arXiv:2302.05215v1 [math.AP] 10 Feb 2023

透射问题的耳语廊模

Spyridon Filippas *

摘要

我们构造了一族特定的特征函数，它们对应于系数在界面两侧发生跳变的拉普拉斯算子。这些特征函数会指数级地集中在任意靠近界面的位置，因此可视为耳语廊模。证明基于一个恰当的Agmon估计。由此我们推论，作者在[Fil22] 中证明的奇异介质中传播的波的定量唯一延拓结果是最优的。

关键词

Agmon估计、特征函数、透射问题、波传播

2010 数学主题分类：35B60, 47F05, 93B07, 35P20。

1 引言

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有光滑边界 ∂M 的紧连通子集，且 S 是一个光滑超曲面，使得我们有如下划分：Int(M)\S =Ω_∪Ω+，其中 Ω_∩Ω$_+$ = ∅。我们考虑作用于 M 上的算子 $-\Delta_c := -$div($c\nabla\cdot$)，其中 c 严格为正且分段光滑，但在界面 S处发生跳跃。在本文中，对于 Ω_、Ω+的特定选择， S 并构造 c 的特征函数 $-\Delta_c$，这些特征函数在界面 S附近呈指数集中。这些最大消失特征函数有时被称为耳语廊模（WGM）。我们将证明（更精确的表述见定理 2.5 或定理 3.3）：

定理 1.1。 存在集合 $\mathcal{M}$、 S 以及系数 c，使得存在序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$和 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\lambda_n \to +\infty$ 和 u_n 满足透射条件

$$(u_{n|\Omega_-})_{|S} = (u_{n|\Omega_+})_{|S} \text{ and } c_+\partial_\nu(u_{n|\Omega_-})_{|S} = c_-\partial_\nu(u_{n|\Omega_+})_{|S}, \tag{1.1}$$

使得对于所有 $\omega \subset \mathcal{M}$ 满足 $\operatorname{dist}(\overline{\omega}, S) > 0$，都存在 C、 $d > 0$，使得：

$$\|u_n\|_{L^2(\omega)} \leq Ce^{-d\sqrt{\lambda_n}}, \quad -\Delta_c u_n = \lambda_n u_n, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathcal{M})} = 1. \tag{1.2}$$

*奥赛数学实验室，巴黎-萨克雷大学，307号楼，91405 奥赛 Cedex，法国，电子邮件：spyridon.filippas@universite-paris-saclay.fr。

定理1.1 S的证明中考虑的c数据M具有旋转对称性，$\mathcal{M}$ 可能的取值包括圆盘或圆环。该证明基于*Agmon*估计（见第2.2节）。其主要优点是相当简单，只需稍作修改即可处理不同的几何形状$\mathcal{M}$ S。我们的基本玩具模型是$\mathcal{M}$ 为圆环的情形（见下文图1 ），但在第3 节，我们将说明如何处理更一般的旋转曲面。

我们的主要动机来自控制理论中的隧穿估计（例如参见 [LL21a，第 1 节。2]）。构造此类特征函数可以使某些可观测性估计达到饱和，从而证明这些估计是最优的。在旋转曲面上展示此类例子的想法可追溯到 [Leb96] 和 [All98]。

研究回音壁模的另一个动机来自光电子学。事实上，$\mathcal{M}$ 为圆盘且 S 为其内部一个较小的圆时，可以将其视为光纤正交截面的简化模型。具体而言，此时 Ω_- 可以看作光纤的纤芯，周围则是包层 Ω_+。证明定理 1.1 时，我们将假设 $c_- < c_+$，这意味着 Ω_- 中的折射率高于 Ω_+，因此光在纤芯与包层的交界处发生全内反射，从而被限制在纤芯中。另请参见定理 1.3之后的评注。关于其在光电子学中的应用，已有研究从数值和理论角度探讨了回音壁模，见 [BDDM20、BDM21]。这些文献研究的是无界定义域中的 $-\Delta_c$ 特征值问题，因此该问题成为一个共振问题。

在近期的工作 [BBAD22] 中，作者根据系数 $-\Delta_c$ 的正则性，得到了 c的特征函数的集中与非集中性质。系数 c 的不连续对应于 分层介质的情形。不过，由于证明并非基于 Agmon 估计，而是基于解的格林核的显式形式，因此所采用的方法和几何背景与我们的不同。

1.1 跃变算子唯一延拓结果的最优性

我们考虑引言开头所描述的几何背景。

以下关于 $-\Delta_c$ 的特征函数的谱不等式由 [LR10，定理 12]证明（并在 [LRL13]中推广）：

定理 1.2 （[LR10]中的定理 1.2）。 设 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是算子 $-\Delta_c$ 满足狄利克雷边界条件和透射条件的一组特征函数的希尔伯特基（1.1）。记 λ_j 为相应的特征值，并按递增顺序排列。则对于任意$\omega \subset \mathrm{Int}(\mathcal{M})$，存在 $C > 0$ 使得对任意 $a_j \in \mathbb{C}$，均有：

$$\sum_{\lambda_j \le \lambda} |a_j|^2 \le C e^{C\sqrt{\lambda}} \int_\omega \left| \sum_{\lambda_j \le \lambda} a_j u_j(x) \right|^2 dx.$$

