arXiv:2302.05202v2 [math.CV] 8 May 2023

关于 Malmquist 型差分方程的亚纯解

张岳阳和 Risto Korhonen

Abstract. 最近，本文作者运用 Nevanlinna 理论，对具有超越亚纯解的 Malmquist 型差分方程 $f(z+1)^n = R(z,f)$ (†) 进行了分类，其中 $R(z,f)$ 关于两个自变量均为有理函数。本文首先通过指出一个此前工作中遗漏的新方程，完成了 $\deg_f(R(z,f)) = n$ of (†) 情形的分类。实际上，我们将基于对 (†) 的一些新观察，推导出这一情形下的所有方程。随后，我们研究 (†) 与其微分对应方程 $(f')^n = R(z,f)$ 之间的关系。我们证明，从 (†) 中选出的多数自治方程（其中 $n=2$）具有自然的连续极限，可归结为微分 Riccati 方程 $f' = a + f^2$ 或微分方程 $(f')^2 = a(f^2-\tau_1^2)(f^2-\tau_2^2)$，其中 $a \neq 0$ 和 τ_i 为满足 $\tau_1^2 \neq \tau_2^2$ 的常数。后一个二阶微分方程与对称 QRT 映射可通过双线性方法和连续极限方法相互推导。

1. Introduction

经典 Malmquist 定理 [18]指出：如果一阶微分方程 $f' = R(z,f)$ 中，$R(z,f)$ 关于两个自变量都是有理函数，且该方程有一个超越亚纯解，那么该方程可化为 Riccati 方程

$$f' = a_2 f^2 + a_1 f + a_0, \tag{1.1}$$

其中 a_0、a_1 和 a_2 都是有理函数。Malmquist 定理对方程

$$(f')^n = R(z,f), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

Yosida [29] 和 Laine [16] 已给出了相关结果。Steinmetz [24], 以及 Bank 和 Kaufman [2]证明，若 (1.2) 的系数是有理函数，且存在一个超越亚纯解，那么通过适当的 Möbius 变换，(1.2) 可以被映射为 Riccati 方程 (1.1)，或以下列表中的某个方程：

$$(f')^2 = a(f-b)^2(f-\tau_1)(f-\tau_2), \tag{1.3}$$
$$(f')^2 = a(f-\tau_1)(f-\tau_2)(f-\tau_3)(f-\tau_4), \tag{1.4}$$
$$(f')^3 = a(f-\tau_1)^2(f-\tau_2)^2(f-\tau_3)^2, \tag{1.5}$$
$$(f')^4 = a(f-\tau_1)^2(f-\tau_2)^3(f-\tau_3)^3, \tag{1.6}$$
$$(f')^6 = a(f-\tau_1)^3(f-\tau_2)^4(f-\tau_3)^5, \tag{1.7}$$

日期：2023年5月9日。2010年数学主题分类：主要分类 39A10；次要分类 30D35 和 39A12。关键词和短语：Malmquist 型差分方程；Nevanlinna 理论；亚纯解；微分方程；连续极限。第一作者获得中国博士后科学基金资助项目（2020M680334）和中央高校基本科研业务费（FRF-TP-19-055A1）的资助。第二作者获得中华人民共和国科学技术部高级外国专家访问教授项目（G2021105019L）的资助。

其中 a 和 b 是有理函数，τ_1、……、τ_4 是互不相同的常数。关于 Malmquist–Yosida–Steinmetz 型定理的更多信息，请参阅 [17, 第 10] 章。

最近，本文作者 [15,30] 运用 Nevanlinna 理论，对方程 (1.2) 的一个自然的差分类比，即一阶差分方程，进行了分类

$$f(z+1)^n = R(z,f), \tag{1.8}$$

其中，$n \in \mathbb{N}$ 且 $R(z,f)$ 关于两个自变量均为有理函数。特别地，文献 [15]证明，如果差分方程 (1.8) 存在一个具有 <1阶的超越亚纯解 f，那么 f либо 满足差分线性方程或 Riccati 方程

$$f(z+1) = a_1(z)f(z)+a_2(z), \tag{1.9}$$

$$f(z+1) = \frac{b_1(z)f(z)+b_2(z)}{f(z)+b_3(z)}, \tag{1.10}$$

其中，$a_i(z)$ 和 $b_j(z)$ 是有理函数；或者通过实施变换 $f \to \alpha f$或利用具有至多 2 次的代数函数 α 的 $f \to 1/(\alpha f)$，(1.8) 可化为以下方程之一：

$$f(z+1)^2 = 1-f(z)^2, \tag{1.11}$$

$$f(z+1)^2 = 1-\left(\frac{\delta(z)f(z)-1}{f(z)-\delta(z)}\right)^2, \tag{1.12}$$

$$f(z+1)^2 = 1-\left(\frac{f(z)+3}{f(z)-1}\right)^2, \tag{1.13}$$

$$f(z+1)^2 = \frac{f(z)^2-\kappa^2}{f(z)^2-1}, \tag{1.14}$$

$$f(z+1)^3 = 1-f(z)^{-3}, \tag{1.15}$$

其中，$\delta(z) \not\equiv \pm 1$ 至多是二次代数函数，而 $\kappa^2 \neq 0$、1 是常数。方程（1.9）–（1.15）的自治形式的有限阶亚纯解已在 [15] 中明确给出。这些结果为 Steinmetz 对 Malmquist 定理的推广提供了一个自然的差分类比，其含义与 Ablowitz、Halburd 和 Herbst [1]，的观点一致：他们认为，差分方程存在足够多的有限阶亚纯解，是差分形式的 Painlev´e 性质的一个理想候选条件 [4]。研究表明，所提出的差分 Painlev´e 性质中的有限阶条件，可以放宽为超阶严格小于 1 的条件 [6]，最近又在一定限制下放宽为超阶等于 1 [14,31]。此外，舍弃亚纯解具有超阶 <1 的假设，并考虑满足 $\deg_f(R(z,f)) = n$ 的（1.8）的超越亚纯解后，[15] 中证明了：要么 f 满足（1.9）或（1.10），要么（1.8）可以变换为方程（1.11）–（1.15）中的一个，或者变换为下列方程之一：

$$f(z+1)^2 = \eta^2(f(z)^2-1), \tag{1.16}$$

$$f(z+1)^2 = 2(1-f(z)^{-2}), \tag{1.17}$$

$$f(z+1)^2 = \frac{1+f(z)^2}{1-f(z)^2}, \tag{1.18}$$

$$f(z+1)^2 = \theta\frac{f(z)^2-\kappa_1 f(z)+1}{f(z)^2+\kappa_1 f(z)+1}, \tag{1.19}$$

$$f(z+1)^3 = 1-f(z)^3, \tag{1.20}$$

其中，$\theta = \pm 1$、$\eta \neq 1$ 是 1 的立方根，而 κ_1 是满足 $\kappa_1^2(\kappa_1^2 - 4) = 2(1-\theta)\kappa_1^2 - 8(1+\theta)$ 的常数。上述五个方程的超越亚纯解是由整函数复合而成的椭圆函数，其超阶为 ≥ 1。

本文有两个目的。第一个是完成对（1.8）中 $\deg_f(R(z,f)) = n$ 这一情形的分类。在对 [30], 中 $\deg_f(R(z,f)) \neq n$ 这一情形下的方程（1.8）进行分类时，我们有了一些新发现，这些发现也适用于 $\deg_f(R(z,f)) = n$ 这一情形下的方程（1.8）。在下一节第 2 节中，我们将利用这些新发现，以直接明了的方式推导出方程（1.11）–（1.20）这十个方程，同时找出下列在 [15]中被遗漏的方程：

$$f(z+1)^2 = \frac{1}{2}\frac{(1+\delta)^2}{1+\delta^2}\frac{(f-1)(f-\delta^2)}{(f-\delta)^2}, \tag{1.21}$$

其中 $\delta \neq 0, \pm 1, \pm i$ 是满足下列条件的常数

$$8\delta^5(\delta^2+1) - (\delta+1)^4 = 0. \tag{1.22}$$

如下文第 2 节所示，方程（1.21）的超越亚纯解是由整函数复合而成的雅可比椭圆函数，且超阶至少为 1。加入这个新方程（1.21）后，[15, 30] 中的结果可概括如下：若方程（1.8）中 $R(z,f)$ 关于两个变量均为有理函数，且该方程存在超越亚纯解，则（1.8）可化为 30 个方程之一。此外，这 30 个方程的所有自治形式均可用椭圆函数、指数型函数，或某个自治一阶差分方程的解来表示；该一阶差分方程具有亚纯解，且其渐近行为可预先指定。值得一提的是，Nakamura 和 Yanagihara [19]以及 Yanagihara [28] 已对 $R(z,f)$ 是关于 f 的常系数多项式这一情形下的方程（1.8）进行了分类。

本文的第二个目的，是描述 $n = 2$ 时方程（1.8）与（1.2）的亚纯解之间的关系。在第 3 节中，我们将在自治情形下，考察七个方程（1.9）–（1.14）与方程（1.1）、（1.3）和（1.4）的亚纯解之间的关系。方程（1.11）和（1.14）实际上是对称 Quispel–Roberts–Thompson（QRT）映射 [20, 21], 的特殊情形，该映射将在下面的第 3 节中介绍。对称 QRT 映射与方程（1.3）或（1.4）可以通过双线性方法和连续极限方法相互推导得到。Hirota [8–10] 首先使用双线性方法寻找非线性偏差分方程，这些方程是某些基本偏微分方程的差分类比。在本文中应用该方法意味着，四个差分方程（1.11）–（1.14）中的每一个，都自然地具有趋于方程（1.1）、（1.3）或（1.4）的连续极限。此外，在第 3 节中，我们还将证明，五个方程（1.16）–（1.19）和（1.21）中的每一个，都可以通过适当的变换映射到对称 QRT 映射，从而具有趋于微分方程（1.4）的连续极限。最后，在第 4 节中，我们将对所得结果作一些评论。

2. 方程 (1.11)–(1.21) 的推导

本节中，我们利用关于方程 (1.8) 的一些新观察，推导出十一个方程 (1.11)–(1.21)。我们假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的标准记号和基本结果（例如，见 [7]）。对于非常数亚纯函数 $f(z)$，回顾一下：若值 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 满足 $f(z) - a = 0$ 没有单根，则称其为 $f(z)$ 的完全分歧值。Nevanlinna第二主定理的直接推论是，超越亚纯函数在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 中至多有四个完全分歧值。

