 26–37 页。ACM，2022年。 doi:10.1145/571157.571161。**17** Marcelo P. Fiore 和 Ola Mahmoud。二阶代数理论。*CoRR*，abs/1308.5409，2013年。网址：http://arxiv.org/abs/1308.5409， arXiv:1308.5409。**18** Daniel Gratzer。多模态类型理论的规范化。载于第 *37* 届逻辑与计算机科学年度 *ACM/IEEE* 研讨会论文集，美国纽约，2022年。计算机协会。网址：https://jozefg.github.io/papers/2022-normalization-for-multimodal-type-theory-sh ort.pdf， doi:10.1145/3531130.3532398. 19 Daniel Gratzer 和 Jonathan Sterling. 依赖类型理论的句法范畴：草图构造与充分性。CoRR, abs/2012.10783, 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2012.10783,arXiv:2012.10783. 20 Robert Harper. 类型论的等式逻辑框架。CoRR, abs/2106.01484, 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2106.01484, arXiv:2106.01484. 21 Robert Harper 、 Furio Honsell 和 Gordon D. Plotkin. 一个定义逻辑的框架。《 ACM 杂志》，40(1):143–184, 1993. doi:10.1145/138027.138060. 22 Martin Hofmann. 依赖类型的语法与语义。载于《计算语义与逻辑》，第79–130页。剑桥大学出版社，1997年。23 Martin Hofmann. 高阶抽象语法的语义分析。载于第14届 IEEE 计算机科学逻辑年会，意大利特伦托，1999年7月2日至5日，第204–213页。IEEE 计算机学会，1999年。 doi:10.1109/LICS.1999.782616. 24 Jason Z. S. Hu、Brigitte Pientka 和 Ulrich Schöpp. 上下文式类型的范畴论视角：从简单类型到依赖类型。CoRR, abs/2206.02831, 2022年。arXiv:2206.02831, doi:10.48550/arXiv.2206.02831. 25 Peter T Johnstone. 大象素描：托扑斯理论纲要。牛津逻辑指南丛书。牛津大学出版社，纽约，NY，2002年。URL：https://cds.cern.ch/record/592033. 26 Achim Jung 和 Jerzy Tiuryn. λ 可定义性的新刻画。载于 Marc Bezem 和 Jan Friso Groote 编，《带类型 λ 演算及其应用》，带类型 λ 演算及其应用国际会议（TLCA '93），荷兰乌得勒支，1993年3月16日至18日，论文集，《计算机科学讲义》第664卷，第245–257页。施普林格，1993年。 doi:10.1007/BFb0037110. 27 Ambrus Kaposi. 商归纳类型类型论中的类型论。博士论文，诺丁汉大学，英国，2017年。URL: https://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl.ethos.713896. 28 Ambrus Kaposi、Si mon Huber 和 Christian Sattler. 类型论的粘合。载于 Herman Geuvers 编，《第4届计算形式结构与演绎国际会议》，FSCD 2019，德国多特蒙德，2019年6月24日至30日，第131卷 LIPIcs，第25:1–25:19页。达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2019年。doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2019.25. 29 Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine. 类型论的同伦论。《数学进展》, 337:1–38, 2018. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870818303062, doi:https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.08.003. 30 András Kovács. 广义宇宙层级与一等宇宙层级。载于 Florin Manea 和 Alex Simpson 编，《第30届 EACSL 计算机科学逻辑年会》，CSL 2022，德国哥廷根（线上会议），2022年2月14日至19日，第216卷 LIPIcs，第28:1–28:17页。达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2022年。doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2022.28. 31 Frank Pfenning 和 Carsten Schürmann. 系统描述：Twelf——演绎系统的元逻辑框架。载于 Harald Ganzinger 编，《自动演绎——CADE-16》，

第16届自动演绎国际会议，意大利特伦托，1999年7月7日至10日，论文集，《计算机科学讲义》第1632卷，第202–206页。施普林格，1999年。doi:10.1007/3-540-48660-7_14. 32 Loïc Pujet 和 Nicolas Tabareau. 非谓词观察等同性。载于 POPL 2023——第50届 ACM SIGPLAN 编程语言原理研讨会，《ACM 编程语言论文集》第7卷，第74页，美国波士顿，2023年1月。URL: https://hal.science/hal-03857705, doi:10.1145/3571739. 33 Michael Shulman. 迈向第三代同伦类型论。CMU 同伦类型论研讨会系列讲座，2022年。34 Jonathan Sterling. 合成 Tait 可计算性的初步研究：立方类型论的客观元理论。博士论文，卡内基梅隆大学，2021年。1.1版，2022年5月修订。 doi:10.5281/zenodo.6990769. 35 Jonathan Sterling. 合成 Tait 可计算性中的朴素逻辑关系。未发表手稿，2022年6月。36 Jonathan Sterling 和 Carlo Angiuli. 立方类型论的规范化。CoRR, abs/2101.11479, 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2101.11479, arXiv:2101.11479. 37 Jonathan Sterling 和 Bas Spitters. 自由 λ理论的粘合规范化。CoRR, abs/1809.08646, 2018. URL: http://arxiv.org/abs/1809.08646, arXiv:1809.08646. 38 Taichi Uemura. 类型论语义的一般框架。CoRR, abs/1904.04097, 2019. URL: http://arxiv.org/abs/1904.04097, arXiv:1904.04097. 39 Jonathan Weinberger、Benedikt Ahrens、Ulrik Buchholtz 和 Paige North. 单纯形类型论的合成 Tait 可计算性。载于第28届证明与程序类型国际会议（TYPES 2022），2022年。URL:https://types22.inria.fr/files/2022/06/TYPES_2022_paper_17.pdf.

