arXiv:2302.05199v1 [math.FA] 10 Feb 2023

局部紧群上概率测度的加权遍历定理

H. S. MUSTAFAYEV

Abstract. 设 G 是一个局部紧群，其左 Haar 测度为 m_G。若概率测度 μ 在 G 上的支集不包含于 $G.$ 的任何真闭左陪集中，则称其为 *strictly aperiodic* 。假设 μ是 G 上的严格非周期测度，且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是平均遍历定理 [8, 定义 21.1] 的有界良权。我们证明，若 G 是紧的，则

$$\mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\mu^i = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\overline{m}_H,$$

其中 H 是由 $\operatorname{supp}\mu$ 生成的 G 的闭子群，而 $\overline{m}_H$ 是 G 上的测度，定义为对于 $G.$ 的每个博雷尔子集 E， $\overline{m}_H(E) = m_H(E\cap H)$。若 H 不是紧的，则

$$w^* - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\mu^i = 0.$$

此外还讨论了一些相关问题。

1. 引言

设 G 为一个局部紧群，其左 Haar 测度为 m_G （当 G 为紧群时， m_G 表示 G 上的归一化 Haar 测度），并设 $M(G)$ 为 $G.$ 的卷积测度代数。通常， $C_0(G)$ 表示 G 上所有在无穷远处消失的复值连续函数构成的空间。由于 $C_0(G)^* = M(G)$，空间 $M(G)$ 带有弱* 拓扑 $\sigma(M(G), C_0(G))$。下文中， $M(G)$ 上的 w*-拓扑始终指这一拓扑。对于 G 的子集 S，我们用 $[S]$ 表示由 $S.$ 生成的 G 的闭子群。若概率测度 μ 定义在 G 上，则称其为适应的，若 $[\operatorname{supp}\mu] = G.$。此外，若概率测度 μ 定义在 G 上，且 μ 的支集不包含于 $G.$ 的任何真闭左陪集中，则称其为严格非周期的。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们用 μ^n 表示 n 的第 $\mu\in M$ 个卷积幂（G），其中 $\mu^0 := \delta_e$ 是集中于 $G.$ 的单位元e 处的狄拉克测度。

经典的 Kawada-Itˆo 定理 [14, 定理 7] 断言，若 μ 是紧致可度量群 G上的适配测度，则概率测度序列 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu^i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 弱* 收敛于 G 上的 Haar 测度（另见 [11, 定理 3.2.4]）。若 μ 是紧致可度量群 G 上的适配且严格非周期测度，则 w*-$\lim_{n\to\infty}\mu^n = m_G$ [14, 定理 8]。若 μ 是第二可数非紧群 G上的适配测度，则 w*-$\lim_{n\to\infty}\mu^n = 0$[18, 定理 2]。在 [3, Th´eor`eme 8], 中证明了，若 μ 是严格非周期

2010 *Mathematics Subject Classification.* 28A33,43A10,43A30,43A77。
Key words and phrases. 平均遍历定理，局部紧群，概率测度，收敛。

测度，定义在非紧局部紧群 G上，则 $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty}\mu^n = 0$。相关结果另见 [1], [2], [11]。

本文给出了关于局部紧群上概率测度收敛的一些结果。

2. Weak* convergence

设 X 是一个复巴拿赫空间， $B(X)$是 X上所有有界线性算子构成的代数。若算子 $T \in B(X)$的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T^i x \ \text{ exists in norm } \forall x \in X.$$

若 T 是平均遍历的，则

$$P_T x := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T^i x \quad (x \in X)$$

是到 $\ker(T-I)$ 上的投影。投影 P_T称为与 T.相关联的均值遍历投影

若算子 $T \in B(X)$ 满足

$$C_T := \sup_{n\geq 0}\|T^n\| < \infty.$$

巴拿赫空间 X 上的幂有界算子 T 是平均遍历的，当且仅当

$$X = \overline{\operatorname{ran}(T-I)} \oplus \ker(T-I). \tag{2.1}$$

众所周知，反身巴拿赫空间上的幂有界算子是平均遍历的（例如参见 [15, 第 2]章）。

以下结果是恒等式 (2.1) 的直接推论。

命题 2.1. 设 T 是巴拿赫空间 X 上的幂有界算子，并假设对所有 $x \in X$. 均有 $\lim_{n\to\infty}\left\|T^{n+1}x - T^n x\right\| = 0$。若 T是平均遍历的（因此，若 X是反身的），则对所有 $x \in X$均有 $\lim_{n\to\infty}\|T^n x - P_T x\| = 0$，其中 P_T是与 T相关联的均值遍历投影。

复平面中的开单位圆盘和单位圆分别记为 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{T}$。若 $T \in B(X)$ 是幂有界的，则显然 $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$，其中$\sigma(T)$ 是 T. 的谱。经典的卡茨内尔森-察弗里定理 [13] 指出，若 $T \in B(X)$ 是幂有界的，则 $\lim_{n\to\infty}\left\|T^{n+1} - T^n\right\| = 0$ 当且仅当$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subseteq \{1\}$.

若 $T \in B(X)$ 是平均遍历的，则 T 是 Ces`aro 有界的，即

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T^i\right\| < \infty.$$

由谱映射定理可知， $r(T) \leq 1$，其中 $r(T)$ 是 T. 的谱半径

设 N 是复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正规算子，其谱测度为 E（回忆一下， $\sigma(N) = \operatorname{supp} E$）。若 N是平均遍历的，则 $\|N\| = r(N) \leq 1$（另请注意，正规算子幂有界当且仅当它是

压缩算子）。由谱定理容易得出，若 N 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的正规压缩算子，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}N^{i}x=E\left\{1\right\}x\ \text{ in norm }\forall x\in\mathcal{H}.$$

另一方面，经过几行计算可得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|N^{n+1}x-N^{n}x\right\|^{2}=\int\limits_{\sigma(N)\cap\mathbb{T}\diagdown\{1\}}|z-1|^{2}\,d\langle E\left(z\right)x,x\rangle,\ \ \forall x\in\mathcal{H}.$$

由这个恒等式和命题 2.1 可知，对于每个 $x\in\mathcal{H}$，序列 $\left\{N^{n}x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在范数意义下收敛，当且仅当 $\|N\|\leq1$ 且 $E\left[\sigma\left(N\right)\cap\mathbb{T}\diagdown\{1\}\right]=0$。在这些条件下，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|N^{n}x-E\left\{1\right\}x\|=0,\ \ \forall x\in\mathcal{H}.$$