2.1. 十一个方程 (1.11)–(1.21) 的推导。为了证明 [15, 30], 的定理，我们实际上将 Yamanoi第二主定理用于以小函数为目标的情形 [25, 26]。将有理函数域记为 $\mathcal{R}$，并令 $\mathcal{R} = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$。ˆ 在本节中，若方程 $f(z) = c(z)$ 至多有有限个单根，则称 $c(z) \in \mathcal{R}$ 是超越亚纯函数 $f(z)$ 的完全分歧有理函数；若 $N(r, c, f) = O(\log r)$，则称 $c(z)$ 是 $f(z)$ 的 Picard例外有理函数。我们还称 $c(z)$ 的重数为 m，如果 $f(z) = c(z)$ 的所有根（至多有有限个例外）的重数都至少为 m。Yamanoi第二主定理表明，超越亚纯函数至多有两个 Picard例外有理函数，并且还表明不等式

$$\sum_{i=1}^{q} \Theta(c_i, f) \le 2 \tag{2.1}$$

适用于一个 ˆ y 集合 $c_1, \cdots, c_q \in \mathcal{R}$，其中 f 是超越的。此外，我们有 e

定理 2.1. 非常数超越亚纯函数 $f(z)$ 至多有四个完全分歧有理函数。

上述所有结论在将域 $\mathcal{R}$ 稍作扩充以包含代数函数时仍然成立。为简便起见，下文中我们不区分代数函数和有理函数。例如，我们始终使用 f 的“完全分歧有理函数”和“Picard例外有理函数”这两个术语，尽管它们有时实际上可能指的是代数函数。

我们将只考虑满足 $n = \deg_f(R(z, f)) \ge 2$ 的方程 (1.8)。此外，从现在起，我们采用简写记号 $\overline{f} = f(z + 1)$ 和 $\underline{f} = f(z - 1)$。将方程 (1.8) 写为

$$\overline{f}^n = R(z, f) = \frac{P(z, f)}{Q(z, f)}, \tag{2.2}$$

其中，$P(z, f)$ 和 $Q(z, f)$ 是关于 f 的两个多项式，其多项式系数没有公因子，次数分别为 p 和 q。那么，$\deg_f(R(f)) = \max\{p, q\} = n$。为简便起见，我们也可将 $P(z, f)$ 和 $Q(z, f)$ 写作

$$P(z, f) = a_p(f - \alpha_1)^{k_1} \cdots (f - \alpha_\mu)^{k_\mu} \tag{2.3}$$

and

$$Q(z, f) = (f - \beta_1)^{l_1} \cdots (f - \beta_\nu)^{l_\nu}, \tag{2.4}$$

其中，a_p 现在表示一个有理函数，α_i 和 β_j 一般为彼此不同的代数函数，k_i、$l_j \in \mathbb{N}$ 分别表示根 α_i 和 β_j 的阶。我们可以假设 k_1、.....、k_μ、l_1、.....、l_μ 的最大公因数（记作 $k = (k_1$、.....、k_μ、l_1、.....、$l_\mu)$）为 1。设 N_c 为满足 $k_i < n$ 的 α_i 与满足 $l_j < n$ 的 β_j 的总数。如 [30], 所示，方程（2.2）的分类将依据方程（2.3）中的根 α_i 和方程（2.4）中的根 β_j 的个数 N_c，以及其中是否有根为零来进行。

首先，我们总结定理 2] 的证明中对 $P(z, f)$ 的根 α_i 和 $Q(z, f)$ 的根 β_j 的分析，并陈述以下引理 2.2 和 2.3。

引理 2.2. 设 f 是方程（2.2）的超越亚纯解，则 α_i 要么是 f 的 Picard例外有理函数，要么是 f 的完全分歧有理函数，其重数为 $n/(n, k_i)$；而 β_j 要么是 f 的 Picard例外有理函数，要么是 f 的完全分歧有理函数，其重数为 $n/(n, l_j)$。此外，若 $q = 0$，则 $N_c \in \{2, 3\}$；若 $q \ge 1$，则 $N_c \in \{2, 3, 4\}$。

证明. 前两个断言直接由 [15] 的证明得到。由不等式 (2.1) 可知 $N_c \leq 4$。特别地，当 $q = 0$ 时，若 $N_c = 4$，则根据不等式 (2.1)，我们看到根 α_1、α_2、α_3 和 α_4 都是 f 的完全分歧有理函数，重数均为 2，这意味着对于所有 α_i，阶 $k_i = n/2$，这是不可能的。因此，当 $q = 0$ 时，必有 $N_c = 2$ 或 $N_c = 3$。□

引理 2.3（ [15]）。设 f 是方程（2.2）的一个超越亚纯解。那么，（2.3）中的 α_i 均不满足 $k_i < n$ 为 0。此外，若 $q \geq 1$，则在必要时经过双线性变换 $f \to 1/f$ 后，我们可以假设 $p = q = n$。

由引理 2.3，我们只需考虑以下两种情形：$p = n$、$q = 0$，或下文的 $p = q = n$。此外，若 P（z、f）有两个或更多不同的根，则其中没有一个恒等于零。我们借鉴引理 2.3] 的证明思路，来证明以下引理。

引理 2.4。设 f 是方程（2.2）的一个超越亚纯解。若 γ 是非零有理函数，则 γ 不可能是 f 的 Picard例外有理函数。此外，若 $\gamma \not\equiv 0$ 是 f 的一个完全分歧有理函数，重数为 m，则 $\omega\gamma$ 是 f 的一个完全分歧有理函数，重数为 m，其中 ω 是 1 的 n 次根。特别地，若 0 是 Q（z、f）的一个重数小于 n 的根，则 0 不是 f 的 Picard例外有理函数。

证明。首先，假设 $\gamma \not\equiv 0$ 是 f 的 Picard例外有理函数。根据我们对方程（2.2）的假设，可以看出，(2.3) 和 (2.4) 中的 α_i 与 β_j 至少有一个非零，且阶小于 n。将这个 α_i 或 β_j 记为 δ，并将该根的阶记为 t_1。如同在 [30, 引理 2.3], 的证明中，我们令

$$u = \frac{\overline{f}}{f - \delta}, \quad v = \frac{1}{f - \delta}. \tag{2.5}$$

那么 u 和 v 是两个除至多有限个分支点外均为亚纯的函数，并且我们有

$$\overline{f} = \frac{u}{v}, \quad f = \frac{1}{v} + \delta, \tag{2.6}$$

于是方程（2.2）变为

$$u^n = \frac{P_1(z, v)}{Q_1(z, v)} v^{n_1}, \tag{2.7}$$

其中，$n_1 \in \mathbb{Z}$, $P_1(z, v)$ 和 $Q_1(z, v)$ 是关于 v 的两个没有公因子的多项式，并且 $P_1(z, v)$ 或 $Q_1(z, v)$ 的根均不为零。分别记 $p_1 = \deg_v(P_1(z, v))$ 为 $P_1(z, v)$ 关于 v 的次数，记 $q_1 = \deg_v(Q_1(z, v))$ 为 $Q_1(z, v)$ 关于 v 的次数。通过简单计算，当 $p = n, q = 0$ 时，我们得到 $n_1 = 0, p_1 = p - t_1$ 和 $q_1 = 0$；当 $p = q = n$ 和 $\delta = \alpha_i$ 时，我们得到 $n_1 = n, p_1 = p - t_1$ 和 $q_1 = n$；当 $p = q = n$ 和 $\delta = \beta_j$ 时，我们得到 $n_1 = n, p_1 = n$ 和 $q_1 = n - t_1$。因此，始终有 $p_1 - q_1 + n_1 \neq n$。于是，利用引理 2. [30, 证明中的相同论证，我们可以考虑 $\overline{f} - \overline{\gamma} = 0$ 的根以及 $\overline{f} - \omega\overline{\gamma} = 0$，其中 ω 是 1 的 n-次根，最终得到方程 $\overline{f} - \omega\overline{\gamma} = 0$ 至多有有限个根，即 $\omega\gamma$ 是 f 的 Picard例外有理函数。这意味着 $n = 2$。此外，$N_c = 2$ 以及 $P(z, f)$ 或 $Q(z, f)$ 的两个根是 $\pm\gamma$，因为否则根据引理 2.2 f，它将有 3 个 Picard 例外有理函数，或者有 2 个 Picard例外有理函数以及另一个完全分歧有理函数，这与不等式 (2.1) 矛盾。然而，由 (2.2) 可知，0 或 ∞ 是 f 的 Picard例外有理函数，矛盾。因此，γ 不可能是 f 的 Picard例外有理函数。

接下来，我们假设 $\gamma \not\equiv 0$ 是 f 的重数为 m 的完全分歧有理函数。我们还进行 (2.5) 中的变换，并得到 (2.7) 中的方程。然后，利用引理 [30,Lemma 2.3]，证明中的相同论证，我们得到方程 $\overline{f} - \omega\overline{\gamma} = 0$ 至多有有限个重数小于 m 的根，即 $\omega\gamma$ 也是 f 的重数为 m 的完全分歧有理函数。

最后，假设 0 是 $Q(z, f)$ 的一个重数小于 n 的根。那么存在一个 β_j，使得 $\omega\beta_j$ 是 f 的完全分歧有理函数，重数为 $m \geq 2$，其中 ω 是 1 的 n 次根。若 0 是 f 的 Picard例外有理函数，则由方程（2.2）可知，$P(z, f)$ 的根全都是 f 的 Picard例外有理函数。结合前面的讨论，这表明 f 至少有 3 个 Picard例外有理函数，这是不可能的。因此，0 不可能是 f 的 Picard例外有理函数。证明完毕。

□

对应于方程（2.2）在 $\deg(R(z, f)) \neq n$ 的情形下的引理 2.4]，我们有如下结论

引理 2.5. 设 f 是方程（2.2）的一个超越亚纯解。那么 $n = 2$ 或 $n = 3$。此外，(2.3) 中的 α_i（其中 $k_i < n$）以及 (2.4) 中的 β_j（其中 $l_j < n$）都是单的。

证明。我们分别考虑 $q = 0$ 和 $p = q = n$的情形。若 $n \geq 4$，则由引理 2.4 可知，非零有理函数 γ 不可能是 f的 Picard例外有理函数。当 $q = 0$时，若 $n \geq 4$，则 (2.3) 中至少有一个 α_i 的阶 k_i 不能被 n整除；结合引理 2.2 可知，α_i 是 f 的一个完全分歧有理函数，其重数为 n。然而，由于 $\alpha_i \not\equiv 0$，根据引理 2.4 f 会有 4 个重数为 n的完全分歧有理函数，这与不等式 (2.1) 矛盾。因此，当 $q = 0$ 时，我们有 $n = 2$ 或 $n = 3$。当 $p = q = n$时，我们假设 $n \geq 4$。回顾一下，$N_c \leq 4$。如果 (2.3) 中某个 α_i 的阶为 k_i，使得 $(n, k_i) < n/2$，那么我们会得到与 $q = 0$情形类似的矛盾。由于 $n \geq 4$，这意味着要么 $P(z, f)$ 只有一个根，要么 $P(z, f)$ 有两个不同的根 α_i，其阶 k_i满足 $k_i = n/2$。在第一种情形中，$Q(z, f)$ 至少有两个不同的根，并且 (2.4) 中没有一个 β_j为零；否则由引理 2.4 可知，f 有 5 个完全分歧有理函数，这与定理 2.1 矛盾。但随后我们也会像在 $q = 0$情形中那样得到矛盾，因为至少有一个 β_j 是重数为 n的完全分歧有理函数。在后一种情形中，$Q(z, f)$ 必须有两个不同的根，并且 (2.4) 中没有一个 β_j为零；否则 f 会有 5 个属于 f的完全分歧有理函数，这与定理 2.1 矛盾。但随后我们也会像在 $q = 0$ 情形中那样得到矛盾，因为至少有一个β_j 的阶为 l_j，不能被 n 整除，因此它是一个重数为 n的完全分歧有理函数。因此，当 $p = q = n$时，我们也有 $n = 2$ 或 $n = 3$。