A 技术结果

A.1 局部可表性

我们回顾局部可表依赖预层这一概念的定义，它编码了上下文扩展这一概念。

▶**定义 21.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴， X 是 $\mathcal{C}$ 上的一个预层， Y 是 X上的一个依赖预层。那么，如果对于每个元素 $x : X(\Gamma)$，预层

$$Y_{|x} : (\mathcal{C}/\Gamma)^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set},$$
$$Y_{|x}(\Delta, \rho) \triangleq Y(\Delta, x[\rho])$$

都是可表的。由一个扩展上下文和一个投影映射组成的表示对象记作 $(\Gamma.Y[x], \boldsymbol{p}_x)$，泛元记作 $\boldsymbol{q}_x : Y(\Gamma.Y[x], x[\boldsymbol{p}_x])$。

对于任意对象 $\Delta \in \mathcal{C}$、映射 $\rho : \Delta \to \Gamma$ 以及元素 $y : Y(\Delta, x[\rho])$，我们用 $\langle \rho, a \rangle$ 表示满足 $\boldsymbol{p}_x \circ \langle \rho, y \rangle = \rho$ 且 $\boldsymbol{q}_x[\langle \rho, y \rangle] = y$ 的唯一态射。」

A.2 望远镜式上下文化的刻画

我们定义一阶模型的上下文切片（在 [29] 中称为纤维化切片）。

▶ **定义 22**（上下文切片）。 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$的一个一阶模型。给定 $\Gamma \in \mathcal{C}$，上下文切片 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma)$ 是由以下内容给出的上下文一阶模型：对象 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma)$ 是 Γ上的望远镜（迭代上下文扩张）。

20 对类型理论元理论而言，内部 Sconing 已足够

- 从 Δ_1 到 Δ_2 的态射，是在（$\mathcal{C}/\Gamma$）中从 $\Gamma.\Delta_1$ 到 $\Gamma.\Delta_2$ 的态射。
- 其余结构沿着投影从 $\mathcal{C}$ 继承而来

$$(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma) \ni \Delta \mapsto \Gamma.\Delta \in \mathcal{C}. \qquad \lrcorner$$

上下文切片对 $\mathcal{C}$ 和（逆变地） Γ 都具有函子性：

- 对于任意 $f:\ \Delta \to \Gamma$，存在一个拉回态射 $f^*:\ (\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma) \to (\mathcal{C} /\!\!/ \Delta)$。它在对象、代换、类型和项上的作用，都由沿 f 的代换给出。
- 对于任意 $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，存在一个态射 $(F /\!\!/ \Gamma):\ (\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma) \to (\mathcal{D} /\!\!/ F(\Gamma))$。它在对象、代换、类型和项上的作用，由 F 在望远镜、代换、类型和项上的作用给出。

- 以下图表交换（对于任意 $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $f:\ \Delta \to \Gamma$）：

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma) & \xrightarrow{(F /\!\!/ \Gamma)} & (\mathcal{D} /\!\!/ F(\Gamma)) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ (\mathcal{C} /\!\!/ \Delta) & \xrightarrow{(F /\!\!/ \Delta)} & (\mathcal{D} /\!\!/ F(\Delta)) \end{array}.$$

- 对于任意 $f:\ \Theta \to \Gamma$ 以及 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma)$ 的对象 Δ，我们有 $(f^* /\!\!/ \Delta) = \langle \boldsymbol{p}^*_\Delta(f)\ \boldsymbol{q}_\Delta \rangle^*$，它是从 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma.\Delta)$ 到 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Theta.f^*(\Delta))$ 的态射。这里 $\left\langle f \circ \boldsymbol{p}_{f^*(\Delta)}\ \boldsymbol{q}_{f^*(\Delta)} \right\rangle$ 是从 $\Theta.f^*(\Delta)$ 到 $\Gamma.\Delta$ 的态射。

▶**引理 23.** 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一阶模型。那么，望远镜式上下文化 $\mathbf{Tele}_{\mathbb{C}}$ 对应于上下文切片函子

$$(\mathcal{C} /\!\!/ -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}. \qquad \lrcorner$$

证明。 由定义展开立即可得。 ◀

▶**推论 24.** 外部化 $1^*_{\mathcal{C}}(\mathbf{Tele}_{\mathbb{C}})$ 是 $\mathcal{C}$ 的上下文核心。

证明。 由引理 23， $1^*_{\mathcal{C}}(\mathbf{Tele}_{\mathbb{C}})$ 是上下文切片 $(\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}})$，即$\mathcal{C}$的上下文核心。 ◀

▶引理 *25.* 设 $\mathcal{C}$ 是一个上下文一阶模型，且 $A :\ \mathcal{C}.Ty(1_{\mathcal{C}})$ 是一个闭类型。那么，上下文切片 $(\mathcal{C} /\!\!/ A)$ 满足以下泛性质：对于任意模型$\mathcal{E}$、态射 $F :\ \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 和元素 $a :\ \mathcal{E}.Tm(F(A))$，存在唯一的态射 $\tilde{F} : \widetilde{(\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A)} \to \mathcal{E}$，使得 $F \circ \boldsymbol{p}^*_A = F$ 且 $\tilde{F}(\boldsymbol{q}_A) = a$。

换言之，$(\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A)$ 是由泛元 $\boldsymbol{q}_A$（其类型为 A）对 $\mathcal{C}$ 作出的自由扩张。