回顾 [8, 定义 21.1]，若序列 $\left\{a_{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathbb{C}$，且对于每个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及其上的每个压缩算子 T，极限都存在，则称该序列为平均遍历定理的良好权重（简称良好权重） $\mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i}T^{i}x\ \text{ exists }\forall x\in\mathcal{H}.$$

根据 [8], 定理 21.2，若有界序列 $\left\{a_{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足极限存在，则它是良好权重，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i}\xi^{i}=:a\left(\xi\right)\ \ \text{ exists }\forall\xi\in\mathbb{T}.$$

设 $(\Omega\ \Sigma,m)$ 是一个概率空间，且 $\varphi\colon\Omega\ \to\Omega$ 是一个保测变换。由维纳-温特纳定理 [8, 推论 21.6]可知，对于任意 $f\in L^{\infty}(\Omega)$ 以及几乎所有 $\omega\in\Omega$，序列 $(f\left(\varphi^{n}\left(\omega\right)\right))_{n\in\mathbb{N}}$ 都是有界良权。

若 $\left\{a_{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界良权，则对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的每个压缩算子 T，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i}T^{i}x=\sum_{\xi\in\sigma_{p}(T)\cap\mathbb{T}}a\left(\xi\right)P_{\xi}x\ \text{ in norm }\forall x\in\mathcal{H},\tag{2.2}$$

其中 P_{ξ} 是投影到两两正交的特征子空间 $\ker\left(T-\xi I\right)$ 上的正交投影，这些特征子空间对应于 $\xi\in\sigma_{p}(T)\cap\mathbb{T}$； $\sigma_{p}(T)$ 是 T [8, 的点谱。定理 21.2] （由此可知，对于至多可数个 $\xi\in\mathbb{T}$， $a(\xi)\neq0$。）

设 N 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正规压缩算子，其谱测度为 $E.$。假设对于所有 $\xi\in\mathbb{T}\diagdown\{1\}.$，都有 $E\left\{\xi\right\}=0$。由恒等式 (2.2) 可知，若 $\left\{a_{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界良权，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i}N^{i}x=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i}\right)E\left\{1\right\}x\ \text{ in norm }\forall x\in\mathcal{H}.$$

设 G 是一个带有左 Haar 测度 m_{G} 的局部紧群。如果 H 是 G 的闭子群，那么对于 $G.$ 的每个博雷尔子集 E，通过令 $\overline{m}_{H}\left(E\right)=m_{H}\left(E\cap H\right)$，测度 m_{H} 可视为 G 上的测度。注意，$\operatorname{supp}\overline{m}_{H}=H.$

本文的主要结果之一如下。

定理 2.2. 设 μ 是局部紧群 G 上的严格非周期测度，且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界良权。以下断言成立：

(a) 如果 G 是紧的，则

$$w^*-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^i=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\overline{m}_{[\operatorname{supp}\mu]}.$$

(b) 如果 $[\operatorname{supp}\mu]$ 不是紧的，则

$$w^*-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^i=0.$$

下面汇集一些稍后将要用到的预备结果。

设 G 为一个局部紧群。 π 是 G 在巴拿赫空间X_π （ π的表示空间）上的一个表示，即从 G 到 X_π. 上可逆等距变换群的同态。我们假设 π 是强连续的。那么，对于任意的 $\mu\in M(G)$，我们可以通过下式在 X_π 上定义一个有界线性算子 $\widehat{\mu}(\pi)$:

$$\widehat{\mu}(\pi)x=\int_G\pi(g)\,x\,d\mu(g),\ \ x\in X_\pi.$$

映射 $\mu\to\widehat{\mu}(\pi)$ 是线性的、可乘的且为压缩映射； $\|\widehat{\mu}(\pi)\|\leq\|\mu\|_1$，其中 $\|\mu\|_1$ 是 $\mu\in M(G)$ 的全变差范数。

B$\widehat{G}$ 我们将用 G表示 G 的酉对偶，即 G 的所有不可约连续酉表示的等价类所构成的集合，并赋予费尔拓扑。回顾一下，若 $\pi_0\in G$ 是 $M\subset G$ 在费尔拓扑下的极限点，则矩阵函数$g\to\langle\pi_0(g)\ x_0,x_0\rangle\,(x_0\in\mathcal{H}_{\pi_0})$可在 G的每个紧子集上一致地由矩阵函数 $g\to\langle\pi(g)x,x\rangle\,(\pi\in M,\ x\in\mathcal{H}_\pi)$逼近（当$\widehat{}$ G 为阿贝尔群时，费尔拓扑与 G（ G的对偶群）的通常拓扑一致）。函数 $\pi\to\widehat{\mu}(\pi)$ $\left(\pi\in\widehat{G}\right)$ 称为 $\mu\in M(G)$的傅里叶-斯蒂尔杰斯变换（若 G 为阿贝尔群，则 $\mu\in M(G)$的傅里叶-斯蒂尔杰斯变换将$\widehat{}$简记为 $\widehat{\mu}$）。若对所有 $\pi\in G$均有 $\widehat{\mu}(\pi)=0$，则 $\mu=0$ （例如，参见 [5,$\widehat{}$第18]节）。众所周知，若 G 为紧群，则每个 $\pi\in G$ 都是有限维的。$\widehat{}$此外，我们知道，若 G 为紧群（分别为紧致且可度量化），则 G 是离散的（分别为可数的）。这些事实是彼得-外尔理论的推论[17,第 4]章。

我们分别用 B_X 和 S_X 表示巴拿赫空间 X. 的闭单位球和单位球面。注意，$\operatorname{ext}B_X\subseteq S_X$，其中 $\operatorname{ext}B_X$ 是 B_X. 的所有极端点的集合。为方便起见，如果 $\operatorname{ext}B_X=S_X$，则称 X 为 A-空间。例如，一致凸巴拿赫空间，尤其是希尔伯特空间和 L^p（$1<p<\infty$）空间，都是 A-空间。

以下结果的证明与 [4, 命题 2.1] 的证明类似。

引理 2.3. 设 μ 是局部紧群 G 上的一个概率测度，且 π 是 G 的连续巴拿赫表示。若表示空间 X_π 是巴拿赫 A-空间，则对任意 $\xi\in\mathbb{T}$，有

$$\ker\left[\widehat{\mu}(\pi)-\xi I_\pi\right]=\left\{x\in X_\pi:\pi(g)\,x=\xi x,\ \forall g\in\operatorname{supp}\mu\right\}.$$

证明。假设对于某个 $x\in X_\pi$， $\widehat{\mu}(\pi)\ x=\xi x$，其中满足 $\|x\|=1$ 且 $\xi\in\mathbb{T}$.。令 $s\in\operatorname{supp}\mu$，并令 $\{U_i\}_{i\in I}$ 为一个由反向包含构成的有向邻域基