定理中的特征函数 1.1 证明了上述定理 1.2中的谱估计一般来说是精确的，即使对于单个特征函数也是如此。

算子 $-\Delta_c$ 的不连续性可用于描述在非均匀介质中传播的波。系数 c 可解释为传播速度的平方。我们考虑以下描述此类波演化的系统，

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_c)w = 0 & \text{in } (0,T)\times\Omega_-\cup\Omega_+ \\ w_{|S_-} = w_{|S_+} & \text{in } (0,T)\times S \\ (c\partial_\nu w)_{|S_-} = (c\partial_\nu w)_{|S_+} & \text{in } (0,T)\times S \\ w = 0 & \text{in } (0,T)\times\partial\mathcal{M} \\ (w,\partial_t w)_{|t=0} = (w_0,w_1) & \text{in } \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，我们用 ∂_ν 表示指向 Ω 内部的 S 外向单位法向量，并用 $w_{|S_\pm}$ 表示 $w_{|\Omega_\pm}$ 在 S上的迹。在唯一延拓问题中，人们试图根据部分观测恢复整个波。在 [Fil22] 中证明了以下定量唯一延拓结果。

定理 *1.3* （[*Fil22*]中的定理 *1.3*）。对于任意非空子集 $\omega\subset M$，存在 $C,T>0$，使得对于所有满足 $(w_0,w_1)\neq(0,0)$ 且 w 为 （*1.3*） 的解的 $(w_0,w_1)\in H_0^1(M)\times L^2(M)$，均有：

$$\|(w_0,w_1)\|_{H^1\times L^2}\leq Ce^{C\Lambda}\|w\|_{L^2((0,T)\times\omega)},$$

其中 $\Lambda=\frac{\|(w_0,\ w_1)\|_{H^1\times L^2}}{\|(w_0,\ w_1)\|_{L^2\times H^{-1}}}$。

上述定理 1.3 推广了 [LL19] 中的定理 1.1，后者考虑的是光滑系数。定理 1.3 的一个重要特点是，它对系数 c 的跳跃符号没有任何假设。为便于说明，设 $c_-<c_+$ 是两个常数。我们将 c_- 和 c_+ 解释为波在具有不同折射率 n_- 和 n_+ 的两个各向同性介质 Ω_- 和 Ω_+ 中传播时的传播速度的平方（回想一下，$n_\pm=1/\sqrt{c_\pm}$）。设想一列波从 Ω_- 内的某个区域开始传播。此时有 $\sqrt{\frac{c_-}{c_+}}=\frac{n_+}{n_-}$，因此假设 $c_-<c_+$ 可转化为 $n_->n_+$。那么，斯涅尔-笛卡尔定律指出，当波从折射率较高的介质传播到折射率较低的介质时，会存在一个临界角；超过该角度便会发生全内反射，也就是说完全不会发生折射。在几何光学层面上，也就是说，在高频区间内，这样的波会被束缚在 Ω_- 内。因此，根据几何光学定律，至少在高频下，预期不会有信息从 Ω_- 传播到 Ω_+。然而，定理 1.3 指出，始终可以从 Ω_+ 观测到一部分波，其强度至少以波的典型频率 Λ 的指数级小量为下界。

在本文中，我们证明，确实，在 $\frac{c_-}{c_+}$ 相对于几何背景足够小时，可以找到在高频极限下呈指数局域、且任意接近界面 S的波。因此，我们推得定理 1.3中的估计一般而言是最优的。对于方程（1.3）的一个解 w，我们定义 $\Lambda(w):=\frac{\|(w(0)\ \partial_t w(0))\|_{H^1\times L^2}}{\|(w(0)\ \partial_t w(0))\|_{L^2\times H^{-1}}}$。由定理1.1可得以下推论：

定理 1.4 (回音廊波)。在定理 *1.1* 的几何设置下，存在解$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (1.3)，且有 $\|w_n(0)\|_{L^2}=1$，并且对于所有 $\omega\subset\mathcal{M}$ 满足$\mathrm{dist}(\overline{\omega},S)>0$时，都存在 C，$d>0$ 使得：

$$\|w_n\|_{L^2((0,T)\times\omega)}\leq Ce^{-d\Lambda(w_n)}. \tag{1.4}$$

定理 1.4 是定理 1.1的直接推论。事实上，取 u_n 如定理 1.1中所示，则

$$w_n(t,x):=\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)u_n(x).$$

满足（1.3），其中（w_n，$\partial_t w_n$）$|_{t=0} = $（$u_n$，0），$\Lambda$（$w_n$）$= \sqrt{\lambda_n} + 1$且（1.2）蕴含（1.4），只需改变常数 C。

本文结构安排如下。在第1.2 节中，我们讨论算子$-\Delta_c$的定义域。随后在第2 节中，我们基于一维半经典薛定谔算子的 Agmon估计，详细证明1.1 在圆环情形下的定理。最后，在第3 节中，我们说明如何将这些论证用于更一般的旋转曲面。

1.2 算子的定义域与自伴性

我们先回顾算子 $-\Delta_c$、其定义域以及一些一般谱性质的基本事实。给定一个满足 $u_\pm \in C^\infty$(M) 的函数 $u = \mathbb{1}_{\Omega_-} u_- + \mathbb{1}_{\Omega_+} u_+$，在分布意义下有

$$\nabla u = \mathbb{1}_{\Omega_-} \nabla u_- + \mathbb{1}_{\Omega_+} \nabla u_+ + (u_- - u_+)\delta_S \nu,$$