证明。 的上下文性意味着 $\mathcal{C} \cong (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}})$，因此我们有一个弱化态射 $\boldsymbol{p}^*_A :\ \mathcal{C} \to (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A)$。记 $A' :\ \mathcal{C}.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{C}}.A)$ 为 A的弱化，即$A' = \boldsymbol{p}^*_A(A)$。

取一个态射 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 和一个元素 $a :\ \mathcal{E}.\mathrm{Tm}(F(A))$。令 $\tilde{F}: \widetilde{(\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A)} \to \mathcal{E}$ 为任意满足 $F \circ \boldsymbol{p}^*_A = F$ 且 $\tilde{F}(\boldsymbol{q}_A) = a$ 的态射。由于 $\widetilde{(\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A)}$ 是上下文式的，$\tilde{F}$可经由 $(\tilde{F} /\!\!/ (1_{\mathcal{C}}.A)) : (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A) \to (\mathcal{E} /\!\!/ 1_{\mathcal{E}})$ 分解。

下图交换：

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A) & \xrightarrow{(\tilde{F} /\!\!/ (1_{\mathcal{C}}.A))} & (\mathcal{E} /\!\!/ 1_{\mathcal{E}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{p}^*_{A'}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{p}^*_{\tilde{F}(A')}} \\ (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A.A') & \xrightarrow{(\tilde{F} /\!\!/ (1_{\mathcal{C}}.A).A')} & (\mathcal{E} /\!\!/ 1_{\mathcal{E}}.\tilde{F}(A')) \\ \downarrow{\scriptstyle \langle \boldsymbol{q}_A \rangle^*} & & \downarrow{\scriptstyle \langle \tilde{F}(\boldsymbol{q}_A) \rangle^*} \\ (\mathcal{C} /\!\!/ 1_{\mathcal{C}}.A) & \xrightarrow{(\tilde{F} /\!\!/ (1_{\mathcal{C}}.A))} & (\mathcal{E} /\!\!/ 1_{\mathcal{E}}) \end{array}$$

~ ~ ~根据假设，我们有 $F(A') = F(A)$ 和 $F(\boldsymbol{q}_A) = a$。因此， F可分解为复合映射

$$(\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A) \xrightarrow{\boldsymbol{p}^*_{A'}} (\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A.A') \xrightarrow{(\tilde{F} /\!\!/ (1_{\mathcal{C}}.A).A')} (\mathcal{E} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{E}}.F(A)) \xrightarrow{\langle a \rangle^*} (\mathcal{E} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{E}}) \to \mathcal{E}.$$

~根据 $(- \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A)$ 的函子性，我们有 $(F \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A) = (F \mathbin{/\!\!/} (1_{\mathcal{C}}.A).A') \circ (\boldsymbol{p}^*_A \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A)$。我们可以化简 $(\boldsymbol{p}^*_A \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A) = \langle \boldsymbol{p}_A \circ \boldsymbol{p}_{A'}, \boldsymbol{q}_{A'} \rangle^*$。最后，我们看到 $\langle \boldsymbol{q}_A \rangle^* \circ \langle \boldsymbol{p}_A \circ \boldsymbol{p}_{A'}, \boldsymbol{q}_{A'} \rangle^* = \mathrm{id} = \langle \boldsymbol{q}_A \rangle^* \circ \boldsymbol{p}^*_{A'}$。

~因此，$(F \mathbin{/\!\!/} (1_{\mathcal{C}}.A).A') \circ \boldsymbol{p}^*_{A'} = F_*(1_{\mathcal{C}}.A)$，我们可以将分解化简为

$$(\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{C}}.A) \xrightarrow{F_*(1_{\mathcal{C}}.A)} (\mathcal{E} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{E}}.F(A)) \xrightarrow{\langle a \rangle^*} (\mathcal{E} \mathbin{/\!\!/} 1_{\mathcal{E}}) \to \mathcal{E}.$$

~由于这个复合不依赖于 F，且满足所需的方程，因此这~证明了 F 的存在性和唯一性。◀

▶ 引理 *26.* 给定任意 $\Gamma \in \mathcal{C}$ 和 $A : \mathcal{C}.\mathrm{Ty}(\Gamma)$，则 $(\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} \Gamma.A)$ 满足以下泛性质：对于每个模型 $\mathcal{E}$、态射 $F : (\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} \Gamma) \to \mathcal{E}$ 以及元素 $a : \mathcal{E}.\mathrm{Tm}(F(A))$，~ ~ ~存在唯一的态射 $F : (\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} \Gamma.A) \to \mathcal{E}$，使得 $F \circ \boldsymbol{p}^*_A = F$ 且 $F(\boldsymbol{q}_A) = a$。

换言之，$(\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} \Gamma.A)$ 是通过类型为 A 的泛元 $\boldsymbol{q}_A$ 对$(\mathcal{C} \mathbin{/\!\!/} \Gamma)$ 作出的自由扩张。

证明。 我们有 $(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma.A) \cong ((\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma) /\!\!/ 1_{(\mathcal{C} /\!\!/ \Gamma)}.A)$。由引理 25 可得结论。◀

A.3 截面范畴的性质

现在证明展示的一阶模型的截面范畴的性质。固定一个全局内部一阶模型 $\mathcal{M} : \mathcal{C} \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}$，以及一个在 $\mathcal{M}$ 上的展示的一阶模型$\mathcal{M}^\bullet : \mathcal{C} \to \mathbf{DispMod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}$。

我们证明以下条件：$\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 中某些有限极限的存在性与一阶模型 $\mathcal{M}(\Gamma)$（$\Gamma \in \mathcal{C}$）的泛性质相关。