系统 $s.$。那么对于所有 $i \in I.$，$\mu(U_i) > 0$。不妨假设对于所有 $i \in I.$，$\mu(U_i) < 1$。如果

$$x_i := \frac{1}{\mu(U_i)} \int_{U_i} \pi(g)\, x d\mu(g) \quad \text{and} \quad y_i := \frac{1}{1-\mu(U_i)} \int_{G \setminus U_i} \pi(g)\, x d\mu(g),$$

则 $\|x_i\| \leq 1$ 和 $\|y_i\| \leq 1$。恒等式

$$\xi x = \mu(U_i)\, x_i + [1 - \mu(U_i)]\, y_i$$

表明 ξx 是 x_i 和 $y_i.$ 的凸组合。由于 $\|\xi x\| = 1$，对于所有 $i \in I$，我们都有 $\xi x = x_i$，因此，

$$\frac{1}{\mu(U_i)} \int_{U_i} [\pi(g)\, x - \xi x]\, d\mu(g) = 0, \ \forall i \in I.$$

由于 $U_i \to \{s\}$，我们得到 $\pi(s)\, x = \xi x.$ □

以下结果已在 [20, 引理 2.3] 中证明。

引理 2.4. 设 μ 是局部紧群 G 上的严格非周期测度，且 π 是 G 的连续酉表示。那么，算子 $\widehat{\mu}(\pi)$ 除 $\xi = 1.$ 外不能有酉特征值。

现在，设 μ 是局部紧群 G 上的严格非周期测度，且 π 是 G 的连续酉表示。根据引理 2.4，算子 $\widehat{\mu}(\pi)$ 除 $\xi = 1.$ 外不能有酉特征值。鉴于恒等式 (2.2) 和引理 2.3，我们有如下结论。

推论 2.5. 设 μ 是局部紧群 G 上的严格非周期测度，且 π 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$ 上的 G 的连续酉表示。如果 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界良权，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\mu}(\pi)^i\, x = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) P_\mu^\pi x \quad in\ norm\ \forall x \in \mathcal{H}_\pi,$$

其中，P_μ^π 是到以下空间上的正交投影

$$\{x \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)\, x = x : \forall g \in [\operatorname{supp} \mu]\}.$$

此外，如果 μ 是适配的且 $\pi \in G \setminus id$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\mu}(\pi)^i\, x = 0 \quad in\ norm\ \forall x \in \mathcal{H}_\pi.$$

设 G 是一个局部紧群。对于任意的 $f \in L^p(G)\ (1 < p < \infty)$，记 $f^\vee(g) := f\left(g^{-1}\right)$ 和 $\widetilde{f} := f(g^{-1})$。注意，对于每个 $u, v \in L^2(G)$，函数 $u * \widetilde{v}$ 属于 $C_0(G)$，并且

$$\langle \mu, u * \widetilde{v} \rangle = \langle \mu * \overline{v}, \overline{u} \rangle, \ \forall \mu \in M(G).$$

由此可得，$\left\{u * \widetilde{v} \colon u, v \in L^2(G)\right\}$ 在 $C_0(G)$ 中线性稠密。还要注意，若 $f \in L^p(G)\ (p \neq 2)$ 且 $h \in L^q(G)\ (1/p + 1/q = 1)$，则 $h * f^\vee \in C_0(G)$，并且

$$\langle \mu, h * f^\vee \rangle = \langle \mu * f, h \rangle, \ \ \forall \mu \in M(G).$$

由此可得，$\{h * f^\vee \colon\ h \in L^q(G) \quad f \in L^p(G)\}$ 在 $C_0(G)$ 中线性稠密。

令 π 为 $L^p(G)$ 上的 G 左正则表示，其中

$$\pi(g) f(s) = f\left(g^{-1} s\right) := f_g(s).$$

那么，对于每个 $\mu \in M(G)$， π 都是连续的，且 $\widehat{\mu}(\pi)\ f = \mu * f$。我们将此算子记为 $\lambda_p(\mu)$。众所周知，左卷积算子 $\lambda_p(\mu) f := \mu * f$ 是 $L^p(G)$ 上的有界线性算子，也就是说，

$$\|\lambda_p(\mu) f\|_p \leq \|\mu\|_1 \|f\|_p \quad \text{and} \quad \|\lambda_1(\mu)\|_1 = \|\mu\|_1 .$$

由恒等式 (2.2) 以及引理 2.3 和 2.4，可得如下结论。

推论 2.6. 设 μ 是局部紧群G上的严格非周期测度。若 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界良权，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i * f = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) P_\mu f \quad in\ L^2\text{-}norm\ \forall f \in L^2(G),$$

其中， P_μ 是到.....上的正交投影

$$\left\{ f \in L^2(G) : f_g = f : \forall g \in [\operatorname{supp} \mu] \right\}.$$

若 $[\operatorname{supp} \mu]$ 不是紧的，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i * f = 0 \quad in\ L^2\text{-}norm\ for\ every\ f \in L^2(G).$$

由引理 2.3 可知，若 $\mu \in M(G)$是概率测度且$1 < p < \infty$，则对每个 $\xi \in \mathbb{T}$，

$$\ker[\lambda_p(\mu) - \xi I] = \{ f \in L^p(G) : f_g = \xi f,\ \forall g \in \operatorname{supp} \mu \}.$$

由这个恒等式可推得，若概率测度$\mu \in M(G)$的支集非紧，则算子 $\lambda_p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) 没有酉特征值。另一方面，我们知道 [7, 第二章，定理 4.1] 若 T 是自反巴拿赫空间 X上的幂有界算子，那么 T 没有酉特征值，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\langle T^n x, \varphi \rangle| = 0 \quad \text{for all } x \in X \text{ and } \varphi \in X^*.$$

因此，我们得到以下结论。

推论 2.7. 若 $\mu \in M(G)$是一个支集非紧的概率测度，那么对任意 $f \in L^p(G)$ ($1 < p < \infty$)和 $h \in L^q(G)$ ($1/p + 1/q = 1$)，都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\langle \mu^n * f, h \rangle| = 0.$$

现在我们可以证明定理 2.2。

定理 2.2 的证明。令 $H := [\operatorname{supp} \mu]$。如果

$$m_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i,$$

then

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|m_n\|_1 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n|\} < \infty.$$

(a) 令 $\pi \in \widehat{G}$，并设 $\left\{e_\pi^{(1)}, ..., e^{(n_\pi)_\pi}\right\}$ 为表示空间 $\mathcal{H}_\pi$ ($\dim \mathcal{H}_\pi = n_\pi$) 的基向量。由于

$$\widehat{m_n}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\mu}(\pi)^i,$$