显然，当 $n = 2$ 时，(2.3) 中的 α_i 以及当 $k_i < n$ 时，(2.4) 中的 β_j 都是单的。我们断言，当 $n = 3$ 时，(2.3) 中的 α_i 以及当 $k_i < n$ 时，(2.4) 中的 β_j 也都是单的。事实上，当 $n = 3$ 时，由于 f 有 3 个重数为 3 的非零完全分歧有理函数，根据 Yamanoi第二主定理，0 和 ∞ 都不是 f 的完全分歧有理函数。如果 (2.3) 和 (2.4) 中的某个 α_i 或 β_j 不是单的，那么通过类似于 [30, 引理 2.4] 证明中的简单分析，我们可以得出结论：至少存在 $T(r, f) + o(T(r, f))$ 个点 z_0，使得 $f(z_0 + 1) = 0$ 或 $f(z_0 + 1) = \infty$，其重数为 $m_0 \geq 2$；然后按照 [30, 引理 2.4] 证明中的方法计算 $\overline{N}(r, 1/\overline{f})$ 或 $\overline{N}(r, \overline{f})$，将得到矛盾。细节从略。

□

设 $\gamma \not\equiv 0$ 是 f 的一个重数为 $m \geq 2$ 的完全分歧有理函数。我们进一步考虑方程 $\overline{f}^n - \overline{\gamma}^n = 0$ 的根。特别地，我们可以选择 $\gamma = \alpha_i$ 或 $\gamma = \beta_j$。根据引理 2.4，$\omega\gamma$ 是 f 的一个重数为 m 的完全分歧有理函数，其中 ω 是 1 的 n 次根。由 (2.2)，当 $q = 0$ 时，我们有

$$\overline{f}^n - \overline{\gamma}^n = P(z,f) - \overline{\gamma}^n = a_p(f-\gamma_1)^{t_1}\cdots(f-\gamma_\tau)^{t_\tau}, \tag{2.8}$$

或者，当 $q \geq 1$ 时，我们有

$$\overline{f}^n - \overline{\gamma}^n = \frac{P(z,f) - \overline{\gamma}^n Q(z,f)}{Q(z,f)} = \frac{a_{p_\tau}(f-\gamma_1)^{t_1}\cdots(f-\gamma_\tau)^{t_\tau}}{Q(z,f)}, \tag{2.9}$$

其中 γ_1、$\cdots$、γ_τ 通常是彼此不同的代数函数，t_1、$\cdots$、$t_\tau \in \mathbb{N}$ 分别表示根 γ_1、……、γ_τ 的阶，并且 $t_1 + \cdots + t_\tau = p_\tau \in \mathbb{N}$。在（2.8）中，我们有 $p_\tau = n$；在（2.9）中，当 $p = q = n$ 且 $a_p = \overline{\gamma}^n$ 时，有 $p_\tau < n$；否则有 $p_\tau = n$。我们分别将证明引理 2.3] 中的分析应用于方程（2.8）和（2.9），得到以下结果

引理2.6。设 f 是方程（2.2）的一个超越亚纯解。假设 $\gamma \not\equiv 0$ 是 f 的一个完全分歧有理函数，重数为 $m \geq 2$。若（2.8）或（2.9）中的某个 γ_i 的阶为 $t_i < m$，则 γ_i 是 f 的完全分歧有理函数。特别地，在（2.9）中，若 $0 < q - p_\tau < m$，则 ∞ 是 f 的完全分歧有理函数。此外，假设 ζ_i、……、ζ_t 是 f 的完全分歧有理函数，且 $\sum_{i=1}^{t}\Theta(\zeta_i, f) = 2$。那么，对于（2.8）或（2.9）中的每个 γ_i，若 γ_i 不是 f 的完全分歧有理函数，则 $t_i = m$；若 γ_i 是 f 的完全分歧有理函数，重数为 $m_i \geq 2$，则 $t_i m_i = m$。特别地，对于（2.9），当 $1 \leq p_\tau < q$ 时，若 ∞ 不是 f 的完全分歧有理函数，则 $q - p_\tau = m$；若 ∞ 是 f 的完全分歧有理函数，重数为 $m_\infty \geq 2$，则 $(q - p_\tau)\, m_\infty = m$。

有了上述五个引理，我们可以从 (2.2) 推导出十一个方程 (1.11)–(1.21)。我们作两点说明。第一，当 $p = q = n = 3$ 时，若 $P(z,f)$ 只有一个根 α，且 $Q(z,f)$ 有三个不同的根 β_1、β_2 和 β_3，那么由引理 2.4 和不等式 (2.1) 可知，β_j 均不为零；否则，f 将至少有四个重数为 3 的完全分歧有理函数，这是不可能的。此时，变换 $f \to 1/f$ 将 (2.2) 化为以下情形：当 $\alpha \equiv 0$ 时，$p = n = 3$、$q = 0$；或者化为以下情形：当 $\alpha \not\equiv 0$ 时，$p = q = n = 3$，且 $Q(z,f)$ 只有一个根。第二，当 $p = q = n = 2$ 时，若 $P(z,f)$ 只有一个根 α，且 $Q(z,f)$ 有两个不同的非零根 β_1 和 β_2，那么变换 $f \to 1/f$ 将 (2.2) 化为以下情形：当 $\alpha \equiv 0$ 时，$p = n = 2$、$q = 0$；或者化为以下情形：当 $\alpha \not\equiv 0$ 时，$p = q = n = 2$，且 $Q(z,f)$ 只有一个根。另一方面，若两个根 β_1 和 β_2 中有一个为零，那么变换 $f \to 1/f$ 将 (2.2) 化为以下情形：$p = 1$、$q = 2$，且 $Q(z,f)$ 只有一个根。因此，由引理 2.2、2.3 和 2.5 可知，我们只需考虑 (2.2) 的以下六种情形：

(1) $p = n = 3$, $q = 0$和 $P(z,f)$有三个互异非零根 α_1, α_2和 α_3；(2) $p = q = n = 3$, $P(z,f)$有三个互异非零根 α_1, α_2和 α_3，而 $Q(z,f)$只有一个根 β；(3) $p = n = 2$, $q = 0$和 $P(z,f)$有两个互异非零根 α_1和 α_2；(4) $p = q = n = 2$, $P(z,f)$有两个互异非零根 α_1和 α_2，而 $Q(z,f)$只有一个根 β；(5) $p = 1$, $q = n = 2$, $P(z,f)$只有一个非零根 α，而 $Q(z,f)$只有一个根 β；

(6) $p=q=n=2$, $P(z,f)$有两个互异非零根 α_1和 α_2，而 $Q(z,f)$有两个不同的根 β_1 和 β_2。

对于上述六种情形中的每一种，我们将结合引理2.6与定理 2.1或不等式 (2.1)，按照 [30] 将 (2.8) 和 (2.9) 视为方程，以确定 (2.2) 中 $R(z,f)$ 的系数；随后对其施加双线性变换 $f\to\alpha f$，并结合适当的代数函数 α，即可得到方程 (1.11)–(1.21) 共 11 个方程。下面分别将这一策略应用于上述六种情形。

先考虑情形 (1)。根据引理 2.4，对于每个 α_i，$\omega\alpha_i$ 都是 f 的完全分歧有理函数，对于任意满足 $\omega^3=1$的 ω，其重数均为 3。由不等式 (2.1)，我们可以假设，对于某个满足 $\omega^2+\omega+1=0$的 ω，有 $\alpha_2=\omega\alpha_1$ 和 $\alpha_3=\omega^2\alpha_1$。因此，通过进行线性变换 $f\to\alpha_1 f$，我们可以将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^3=c(1-f^3), \tag{2.10}$$

其中 $c=-a_p\alpha_1^3/\overline{\alpha}_1^3$ 是一个有理函数。由 (2.10)，我们考虑

$$\overline{f}^3-1=c(1-f^3)-1=-c\left(f^3-\frac{c-1}{c}\right). \tag{2.11}$$

注意到 f 现在有三个不同的完全分歧有理函数 1、ω、ω^2，其重数为 3，且没有其他完全分歧有理函数。由引理2.6，必有 $c-1=0$。这给出方程 (1.20)。

接下来考虑情形 (2)。根据情形 (1) 中相同的论证，我们不妨设 $\alpha_2=\omega\alpha_1$ 和 $\alpha_3=\omega^2\alpha_1$，其中存在一个 ω 使得 $\omega^2+\omega+1=0$。因此，通过作线性变换 $f\to\alpha_1 f$，我们可将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^3=\frac{c(f^3-1)}{(f-\delta)^3}, \tag{2.12}$$

其中 $c=a_p/\overline{\alpha}_1^3$ 和 $\delta=\beta/\alpha_1$ 一般而言是代数函数。由 (2.12)，我们考虑 r

$$\overline{f}^3-1=\frac{c(f^3-1)}{(f-\delta)^3}-1=\frac{c(f^3-1)-(f-\delta)^3}{(f-\delta)^3}. \tag{2.13}$$

注意到 f 现在有三个不同的完全分歧有理函数 1、ω、ω^2，其重数为 3，且没有其他完全分歧有理函数。若 $c\neq 1$，则由引理2.6可知必有 $c(f^3-1)-(f-\delta)^3=(c-1)(f-\gamma)^3$，其中某个代数函数$\gamma$ 不同于 δ。然而，简单比较此方程两边次数为 1 和 2 的项，可得 $\delta=\gamma$，矛盾。若 $c=1$，由于三次项相消，则由引理2.6可知必有 $\delta=0$，使得 $c(f^3-1)-(f-\delta)^3$ 化为一个代数函数。这给出方程 (1.15)。

接下来考虑情形（3）。我们声称 $\alpha_1+\alpha_2=0$。否则，根据引理 2.4，f 有四个重数均为 2 的完全分歧有理函数，即 $\pm\alpha_1$ 和 $\pm\alpha_2$。现在我们考虑

$$\overline{f}^2-\overline{\alpha}_1^2=a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_1^2. \tag{2.14}$$