其中 δ_S 是 S 上的曲面测度，ν 是指向 Ω+ 内部的单位法向量场。于是我们要求

$$u_{-|S} = u_{+|S}, \tag{1.5}$$

奇异项便被消去。类似地，计算

$$\operatorname{div}(c(x)\nabla u),$$

我们看到条件

$$c_+ \partial_\nu u_{+|S} = c_- \partial_\nu u_{-|S} \tag{1.6}$$

结合（1.5）可得等式

$$\operatorname{div}(c(x)\nabla u) = \mathbb{1}_{\Omega_-} \operatorname{div}(c_- \nabla u_-) + \mathbb{1}_{\Omega_+} \operatorname{div}(c_+ \nabla u_+).$$

于是我们将 W 定义为由如下形式的函数构成的空间

$$u = \mathbb{1}_{\Omega_-} u_- + \mathbb{1}_{\Omega_+} u_+,$$

满足 $u_\pm \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ 且满足（1.5）和（1.6）。这些条件称为 透射条件，对于 $u \in \mathcal{W}$，有 $-\Delta_c u \in L^2$。以 $\mathcal{W}$ 为初始定义域时，$-\Delta_c$ 是对称且有下界的。事实上，记 $\cdot,\cdot$为 L^2 中的内积，则对 $u \in \mathcal{W}$

$$(-\Delta_c u, u) = -\int_{\Omega_-} \operatorname{div}(c_- \nabla u_-)\overline{u} - \int_{\Omega_+} \operatorname{div}(c_+ \nabla u_+)\overline{u} = \int_{\Omega_-} c_- |\nabla u_-|^2 dx + \int_{\Omega_+} c_+ |\nabla u_+|^2 dx,$$

这里用到了透射条件和分部积分。

于是可以考虑 [Lew18，第 3.2 章。4]）中的 Friedrichs延拓$-\Delta_c$，它是 $-\Delta_c$ 的一个自伴延拓，其定义域为：

$$\mathcal{A} = \{u \in H_0^1(\mathcal{M}) | -\Delta_c u \in L^2(\mathcal{M})\}.$$

利用椭圆正则性论证（例如参见 [LRLR13，附录 C。2]），可以看出实际上

$$\mathcal{A} = \{u \in H_0^1(\mathcal{M}) | u_{|\Omega_-} \in H^2(\Omega_-),\ u_{|\Omega_+} \in H^2(\Omega_+),\ c_+ \partial_\nu (u_{|\Omega_-})_{|S} = c_- \partial_\nu (u_{|\Omega_+})_{|S}\}. \tag{1.7}$$

在后文中，我们将用 $u_\pm$ 表示 A 在 Ω− 和 Ω+ 上的$u_{|\Omega_\pm}$ 限制 $u \in$ 。

定义域为 A 的算子 $-\Delta_c$ 是正的、自伴的，并且具有紧预解式。由此可知，其谱仅由正特征值 $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ 构成，且这些特征值具有有限重数 $\lambda_j \to +\infty$。

致谢 作者谨此感谢 C. Laurent 和 M. Léautaud 的讨论、鼓励与耐心指导。

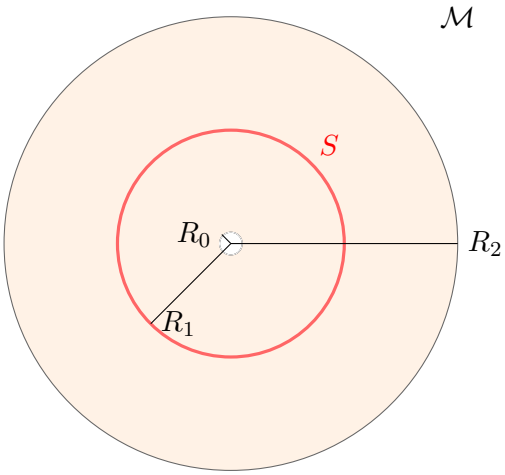

图1：圆环 M，其界面为 S，系数 c 在此处发生跳变。

2 圆环的情形

我们用 B_R 表示 $\mathbb{R}^2$ 中以 0 为中心、半径为 R 的开球，并在以下几何背景下研究（A $-\Delta_c$）的特征函数问题：令 $0 < R_0 < R_1 < R_2$，并设 M $= \overline{B}_{R_2}\backslash B_{R_0} \subset \mathbb{R}^2$，$\Omega_- = B_{R_1}\backslash\overline{B}_{R_0}$，$\Omega_+ = B_{R_2}\backslash\overline{B}_{R_1}$，$S = \overline{B}_{R_1}\backslash B_{R_1}$。为简单起见，我们假设 c 为分片常数，即 $c = \mathbb{1}_{\Omega_-}c_- + \mathbb{1}_{\Omega_+}c_+$，其中 $0 < c_- < c_+$ 将在稍后选定。

2.1 化为半经典薛定谔算子

在极坐标下，算子 $-\Delta_c$ 具有如下形式

$$-\Delta_c = -\frac{1}{r}\partial_r(cr\partial_r) + \frac{c}{r^2}\partial_\theta^2.$$

对于函数 $u \in \mathcal{A}$ 我们有（见第 1.2节）：

$$-\Delta_c u(r,\theta) = -\sum_{\pm}\mathbb{1}_{\Omega_\pm}\left(c_\pm\partial_r^2 u_\pm + \frac{c_\pm}{r}\partial_r u_\pm + \frac{c_\pm}{r^2}\partial_\theta^2 u_\pm\right), \quad u \in \mathcal{A},$$