由推论 2.6,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{m_n}(\pi) = aP_\mu^\pi \quad \text{in the strong operator topology,}$$

其中

$$a := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

并且 P_μ^π是到 $\ker\left[\widehat{\mu}(\pi) - I\right]$ 上的正交投影. 令 $f_{i,\ j}^\pi$为矩阵 x π的函数，其中

$$f_{i,j}^\pi(g) = \langle \pi(g) e_\pi^{(i)}, e_\pi^{(j)} \rangle \quad (i,j = 1, ..., n_\pi).$$

于是我们可以写成

$$\lim_{n\to\infty} \langle m_n, f_{i,j}^\pi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{m_n}(\pi) e_\pi^{(i)}, e_\pi^{(j)} \rangle = \langle aP_\mu^\pi e_\pi^{(i)}, e_\pi^{(j)} \rangle.$$

根据 Peter-Weyl C定理 [17, 第 4], 章，矩阵函数系统

$$\left\{ f_{i,j}^\pi : \pi \in \widehat{G},\ i,j = 1, ..., n_\pi \right\}$$

在线性意义下稠密于 $C(G)$，即所有定义在G. 上的复值连续函数所构成的空间。由于序列 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$范数有界，因此对于所有 $f \in C(G)$，极限 $\lim_{n\to\infty}\langle m_n, f\rangle$ 均存在。如果 $a = 0$，则无需证明任何内容。因为在这种情况下，对于所有 $f \in C(G)$，$\lim_{n\to\infty}\langle m_n, f\rangle = 0$，因此 $\text{w}^*\text{-lim}\ m_n = 0$. 所以，我们可以假设 $a \neq 0$.

此外，由于

$$f \mapsto \lim_{n\to\infty} \langle m_n, f\rangle$$

是 $C(G)$ 上的有界线性泛函，因此存在 $\theta_\mu \in M(G)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \langle m_n, f\rangle = \langle \theta_\mu, f\rangle,\ \forall f \in C(G).$$

因此我们有

$$\text{w}^* - \lim_{n\to\infty} m_n = \theta_\mu.$$

由此可得

$$\widehat{m_n}(\pi) \to \widehat{\theta_\mu}(\pi) \quad \text{in the weak operator topology for all } \pi \in \widehat{G}.$$

因此，对于所有 $\pi \in G$，我们有 $\widehat{\theta_\mu}(\pi) = aP_\mu^\pi$。现在，我们必须证明$\theta_\mu = a\overline{m}_H$. 为此，给定 $\pi \in G$。由于 $\overline{m}_H$ 是幂等测度，$\widehat{\overline{m}_H}(\pi)$ 是一个正交投影。由于 $\operatorname{supp}\overline{m}_H = H$，根据引理 2.3,

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{m}_H}(\pi)\mathcal{H}_\pi &= \ker\left[\widehat{\overline{m}_H}(\pi) - I_\pi\right] \\ &= \{x \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)x = x,\ \forall g \in H\}. \end{aligned}$$

出于同样的原因,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\widehat{\theta_\mu}(\pi)\mathcal{H}_\pi &= P_\mu^\pi \mathcal{H}_\pi = \ker\left[\widehat{\mu}(\pi) - I_\pi\right] \\ &= \{x \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)x = x,\ \forall g \in H\}. \end{aligned}$$

因此，对所有 $\pi \in \widehat{G}.$，我们有 $\widehat{\theta_{\mu}}(\pi) = a\widehat{\overline{m}_H}(\pi)$。由此可得 $\theta = a\overline{m}_H$.

(b) 假设 H 不是紧的。如上所述，若 $u, v \in L^2(G)$，则 $u * \widetilde{v} \in C_0(G)$，且集合 $\left\{u * \widetilde{v} \colon u, v \in L^2(G)\right\}$ 在 $C_0(G)$ 中线性稠密。由于序列 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有界，只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \langle m_n, u * \widetilde{v}\rangle = 0.$$

由推论 2.6,

$$\lim_{n\to\infty} (m_n * \overline{v}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i * \overline{v} = 0 \ \text{ in } L^2\text{-norm}.$$

因此我们有

$$\langle m_n, u * \widetilde{v}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle m_n * \overline{v}, \overline{u}\rangle = 0.$$

□

接下来，我们有如下结论。

命题 2.8. 设 G 为紧群，且 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $M(G)$ 中的有界序列。以下条件等价:

（a） w^*-$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$，对某个 $\mu \in M$（G）成立。（b）$\lim_{n\to\infty}$（$\mu_n * f$）$= \mu * f$ 在 G 上对每个 $f \in C$（G）一致成立。

证明。（a）$\Rightarrow$（b）令 $\pi \in G$，并令 $\mathcal{H}_\pi$ 为 π. 的表示空间。如果

$$f^{\pi}_{x,y}(g) := \langle \pi(g)\, x, y\rangle \ \ (x, y \in \mathcal{H}_\pi),$$

那么当

$$\langle \theta, f^{\pi}_{x,y}\rangle = \langle \widehat{\theta}(\pi)\, x, y\rangle, \ \ \forall \theta \in M(G),$$

我们有

$$\langle \widehat{\mu_n}(\pi)\, x, y\rangle = \langle \mu_n, f^{\pi}_{x,y}\rangle \to \langle \mu, f^{\pi}_{x,y}\rangle = \langle \widehat{\mu}(\pi)\, x, y\rangle.$$

因此，$\widehat{\mu_n}$（π）在强算子拓扑下收敛到 $\to \widehat{\mu}$（π）。经过几行计算可得

$$\left(\theta * f^{\pi}_{x,y}\right)(g) = \langle \pi(g)\, x, \widehat{\theta}(\pi)\, y\rangle, \ \ \forall \theta \in M(G). \tag{2.3}$$

现在给定 $f \in C$（G）。由于矩阵函数系在线性稠密于 C（G）中，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在复数 λ_1、...、λ_k 以及 $\sim\pi_1$、...、$\pi_k \in G$，使得

$$|f(g) - \lambda_1\langle \pi_1(g)\, x_1, y_1\rangle - ... - \lambda_k\langle \pi_k(g)\, x_k, y_k\rangle| < \varepsilon \ \ (\forall g \in G),$$

其中 $x_i, y_i \in \mathcal{H}_{\pi_i} (i = 1, ..., k)$。由 (2.3),

$|(\mu_n * f)(g) - \lambda_1\langle \pi_1(g)\, x_1, \widehat{\mu_n}(\pi_1)\, y_1\rangle - ... - \lambda_k\langle \pi_k(g)\, x_k, \widehat{\mu_n}(\pi_k)\, y_k\rangle| < \varepsilon C$和

$$|(\mu * f)(g) - \lambda_1\langle \pi_1(g)\, x_1, \widehat{\mu}(\pi_1)\, y_1\rangle - ... - \lambda_k\langle \pi_k(g)\, x_k, \widehat{\mu}(\pi_k)\, y_k\rangle| < \varepsilon C,$$