我们将 $\mathcal{M}^\bullet$ 的截面范畴 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 定义为如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet] & \xrightarrow{[\![-]\!]_0} & \mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet} & \mathbf{DispModel}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}} . \end{array}$$

展开定义，$\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathcal{M}^\bullet]$ 的一个对象是一个二元组（Γ，$[\![-]\!]_\Gamma$），其中 $\Gamma \in \mathcal{C}$，且 $[\![-]\!]_\Gamma$ 是 $\mathcal{M}^\bullet(\Gamma)$ 在 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 上的一个截面。从（Γ，$[\![-]\!]_\Gamma$）到（Δ，$[\![-]\!]_\Delta$）的一个态射是一个态射 $f : \mathcal{C}(\Gamma, \Delta)$，使得下图中的外部交换方块成立：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet(\Delta) & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet(f)} & \mathcal{M}^\bullet(\Gamma) \\ {\scriptstyle [\![-]\!]_\Gamma}\uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow{\scriptstyle [\![-]\!]_\Delta} \\ \mathcal{M}(\Delta) & \xrightarrow{\mathcal{M}(f)} & \mathcal{M}(\Gamma) . \end{array}$$

▶ **引理 27. </style}若 有一个终对象，且 $(1_{\mathcal{C}})$ </style}是 的初始模型，那么截面$^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 有一个被 π_0严格保留的终对象。**

证明。由于 $\mathcal{M}(1_{\mathcal{C}})$ 是初始的，我们得到 $\mathcal{M}^\bullet(1_{\mathcal{C}})$ 的一个截面 $[\![-]\!]_{1_{\mathcal{C}}}$。现在证明 $(1_{\mathcal{C}}, [\![-]\!]_{1_{\mathcal{C}}})$ 是 $\mathsf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 中的终对象。设 $(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$ 是 $\mathsf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 中任意一个对象。从 $(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$ 到 $(1_{\mathcal{C}}, [\![-]\!]_{1_{\mathcal{C}}})$ 的态射是一个态射 $f : \mathcal{C}(\Gamma, 1_{\mathcal{C}})$，使得下列交换方块交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet(1_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet(f)} & \mathcal{M}^\bullet(\Gamma) \\ {\scriptstyle [\![-]\!]_{1_{\mathcal{C}}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle [\![-]\!]_\Gamma} \\ \mathcal{M}(1_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\mathcal{M}(f)} & \mathcal{M}(\Gamma)\ . \end{array}$$

由于 $1_{\mathcal{C}}$ 是终对象，因此只有一个态射 $f : \mathcal{C}(\Gamma, 1_{\mathcal{C}})$，且相应的交换方块根据 $\mathcal{M}(1_{\mathcal{C}})$ 的初始性而交换。◀

▶**定义 28.** 设 X 是 $\mathcal{C}$ 上的预层，Y 是 X 上的局部可表依赖预层。假设给定全局元素

$$f_X : X \to \mathcal{M}.\mathsf{Ty}(1_{\mathcal{M}}),$$
$$f_Y : (x : X) \to Y(x) \to \mathcal{M}.\mathsf{Tm}(1_{\mathcal{M}}, f_X(x))$$

预层范畴$(\mathcal{C})$ 的元素。

我们称 f_Y 与 $\mathcal{M}$ 相容，如果对于每个元素 $x : X(\Gamma)$，外部一阶模型 $\mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$ 满足以下泛性质：对于任意一阶模型 $\mathcal{E}$、态射 $E : \mathcal{M}(\Gamma) \to \mathcal{E}$ 和元素 $z : \mathcal{E}.Tm(1_{\mathcal{E}}, E(f_X(x)))$，存在唯一的态射 $E : \mathcal{M}(\Gamma.Y(x)) \to \mathcal{E}$，使得 $E = E \circ \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_x)$ 且 $z = E(f_Y(x, \boldsymbol{q}_x))$。

换言之，$\mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$ 应当是 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 通过一个类型为 $f_X(x)$的元素 $f_Y(x, \boldsymbol{q}_x)$得到的自由扩张，而该扩张由态射 $\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_x) : \mathcal{M}(\Gamma) \to \mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$见证。

⌟

▶ **引理 29.** 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个上下文与类型族态射。

那么，定义 *28* 的条件成立，其中 $\mathcal{M} = F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{D}})$、$X$ 和 Y 分别是 $\mathcal{C}$ 的类型与项，而 f_X 和 f_Y 分别是 F 在类型和项上的作用。

证明。 由定义 22，$\mathcal{M}$ 对应于函子

$$\mathcal{C} \ni \Gamma \mapsto (\mathcal{D} /\!\!/ F(\Gamma)) \in \mathbf{Mod}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}.$$

因此，我们需要验证：对于任意 $\Gamma \in \mathcal{C}$ 和 $A : \mathcal{C}.\mathsf{Ty}(\Gamma)$，模型 $(\mathcal{D} /\!\!/ F(\Gamma.A))$ 是 $(\mathcal{D} /\!\!/ F(\Gamma))$ 通过一个类型为 $F(A)$ 的泛元得到的自由扩张。由于 F 保持扩张，$F(\Gamma.A) \cong F(\Gamma).F(A)$，因此结论由引理 26 得出。◀