回顾一下，我们记 $u = \mathbb{1}_{\Omega_-}u_- + \mathbb{1}_{\Omega_+}u_+$。我们设特征值问题 $-\Delta_c u = \lambda u$ 的解具有如下形式：$u(r,\theta) = e^{in\theta}f(r)$，由此得到

$$\sum_{\pm}\mathbb{1}_{\Omega_\pm}\left(-\frac{c_\pm}{n^2}\left(\partial_r^2 f_\pm(r) + \frac{1}{r}\partial_r f_\pm(r)\right) + \left(\frac{c_\pm}{r^2} - \frac{\lambda}{n^2}\right)f_\pm(r)\right) = 0.$$

我们考虑较大的角动量，$n \to +\infty$ 并将 $h := 1/n$ 视为半经典参数。此时方程（2.1）可写为 $P_h f = E_h f$，其中

$$P_h := -h^2\frac{1}{r}\partial_r(cr\partial_r) + V_c(r), \quad V_c(r) := \frac{c}{r^2}, \quad E_h = h^2\lambda, \tag{2.1}$$

且可将 $V_c(r)$ 视为在 $r = R_1$ 处具有跳跃间断的有效势。于是，我们将 V_c 连续延拓至 $[R_0, R_1]$:

$$\overline{V}_c(r) = \begin{cases} V_c(r), & r \in [R_0, R_1) \\ \frac{c_-}{R_1^2}, & r = R_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

并记 $E_0 := \frac{c_-}{R_1^2}$ 为势 V_c 的下确界。

现在我们研究一维半经典薛定谔算子 P_h 的特征值问题。我们定义空间

$$\mathcal{A}_r = \{f \in H_0^1((R_0,R_2)) \,|\, f_{|(R_0,R_1)} \in H^2((R_0,R_1)),\ f_{|(R_1,R_2)} \in H^2((R_1,R_2)),\\ c_+\partial_r(f_{|(R_0,R_1)})(R_1) = c_-\partial_r(f_{|(R_1,R_2)})(R_1)\}. \tag{2.3}$$

我们还记 $f_- := f_{|(R_0,R_1)}$ 以及 $f_+ := f_{|(R_1,R_2)}$。空间 A_r 满足以下两个性质：

$$f \in \mathcal{A}_r \Leftrightarrow f(r)e^{in\theta} \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

并且 P_h 是自伴算子，其定义域为$\mathcal{A}_r$，理由与第1.2节相同。

在下述命题中，我们证明 P_h 在某些能级附近存在特征函数。证明中，我们先构造一个粗略的拟模，然后利用算子的自伴性（例如参见 [LL21a，引理3。6], [Zwo12，第12章。5]）。

命题2.1（一维算子特征函数的存在性）。存在 h_0，使得对所有 $E \in [E_0, V_c(R_0))$，都存在 $C > 0$，使得对所有 $h \in (0,\ h_0]$，存在 E_h 和 $\psi_h \in \mathcal{A}_r$，满足

$$P_h\psi_h = E_h\psi_h, \quad |E_h - E| \le Ch^{2/3}.$$

证明。定义域为 A_r 的算子 P_h 在 $L^2((R_0,R_2)\ rdr)$ 中是自伴的。注意，由于 $L^2((R_0,R_2)\ rdr)$ 与 $L^2((R_0,R_2)\ dr)$ 中的范数等价，我们可以不加区别地使用其中任一范数进行估计。

我们可以将 $E = \overline{V}_c(\rho_E)$ 写成某个 $\rho_E \in (R_0,R_1]$，其中我们回顾一下，$\overline{V}_c$ 在 (2.2) 中定义。取 $\chi \in C_0^\infty((-1,0))$，使得 $\chi = 1$ 在 $-1/2$ 的某个邻域内，并定义$f_h(r) = h^{-1/3}\chi\left(h^{-2/3}(r-\rho_E)\right)$。于是，对于 $h \le h_0$，当 h_0 足够小时，有$f_h(r) \in C_0^\infty((R_0,R_1))$。特别地，这意味着 $f_h \in \mathsf{A}_r$。现在我们进行估计：

$$\begin{aligned}
&\left\|-ch^2\left(\partial_r^2 f_h(r) + \frac{1}{r}\partial_r f_h(r)\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&= \int ch^4\left(h^{-5/3}\chi''\left(h^{-2/3}(r-\rho_E)\right) + \frac{1}{r}h^{-1}\chi'\left(h^{-2/3}(r-\rho_E)\right)\right)^2 dr \\
&\le Ch^{4/3}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

为估计下一项，我们利用 $\mathrm{supp}(f_h) \subset (R_0,\ R_1)$。现在我们利用这样一个事实：$V_c$ 关于 $[R_0,R_1]$ 是一致利普希茨连续的，这意味着在 f_h 的支集中，有

$$|V_c(r) - E| = |\overline{V}_c(r) - E| \le C|r - \rho_E|,$$

从而

$$\|(V_c(r)-E)\,f_h(r)\|_{L^2}^2 \le C\int (r-\rho_E)^2 h^{-2/3}\chi^2\left(h^{-2/3}(r-\rho_E)\right)dr \le Ch^{4/3}. \tag{2.5}$$

结合（2.4）和（2.5）可得

$$\|(P_h - E)\,f_h\|_{L^2} \le Ch^{2/3}. \tag{2.6}$$

最后注意到

$$\|f_h\|_{L^2}^2 = \int h^{-2/3}\chi^2\left(h^{-2/3}(r-\rho_E)\right)dr = c_0,$$