根据引理2.6，如果多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_1^2$ 的某个根不等于$-\alpha_1$ 或 $-\alpha_2$，那么该根的阶为二。这意味着，$-\alpha_1$ 和 $-\alpha_2$ 要么都是多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_1^2$的单根，要么都不是。注意，对于$i=1=2$，$a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_i^2$不可能是 f中的某个多项式的平方。再次考察 $\overline{f}^2-\overline{\alpha}_2^2$，于是，在第一种情况下，根据引理2.6，我们得出多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_2^2$ 是 f中的某个多项式的平方；在后一种情况下，根据引理2.6，我们得出 $-\alpha_1$ 和 $-\alpha_2$ 都是

多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_2^2$的单根。我们只需考虑第一种情况。现在，通过进行线性变换 $f\to\alpha_1 f$，可得如下两个方程组成的方程组：

$$\begin{aligned} c(f-1)(f-\kappa)-1&=c(f+1)(f+\kappa),\\ c(f-1)(f-\kappa)-\overline{\kappa}^2&=c(f-\delta)^2,\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $c=a_p\alpha_1^2/\overline{\alpha}_1^2$、 $\kappa=\alpha_2/\alpha_1$ 和 δ 一般为代数函数。然而，通过比较 (2.15) 中两个方程两边的系数，我们从所得的系数关系中推得 $1+\kappa=0$，这与假设矛盾。因此，$\alpha_1+\alpha_2=0$。接着，通过作线性变换 $f\to\alpha_1 f$，可将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^2=c(1-f^2), \tag{2.16}$$

其中 $c=-a_p\alpha_1^2/\overline{\alpha}_1^2$ 为有理函数。由 (2.16)，考虑

$$\overline{f}^2-1=c(1-f^2)-1=-c\left(f^2-\frac{c-1}{c}\right). \tag{2.17}$$

注意，现在 f有两个不同的完全分歧有理函数 ±1。若 $c-1=0$，则 $c=1$，从而得到方程 (1.11)。否则，$c-1\neq0$，于是由引理2.6可知，$\pm\sqrt{(c-1)/c}$ 都是 f的完全分歧有理函数。再次考虑

$$\overline{f}^2-\frac{\overline{c}-1}{\overline{c}}=c(1-f^2)-\frac{\overline{c}-1}{\overline{c}}=-c\left(f^2-\frac{\overline{c}c-\overline{c}+1}{\overline{c}c}\right). \tag{2.18}$$

由于现在 f 有四个完全分歧有理函数 $\pm1,\pm\sqrt{(c-1/)c}$，由引理2.6可知必有 $\overline{c}c-\overline{c}+1=0$，即 $c=-\omega^2$，其中 ω 是满足 $\omega^2+\omega+1=0$ 的常数。这给出方程 (1.16)。

接下来考虑情形（4）。在这种情况下，若 $\alpha_1+\alpha_2\neq0$，则由引理 2.4 可知，f 有四个重数均为 2 的完全分歧有理函数，即 $\pm\alpha_1$ 和 $\pm\alpha_2$。先假设 $a_p\neq\overline{\alpha}_1^2,\overline{\alpha}_2^2$。我们考虑

$$\overline{f}^2-\overline{\alpha}_1^2=\frac{a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_1^2(f-\beta)^2}{(f-\beta)^2}. \tag{2.19}$$

与情形（3）中的论证相同，$-\alpha_1$ 和 $-\alpha_2$ 要么都是多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_1^2(f-\beta)^2$, 的单根，要么都不是。若对于两个 $i=1,2$，$a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_i^2(f-\beta)^2$ 都是 f 中某个多项式的平方，那么通过计算两个判别式 $\Delta_i:=[a_p(\alpha_1+\alpha_2)-2\overline{\alpha}_i^2\beta]^2-4(a_p-\overline{\alpha}_i^2)(a_p\alpha_1\alpha_2-\overline{\alpha}_i^2\beta^2)=0,i=1,2$，可推出 $(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)=0$，这是不可能的。再次考虑 $\overline{f}^2-\overline{\alpha}_2^2$，于是，在第一种情况下，由引理2.6可得，多项式 $a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_2^2(f-\beta)^2$ 是 f 中某个多项式的平方；在后一种情况下，由引理2.6可得，$-\alpha_1$ 和 $-\alpha_2$ 都是多项式$a_p(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)-\overline{\alpha}_2^2(f-\beta)^2$ 的单根。我们只需考虑第一种情况。现在，作线性变换 $f\to\alpha_1 f$，得到以下两个方程组成的方程组：

$$\begin{aligned} c(f-1)(f-\kappa)-(f-\delta)^2&=(c-1)(f+1)(f+\kappa),\\ c(f-1)(f-\kappa)-\overline{\kappa}^2(f-\delta)^2&=(c-\overline{\kappa}^2)(f-\gamma)^2,\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中 $c=a_p/\overline{\alpha}_1^2$、 $\kappa=\alpha_2/\alpha_1$、 $\delta=\beta/\alpha_1$ 和 γ 一般为代数函数。通过比较 (2.20) 中两个方程两边的系数，我们从所得的系数关系中推知，$\kappa=\delta^2$、 $\gamma=-\delta$、 $c=\frac{1}{2}{}^{(1+\delta^2)}$以及 $\delta\neq0$、 ±1、 $\pm i$ 满足 $8\overline{\delta}^4(\delta^2+1)\delta=(\delta+1)^4$。注意到 $\delta\equiv1$ 是该方程的解。我们看到 δ 是一个

常数，因此 α_1 和 α_2 都是有理函数。这就得到方程（1.21）。现在，若 $a_p = \overline{\alpha}_1^2$ 或 $a_p = \overline{\alpha}_2^2$，则通过与上述类似的讨论，可得以下两个方程组成的方程组:

$$\begin{aligned} (f-1)(f-\kappa) - (f-\delta)^2 &= c_1, \\ (f-1)(f-\kappa) - \overline{\kappa}^2(f-\delta)^2 &= (1-\overline{\kappa}^2)(f-\gamma)^2, \end{aligned} \tag{2.21}$$

or

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}^2(f-1)(f-\kappa) - (f-\delta)^2 &= (\overline{\kappa}^2-1)(f+1)(f+\kappa), \\ \overline{\kappa}^2(f-1)(f-\kappa) - \overline{\kappa}^2(f-\delta)^2 &= c_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 $\delta = \beta/\alpha_1$、 c_1、 c_2 和 γ 通常是代数函数。然而，通过比较等式两边的系数，我们根据由 (2.21) 中的两个方程组成的方程组得到的系数关系，推得 $\delta = \gamma$；根据由 (2.22) 中的两个方程组成的方程组得到的系数关系，推得 $1 + \kappa = 0$，这两种情况都不可能。另一方面，若 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，则通过作线性变换$f \to \alpha_1 f$，可将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^2 = \frac{c(1-f^2)}{(f-\delta)^2}, \tag{2.23}$$

其中 $c = -a_p$ /$\overline{\alpha}_1^2$ 和 $\delta = \beta/\alpha_1$ 通常是代数函数。根据 (2.23)，我们考虑 r

$$\overline{f}^2 - 1 = \frac{c(1-f^2)}{(f-\delta)^2} - 1 = \frac{c(1-f^2) - (f-\delta)^2}{(f-\delta)^2}. \tag{2.24}$$

当 $c = -1$时，若 $\delta \neq 0$，则由引理2.6可知， $2\delta/(\delta^2+1)$ 和 ∞ 都是关于 f 的完全分歧有理函数。然而，根据引理 2.4 f 将有 5 个完全分歧有理函数，这与定理 2.1 矛盾。因此，当 $c = -1$时，必有 $\delta = 0$。当 $c \neq -1$时，若 $c(1-f^2) - (f-\delta)^2$ 只有一个根，即判别式 $\Delta := 4\delta^2 + 4(c+1)(c-\delta^2) = 0$，则 $c = \delta^2 - 1$。上述两种情况都给出方程 (1.12)。否则，我们有 $c \neq -1$，且 $c(1-f^2) - (f-\delta)^2$ 有两个不同的根，记为 δ_1 和 δ_2；由引理 2.6 可知，它们都是关于 f 的完全分歧有理函数。根据引理 2.4， $\pm\delta_1$ 和 $\pm\delta_2$ 都是关于 f 的完全分歧有理函数。由定理 2.1 可知，必有 $\delta_1 + \delta_2 = 0$。由此可得 $\delta = 0$ 和$\delta_1^2 = c/(c+1)$。我们再次考虑

$$\overline{f}^2 - \frac{\overline{c}}{\overline{c}+1} = \frac{c(1-f^2)}{f^2} - \frac{\overline{c}}{\overline{c}+1} = \frac{c - [(\overline{c}c + c + \overline{c})/(\overline{c}+1)]f^2}{f^2}. \tag{2.25}$$

如果 $\overline{c}c + c + \overline{c} \neq 0$，那么由引理2.6可知， $\pm\sqrt{c(\overline{c}+1)/(\overline{c}c + \overline{c+\overline{c}}}$都是 f的完全分歧有理函数，这与定理 2.1矛盾。因此，我们必须有$\overline{c}c + c + \overline{c} = 0$，从而 $c = -2$。这就得到方程(1.17)。

接下来考虑情形(5)。在这种情形下，通过作线性变换 $f \to -\alpha f$，我们可以将方程(1.8)改写为

$$\overline{f}^2 = \frac{c(f+1)}{(f-\delta)^2}, \tag{2.26}$$

其中 $c = -a_p/\alpha\overline{\alpha}^2$ 和 $\delta = -\beta/\alpha$ 是有理函数。根据前面的讨论以及引理 2.2 和 2.4，我们看到， ∞、 ± 1 和 $\pm\delta$ 都是关于 f 的完全分歧有理函数。由定理 2.1，必有 $\delta = 1$。根据 (2.26)，我们考虑

$$\overline{f}^2 - 1 = \frac{c(f+1)}{(f-1)^2} - 1 = \frac{c(f+1) - (f-1)^2}{(f-1)^2}. \tag{2.27}$$

如果 $c(f+1)-(f-1)^2$ 有两个不同的根，那么根据引理2.6，这两个根都是完全分歧有理函数，这与定理 2.1 矛盾。因此， $c(f+1)-(f-1)^2$ 只能有一个根，这意味着判别式 $\Delta:=(c+2)^2+4(c-1)=0$，即 $c=-8$。这就得到了方程 (1.13)。

最后考虑情形 (6)。由引理 2.2， $\pm\alpha_1$、 $\pm\alpha_2$、 $\pm\beta_1$ 和 $\pm\beta_2$ 都是关于 f 的完全分歧有理函数。由定理 2.1，必有 $\alpha_1+\alpha_2=0$ 和 $\beta_1+\beta_2=0$，或 $\alpha_1+\beta_1=0$ 和 $\alpha_2+\beta_2=0$。当 $\alpha_1+\alpha_2=0$ 和 $\beta_1+\beta_2=0$ 时，通过对 $f\to\beta_1 f$ 作线性变换，可将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^2=\frac{c(f^2-\kappa^2)}{f^2-1}, \tag{2.28}$$