▶**引理 30.** 设 X 是 $\mathcal{C}$ 上的预层，Y 是 X 上配备运算 f_X 和 f_Y 的局部可表预层族，并满足定义 *28* 的条件。最后，假设对于每个 $(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma) \in \mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$，$\Delta \in \mathcal{C}$，$\gamma : \mathcal{C}(\Delta, \Gamma)$，$x : X(\Gamma)$ 以及 $y : Y(\Delta, x[\gamma])$，我们有

$$f^\bullet_Y(x, y) : \mathcal{M}^\bullet(\Delta).\mathsf{Tm}^\bullet(1^\bullet, \mathcal{M}^\bullet(\gamma)([\![f_X(x)]\!]_\Gamma), f_Y(x[\gamma], y)),$$

在 $(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$ 和 Δ 中自然成立。

考虑 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 上的预层 $X_0 \triangleq \pi_0^*(X)$，以及由对象上的以下指定给出的 X_0 上的依赖预层 Y_0：

$$Y_0((\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma), x) \triangleq \{y : Y(\Gamma, x) \mid [\![f_Y(x, y)]\!]_\Gamma = f^\bullet_Y(x, y)\}.$$

那么，预层族 Y_0 是局部可表的，并且由第一投影 $Y_0((\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)\ x) \to Y(\Gamma, x)$ 诱导的作用严格保持上下文扩展。

证明。 设 $(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$ 是 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 的一个对象，且 $x : X(\Gamma)$ 是该对象上的一个元素。我们需要证明，预层 $Y_{0|x}$ 在 $(\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}/(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma))$ 上是可表的。

考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet(\Gamma) & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet(\boldsymbol{p}_x)} & \mathcal{M}^\bullet(\Gamma.Y(x)) \\ {\scriptstyle [\![-]\!]_\Gamma}\uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow{\scriptstyle [\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}} \\ \mathcal{M}(\Gamma) & \xrightarrow{\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_x)} & \mathcal{M}(\Gamma.Y(x)) \end{array}$$

我们构造一个截面 $[\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}$，它定义在 $\mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$ 上，取值于 $\mathcal{M}^\bullet(\Gamma.Y(x))$。利用 $\mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$ 的泛性质，我们将 $[\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}$ 定义为 $\mathcal{M}^\bullet(\boldsymbol{p}_x) \circ [\![-]\!]_\Gamma$ 的唯一扩张，该扩张将 $f_Y(x, \boldsymbol{q}_x)$ 映至 $f^\bullet_Y(x, \boldsymbol{q}_x)$。

我们可以验证，$\boldsymbol{p}_x$ 提升为一个态射 $\boldsymbol{p}_x : (\Gamma.Y(x)[\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}) \to (\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$，其位于 $\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 中。

现在我们证明，$((\Gamma.Y(x)[\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)})\ \boldsymbol{p}_x)$ 表示函子 $Y_{0|x}$。设 $(\Delta, [\![-]\!]_\Delta)$ 是 $\mathsf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$ 中的另一个对象，带有一个态射 $\rho : (\Delta, [\![-]\!]_\Delta) \to (\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma)$，以及一个元素 $y : Y_{0|x}((\Delta, [\![-]\!]_\Delta)\ \rho)$。展开定义可得 $y : Y(\Delta, x[\rho])$，其中 $[\![f_Y(x[\rho], y)]\!]_\Delta = f^\bullet_Y(x[\rho], y)$。

Y 的局部可表性意味着存在唯一的态射 $\widetilde{\rho} : \Delta \to \Gamma.Y(x)$，属于 $\mathcal{C}$，使得 $\boldsymbol{p}_x \circ \widetilde{\rho} = \rho$ 且 $\boldsymbol{q}_x[\widetilde{\rho}] = y$。我们需要证明该态射可提升到$\mathbf{Sect}^{\mathsf{op}}_{\mathcal{M}^\bullet}$，也就是说，下面的交换方块交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\bullet(\Gamma.Y(x)) & \xrightarrow{\mathcal{M}^\bullet(\widetilde{\rho})} & \mathcal{M}^\bullet(\Delta) \\ {\scriptstyle [\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}}\uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow{\scriptstyle [\![-]\!]_\Delta} \\ \mathcal{M}(\Gamma.Y(x)) & \xrightarrow{\mathcal{M}(\widetilde{\rho})} & \mathcal{M}(\Delta) \end{array}$$

根据 $\mathcal{M}(\Gamma.Y(x))$ 的泛性质，只需证明 $f_Y(x, \boldsymbol{q}_x)$ 经复合 $\mathcal{M}^\bullet(\widetilde{\rho}) \circ [\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)}$ 和 $[\![-]\!]_\Delta \circ \mathcal{M}(\widetilde{\rho})$ 映射到同一个元素。我们计算$\mathcal{M}^\bullet(\widetilde{\rho})([\![f_Y(x, \boldsymbol{q}_x)]\!]_{\Gamma.Y}(x)) = \mathcal{M}^\bullet(\widetilde{\rho})(f^\bullet_Y(x, \boldsymbol{q}_x)) = f^\bullet_Y(x[\rho], y)$ 以及 $[\![\mathcal{M}(\widetilde{\rho})(f_Y(x, \boldsymbol{q}_x))]\!]_\Delta = [\![f_Y(x[\rho], y)]\!]_\Delta = f^\bullet_Y(x[\rho], y)$。

这就完成了证明：$((\Gamma.Y(x)[\![-]\!]_{\Gamma.Y(x)})\ \boldsymbol{p}_x)$ 表示函子 $Y_{0|x}$。

我们已经证明，对于每个 x，$Y_{0|x}$ 都是可表的，也就是说，Y_0 是局部可表的。第一投影 $Y_0((\Gamma,\ [\![-]\!]_\Gamma)\ x) \to Y(\Gamma,\ x)$ 严格保持所选的表示对象。◀