我们可以将 (2.6) 写为 $\|(P_h - E)\ f_h\|_{L^2} \le Ch^{2/3}\|f_h\|_{L^2}$。若此时 $E \notin \mathrm{Sp}(P_h)$，则可以写成

$$\begin{aligned}\|(P_h - E)\, f_h\|_{L^2} &\le Ch^{2/3}\|f_h\|_{L^2} = Ch^{2/3}\left\|(P_h-E)^{-1}(P_h-E)\, f_h\right\| \\ &\le Ch^{2/3}\left\|(P_h-E)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\|(P_h-E)\, f_h\|_{L^2},\end{aligned}$$

由此可得

$$\left\|(P_h-E)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2} \ge C^{-1}h^{-2/3}.$$

最后，由于 P_h 是自伴的，因此有 $\|(P_h-E)^{-1}\|_{L^2\to L^2} = \frac{1}{\mathrm{dist}(\mathrm{Sp}(P_h),E)}$，因此

$$\mathrm{dist}(\mathrm{Sp}(P_h), E) \le Ch^{2/3}, \tag{2.7}$$

这在 $E \in \mathrm{Sp}(P_h)$ 的情形下显然也成立。于是，E_h，ψ_h 的存在性是由 (2.7) 以及 P_h 的谱仅由特征值构成这一事实得出的。 □

2.2 Agmon 估计

我们遵循 [Hel88，第 3] (另见 [DS99，第 6.B 章], [LL22]) 。我们首先定义适当的 Agmon 距离，它对应于到势 经典允许区域的距离，其中势为 V_c，能级为 E。经典允许区域 K_E 定义为

$$K_E = \{r \in [R_0, R_2] |\ V_c(r) \le E\}, \tag{2.8}$$

其中我们回顾 $V_c(r) = \frac{c}{r^2}$ 以及 $c = \mathbb{1}_{(R_0,R_1)}c_- + \mathbb{1}_{(R_1,R_2)}c_+$。因此，我们对系数 c 施加的条件如下（见图 2）：

$$0 < c_- < c_+, \quad \overline{V}_c(R_1) < V_c(R_2), \tag{2.9}$$

因此，定义函数 V 为 $V = V_c(r)$（$r \in [R_0, R_2]\backslash\{R_1\}$）且 $V(R_1) = E_0$，它在 $r = R_1$ 处取得最小值。我们将 $E \ge E_0$ 的适当 Agmon 距离定义为

$$d_{A,E}(r) = \inf_{y\in K_E}\left|\int_y^r \sqrt{\frac{(V_c(s)-E)_+}{c(s)}}ds\right|, \tag{2.10}$$

其中 $a_+ = \max(a,\ 0)$。

后文中，我们将重点讨论接近最小值 E_0 的能级。我们指出，假设（2.9）以及 $\overline{V}_c$ 在 $[R_0, R_1]$ 上的连续性意味着存在 $\eta_0 > 0$ 使得

$$K_{E_0+\eta} \subset [R_0, R_1], \quad \forall\, 0 < \eta < \eta_0. \tag{2.11}$$

对于 $E \in [E_0, E_0+\eta]$, $\eta \le \eta_0$，我们可以定义 $\rho_E := V_c^{-1}(E)$（它在 $[R_0, R_1]$ 中可逆），并得到 $K_E = [\rho_E, R_1]$，以及以下显式表达式：

$$\begin{aligned} d_{A,E}(r) &= \int_r^{\rho_E}\sqrt{\frac{(V_c(s)-E)}{c_-(s)}}ds, \quad \text{for } r \in [R_0, \rho_E], \\ d_{A,E}(r) &= 0, \quad \text{for } r \in [\rho_E, R_1], \\ d_{A,E}(r) &= \int_{R_1}^r \sqrt{\frac{(V_c(s)-E)}{c_+(s)}}ds, \quad \text{for } r \in [R_1, R_2]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

特别地，$d_{A,\ E}$ 是 $C-$Lipschitz 连续的，其 Lipschitz 常数为 $C=\left(\text{最大值}\{\frac{V_c(\quad s\ -E\quad)}{c_-}^{1/2}\}\right.$。

以下恒等式是Agmon估计的关键组成部分。注意，下面引理中出现的所有量都有定义。事实上，由于 $f\in \mathrm{A}r$ ，有 $f\in H^1$ ，因此左侧有定义。

引理2.2。设 ϕ 在 $[R_0,R_2]$ 上是实值*Lipschitz*连续的，且 $f\in\mathcal{A}_r$。那么有：

$$\int_{R_0}^{R_2} ch^2\left|\partial_r(e^{\phi/h}f)\right|^2 rdr-\int_{R_0}^{R_2} c|\partial_r\phi|^2e^{2\phi/h}|f|^2rdr$$
$$=-\operatorname{Re}\int_{(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)} e^{2\phi/h}ch^2\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)f\cdot\bar{f}rdr.$$

证明。 我们将$f\ =\mathbb{1}_{(R_0,R_1)}f_-+\mathbb{1}_{(R_1,R_2)}f_+$，拆分积分并分部积分。我们有：

$$\begin{aligned}-\int_{R_0}^{R_1} c_-e^{2\phi/h}\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)f_-\cdot\bar{f}_-rdr&=-\int_{R_0}^{R_1}c_-\partial_r(r\partial_rf_-)e^{2\phi/h}\cdot\bar{f}_-dr\\&=\int_{R_0}^{R_1}c_-\partial_rf_-\partial_r(e^{2\phi/h}\bar{f}_-)rdr-c_-R_1\partial_rf_-(R_1)e^{2\phi/h}\bar{f}_-(R_1),\end{aligned}\tag{2.13}$$