其中 $c=a_p/\overline{\beta}_1^2$ 和 $\kappa=\alpha_1/\beta_1$ 一般是代数函数。我们看到 $\kappa^2\neq 0$，1。由 (2.26)，考虑

$$\overline{f}^2-1=\frac{c(f^2-\kappa^2)}{f^2-1}-1=\frac{(c-1)f^2-(c\kappa^2-1)}{f^2-1}. \tag{2.29}$$

若 $c\neq 1$ 和 $c\neq 1/\kappa^2$，则由引理2.6， $\pm\sqrt{(c\kappa^2-1)/(c-1)}$ 都是关于 f 的完全分歧有理函数，因此 f 将有 6 个完全分歧有理函数，这与定理 2.1 矛盾。因此， $c=1$ 或 $c=1/\kappa^2$。若 $c=1$，则得到方程 (1.14)；若 $c=1/\kappa^2$，则考虑方程 $\overline{f}^2-\overline{\kappa}^2$，并用与上文相同的论证得到 $1/\kappa^2=\overline{\kappa}^2$，即 $\kappa^2=-1$ 和 $c=-1$，从而得到方程 (1.18)。另一方面，当 $\alpha_1+\beta_1=0$ 和 $\alpha_2+\beta_2=0$ 时，通过对 $f\to\sqrt{\alpha_1\alpha_2}f$ 作线性变换，可将方程 (1.8) 改写为

$$\overline{f}^2=c\frac{(f-\delta)(f-\delta^{-1})}{(f+\delta)(f+\delta^{-1})}, \tag{2.30}$$

其中 $c=a_p/\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2$ 和 $\delta=\sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$ 一般为代数函数。采用与方程（2.19）相同的论证，我们可以考察 $\overline{f}^2-\overline{\delta}^2$，并由引理2.6得出，多项式 $c(f-\delta)(f-\delta^{-1})-\overline{\delta}^2(f+\delta)(f+\delta^{-1})$ 是某个关于f的多项式的平方（当 $c\neq\overline{\delta}^2$ 时），或者退化为代数函数 c_1（当 $c=\overline{\delta}^2$时）。由于 $\delta^2\neq 0,\pm 1,\pm i$，通过直接比较可知后一种情形不可能成立。类似地，我们可以考察 $\overline{f}^2-\overline{\delta}^{-2}$，并得出多项式 $c(f-\delta)(f-\delta^{-1})-\overline{\delta}^{-2}(f+\delta)(f+\delta^{-1})$ 是某个关于 f的多项式的平方。因此我们得到以下两个方程组成的方程组:

$$\begin{aligned} c(f-\delta)(f-\delta^{-1})-\overline{\delta}^2(f+\delta)(f+\delta^{-1})&=(c-\overline{\delta}^2)(f-\gamma_1)^2,\\ c(f-\delta)(f-\delta^{-1})-\overline{\delta}^{-2}(f+\delta)(f+\delta^{-1})&=(c-\overline{\delta}^{-2})(f-\gamma_2)^2, \end{aligned} \tag{2.31}$$

其中 γ_1 和 γ_2 一般为代数函数。通过比较（2.31）中两个方程两边的系数，由所得的系数关系可推得$\gamma_1^2=\gamma_2^2=c^2=1$ 和 $d=\delta+\delta^{-1}$ 满足 $\overline{d}^2(d^2-4)=2(1-c)d^2-8(1+c)$。我们看到 d 是一个常数。这便得到方程（1.19），同时也完成了对方程（2.2）的分类。

2.2. 方程（1.21）的亚纯解的增长。我们证明，方程（1.21）的所有超越亚纯解 f 的超阶均为 ≥ 1。注意，f 在每个 ± 1、$\pm\delta^2$ 上都是二重分歧的。因此，存在一个整函数 $\varphi(z)$，使得 f 可表示为 $f(z)=\mathrm{sn}(\varphi(z))$，其中 $\mathrm{sn}(\varphi)=\mathrm{sn}(\varphi,1/\delta^2)$ 是模数为 $1/\delta^2$ 的雅可比椭圆函数，并满足二阶微分方程 $\mathrm{sn}'(\varphi)^2=(1-\mathrm{sn}(\varphi)^2)(1-\mathrm{sn}(\varphi)^2/\delta^4)$。此外，根据第二主定理，我们有

$T(r,f) = N(r,1/(f-1)) + O(\log r)$。设 z_0 为一点，使得 $f(z_0) = \mathrm{sn}(\varphi(z_0)) = 1$。由（1.21）可得 $f(z_0+1) = \mathrm{sn}(\varphi(z_0+1)) = 0$。分别在点 z_0 附近求 $\mathrm{sn}(\varphi)$ 和 $\mathrm{sn}(\overline{\varphi})$ 的麦克劳林级数，得到

$$\mathrm{sn}(\varphi(z_0)) = 1 - \frac{\delta^4-1}{\delta^4}(\varphi(z)-\varphi(z_0)) + \cdots = 1 - \frac{\delta^4-1}{\delta^4}\varphi'(z_0)(z-z_0) + \cdots, \tag{2.32}$$

and

$$\mathrm{sn}(\varphi(z_0+1)) = \varphi(z+1) - \varphi(z_0+1) + \cdots = \varphi'(z_0+1)(z-z_0) + \cdots. \tag{2.33}$$

将上述两个表达式代入 (1.21)，再比较所得方程两边的二次项，可得

$$\varphi'(z_0+1)^2 = \frac{1}{2}\frac{(1+\delta)^4}{\delta^4}\varphi'(z_0)^2. \tag{2.34}$$

由简单计算并结合方程 (1.22) 可知 $(1+\delta)^4 \neq 2\delta^4$。定义$G(z) := \varphi'(z+1)^2 - \frac{1}{2}(1+\delta)^4_{\delta^4}\varphi'(z)^2$。由 [15] 中的~~讨论~~可知，$T(r,\overline{f}) = T(r,f) + O(\log r)$。由于 $\mathrm{sn}(z)$ 的增长阶为正，根据 [7, 第 50] 页，我们有$T(r,\varphi) = o(T(r,f))$ 且 $T(r,\overline{\varphi}) = o(T(r,\overline{f}))$，其中 $r \to \infty$。若 $G \not\equiv 0$，则 $T(r,G) \leq o(T(r,f))$，$r \to \infty$，这不可能，因为 G有 $T(r,f) + O(\log r)$ 个零点。因此 $G(z) \equiv 0$。现在，$\varphi'(z+1) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta)_{\sigma^2}\varphi'(z)$，积分后可知 φ 是一个整函数，使得对某个 $K > 0$ 以及所有满足某个 $r_0 \geq 0$的 $r \geq r_0$，都有 $T(r,\varphi) \geq Kr$。由于 $\mathrm{sn}(z)$ 的零点收敛指数为正，且 $f(z) = \mathrm{sn}(\varphi(z))$，由下文的引理 2.7（对 [17, 引理5.20]稍作修改而得）可知，f 的超阶至少为一。

引理2.7. 设 g 为一个亚纯函数，使得收敛指数$\lambda = \lambda(g) > 0$；设 $\varphi = \varphi(z)$为一个整函数，使得对于某个$c > 0$ 以及所有满足某个 $r_0 \geq 0$的 $r \geq r_0$，有 $T(r,\varphi) \geq cr$。则 $g \circ \varphi$ 的超阶至少为1。

证明. 我们考察 $g \circ \varphi$的零点。由于 φ 是一个整函数，因此 φ 至多有一个有限的皮卡例外值。因此，我们可以选取一个常数 $r_1 \geq r_0$，使得当 t 足够大时，φ在环域 $r_1 < |w| < M(t,\varphi)$中取遍每一个值 w，其中 $|z| < t$。设 g 在该环域内有 $\mu(t)$个零点，按其重数计。根据 λ的定义，我们有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\log \mu(t)}{\log M(t,\varphi)} = \lambda > 0. \tag{2.35}$$

He因此，对于某个 $\tau > 0$，存在一个趋于 $+\infty$ 的序列（t_n），使得 t

$$\mu(t_n) > (M(t_n,\varphi))^\tau \geq \left(e^{ct_n}\right)^\tau, \tag{2.36}$$

其中，c 是正常数。上面的第二个不等式由我们的假设得出，因为对于所有充分大的 t，$\log M(t,\varphi) \geq T(t,\varphi)$。现在，$g \circ \varphi$在 $|z| < t$中至少有 $\mu(t)$个零点。利用(2.36)，我们得到

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log n(r,1/g\circ\varphi)}{\log r} \geq \limsup_{t_n\to\infty} \frac{\log\log \mu(t_n,1/g\circ\varphi)}{\log t_n} \geq 1. \tag{2.37}$$

由 $T(r,1/g\circ\varphi) \geq N(r,1/g\circ\varphi)$这一事实，我们得出 $g \circ \varphi$的超阶至少为1。因此，我们的断言得证。□

我们还注意到，列表 (1.16)–(1.20) 中每个方程的所有亚纯解都可以用上述方法证明，因为它们的所有解都是由整函数复合而成的椭圆函数。

3. 当 n = 2 时，方程 (1.2) 与 (1.8) 之间的关系

本节中，我们使用双线性方法和连续极限方法研究 $n=2$ 情形下方程 (1.2) 与 (1.8) 之间的关系。关于双线性方法的介绍，参见 [8] 或 [11]。这里我们简要概述连续极限方法：设 k 为正整数， ε 为复数。我们建立一对关系：

$$\mu(z,t,\varepsilon)=0,\quad \nu(f(z),w(t,\varepsilon),\varepsilon)=0. \tag{3.1}$$

据此，我们将一个差分方程

$$\Omega_0(z,f(z+1),\cdots,f(z+k))=0 \tag{3.2}$$

变换为某个差分方程

$$\Omega_1(t,w(t,\varepsilon),\cdots,w(t+k\varepsilon,\varepsilon))=0. \tag{3.3}$$

令 $\varepsilon\to 0$，在对 Ω_1, 的系数施加一些条件后，我们得到一个微分方程：

$$\Omega_1(t,w'(t,0),\cdots,w^{(k)}(t,0))=0. \tag{3.4}$$

显然，在自治情形下，一阶线性差分方程有一个连续极限，即一阶线性微分方程。在下面两个小节中，我们将描述差分方程 (1.11)–(1.14) 与微分方程 (1.1)、(1.3) 或 (1.4) 之间的关系。我们还将说明如何对五个方程 (1.16)–(1.19) 和 (1.21) 取连续极限。