A.4 相对归纳原理的证明

P定理 18 的证明。 我们考虑范畴 **截面**$^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathbf{scone}_{\mathbb{S}^\bullet}]$，即 $\mathbf{scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$的截面。

根据引理 27，范畴 **截面**$^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathbf{scone}_{\mathbb{S}^\bullet}]$有一个终对象。我们按如下方式赋予它关于 $(F \circ \pi_0)$: **截面** $^{\mathsf{op}}_{\mathcal{T}}[\mathbf{scone}_{\mathbb{S}^\bullet}] \to \mathcal{S}$ 的高阶重命名代数 $(\mathsf{Var}_0, \mathsf{var}_0)$ 结构：

$$\mathsf{Var}_0((\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma), A) \triangleq \{a : \mathsf{Var}(\Gamma, A) \mid [\![\mathsf{var}(\Gamma, a)]\!]_\Gamma = \mathsf{var}^\bullet(\Gamma, [\![A]\!]_\Gamma, a)\},$$

$$\text{变量}_0((\Gamma,\ [\![-]\!]_\Gamma)\ A,\ a) \triangleq \text{变量}(\Gamma,\ a)。$$

由引理 29 可知，$F : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ 对变量的作用与 $\mathcal{S}_F$ 相容。由引理 30 可知，预层族 Var_0 局部可表，且第一投影 $\mathsf{Var}_0((\Gamma,\ [\![-]\!]_\Gamma)\ A) \to \mathsf{Var}(\Gamma,\ A)$ 严格保持上下文扩展。根据 $\mathcal{R}$ 在一阶重命名代数中的初始性，我们在一阶重命名代数范畴中得到 π_0 的一个截面 H。

因此，我们得到 $\mathbf{scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ in **预层范畴**$(\mathcal{R})$ 中的一个截面 $[\![-]\!] \triangleq H^*([\![-]\!]_0)$。$H$ 对变量的作用证明它满足等式 $[\![\mathsf{var}_A(x)]\!] = \mathsf{var}^\bullet([\![A]\!], x)$。◀

B 示例：句法参数性

在本附录中，我们展示如何结合这些构造，为带宇宙的依赖类型理论获得一种句法参数性翻译。句法参数性 [9, 5]指的是这样一种情形：翻译的结果本身由语法中的类型和项构成，而非集合或预层等元理论实体。

句法参数性是我们的方法的一个有趣应用，因为归纳的动机和方法是在某个范畴上给出的（此处是语法），但归纳的结果只在另一个范畴上得到（此处是终范畴，它选取空上下文）。我们在语法上的预层中构造一个展示高阶模型及其**Scone**-上下文化，但只考察其外部化的截面，而从未得到完整**Scone**-上下文化的截面。

令 $\mathcal{T}$为一种依赖类型理论，它带有一系列 Coquand 宇宙 [12, 30], ，使得每个层级上的类型都对 Π-类型封闭。这意味着， $\mathcal{T}$的高阶模型由以下数据构成，其中每一行都对一个宇宙层级 $i \in \mathbb{N}$ 进行量化：

Ty_i : 集合, $\mathsf{Tm}_i : \mathsf{Ty}_i \to$ 集合,$\mathcal{U}_i : \mathsf{Ty}_{i+1}$, $\mathsf{El}_i : \mathsf{Tm}(\mathcal{U}_i)$
$\cong \mathsf{Ty}_i$, $\mathsf{Lift}_i : \mathsf{Ty}_i \to \mathsf{Ty}_{i+1}$, $\mathsf{lift}_i : \mathsf{Tm}_i(A) \cong \mathsf{Tm}_{i+1}$
$(\mathsf{Lift}_i(A))$,$\Pi : (A : \mathsf{Ty}_i) \to (\mathsf{Tm}_i(A) \to \mathsf{Ty}_i) \to \mathsf{Ty}_i$,
应用 : $\mathsf{Tm}_i(\Pi(A, B)) \cong ((a : \mathsf{Tm}_i(A)) \to \mathsf{Tm}_i(B(a)))$.

我们用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{T}$的语法，即 $\mathcal{T}$的始对象一阶模型；本文的构造可推广到这一理论。

我们在 **预层范畴**$(\mathcal{S})$内部构造一个展示高阶模型 $\mathbb{S}^\bullet$ ，其上方为 $\mathsf{Tele}_{\mathbb{S}}$：在 A上的

- 一个展示类型： $\mathbb{S}.\mathsf{Ty}_i$ 是一个类型族

  $$A^\bullet : \mathbb{S}.\mathsf{Tm}(A) \to \mathbb{S}.\mathsf{Ty}_i.$$

- 在 a上，类型为 $A^\bullet$ 的展示项： $\mathbb{S}.\mathsf{Tm}(A)$ 是一个元素

  $$a^\bullet : \mathbb{S}.\mathsf{Tm}(A^\bullet(a))。$$

- 显示宇宙 $\mathcal{U}_i^\bullet$定义为

  $$\mathcal{U}_i^\bullet \triangleq \lambda A \mapsto \Pi(\mathsf{El}(A), \mathcal{U}_i),$$

  因此我们有一个同构 $\mathcal{U}_i^\bullet(A) \cong \mathsf{Ty}_i^\bullet(\mathsf{El}_i(A))$。
- 所示的提升操作 $\mathsf{Lift}_i^\bullet$ 定义如下：

  $$\mathsf{Lift}_i^\bullet(A^\bullet) \triangleq \lambda a \mapsto \mathsf{Lift}_i(A^\bullet(\mathsf{lift}_i^{-1}(a)));$$