类似地，

$$\begin{aligned}-\int_{R_1}^{R_2} c_+e^{2\phi/h}\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)f_+\cdot\bar{f}_+rdr&=-\int_{R_1}^{R_2}c_+\partial_r(r\partial_rf_+)e^{2\phi/h}\cdot\bar{f}_+dr\\&=\int_{R_1}^{R_2}c_+\partial_rf_+\partial_r(e^{2\phi/h}\bar{f}_+)rdr+c_+R_1\partial_rf_+(R_1)e^{2\phi/h}\bar{f}_+(R_1).\end{aligned}\tag{2.14}$$

现在，根据($\mathcal{A}_r$ 中2.3)里空间的定义，我们得到

$$c_-R_1\partial_rf_-(R_1)e^{2\phi/h}\bar{f}_-(R_1)=c_+R_1\partial_rf_+(R_1)e^{2\phi/h}\bar{f}_+(R_1).$$

将(2.13)和(2.14)相加，边界项相互抵消，从而得到

$$-\int_{(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)}ce^{2\phi/h}h^2\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)f\cdot\bar{f}rdr$$
$$=\int_{R_0}^{R_2}c2h\partial_r\phi e^{2\phi/h}\bar{f}\partial_rfrdr+\int_{R_0}^{R_2}ch^2e^{2\phi/h}|\partial_rf|^2rdr,$$

取实部后便得到所需的恒等式。 □

现在可以证明以下 Agmon估计。回顾一下， η_0 由式（2.11）定义。

命题 2.3。设 $E\in[E_0,E_0+\frac{\eta_0}{2}]$ 和 $\epsilon\left(h\right)$ 满足 $\epsilon\left(h\right)\xrightarrow{h\to0}0$。那么对所有 $\delta>0$，存在 C、h_0 ，使得对所有满足以下条件的 ψ_h

$$P_h\psi_h=(E+\epsilon(h))\psi_h,\quad \|\psi_h\|_{L^2}=1,$$

对于 $h\le h_0$，有：

$$\left\|h\partial_r\left(e^{\frac{d_{A,E}}{h}}\psi_h\right)\right\|_{L^2((R_0,R_2))}+\left\|e^{\frac{d_{A,E}}{h}}\psi_h\right\|_{L^2((R_0,R_2))}\le Ce^{\delta/h}.$$

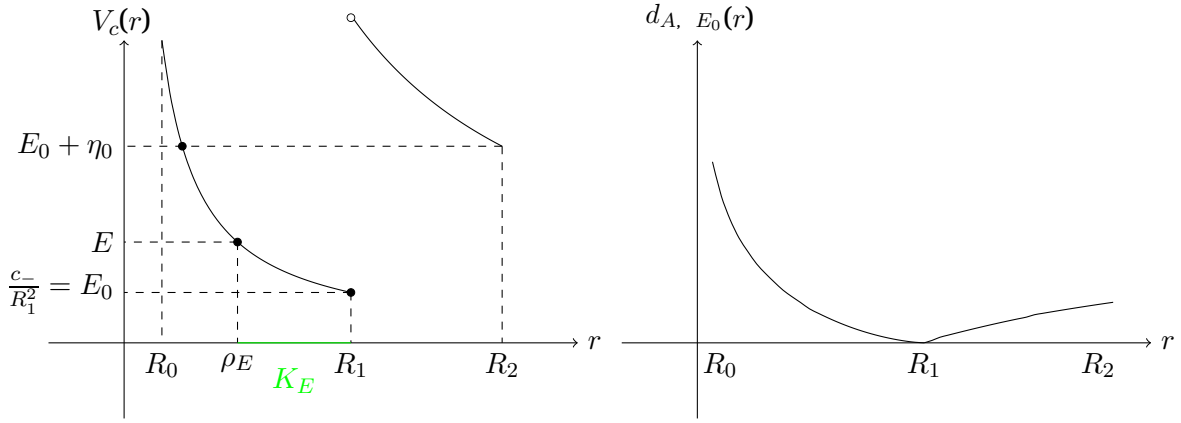

图2：左：势 V_c 及其关注点。对于 $E<E_0+\eta_0=\frac{c_+}{R_2^2}$，势在经典允许区域 K_E 内连续且单射，该区域以绿色标出。右：与最小能级 E_0相关的 Agmon 距离图。注意，由于系数 c的跳变，在 $r=R_1$ 处出现了 C^1 奇点。

证明。 回忆一下 $d_{A,\ E}$是 Lipschitz连续的，并考虑权函数 $\phi=(1-\delta)d_{A,\ E}$其中$0<\delta<1$。记 $E_h:=E+\epsilon(h)$。于是可以将引理 2.2 中的恒等式应用于 ψ_h，它满足 $P_h\psi_h=E_h\psi_h$，或者等价地

$$-\mathbb{1}_{(R_0,R_1)}ch^2\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)\psi_{h,-}=\mathbb{1}_{(R_0,R_1)}(E_h-V_c(r))\psi_{h,-},$$

and

$$-\mathbb{1}_{(R_1,R_2)}ch^2\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r\right)\psi_{h,+}=\mathbb{1}_{(R_1,R_2)}(E_h-V_c(r))\psi_{h,+}.$$

我们得到:

$$\int_{R_0}^{R_2}ch^2\left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2rdr-\int_{R_0}^{R_2}c|\partial_r\phi|^2e^{2\phi/h}|\psi_h|^2rdr=\int_{R_0}^{R_2}e^{2\phi/h}(E_h-V_c(r))|\psi_h|^2rdr.$$