3.1. (1.12)、(1.13) 与 Riccati 方程 (1.1) 之间的关系。

在 [12],Ishizaki 讨论了微分 Riccati 方程与差分Riccati方程之间的关系。下面先回顾 Ishizaki 的结果。对于微分 Riccati 方程 (1.1)，从现在起我们假设 $a_2\neq 0$ 。容易证明，对 f 作适当的线性变换，可将方程 (1.1) 化为

$$f'=f^2+A(z), \tag{3.5}$$

其中 $A(z)$ 是由 a_j 及其导数表示的有理函数；参见 [17,第 9] 章。Ishizaki 使用双线性方法，以如下方式从 (3.5) 推导出一个差分Riccati方程：令 $f(z)=u(z)/v(z)$，则方程 (3.5) 化为

$$u'(z)v(z)-u(z)v'(z)=u(z)^2+A(z)v(z)^2, \tag{3.6}$$

该方程具有规范不变性。换言之，对于任意 $h(z)$， $\tilde{u}(z)=u(z)h(z)$ 和 $\tilde{v}(z)=v(z)h(z)$ 也分别满足微分方程 (3.6)，以替代 $u(z)$ 和 $v(z)$。对应于方程 (3.6)，我们选取一个差分方程

$$u(z+1)v(z)-u(z)v(z+1)=u(z)u(z+1)+A(z)v(z)v(z+1), \tag{3.7}$$

具有规范不变的性质。在上述差分方程中令 $f(z)=u(z)/v(z)$，则得到

$$f(z+1)-f(z)=f(z+1)f(z)+A(z), \tag{3.8}$$

即,

$$f(z+1)=\frac{f(z)+A(z)}{1-f(z)}. \tag{3.9}$$

另一方面，对于差分Riccati方程 (1.10)，Ishizaki 证明，若$b_1(z) \neq -b_3(z+1)$，通过进行变换 $f(z) \to [(-b_3 - \underline{b}_1)f + (-b_3 + \underline{b}_1)]/2$，我们得到差分方程 (3.9)，其中

$$A(z) = \frac{-4b_2 - b_1\underline{b}_1 + 3b_1b_3 - \underline{b}_1\overline{b}_3 - b_3\overline{b}_3}{(b_3 + \underline{b}_1)(\overline{b}_3 + b_1)}. \tag{3.10}$$

Set

$$t = \varepsilon z, \quad f = \varepsilon w(t, \varepsilon), \tag{3.11}$$

在条件 $A(z) = \varepsilon^2\tilde{A}(t,\varepsilon)$ 和 $\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{A}(t,\varepsilon) = \tilde{A}(t,0)$ 下。由于 $f(z+1) = \varepsilon w(\varepsilon(z+1)\ \varepsilon) = \varepsilon w(t+\varepsilon,\varepsilon)$，我们有

$$w(t+\varepsilon,\varepsilon) - w(t,\varepsilon) = \varepsilon w(t+\varepsilon,\varepsilon)w(t,\varepsilon) + \varepsilon\tilde{A}(t,\varepsilon). \tag{3.12}$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们有

$$w'(t,0) = w(t,0)^2 + \tilde{A}(t,0), \tag{3.13}$$

这就是方程 (3.5)。特别地，若 A 是一个常数，则将 A 替换为 $\varepsilon^2\tilde{A}$，其中 ˜ 是一个常数 A。

有了上述引入，我们分别来看方程 (1.12) 和 (1.13)。对于方程 (1.12)，若令 $f = (\gamma + \gamma^{-1})/2$，则可得

$$\overline{\gamma}^2 \pm 2i\frac{\delta\gamma^2 - 2\gamma + \delta}{\gamma^2 - 2\delta\gamma + 1}\overline{\gamma} - 1 = 0.$$

解上述方程，可得四个不同的差分Riccati方程:

$$\overline{\gamma} = \left\{-\theta\frac{(\pm i\delta - \sqrt{1-\delta^2})\gamma \pm i}{\gamma - \delta \pm i\sqrt{1-\delta^2}}\right\}^{\theta}, \quad \theta = \pm 1.$$

很容易看出，这四个差分方程没有任何公共解。以下面的差分Riccati方程为例:

$$\overline{\gamma} = \frac{(-i\delta + \sqrt{1-\delta^2})\gamma - i}{\gamma + (-\delta + i\sqrt{1-\delta^2})}, \tag{3.14}$$

考虑 δ 为常数的情形。若 $2\delta^2 \neq 1$，则通过作变换$\gamma \to$ $\frac{(1+i)(\delta-\sqrt{1-\delta^2})}{2}$ $\gamma +$ $\frac{(1-i)(\delta+\sqrt{1-\delta^2})}{2}$，由上面的方程可得

$$\overline{\gamma} - \gamma = \overline{\gamma}\gamma + A, \tag{3.15}$$

其中 A 具有 (3.10) 中的形式，且 $b_1 = (-i\delta + \sqrt{1-\delta^2})$、$b_2 = -i$ 和 $b_3 = -\delta + i\sqrt{1-\delta^2}$。因此，对于满足 (3.14) 的方程 (1.12) 的解，我们令

$$\begin{aligned} &t = \varepsilon z, \\ &f = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right), \\ &\gamma = \frac{(1+i)(\delta - \sqrt{1-\delta^2})}{2}\varepsilon w(t,\varepsilon) + \frac{(1-i)(\delta + \sqrt{1-\delta^2})}{2}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

并将 A替换为 $\varepsilon^2 A$。于是得到式（3.12），再令 $\varepsilon \to 0$，最终可得式（3.13）。式（1.13）可用类似的方法处理。根据 [15], 中的结果，若令 $f = \frac{1-u^2}{u^2}$、$\sqrt{2}u = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^{-1})$，则还可得到四个

彼此不同且没有任何公共解的差分Riccati方程。考虑以下情形:

$$f=\frac{1-u^2}{u^2}=\frac{8\gamma^2-(\gamma^2+1)^2}{(\gamma^2+1)^2},\quad \overline{\gamma}=-\frac{-(1+\sqrt{2})\gamma+i}{\gamma-i+i\sqrt{2}}.$$

通过作出与 (3.16) 中类似的代换，我们可以得到方程 (3.12)；令 $\varepsilon\to 0$，则可得到方程 (3.13)。

3.2. (1.11)、(1.14)、(1.16)–(1.19) 和 (1.21) 与微分方程 (1.3) 或 (1.4) 之间的关系。七个差分方程 (1.11)、(1.14)、(1.16)–(1.19) 和 (1.21) 的自治形式与 QRT映射 [20, 21], 密切相关，该映射由以下两个方程组成:

$$x_{n+1} = \frac{f_1(y_n)-x_nf_2(y_n)}{f_2(y_n)-x_nf_3(y_n)}, \tag{3.17}$$

$$y_{n+1} = \frac{g_1(x_{n+1})-y_ng_2(x_{n+1})}{g_2(x_{n+1})-y_ng_3(x_{n+1})}, \tag{3.18}$$

其中

$$\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0&\beta_0&\gamma_0\\ \delta_0&\varepsilon_0&\zeta_0\\ \kappa_0&\lambda_0&\mu_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\ \delta_1&\varepsilon_1&\zeta_1\\ \kappa_1&\lambda_1&\mu_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x)\\ g_2(x)\\ g_3(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0&\delta_0&\kappa_0\\ \beta_0&\varepsilon_0&\lambda_0\\ \gamma_0&\zeta_0&\mu_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1&\delta_1&\kappa_1\\ \beta_1&\varepsilon_1&\lambda_1\\ \gamma_1&\zeta_1&\mu_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

where '×' 表示两个向量的叉积。在对称情形下，即 .,

$$\begin{pmatrix}\alpha_i&\beta_i&\gamma_i\\ \delta_i&\varepsilon_i&\zeta_i\\ \kappa_i&\lambda_i&\mu_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_i&\delta_i&\kappa_i\\ \beta_i&\varepsilon_i&\lambda_i\\ \gamma_i&\zeta_i&\mu_i\end{pmatrix},\quad i=0,1, \tag{3.21}$$

QRT 族归结为一个单独的方程

$$w_{n+1} = \frac{f_1(w_n)-w_{n-1}f_2(w_n)}{f_2(w_n)-w_{n-1}f_3(w_n)}, \tag{3.22}$$

在（3.17）和（3.18）中取 $x_n=w_{2n}$ 和 $y_n=w_{2n+1}$。对称QRT族具有一个不变量:

$$\begin{aligned}&(\alpha_0+K\alpha_1)x_{n+1}^2x_n^2+(\beta_0+K\beta_1)(x_{n+1}^2x_n+x_{n+1}x_n^2)+(\gamma_0+K\gamma_1)(x_{n+1}^2+x_n^2)\\ &+(\varepsilon_0+K\varepsilon_1)x_{n+1}x_n+(\zeta_0+K\zeta_1)(x_{n+1}+x_n)+(\mu_0+K\mu_1)=0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 K 是一个常数。通过使用适当的常数 α_i 和 β_j进行莫比乌斯变换 $x_n\to\frac{\alpha_1x_n+\beta_1}{\alpha_2x_n+\beta_2}$，式（3.23）中的对称 QRT 映射可写成:

$$\alpha x_{n+1}^2x_n^2+\beta(x_{n+1}^2+x_n^2)+\gamma x_{n+1}x_n+\delta=0, \tag{3.24}$$

其中 α、 β、 γ 和 δ 是常数；参见 [22]。通过将离散方程重新解释为差分方程（参见 [1]），我们将在后文看到，在一般情形（即 $\alpha\delta\neq 0$）下，（1.14）可化为对称QRT映射的一个特例，而方程（1.11）则是在退化情形（即 $\alpha\delta=0$）下的对称QRT映射。此外，如下文所示，五个方程（1.16）–（1.19）和（1.21）也可以映射到对称QRT映射。

假设 (1.3) 和 (1.4) 中的 a and b 都是常数。为简单起见，我们将方程 (1.3) 视为方程 (1.4) 在 $\tau_1=\tau_3$ 下的特殊情形。通过进行一个 M¨obius

变换 $f \to \frac{\alpha_1 f+\beta_1}{\alpha_2 f+\beta_2}$，并在必要时选取适当的常数 α_i 和 β_j，我们可以假设 $\tau_1+\tau_3=0$ 和 $\tau_2+\tau_4=0$。因此，我们可以将 (1.4) 写成

$$(f')^2 = a(f^2-\tau_1^2)(f^2-\tau_2^2), \tag{3.25}$$

其中 $\tau_1^2 \neq \tau_2^2$，且 $\tau_1^2=0$ 是可能的。现在可以应用双线性方法。按照 Ishizaki 的做法，令 $f(z)=u(z)/v(z)$，由方程 (3.25) 得

$$[u'(z)v(z)-u(z)v'(z)]^2 = a(z)[u(z)^2-\tau_1^2 v(z)^2][u(z)^2-\tau_2^2 v(z)^2], \tag{3.26}$$

这是规范不变的。与此方程相对应，我们选择一个差分方程

$$\begin{aligned}&[u(z+1)v(z)-u(z)v(z+1)]^2\\ &=a(z)[u(z)u(z+1)-\tau_1^2 v(z)v(z+1)][u(z)u(z+1)-\tau_2^2 v(z)v(z+1)],\end{aligned} \tag{3.27}$$

该方程具有规范不变的性质。在上述差分方程中令 $f(z)=u(z)/v(z)$，可得

$$[f(z+1)-f(z)]^2 = a[f(z+1)f(z)-\tau_1^2][f(z+1)f(z)-\tau_2^2]. \tag{3.28}$$

展开后，这是对称 QRT 映射 (3.23) 的一个特例 .