  我们有一个同构 $\mathsf{Tm}_i^\bullet(A^\bullet, a) \cong \mathsf{Tm}_{i+1}^\bullet(\mathsf{Lift}_i^\bullet(A^\bullet), \mathsf{lift}_i(a))$.
- 所显示的 Π-类型 $\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet)$ 定义为

  $$\Pi^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \triangleq \lambda f \mapsto (\Pi(A, \lambda a \mapsto \Pi(A^\bullet(a), \lambda a^\bullet \mapsto B^\bullet(a^\bullet, \mathsf{app}(f, a))))).$$

根据 $\mathcal{S}$ 相对于 $1_{\mathcal{S}}$ 的归纳原理：$1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{S}$，我们有一个 $[\![-]\!]$ of$1^*_{\mathcal{S}}(\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet})$ 的截面。令 f 为 $\mathcal{S}$ 的任意闭项，其类型为 $(A : \mathcal{U}_0) \to A \to A$。

那么，$[\![f]\!]$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个闭项，类型为 $[\![(A : \mathcal{U}_0) \to A \to A]\!](f)$，它见证了$f$ 满足参数性这一事实。利用 $[\![-]\!]$的计算规则，我们可以计算

$$
\begin{aligned}
&[\![(A : \mathcal{U}_0) \to A \to A]\!](f)\\
&\quad = (A : \mathcal{U}_0)(A^\bullet : A \to \mathcal{U}_0) \to [\![\lambda A \mapsto A \to A]\!](A^\bullet, f(A))\\
&\quad = (A : \mathcal{U}_0)(A^\bullet : A \to \mathcal{U}_0)(a : A)(a^\bullet : A^\bullet(A)) \to [\![\lambda (A, a) \mapsto A]\!]((A^\bullet, a^\bullet), f(A, a))\\
&\quad = (A : \mathcal{U}_0)(A^\bullet : A \to \mathcal{U}_0)(a : A)(a^\bullet : A^\bullet(A)) \to A^\bullet(f(A, a)).
\end{aligned}
$$

C 立方类型论的归纳原理

本节陈述并证明最小立方类型论的相对归纳原理。我们应当能够将这些归纳原理（扩展到更大的立方类型论）用于在我们的框架中表达已知的严格规范性、同伦规范性 [15]和规范化 [36] 证明。

▶ **定义 31.** 一个高阶立方代数是一个集合 $\mathbb{I}$，带有两个点0，$1 : \mathbb{I}$。 」

▶**定义 32.** 一个一阶立方代数是一个范畴 $\mathcal{C}$，带有一个终对象 $1_{\mathcal{C}}$，以及一个局部可表预层 $\mathbb{I}$，它带有两个全局元素0、1。」

立方范畴 $\square$ 是始对象一阶立方代数。

我们考虑一种最小立方类型论 $\mathcal{T}_{\mathsf{CTT}}$，其中只有 Π-类型和路径类型。 $\mathcal{T}_{\mathsf{CTT}}$ 的一个高阶模型由以下数据组成:

$\mathbb{I}$: 集合, $0, 1 : \mathbb{I}$, Ty : 集合, $\mathsf{Tm} : \mathsf{Ty} \to$ 集合,$\Pi : (A : \mathsf{Ty}) \to (\mathsf{Tm}(A) \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Ty}$, $\mathsf{app} : \mathsf{Tm}(\Pi(A, B)) \cong ((a : \mathsf{Tm}(A)) \to \mathsf{Tm}(B(a)))$, $\mathsf{Path} : (A : \mathbb{I} \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Tm}(A(0)) \to \mathsf{Tm}(A(1)) \to \mathsf{Ty}$, $\mathsf{papp} : \mathsf{Tm}(\mathsf{Path}(A, x, y)) \to (i : \mathbb{I}) \to \mathsf{Tm}(A(i))$, $(p : \mathsf{Tm}(\mathsf{Path}(A, x, y))) \to \mathsf{papp}(p, 0) = x$, $(p : \mathsf{Tm}(\mathsf{Path}(A, x, y))) \to \mathsf{papp}(p, 1) = y$, $\mathsf{plam} : (A : \mathbb{I} \to \mathsf{Ty}) \to (p : (i : \mathbb{I}) \to \mathsf{Tm}(A(i))) \to \mathsf{Tm}(\mathsf{Path}(A, p(0)\ p(1)))$.

我们将 $\mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$ 记作 $\mathcal{T}_{\mathsf{CTT}}$的始一阶模型。

根据 $\square$的泛性质，立方代数（$\mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}.\mathbb{I}$，$\mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}.0$，$\mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}.1$）确定了一个一阶立方代数态射 $F : \square \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$。我们提出 $\mathcal{S}_F \triangleq F^*$（$\mathbf{Tele}_{\mathbb{S}_{\mathsf{CTT}}}$）。我们将 $\mathsf{int} : \square.\mathbb{I} \to \mathcal{S}_F.\mathbb{I}$ 记作 F 在 $\mathbf{Psh}(\square)$ 中区间元素上的作用。

▶ **定理 33**（相对于 $F : \square \to \mathcal{S}_{\mathrm{CTT}}$的归纳原理）。设 $\mathbb{S}^\bullet$ 是 *CTT* 在 $\mathcal{S}_F$上的一个展示高阶模型，并假设给定了一个函数的附加数据

$\mathsf{int}^\bullet : (i : \square.\mathbb{I}) \to \mathbb{I}^\bullet(\mathsf{int}(i))$