其中 $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|$.。由此可得

$$\begin{aligned}\sup_{g\in G} |(\mu_n * f)(g) - (\mu * f)(g)| \ \leq \ & |\lambda_1| \, \|\widehat{\mu_n}(\pi_1)\, y_1 - \widehat{\mu}(\pi_1)\, y_1\| \, \|x_1\| + ... \\ & + |\lambda_k| \, \|\widehat{\mu_n}(\pi_k)\, y_k - \widehat{\mu}(\pi_k)\, y_k\| \, \|x_k\| + 2\varepsilon C.\end{aligned}$$

由于对所有 $\pi \in \widehat{G}$ 和 $x \in \mathcal{H}_\pi$，$\widehat{\mu_n}(\pi)\, x \to \widehat{\mu}(\pi)\, x$ 在范数意义下收敛，因此由前述不等式可推出 $\mu_n * f \to \mu * f$ 在 G. 上一致成立

(b)⇒(a) 对于任意 $f \in C(G)$,

$$\int_G f d\mu_n - \int_G f d\mu = (\mu_n * f)(e) - (\mu * f)(e) \to 0.$$

□

由定理 2.2 和命题 2.8 可得如下结论。

推论 2.9. 设 $\mu \in M(G)$ 是紧群 G. 上的适应且严格非周期测度。如果 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界良权，则对每个 $f \in C(G)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i * f = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \int_G f dm_G \quad uniformly\ on\ G.$$

回忆一下，如果测度 $\mu \in M(G)$ 满足

$$C_\mu := \sup_{n\geq 0} \|\mu^n\|_1 < \infty.$$

如果 $\mu \in M(G)$ 是幂有界的，那么算子 $\lambda_p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$ 也是幂有界的。

以下结果已在 [10, 定理 3.4] 中证明。对于局部紧阿贝尔群，同一结果早先已在 [19, 命题 2.5] 中得到。为完整起见，我们给出该结果的证明。我们的证明有所不同。

命题 2.10. 如果 $\mu \in M(G)$ 是幂有界的，那么存在一个幂等测度 θ_μ 属于 $M(G)$，使得

$$w^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i = \theta_\mu$$

(θ_μ 将称为与 μ 相关联的极限测度)。

证明。设 $u, v \in L^2(G)$。由于算子 $\lambda_2(\mu)$ 是平均遍历的，存在$w \in L^2(G)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * \overline{v} = w \ \text{ in } L^2\text{-norm}.$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i, u * \widetilde{v} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * \overline{v}, \overline{u} \rangle = \langle w, \overline{u} \rangle.$$

由于序列 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，且集合 $\left\{u * \widetilde{v} :\ u,\ v \in L^2(G)\right\}$ 在 $C_0(G)$ 中线性稠密，因此对于所有 $f \in C_0(G)$，极限 $\lim_{n\to\infty}\langle m_n, f\rangle$ 均存在。因此，存在 $\theta_\mu \in M(G)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i, f \rangle = \langle \theta_\mu, f \rangle, \ \forall f \in C_0(G).$$

因此我们有

$$\mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i = \theta_\mu.$$

容易验证， θ_μ 是一个幂等测度。 □

注记 2.11. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $\mu \in M(G)$ 是$\widehat{\ }$幂有界的。若 θ_μ 是与 μ相关联的极限测度，则 $\theta_\mu = \mathbf{1}_{\mathrm{int}\mathcal{F}_\mu}$，其中 $\mathcal{F}_\mu := \left\{\chi \in \widehat{G} : \widehat{\mu}(\chi) = 1\right\}$，且 $\mathbf{1}_{\mathrm{int}\mathcal{F}_\mu}$ 是 $\mathrm{int}\mathcal{F}_\mu$的特征函数。$\widehat{\ }$因此，$\mathrm{int}\mathcal{F}_\mu$ 是 G [19, 中的一个开闭子集。命题 2.5]. 容易$\widehat{\ }$验证，若 μ 是一个概率测度，则 $\mathcal{F}_\mu$ 是 G的一个闭子群，也就是说，$\mathcal{F}_\mu = [\mathrm{supp}\,\mu]^\perp$.

推论 2.12. 若 $\mu \in M(G)$ 幂有界且 $1 < p < \infty$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * f = \theta_\mu * f \quad in\ L^p\text{-}norm\ for\ every\ f \in L^p(G),$$

其中，θ_μ 是与 μ ($f \to \theta_\mu * f$ 是与 $\lambda_p(\mu)$ 相关联的平均遍历投影) 相关联的极限测度。

证明。设 $f \in L^p(G)$ 且 $h \in L^q(G)$（$1/p + 1/q = 1$）。由于

$$\mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i = \theta_\mu \ \text{ and } \ h * f^\vee \in C_0(G),$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * f, h\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i, h * f^\vee\rangle \\ &= \langle \theta_\mu, h * f^\vee\rangle = \langle \theta_\mu * f, h\rangle.\end{aligned}$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * f = \theta_\mu * f \ \text{ weakly.}$$

由于算子 $\lambda_p(\mu)$ 是平均遍历的，我们有

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^i * f = \theta_\mu * f \ \text{ in } L^p\text{-norm.}$$

□

设 $\mu \in M(G)$ 是幂有界的，且 $\xi \in \mathbb{T}$。记 θ_μ^ξ 为与 $\xi\mu$. 相关联的极限测度。根据命题 2.10，θ_μ^ξ 是幂等测度，并且

$$\mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi^i \mu^i = \theta_\mu^\xi.$$

定理 2.13. 设 G 是第二可数局部紧群，并设 $\mu \in M(G)$ 是满足 $\|\mu\|_1 \le 1$. 的测度。则以下断言成立:

(a) $\sigma_p(\lambda_2(\mu)) \cap \mathbb{T}$ 至多是可数的。

（b）如果 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有界良权且 $\sigma_p(\lambda_2(\mu)) \cap \mathbb{T} = \{\xi_1, \xi_2, ...\}$，那么

$$w^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^i = \sum_{i=1}^{\infty} a(\xi_i)\, \theta_\mu^{\xi_i},$$

其中 $\theta_{\mu}^{\xi_i}$ 是与 $\xi_i\mu$ 相关联的极限测度，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_i^k=a\left(\xi_i\right).$$