当 $\tau_1^2=0$ 时，进行变换 $f \to 1/f$，由 (3.28) 得

$$[f(z+1)-f(z)]^2 = -a\tau_2^2\left(f(z+1)f(z)-1/\tau_2^2\right). \tag{3.29}$$

我们看到，方程 (1.11) 包含在 (3.29) 中。令 $t=\varepsilon z$，$f(z)=w(t,\varepsilon)$，并用 $\varepsilon^2(-a\tau_2^2)$ 替代 $-a\tau_2^2$，则方程 (3.29) 的连续极限为方程 $(f')^2=-a(\tau_2^2 f^2-1)$；见 [13]。方程 $(f')^2=-a(\tau_2^2 f^2-1)$ 可通过变换 $f\to 1/f$ 从方程 (3.25) 得到。

当 $\tau_1^2 \neq 0$ 时，我们将 f 按 $f \to (\tau_1\tau_2)^{1/2} f$ 重新缩放，然后展开 (3.28)，得到对称 QRT 映射的标准形式：

$$\overline{f}^2 f^2 + A(\overline{f}^2+f^2) + 2B\overline{f}f + 1 = 0, \tag{3.30}$$

其中 $A=-1/(a\tau_1\tau_2)$ 且 $B=[2-a(\tau_1^2+\tau_2^2)]/(2a\tau_1\tau_2)$。特别地，对于方程 (1.14)，我们可以先用常数 κ_1 将 f 按 $f\to f/\kappa_1$ 重新缩放，从而得到方程

$$\overline{f}^2 f^2 - \kappa_1^2(\overline{f}^2+f^2) + \kappa_2^2 = 0, \tag{3.31}$$

其中 $\kappa_2^2=\kappa_1^4\kappa^2$。通过作变换 $f\to \alpha\frac{f-\beta}{f+\beta}$，其中常数 α、β 满足 $\alpha^4=\kappa_2^2$，由 (3.31) 可得到 (3.30) 中的标准形式，而 (3.30) 中相应的系数 A 和 B 为

$$\begin{aligned}A&=\beta^2,\\ B&=2\frac{\alpha^4+2\kappa_1^2\alpha^2+\kappa_2^2}{\alpha^4-2\kappa_1^2\alpha^2+\kappa_2^2}\beta^2,\end{aligned}$$

分别。众所周知，方程 (3.30) 可用椭圆函数参数化；参见 [3,22] 或 [5]。这里我们采用 [5]中的参数化过程。定义参数 k 和 ε，使得

$$\begin{aligned}A&=-\frac{1}{k\,\mathrm{sn}^2\,\varepsilon},\\ B&=\frac{\mathrm{cn}\,\varepsilon\,\mathrm{dn}\,\varepsilon}{k\,\mathrm{sn}^2\,\varepsilon},\end{aligned} \tag{3.32}$$

分别。 A 和 B 的这些取值意味着

$$k + k^{-1} = (B^2 - A^2 - 1)A^{-1}. \tag{3.33}$$

因此，将方程 (3.30) 视为关于 $\overline{f}$ 的二次方程，并使用变换 $f = k^{1/2}\mathrm{sn}\ u$，其中 sn u 表示自变量为 u、模数为 k 的 Jacobi 椭圆 sn 函数，我们得到

$$\mathrm{sn}\ \overline{u} = \frac{\mathrm{cn}\ \varepsilon\ \mathrm{dn}\ \varepsilon\ \mathrm{sn}\ u \pm \mathrm{sn}\ \varepsilon\ \mathrm{cn}\ u\ \mathrm{dn}\ u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\ \varepsilon\ \mathrm{sn}^2\ u}. \tag{3.34}$$

该方程的解为 $u = \varepsilon z + C$，其中 C 是一个自由参数。利用 (3.32) 中 A 和 B 的表达式，我们将方程 (3.30) 改写为

$$(\overline{f} - f)^2 = (k\mathrm{sn}^2\ \varepsilon)\overline{f}^2 f^2 + 2\,(\mathrm{cn}\ \varepsilon\ \mathrm{dn}\ \varepsilon - 1)\,\overline{f} f + k\mathrm{sn}^2\ \varepsilon. \tag{3.35}$$

按照上述过程，若令

$$t = \varepsilon z, \quad f = k^{1/2} w(t, \varepsilon), \tag{3.36}$$

那么，由于 $f(z+1) = k^{1/2}w(t+\varepsilon, \varepsilon)$，将方程 (3.35) 两边同除以 $k\mathrm{sn}^2\ \varepsilon$，得到

$$\begin{aligned} &\frac{[w(t+\varepsilon,\varepsilon) - w(t,\varepsilon)]^2}{\mathrm{sn}^2\ \varepsilon} \\ &= k^2 w(t+\varepsilon,\varepsilon)^2 w(t,\varepsilon)^2 + \left(\frac{2\mathrm{cn}\ \varepsilon\ \mathrm{dn}\ \varepsilon - 2}{\mathrm{sn}^2\ \varepsilon}\right) w(t+\varepsilon,\varepsilon) w(t,\varepsilon) + 1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

回顾 sn ε、cn ε 和 dn ε 的麦克劳林级数，分别为：

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}\ \varepsilon &= \varepsilon - (1+k^2)\frac{\varepsilon^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\frac{\varepsilon^5}{5!} + \cdots, \\ \mathrm{cn}\ \varepsilon &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + (1+k^4)\frac{\varepsilon^4}{4!} + \cdots, \\ \mathrm{dn}\ \varepsilon &= 1 - k^2\frac{\varepsilon^2}{2!} + k^2(4+k^2)\frac{\varepsilon^4}{4!} + \cdots. \end{aligned} \tag{3.38}$$

将上述级数代入 (3.37)，然后令 $\varepsilon \to 0$，即可得到以下微分方程：

$$[w'(t,0)]^2 = (k^2 w(t,0)^2 - 1)(w(t,0)^2 - 1), \tag{3.39}$$

即方程 (3.25)。特别地，对于方程 (3.31)，我们看到这一过程得到 $2\frac{\alpha^4 + 2\kappa_1^2\alpha^2 + \kappa_2^2}{\alpha^4 - 2\kappa_1^2\alpha^2 + \kappa_2^2} \to -1$，其中 $\varepsilon \to 0$。回想起 $\alpha^4 = \kappa_2^2$，这意味着 $\kappa_2 \to \pm\frac{\kappa_1}{3}$，其中 $\varepsilon \to 0$。综合以上结果，我们得出结论：(1.14) 的连续极限为微分方程 (1.4)。

现在我们考虑五个方程 (1.16)–(1.19) 和 (1.21)。我们以方程 (1.16) 为例，说明该方程可以变换为对称形式，该形式属于 QRT 族，并且其连续极限为 (3.25)。容易看出，方程 (1.16) 的解也满足以下两个方程：

$$\begin{aligned} \overline{f}^2 + \eta^2 &= \eta^2 f^2, \\ \overline{f}^2 - 1 &= \eta^2(f^2 + \eta^2). \end{aligned} \tag{3.40}$$

由于 $f(z) \pm i\eta = 0$ 的所有根均为偶数重数，我们得知 $\frac{f+i\eta}{f-i\eta} = h^2$，其中 h 是某个亚纯函数。因此 $f = i\eta\frac{h^2+1}{h^2-1}$。记 $H = \frac{h^2+1}{2h}$。将 (3.40) 中第一个方程的两边分别除以第二个方程的两边，得到

$$\frac{\overline{f}^2+\eta^2}{\overline{f}^2-1} = \frac{f^2}{f^2+\eta^2} = \left(\frac{h^2+1}{2h}\right)^2 = H^2, \tag{3.41}$$

即,

$$\overline{f}^2H^2 - (\overline{f}^2+H^2) - \eta^2 = 0, \tag{3.42}$$

这是一个关于 $\overline{f}$ 和 H 的双二次方程。我们不直接考虑方程 (3.42)，而是可以先通过常数 κ_1 同时对 f 和 H 进行缩放变换，得到方程 $\overline{f}^2H^2 - \kappa_1^2(\overline{f}^2+H^2) - \eta^2\kappa_1^4 = 0$，其中 κ_1 是一个常数。然后进行 Möbius 变换:

$$\overline{f} \to \alpha\frac{\overline{f}-\beta}{\overline{f}+\beta}, \quad H \to \alpha\frac{H-\beta}{H+\beta}, \tag{3.43}$$

取适当的常数 α 和 β，得到对称 QRT 映射的标准形式:

$$\overline{f}^2H^2 + A(\overline{f}^2+H^2) + 2B\overline{f}H + 1 = 0, \tag{3.44}$$

其中 A 和 B 都是依赖于 α、β 和 κ_1 的非零常数。求解 (3.30) 的过程表明，方程 (3.44) 可由椭圆函数以及 $\overline{f} = H(\overline{\varphi})$ 参数化，其中 φ 为整函数。事实上，如果按照 (3.32) 定义参数 k 和 ε，并将方程 (3.44) 视为关于 $\overline{f}$ 且相对于 H 的二次方程，那么利用变换 $H = k^{1/2}\mathrm{sn}\ \varphi$ 和 $\overline{f} = k^{1/2}\mathrm{sn}\ \overline{\varphi}$，其中 sn φ 表示自变量为 φ、模数为 k 的 Jacobi 椭圆 sn 函数，我们有

$$\mathrm{sn}\ \overline{\varphi} = \frac{\mathrm{cn}\ \varepsilon\ \mathrm{dn}\ \varepsilon\ \mathrm{sn}\ \varphi \pm \mathrm{sn}\ \varepsilon\ \mathrm{cn}\ \varphi\ \mathrm{dn}\ \varphi}{1-k^2\mathrm{sn}^2\ \varepsilon\ \mathrm{sn}^2\ \varphi}, \tag{3.45}$$

其解为 $\varphi = \varepsilon\phi + C$，使得 $\varphi = \varphi(z)$ 是满足$\varphi(z+1) = \varphi(z) + \varepsilon$的整函数，其中 C 是一个自由参数。由此可得，$\phi = \phi(z)$ 是满足 $\phi(z+1) = \phi(z) + 1$的整函数。因此 $\phi(z) = \pi(z) + z$，其中 $\pi(z)$ 是任意的、周期为 1 的非恒定周期函数。不妨设 $\pi(z)$ 有一个零点，记为$\pi(z_0) = 0$。那么，对于所有整数 $m \geq 0$，$z_m = z_0 + m$ 都是 $\pi(z)$ 的零点。由此可知，无穷数列 $\{z_m\}$ 在 $m \to \infty$ 时满足 $z_m \to \infty$，且对所有 m，$\phi_m = \phi(z_m) = z_m$。因此，若令

$$t = \varepsilon_m z_m, \quad H = k^{1/2}w(t,\varepsilon_m), \quad \overline{f} = k^{1/2}w(t+\varepsilon_m,\varepsilon_m), \tag{3.46}$$