使得

$\mathsf{int}^\bullet(0) = 0^\bullet,$
$\mathsf{int}^\bullet(1) = 1^\bullet.$

那么存在一个截面 $[\![-]\!]$ *of* $\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$。它满足附加等式

$[\![\mathsf{int}(i)]\!] = \mathsf{int}^\bullet(i).$

证明。 我们考虑范畴 $\mathbf{Sect}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}]$ 的截面 $\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$。

由引理 27，范畴 $\mathbf{Sect}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}]$ 有一个终对象。我们为其赋予如下高阶立方代数 $(\mathbb{I}_0, 0_0, 1_0)$：

$\mathbb{I}_0(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma) \triangleq \{i : \Box.\mathbb{I}(\Gamma) \mid [\![\mathsf{int}(i)]\!]_\Gamma = \mathsf{int}^\bullet(\Gamma, i)\},$
$0_0 \triangleq \Box.0,$
$1_0 \triangleq \Box.1.$

所需等式 $[\![\mathsf{int}(\Box.0)]\!]_\Gamma = \mathsf{int}^\bullet(\Gamma, \Box.0)$ 和 $[\![\mathsf{int}(\Box.1)]\!]_\Gamma = \mathsf{int}^\bullet(\Gamma, \Box.1)$ 可由假设 $\mathsf{int}^\bullet(\Box.0) = 0^\bullet$ and $\mathsf{int}^\bullet(\Box.1) = 1^\bullet$ 得出。

根据引理 29，$F : \Box \to \mathcal{S}$ 对 $\Box.\mathbb{I}$ 的元素的作用与 $\mathcal{S}_F$相容。根据引理 30，预层 $\mathbb{I}_0$ 是局部可表的，且第一投影 $\mathbb{I}_0(\Gamma, [\![-]\!]_\Gamma) \to \Box.\mathbb{I}(\Gamma)$严格保持上下文扩展。由 $\Box$ 在一阶立方代数中的初始性，我们得到一阶立方代数范畴中 π_0 的一个截面 H。

因此，我们在$\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}^\bullet}$ 的$\mathbf{Psh}(\Box)$中有一个截面 $[\![-]\!] \triangleq H^*([\![-]\!]_0)$。$H$ 对区间元素的作用证明了 $[\![-]\!]$ 满足等式 $[\![\mathsf{int}(i)]\!] = \mathsf{int}^\bullet(i)$。◀

▶**定义 34.** 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathsf{CTT}}$的一个一阶模型。一个关于 $\mathcal{C}$ 的高阶立方重命名代数 $\mathbb{C}$ 由一个关于 $\mathcal{C}$ 的高阶重命名代数$(\mathbb{C}.\mathsf{Var}\ \mathbb{C}.\mathsf{var})$、一个高阶立方代数$(\mathbb{C}.\mathbb{I}, \mathbb{C}.0, \mathbb{C}.1)$，以及一个运算组成

$\mathbb{C}.\mathsf{int} : \mathbb{C}.\mathbb{I} \to \mathcal{C}.\mathbb{I}(1_{\mathcal{C}})$

使得 $\mathbb{C}.\mathsf{int}(0) = 0$ 且 $\mathbb{C}.\mathsf{int}(1) = 1$。 ⌟

▶**定义 35.** 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathsf{CTT}}$的一个一阶模型。关于 $\mathcal{D}$ 的一个一阶立方重命名代数 是一个范畴 $\mathcal{C}$，它带有一个终对象，以及一个函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，该函子保持终对象；此外，它还带有关于 $F^*(\mathsf{Tele}_{\mathbb{D}})$ 的全局高阶立方重命名代数 $\mathbb{C}$ 结构，并满足 $\mathbb{C}.\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{C}.\mathsf{Var}$ 均为局部可表的，且 $\mathbb{C}.\mathsf{int}$ 和 $\mathbb{C}.\mathsf{var}$ 均严格保持上下文扩展。⌟

立方重命名的范畴 $\mathcal{A}_\Box$（也称为原子立方上下文与替换的范畴）是关于 $\mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$的初始一阶立方重命名代数。我们将函子 $G : \mathcal{A}_\Box \to \mathcal{S}_{\mathsf{CTT}}$记作 G，并定义 $\mathcal{S}_G \triangleq G^*(\mathbf{Tele}^{\mathbb{S}_{\mathsf{CTT}}})$。

▶ **定理 36**（相对于 $F : \mathcal{A}_\Box \to \mathcal{S}_{\mathrm{CTT}}$）。设 $\mathbb{S}^\bullet$ 是建立在 $\mathcal{S}_G$之上的 *CTT* 展示高阶模型，并假设给定了函数的附加数据

$\mathsf{var}^\bullet : \forall A\ (A^\bullet : \mathsf{Ty}^\bullet(A))\ (a : \mathsf{Var}(A)) \to \mathsf{Tm}^\bullet(A^\bullet, \mathsf{var}(a)),$
$\mathsf{int}^\bullet : (i : \Box.\mathbb{I}) \to \mathbb{I}^\bullet(\mathsf{int}(i))$

使得

$\mathsf{int}^\bullet(0) = 0^\bullet,$
$\mathsf{int}^\bullet(1) = 1^\bullet.$

那么存在一个截面 $[\![-]\!]$ *of* $\mathbf{Scone}_{\mathbb{S}}{}^{\bullet}$。它满足以下附加等式

$[\![\text{变量}_A(a)]\!] = \text{变量}^{\bullet}([\![A]\!], a)$，$[\![\text{整数}(i)]\!] = \text{整数}^{\bullet}(i)$。

证明。 采用与定理 18 和定理 33 的证明相同的方法。 ◀