证明。(a) 由于 $L^2(G)$ 是可分的，且 $\lambda_2(\mu)$ 是压缩算子，根据 Jamison定理， [12], $\sigma_p(\lambda_2(\mu))\cap\mathbb{T}$ 至多可数。

(b) 设 $f\in L^2(G)$ 和 $\xi\in\mathbb{T}$ 已给定。由推论 2.12,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^i\lambda_2\left(\mu\right)^i f\to\theta_{\mu}^{\xi}*f\ \text{ in } L^2\text{-norm}.$$

注意，$f\mapsto\theta_{\mu}^{\xi}*f$ 是到 $\ker\left[\lambda_2(\mu)-\xi I\right]$. 上的正交投影。考虑恒等式 (2.2)，对于任意 $u,v\in L^2(G)$，我们可以写出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^i,u*\widetilde{v}\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_2\left(\mu\right)^i\overline{u},\overline{v}\rangle\\ &= \langle\sum_{i=1}^{\infty}a\left(\xi_i\right)\theta_{\mu}^{\xi_i}*\overline{u},\overline{v}\rangle\\ &= \langle\sum_{i=1}^{\infty}a\left(\xi_i\right)\theta_{\mu}^{\xi_i},u*\widetilde{v}\rangle.\end{aligned}$$

由于

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^i\right\|_1\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty$$

并且集合 $\left\{u*\widetilde{v}\colon\ u,v\in L^2(G)\right\}$ 在 $C_0(G)$ 中线性稠密，因此

$$\mathrm{w}^*-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu^i=\sum_{i=1}^{\infty}a\left(\xi_i\right)\theta_{\mu}^{\xi_i}.$$

□

3. The sequence $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

如上所述，对于所有 $\mu\in M(G)$，都有 $\|\lambda_1(\mu)\|=\|\mu\|_1$。此外，对于所有 $\mu\in M(G)$，都有 $\sigma(\lambda_1(\mu))=\sigma_{M(G)}(\mu)$，其中 $\sigma_{M(G)}(\mu)$ 是 μ关于代数 $M(G)$ 的谱。

命题 3.1. 若 $\mu\in M(G)$ 幂有界，且 $\sigma(\lambda_1(\mu))\cap\mathbb{T}\subseteq\{1\}$，则存在一个幂等测度 $\theta\in M(G)$，使得

$$w^*-\lim_{n\to\infty}\mu^n=\theta.$$

证明。只需证明序列 $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 只有一个弱 * 聚点。由于 $\sigma(\lambda_1(\mu))\cap\mathbb{T}\subseteq\{1\}$，由上文提到的卡茨内尔森-察弗里定理,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mu^{n+1}-\mu^n\right\|_1=\lim_{n\to\infty}\left\|\lambda_1\left(\mu\right)^{n+1}-\lambda_1\left(\mu\right)^n\right\|=0.$$

假设

$$\theta_1=\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{\alpha}\mu^{n_\alpha}\ \text{ and }\ \theta_2=\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{\beta}\mu^{m_\beta},$$

对于 $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 的两个子网 $\{\mu^{n_\alpha}\}_\alpha$ 和 $\{\mu^{m_\beta}\}_\beta$。由于 $M(G)$ 上的乘法分别是 w*-连续的,

$$\mu * \theta_1 = \theta_1 * \mu = \mathrm{w}^*\text{-}\lim_\alpha \mu^{n_\alpha+1}.$$

因此我们有

$$\|\mu * \theta_1 - \theta_1\|_1 \leq \underline{\lim}_\alpha \left\|\mu^{n_\alpha+1} - \mu^{n_\alpha}\right\| = 0$$

and

$$\|\theta_1 * \mu - \theta_1\|_1 \leq \underline{\lim}_\alpha \left\|\mu^{n_\alpha+1} - \mu^{n_\alpha}\right\| = 0.$$

因此 $\mu * \theta_1 = \theta_1 * \mu = \theta_1$. 现在，在 w*-拓扑下对这些恒等式取极限,

$$\mu^{m_\beta} * \theta_1 = \theta_1 * \mu^{m_\beta} = \theta_1,$$

我们有 $\theta_2 * \theta_1 = \theta_1 * \theta_2 = \theta_1$. 类似地， $\theta_2 * \theta_1 = \theta_1 * \theta_2 = \theta_2$. 如果 $\theta := \theta_1 = \theta_2$，那么 $\theta^2 = \theta$. □

设 G 为一个局部紧阿贝尔群。众所周知， $M(G)$ 是一个交换的半单幺 Banach 代数，但一般而言， $M(G)$ 不是（Shilov）正则的。不过， $M(G)$ 存在一个最大的闭正则子代数，我们将其记为 $M_{\mathrm{reg}}(G)$。由于代数 $L^1(G)$ 和离散测度代数 $M_d(G)$ 都是 $M_{\mathrm{reg}}(G)$ 的子代数，因此有 $L^1(G) + M_d(G) \subseteq M_{\mathrm{reg}}(G)$，但一般而言， $L^1(G) + M_d(G) \neq M_{\mathrm{reg}}(G)$ [16, 例 4.3。11]这表明代数 $M_{\mathrm{reg}}(G)$ 相当大。回忆 [16, 命题 4.12。5]若 $\mu \in M_{\mathrm{reg}}(G)$，则算子 $\lambda_1(\mu)$ 具有自然谱，即，$\sigma(\lambda_1(\mu)) = \widehat{\mu}\left(\widehat{G}\right)$。由此可知，如果 $\mu \in M_{\mathrm{reg}}(G)$ 是一个概率测度，那么$\sigma(\lambda_1(\mu)) \cap \mathbb{T} \subseteq \{1\}$ 当且仅当对于 1 的任意邻域 V，$\sup_{\chi\notin V} |\widehat{\mu}(\chi)| < 1$.

推论 3.2. 若 $\mu \in M(G)$ 幂有界，则存在幂等测度 $\theta \in M(G)$，使得

$$w^* - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\delta_e + \mu}{2}\right)^n = \theta.$$

此外，对于任意的 $f \in L^p(G)$（$1 < p < \infty$），我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\delta_e + \mu}{2}\right)^n * f\right] = \theta * f \quad in\ L^p\text{-}norm.$$

证明。若 $\nu := \frac{\delta_e+\mu}{2}$，则 ν 幂有界，即 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\nu^n\|_1 \leq C_\mu$。因此，算子 $\lambda_1(\nu) = {}^{I+\lambda_1(\mu)}{}_2$ 幂有界。还要注意，~~若$f(z) := \frac{1+z}{2}(z \in \mathbb{C})$，则 $f(1) = 1$ 且 $|f(z)| < 1$ 对所有 $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.~~ 均成立。由谱映射定理可得 $\sigma(\lambda_1(\nu)) \cap \mathbb{T} \subseteq \{1\}$.。根据命题 3.1，存在幂等测度 $\theta \in M(G)$，使得 $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \nu^n = \theta$.