定义 $I_\alpha^+:=\{V-E>\alpha^2\}$，$I_\alpha^-=\{V-E\le\alpha^2\}$，其中 $\alpha>0$ 足够小，待定。我们根据 $(R_0,\ R_2)=I_\alpha^+\cup I_\alpha^-$对积分进行拆分，并将上述等式写为

$$\int_{R_0}^{R_2}ch^2\left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2rdr+\int_{I_\alpha^+}e^{2\phi/h}(V_c(r)-E_h-c|\partial_r\phi|^2)|\psi_h|^2rdr$$
$$=-\int_{I_\alpha^-}e^{2\phi/h}(V_c(r)-E_h-c|\partial_r\phi|^2)|\psi_h|^2rdr.\quad(2.15)$$

为了从下方控制 I_α^+上的积分，我们注意到 Agmon 距离满足程函方程:

$$c|\partial_rd_{A,E}|^2=(V_c(r)-E)_+,\quad\text{in }\mathcal{D}'((R_0,R_2)).\quad(2.16)$$

因此，取 $h\le h_0=h_0(\alpha,\delta)$

$$\int_{I_\alpha^+}e^{2\phi/h}(V_c(r)-E_h-c|\partial_r\phi|^2)|\psi_h|^2rdr=\int_{I_\alpha^+}e^{2\phi/h}\left((V_c(r)-E)(1-(1-\delta)^2)-\epsilon(h)\right)|\psi_h|^2rdr$$
$$\ge\frac{\alpha^2\delta}{2}\int_{I_\alpha^+}e^{2\phi/h}|\psi_h|^2rdr,\quad(2.17)$$

其中 h_0 满足对于所有 $h \le h_0$，均有 $\epsilon(h) \le \frac{\alpha^2\delta}{2}$。对于 I_α^- 上的积分，我们有

$$\left| \int_{I_\alpha^-} e^{2\phi/h}(V_c(r) - E_h - c|\partial_r\phi|^2)|\psi_h|^2 r dr \right| \le C \int_{I_\alpha^-} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 r dr, \tag{2.18}$$

其中 C 取决于最大值 V_c。将 (2.15)、(2.17)、(2.18) 合并可得

$$\int_{R_0}^{R_2} ch^2 \left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2 r dr + \alpha^2\delta \int_{I_\alpha^+} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 r dr \le C \int_{I_\alpha^-} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 r dr,$$

由此得到

$$\int_{R_0}^{R_2} ch^2 \left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2 r dr + \alpha^2\delta \int_{R_0}^{R_2} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 r dr \le C \int_{I_\alpha^-} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 r dr. \tag{2.19}$$

现在我们估计 ϕ 在 I_α^-中。取 $\alpha^2 \le \frac{\eta_0}{2}$，则有，且 $\rho_E = \overline{V}_c^{-1}(E)$

$$d_{A,E}(r) = \int_r^{\rho_E} \sqrt{\frac{(V_c(s) - E)}{c(s)}} ds, \quad \text{for } r \in I_\alpha^-.$$

利用 $\overline{V}_c^{-1}$ 在 $[R_0, \rho_E]$ 上是 Lipschitz 连续的这一事实，可知对于 $r \in I_\alpha^-$有

$$|r - \rho_E| \le C|V_c(r) - V_c(\rho_E)| \le C\alpha^2.$$

接着，取足够小的 $\alpha_0 = \alpha_0(\delta)$，则对于 $r \in I_\alpha^-$和 $\alpha \le \alpha_0$有：

$$\phi(r) = (1-\delta)d_{A,E} = (1-\delta)\int_r^{\rho_E} \sqrt{\frac{(V_c(s) - E)}{c(s)}} ds \le C(1-\delta)|r - \rho_E| \le \tilde{C}\alpha^2 \le \delta.$$

将其与 (2.19) 结合，并利用 $R_0 > 0$,

$$\int_{R_0}^{R_2} h^2 \left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2 dr + \alpha^2\delta \int_{R_0}^{R_2} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 dr \le Ce^{2\delta/h}. \tag{2.20}$$

最后，需要在上述估计中用 $d_{A,E}$ 替换 ϕ。为此，我们只需写出（其中$d_{A,E} \le M$）：

$$\begin{aligned}
\int_{R_0}^{R_2} h^2 \left|\partial_r\left(e^{\frac{d_{A,E}}{h}}\psi_h\right)\right|^2 dr &= \int_{R_0}^{R_2} h^2 \left|\partial_r\left(e^{\frac{\delta d_{A,E}}{h}} e^{\frac{\phi}{h}}\psi_h\right)\right|^2 dr \\
&\le C\int_{R_0}^{R_2} h^2 e^{\frac{2\delta d_{A,E}}{h}} \left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2 dr + C\delta^2 \int_{R_0}^{R_2} |d'_{A,E}|^2 e^{\frac{2\delta d_{A,E}}{h}} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 dr \\
&\le Ch^2 e^{\frac{2\delta M}{h}} \int_{R_0}^{R_2} \left|\partial_r(e^{\phi/h}\psi_h)\right|^2 dr + C\delta^2 \|V_c - E\|_{L^\infty} e^{\frac{2\delta M}{h}} \int_{R_0}^{R_2} e^{2\phi/h}|\psi_h|^2 dr.
\end{aligned}$$