那么，由 (3.44) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{[w(t+\varepsilon_m,\varepsilon_m)-w(t,\varepsilon_m)]^2}{\mathrm{sn}^2\ \varepsilon_m}\\ &= k^2w(t+\varepsilon_m,\varepsilon_m)^2w(t,\varepsilon_m)^2 + \left(\frac{2\mathrm{cn}\ \varepsilon_m\ \mathrm{dn}\ \varepsilon_m - 2}{\mathrm{sn}^2\ \varepsilon_m}\right)w(t+\varepsilon_m,\varepsilon_m)w(t,\varepsilon_m) + 1.\end{aligned} \tag{3.47}$$

对于固定的 t，我们选择 $\varepsilon_m = \frac{t}{z_m}$。在 (3.38) 中分别使用 sn ε_m、cn ε_m 和 dn ε_m 的麦克劳林级数，然后令 $\varepsilon_m \to 0$，便可恰好得到 (3.39) 中的微分方程。对于四个方程 (1.17)、(1.18)、(1.19) 和 (1.21)，采用上述相同的方法，可以得到具有如下形式的方程 (3.42)，其中有一个

亚纯函数 H，然后在取连续极限后也可得到 (3.39) 中的微分方程。这里省略这些细节。

4. Concluding remarks

本文重新研究了满足 $\deg_f(R(z,f)) = n$ 的 Malmquist 型差分方程（1.8）。在第 2 节中，我们首先完成了满足 $\deg_f(R(z,f)) = n$ 的方程（1.8）的分类，指出了我们先前工作中遗漏的一个新方程（1.21）。实际上，我们利用近期关于方程（1.8）的若干观察，在 [30] 中推导出了十一个方程（1.11）–（1.21）。在第 3 节中，我们研究了 $n = 2$ 情形下 Malmquist 型微分方程与差分方程之间的关系。从（1.8）中筛选出的七个方程（1.9）–（1.15）具有有限阶亚纯解；从 Ablowitz、Halburd 和 Herbst [1] 提出的 Painlev´e 性质的差分类比角度来看，它们似乎是可积的。我们指出，方程（1.9）–（1.14）中的每一个都有一个自然的连续极限，分别趋于方程（1.1）、（1.3）或（1.4）。从方程（1.14）取连续极限到方程（1.4）的过程，同样适用于在 $n = 2$ 情形下从（1.8）中筛选出的另外一些方程，即五个方程（1.16）–（1.19）和（1.21）。这些方程只有无穷阶超越亚纯解。然而，它们也可以关于 $\overline{f}$ 映射到对称 QRT 映射，并映射到依赖于 f 的亚纯函数 H，从而 $\overline{f}$ 和 H 可写成形式 $\overline{f} = H(\varphi + \varepsilon)$ 和 $H = H(\varphi)$，其中自变量 φ 是 z 的整函数。事实上，通过考察 [30] 中主要定理的证明以及 [30]，最后一节中的讨论，我们看到，在 [30] 的自治情形下，从（1.8）中筛选出的满足 $n = 2$ 的大多数方程都可以写成如下形式

$$\overline{f}^2 + R_1^2 = 1,$$

或具有以下形式

$$\overline{f}^2 R_2^2 - (\overline{f}^2 + R_2) + \kappa^2 = 0,$$

其中 R_1 和 R_2 是关于 f 的有理函数，或是关于某个亚纯函数 g 的有理函数，满足 $f = g^2 - 1$ 或 $f = a\frac{g^2-b}{g^2-c}$，其中某些常数 a、b、c 满足 $abc \neq 0$，因此它们属于式 (3.17)–(3.22) 所定义的 QRT 族。

回顾 [22]，式 (3.17)–(3.22) 所定义的 QRT 族具有一个关于 x_n 和 y_n 的双二次不变量：

$$\begin{aligned}(\alpha_0 + K\alpha_1)x_n^2y_n^2 + (\beta_0 + K\beta_1)x_n^2y_n + (\gamma_0 + K\gamma_1)x_n^2 + (\delta_0 + K\delta_1)x_ny_n^2 \\ + (\varepsilon_0 + K\varepsilon_1)x_ny_n + (\zeta_0 + K\zeta_1)x_n + (\kappa_0 + K\kappa_1)y_n^2 \\ + (\lambda_0 + K\lambda_1)y_n + (\mu_0 + K\mu_1) = 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 K 起积分常数的作用。在对称情形下，式 (4.1) 中的不变量就变为式 (3.23)。在一般情形下，[22] 证明，通过分别采用适当常数 α_i 和 β_j 进行两次 M¨obius 变换 $x_n \to \frac{\alpha_1 x_n + \alpha_2}{\alpha_3 x_n + \alpha_4}$ 和 $y_n \to \frac{\beta_1 y_n + \beta_2}{\beta_3 y_n + \beta_4}$，也可以将式 (4.1) 映射为对称形式：

$$x_n^2y_n^2 + A(x_n^2 + y_n^2) + 2Bx_ny_n + 1 = 0, \tag{4.2}$$

其中 A 和 B 是常数。第 3 节中求解 (3.44) 的过程表明，(4.2) 中的 x_n 和 y_n 可由椭圆函数及带有某个整函数的 $x_n = y_n(\overline{\varphi})$ 参数化。结合这一事实，以及第 3 节中将方程 (3.30) 和 (3.44) 取连续极限得到微分方程 (1.4) 的过程，我们得出结论：在一般情形下，由 (3.17) 和 (3.18) 定义的 QRT 族总是可以连续极限到一阶微分方程 (1.4)。

References

[1] Ablowitz M.J., Halburd R., Herbst B.：关于将 Painlev´e 性质推广到差分方程。Nonlinearity 13(3), 889–905 (2000)[2] Bank S.B., Kaufman R.P：关于微分方程 $(y')^m = R(z, y)$ 的亚纯解的增长。Acta Math. 144 (3-4), 223–248 (1980)[3] Baxter R.J.：统计力学中的精确可解模型。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 伦敦 (1982)[4] Halburd R.G., Korhonen R.J.：有限阶亚纯解与离散 Painlev´e 方程。Proc. Lond. Math. Soc. (3) 94(2), 443–474 (2007)[5] Halburd R.G., Korhonen R.J.：差分方程的亚纯解、可积性与离散 Painlev´e 方程。J. Phys. A 40(6), R1–R38 (2007)[6] Halburd R.G., Korhonen R.J., Tohge K.：具有平移不变超平面原像的全纯曲线。Trans. Amer. Math. Soc. 366(8), 4267–4298 (2014)[7] Hayman W.K.：亚纯函数。Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 牛津 (1964)[8] Hirota, R.：非线性偏差分方程。I. Korteweg-de Vries方程的差分类比。J. Phys. Soc. Japan 43(4), 1424–1433 (1977)[9] Hirota, R.：非线性偏差分方程。II. 离散时间Toda方程。J. Phys. Soc. Japan 43(6), 2074–2078 (1977)[10] Hirota, R.：非线性偏差分方程。III. 离散sine-Gordon方程。J. Phys. Soc. Japan 43(6), 2079–2086 (1977)[11] Hietarinta, J.：Hirota双线性方法简介。（英文摘要）《非线性系统的可积性》（本地治里，1996），95–103，Lecture Notes in Phys., 495, Springer, 柏林，1997。[12] Ishizaki K.：差分Riccati方程的亚纯解。Complex Var. Elliptic Equ. 62(1), 10–122 (2017)[13] Ishizaki K. and Korhonen R.：代数差分方程的亚纯解。Constr. Approx. 48, 371–384 (2018)[14] Korhonen R., Tohge K., Zhang Y.Y., Zheng J. H.：关于差分商的一个引理。Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math., 45(1) 479–491 (2020)[15] Korhonen R., Zhang Y.Y.：一阶差分方程亚纯解的存在性。Constr. Approx. 51(3), 465–504 (2020)[16] Laine I.：关于某些一阶微分方程解的行为。Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, (497) 26 (1971)[17] Laine I.：Nevanlinna 理论与复微分方程。De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 15, Walter de Gruyter & Co., 柏林 (1993)[18] Malmquist J.：由一阶´微分 ´方程´定义的有限分支函数。Acta Math. 36(1), 297–343 (1913)[19] Nakamura Y., Yanagihara N.：某些多项式差分方程的亚纯解。《单复变函数论》，Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 212, Longman Sci. Tech., Harlow, 178–198 (1989)[20] Quispel G.R.W., Roberts J.A.G., Thompson C.J.：可积映射与孤子方程。Phys. Lett. A 126(7), 419–421 (1988)[21] Quispel G.R.W., Roberts J.A.G., Thompson C.J.：可积映射与孤子方程。II. Phys. D 34 (1-2), 183–192 (1989)[22] Ramani A., Carstea A.S., Grammaticos B., Ohta Y.：离散 Painlev´e 方程的自治极限。Phys. A 305(3-4), 437–444 (2002)[23] Shimomura S.：多项式差分方程的整函数解。J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28(2), 253–266 (1981)[24] Steinmetz N.：复数域中常微分方程唯一解的性质。Dissertation, 卡尔斯鲁厄大学，卡尔斯鲁厄 (1978)[25] Yamanoi K.：小函数的第二主定理及相关问题。Acta Math. 192(2), 225–294 (2004)[26] Yamanoi K.：以有理函数为目标的亏量关系。Forum Math. 17(2), 169–189 (2005)[27] Yanagihara N.：某些差分方程的亚纯解。Funkcial. Ekvac. 23(3), 309–326 (1980)

[28] Yanagihara N.：具有有限阶亚纯解的多项式差分方程。单复变函数解析理论，Pitman Res. Notes Math. Ser.，第 212 卷，Longman Sci. Tech.，Harlow，第 368–392 页（1989）[29] Yosida K.：Malmquist 定理的推广。J. Math. 9，253–256（1933）[30] Zhang Y.Y，Korhonen R.：差分方程的 Malmquist–Steinmetz 定理。Constr. Approx.（2023年），https://doi.org/10.1007/s00365-023-09648-y[31] Zheng J.H.，Korhonen R.：从 Nevanlinna 理论的角度研究差分。Trans. Amer. Math. Soc. 373(6)，4285–4318（2020）

School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, No. 30 Xueyuan Road, Haidian, Beijing, 100083, P.R. China电子邮箱：zhangyueyang@ustb.edu.cn

Department of Physics and Mathematics, University of Eastern Finland, P.O. Box 111, FI-80101 Joensuu, Finland,
andSchool of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, No. 30 Xueyuan Road, Haidian, Beijing, 100083, P.R. China

电子邮箱：risto.korhonen@uef.fi