与命题 2.12 的证明中一样，我们有

$$\lim_{n\to\infty} (\nu^n * f) = \theta * f \quad \text{weakly for every } f \in L^p(G).$$

另一方面，根据卡茨内尔森-察弗里定理,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\lambda_1(\nu)^{n+1} - \lambda_1(\nu)^n\right\| = 0.$$

现在，由命题 2.1 可知

$$\lim_{n\to\infty} (\nu^n * f) = \theta * f \quad \text{in } L^p\text{-norm}.$$

□

如上所述，若 μ 是定义在非紧局部紧群 G 上的严格非周期测度，则 w*-$\lim_{n\to\infty}\mu^n = 0$ [3, Th´eor`eme 8]。在 [18, Theorem2] 中已证明，若 μ 是定义在第二可数的非紧局部紧群 G 上的适配测度，则 w*-$\lim_{n\to\infty}\mu^n = 0$。

众所周知，赋予对合 $d\widetilde{\mu}(g) = d\mu(g^{-1})$ 后，代数 $M(G)$ 成为一个 Banach *-代数。若 μ 是局部紧群 G 上的概率测度，则由于 supp $\widetilde{\mu} = (\text{supp}\,\mu)^{-1}$，我们有

$$\text{supp}\,(\widetilde{\mu} * \mu) = \overline{\left\{(\text{supp}\,\mu)^{-1} \cdot (\text{supp}\,\mu)\right\}}$$

（例如参见 [11, 定理 2.2.2]）。

以下结果当然是已知的，但我们未能找到确切的参考文献。

命题 3.3. 测度 $\mu \in M(G)$ 严格非周期，当且仅当测度 $\widetilde{\mu} * \mu$ 是适配的。

证明。假设测度 $\widetilde{\mu} * \mu$ 不是适配的。这意味着

$$[\text{supp}\,(\widetilde{\mu} * \mu)] := H \neq G.$$

由此可知，对于所有 $g \in$， $g^{-1} \cdot (\text{supp}\,\mu) \subseteq H$ 或 supp $\mu \subseteq gH$ supp μ.。这说明 μ 不是严格非周期的。现在，假设 μ 不是严格非周期的。那么，对于某个闭真子群 H，有 supp $\mu \subseteq gH$，其中 H 是 G 的闭真子群，且 $g \in G$。由此可知 (supp $\mu)^{-1} \subseteq Hg^{-1}$，因此 $(\text{supp}\,\mu)^{-1} \cdot (\text{supp}\ \mu) \subseteq H$.。于是我们有

$$[\text{supp}\,(\widetilde{\mu} * \mu)] \subseteq H \neq G.$$

这说明测度 $\widetilde{\mu} * \mu$ 不是适配的。 □

接下来，我们有以下结果。

定理 3.4。设 μ 是局部紧群 G. 上的概率测度。如果子群 [supp $(\widetilde{\mu} * \mu)$] 和 [supp $(\mu * \widetilde{\mu})$] 中至少有一个不是紧的，那么

$$w^* - \lim_{n\to\infty} \mu^n = 0.$$

证明。回顾一下，希尔伯特空间上的压缩算子 T 若不存在任何真约化子空间使其在该子空间上表现为酉算子，则称其为完全非酉算子。根据 Nagy-Foia.s 定理 [7, 第二章, 定理 3.9]，若 T 是完全非幺正压缩算子，则 $T^n \to 0$ 在弱算子拓扑下。现在，假设[supp $(\widetilde{\mu} * \mu)$] 不是紧的。我们来证明 $\lambda_2(\mu)$是完全非幺正压缩算子。由于 $\lambda_2(\mu)^* = \lambda_2(\widetilde{\mu})$，只需证明 $\lambda_2(\widetilde{\mu})\lambda_2(\mu) f = f$，其中 $f \in L^2(G)$蕴含 $f = 0$.。根据引理 2.3,

$$\begin{aligned}\left\{f \in L^2(G) : \lambda_2(\widetilde{\mu})\lambda_2(\mu) f = f\right\} &= \left\{f \in L^2(G) : \lambda_2(\widetilde{\mu} * \mu) f = f\right\} \\ &= \left\{f \in L^2(G) : f_g = f, \forall g \in [\text{supp}\,(\widetilde{\mu} * \mu)]\right\}.\end{aligned}$$

由于 [supp $(\widetilde{\mu} * \mu)$] 不是紧集，由恒等式 $f_g = f$ 对所有 $g \in$ [supp $(\widetilde{\mu} * \mu)$],成立可知 $f = 0$ （几乎处处）。因此， $\lambda_2(\mu)$ 是完全非酉压缩算子。于是， $\lambda_2(\mu)^n \to 0$ 在弱算子拓扑下收敛。接着，对于任意的u， $v \in L^2(G)$ 可写为

$$\langle \mu^n, u * \widetilde{v}\rangle = \langle \mu^n * \overline{v}, \overline{u}\rangle = \langle \lambda_2(\mu)^n \overline{v}, \overline{u}\rangle \to 0.$$

由于集合 $\left\{u * \widetilde{v} \colon u, v \in L^2(G)\right\}$ 在线性稠密于 $C_0(G)$ 中，因此对所有 $f \in C_0(G)$，我们有 $\langle \mu^n, f\rangle \to 0$。于是 $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu^n = 0$. □

推论 3.5. 设 μ 是局部紧群 G. 上的概率测度。如果子群 $[\operatorname{supp}(\widetilde{\mu} * \mu)]$ 和 $[\operatorname{supp}(\mu * \widetilde{\mu})]$ 中有一个不是紧群，则

$$\mu^n * f \to 0 \quad \textit{weakly for all } f \in L^p(G) \quad (1 < p < \infty).$$

证明. 如果 $f \in L^p(G)$ 和 $h \in L^q(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$，则 $h * f^\vee \in C_0(G)$。由定理 3.4，$\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu^n = 0$，因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mu^n * f, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mu^n, h * f^\vee\rangle = 0.$$

□

然而，我们有如下结论。

命题 3.6. 设 μ 是局部紧群 G 上的概率测度，并假设子群 $[\operatorname{supp}(\widetilde{\mu} * \mu)]$ 和 $[\operatorname{supp}(\mu * \widetilde{\mu})]$ 中有一个不是紧群。如果 $\sigma(\lambda_2(\mu)) \cap \mathbb{T}$ 的勒贝格测度为零，则

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu^n * f\|_p = 0, \quad \forall f \in L^p(G) \quad (1 < p < \infty).$$

证明。与定理 3.4 的证明一样，我们可以看出，如果子群$[\operatorname{supp}(\widetilde{\mu} * \mu)]$ 和 $[\operatorname{supp}(\mu * \widetilde{\mu})]$ 中有一个不是紧的，那么 $\lambda_2(\mu)$ 是一个完全非酉压缩算子。另一方面，Nagy-Foias 定理 [7, 第 II 章，命题 6.7] 指出，若 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的完全非酉压缩算子，且 $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ 的勒贝格测度为零，则对所有 $x \in \mathcal{H}$. 都有 $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$。因此，对所有 $f \in L^2(G)$，都有 $\lim_{n\to\infty} \|\mu^n * f\|_2 = 0$。现在，假设 $p \neq 2$. 令 $C_c(G)$ 表示 G上所有具有紧支集的复值连续函数构成的空间，并令 $f \in C_c(G)$。于是，对任意 $\nu \in M(G)$ 及所有 $1 \leq p \leq \infty$. ，都有 $\nu * f \in L^p(G)$。由 Riesz-Thorin 凸性定理 [6, 第 VI 章，引理 10.9]可知，$\alpha \mapsto \log \|\nu * f\|_{\frac{1}{\alpha}}$是 $[0, 1]$上的凸函数。取 q使得。对 $p > 2$ 成立，且 $q > p$；并使 $1 < q < p$ 对 $1 < p < 2$. 成立。若 $\lambda := \frac{2q-2p}{pq-2p}$，则 $0 < \lambda < 1$, 且 $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{q} + \frac{\lambda}{2}$. 。因此，我们可以写成

$$\|\nu * f\|_p \leq \|\nu * f\|_q^{1-\lambda} \|\nu * f\|_2^{\lambda}, \quad \forall \nu \in M(G).$$

因此我们有

$$\|\mu^n * f\|_p \leq \|\mu^n * f\|_q^{1-\lambda} \|\mu^n * f\|_2^{\lambda} \leq \|f\|_q^{1-\lambda} \|\mu^n * f\|_2^{\lambda}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由此可得，对于所有 $f \in C_c(G)$，$\lim_{n\to\infty} \|\mu^n * f\|_p = 0$。由于 $C_c(G)$ 在$L^p(G)$ 中稠密，因此对于所有 $f \in L^p(G)$，$\lim_{n\to\infty} \|\mu^n * f\|_p = 0$. □

注记 3.7. 设 G 是局部紧阿贝尔群，且 $\mu \in M(G)$。傅里叶–Plancherel 变换在 $L^2(G)$ 上的卷积算子 $\lambda_2(\mu)$ 与 $L^2\left(\widehat{G}\right)$ 上的乘法算子 $M_{\widehat{\mu}}$ 之间建立了幺正等价。因此，我们有 $\sigma(\lambda_2(\mu)) = \overline{\widehat{\mu}\left(\widehat{G}\right)}$。。若 $\mathcal{E}_\mu := \left\{\chi \in \widehat{G} \colon |\widehat{\mu}(\chi)| = 1\right\}$，则 $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{F}_{\widetilde{\mu}*\mu}$。还请注意，$\widehat{\mu}(\mathcal{E}_\mu) \subseteq \sigma(\lambda_2(\mu)) \cap \mathbb{T}$。若 μ 是概率测度，则 $\mathcal{E}_\mu$ 是 $\widehat{G}$ 的闭子群，也就是说，$\mathcal{E}_\mu = [\operatorname{supp}(\widetilde{\mu} * \mu)]^\perp$ （见注记 2.11 ）。

References

[1] P. Billingsley，《概率测度的收敛》，Wiley 概率与统计丛书，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1999年。[2] V.I. Bogachev，《测度论》，第 II 卷，Springer-Verlag，2007年。[3] Y. Derriennic，马尔可夫过程的“零或二”定律：在随机游走中的应用。《安娜·伊斯蒂图·亨利·庞加莱概率与统计》，新系列，12（1976年），111–129。[4] Y. Derriennic 和 M. Lin，某些算子表示的平均算子的迭代以及卷积幂的收敛，《函数分析杂志》85（1989年），86–102。[5] J. Dixmier，《C*代数及其表示》，Gauthier-Villars，巴黎，1964年（俄文版）。[6] N. Dunford 和 J. T. Schwartz，《线性算子》，第一部分，Mir，莫斯科，1958年（俄文版）。[7] T. Eisner，《算子与算子半群的稳定性》，《算子理论进展与应用》第209卷，Birkhäuser，巴塞尔，2010年。[8] T. Eisner、B. Farkas、M. Haase 和 R. Nagel，《遍历理论的算子理论方面》，《数学研究生教材》第272卷，Springer，2015年。[9] S. R. Foguel 和 B. Weiss，关于保守马尔可夫算子的凸幂级数，《美国数学会会刊》38（1973年），325–330。[10] J. Galindo 和 E. Jorda，卷积算子的遍历性质，《算子理论杂志》86（2021年），469–501。[11] U. Grenander，《代数结构上的概率》，Almqvist & Wiksell，斯德哥尔摩；John Wiley & Sons, Inc.，纽约—伦敦，1968年（俄文版）。[12] B. Jamison，模为1的特征值，《美国数学会会刊》16（1965年），375–377。[13] Y. Katznelson 和 L. Tzafriri，关于幂有界算子，《函数分析杂志》68（1986年），313–328。[14] Y. Kawada 和 K. Itō，关于紧群上的概率分布，《日本物理数学学会会刊》22（1940年），977–998。[15] U. Krengel，《遍历定理》，Walter de Gruyter，柏林、纽约，1985年。[16] K. B. Laursen 和 M. M. Neumann，《局部谱理论导论》，牛津，克拉伦登出版社，2000年。[17] Y. I. Lyubich，《群的巴拿赫表示理论导论》，《算子理论：进展与应用》第30卷，1988年，Birkhäuser，巴塞尔。[18] A. Mukherjea，非紧群和半群上概率测度的极限定理。《概率论及相关领域》33（1976年），273–284。[19] H. Mustafayev，巴拿赫代数上乘子的平均遍历定理，《傅里叶分析与应用杂志》25（2019年），393–426。[20] H. Mustafayev，关于 Kawada–Itō 定理的一则注记，《统计与概率快报》181（2022年），论文编号 109261，共6页。

Van Yuzuncu Yil University、 Faculty of Science、 Department of Mathematics、 VAN-TURKEY*Email address*： hsmustafayev@yahoo.com