将其与（2.20）结合起来，即完成命题 2.3 的证明。 □

由上述 Agmon估计可知，接近最低能级 E_0 的特征函数，其质量应集中在系数 c发生跳跃的点 R_1 附近。由此得到以下推论：

推论 2.4. 设 $\epsilon(h)$ 满足 $\epsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$。存在 $h_0 > 0$，使得对所有满足以下条件的 ψ_h

$$P_h\psi_h = (E_0 + \epsilon(h))\psi_h, \quad \|\psi_h\|_{L^2} = 1, \quad \psi_h \in \mathcal{A}_r,$$

并且所有 $\varepsilon > 0$ 都存在 $C, d > 0$ 使得

$$\|\psi_h\|_{L^2((R_0,R_2)\setminus[R_1-\varepsilon,R_1+\varepsilon])} \leq Ce^{-\frac{d}{h}}$$

证明。回忆一下，$E_0 = V_c(R_1^-)$ 是势 V_c 的下确界。现在考虑 $P_h\psi_h = (E_0 + \epsilon(h))\psi_h$ 的一个解。相应的到能级 E_0 的Agmon距离满足

$$d_{A,E_0}(r) \geq m, \quad \text{for } r \in (R_0, R_2)\setminus[R_1 - \varepsilon, R_1 + \varepsilon].$$

结论由命题 2.3 的估计取 $\delta \leq m/2$即可得出。 □

2.3 回到二维环带

现在我们将所有部分组合起来，陈述关于初始算子 $-\Delta_c = -\mathrm{div}(c\nabla\cdot)$ 在圆环上定义的结果。回忆一下，空间 $\mathcal{A}$ 已在 (1.7) 中定义。

定理 2.5。 考虑 $\mathcal{M}$ S，其定义见第 2 节开头。假设

$$\frac{c_-}{R_1^2} < \frac{c_+}{R_2^2}.$$

于是存在序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 和 $E_0 > 0$，使得对于所有满足 $\mathrm{dist}(\overline{\omega}, S) > 0$ 的 $\omega \subset \mathcal{M}$，存在满足以下条件的 $C, d > 0$:

$$-\Delta_c u_n = \lambda_n u_n, \quad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} E_0 n^2, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathcal{M})} = 1, \quad \|u_n\|_{L^2(\omega)} \leq Ce^{-dn},$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$。

证明。令 $h = 1/n$，并考虑满足以下条件的 $\psi_h \in \mathrm{A}_r$

$$P_h\psi_h = (E_0 + O(h^{2/3}))\psi_h, \quad \|\psi_h\|_{L^2((R_0,R_2),rdr)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

由命题 2.1可知，这样一族 $\psi_h)_h$ 的存在性。于是我们定义

$$u_n(r,\theta) := e^{in\theta}\psi_h(r).$$

由此可得（参见公式（2.3）中 $\mathcal{A}_r$ 的定义之后的注记）： $u_n \in \mathcal{A}$, $\|u_n\|_{L^2(\mathcal{M})} = 1$，并且（由公式（2.1）可知）

$$-\Delta_c u_n = n^2\left(E_0 + O(n^{-2/3})\right)u_n.$$

最后，令 $\omega \subset \mathrm{M}$ 满足 $\mathrm{dist}(\overline{\omega}, S) > 0$。这意味着存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^2(\omega)} &\leq \|u_n\|_{L^2(\mathcal{M}\setminus(B(0,R_1+\varepsilon)\setminus B(0,R_1-\varepsilon)))} = \|\psi_h\|_{L^2((R_0,R_2)\setminus[R_1-\varepsilon,R_1+\varepsilon])}, \\ &\leq Ce^{-dn},\end{aligned}$$

感谢推论 2.4。 □

3 圆盘及其他旋转曲面

在第 2 节中，我们讨论了$\mathcal{M}$ 为圆环的情形。我们之所以给出圆环情形的证明，是因为在 0 处变换到极坐标时产生的奇点会消失，从而使我们可以只在一维情形下进行研究。当然，从直观上看，这应该不是问题，因为我们关注的是特征函数在零点以外的行为。然而，在圆盘情形下，有时直接研究初始算子 $-\Delta_c$，而不是它的一维类比（2.1），会更简单，因为此时描述其自伴性的定义域 $\mathcal{A}_r$ 当 $r \in (0, R_2)$ 时会更加复杂。

在本节中，我们简要说明如何将第 2 节介绍的方法用于构造圆盘上的最大消失特征函数，甚至适用于嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 且与圆盘微分同胚的一些旋转曲面。关于此类流形的几何描述，我们遵循 [LL21a，第 3] 节，以及 [LL21b，第 4]节。

设 (M g) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个嵌入二维子流形，其有效等距群为 $\mathbb{S}^1$。我们用 $\mathbb{S}^1 \times \mathrm{M} \ni (\theta, s) \longrightarrow \mathrm{R}_\theta s$ 表示 $\mathbb{S}^1$ 在 M 上的作用，该作用满足 $\mathrm{R}_\theta \mathrm{M} = \mathrm{M}$，并假设它恰有一个不动点，记为 $N \in \mathrm{M}$。我们定义 $L = \mathrm{dist}_g(N, \partial \mathrm{M})$。于是可以找到坐标

$$\mathcal{M} \ni m \longrightarrow \zeta(m) = (s, \theta) \in (0, L] \times \mathbb{S}^1,$$

使度量变为

$$(\zeta^{-1})^* g = ds^2 + R(s) d\theta^2,$$

并且 R 是一个光滑函数 $R : [0, L] \to \mathbb{R}_*^+$，可解释为 M 中一点到对称轴在 $\mathbb{R}^3$ 中的欧几里得距离。以 0 为中心、半径为 L 的圆盘对应于 $R(s) = s$ 的情形。

在新坐标中，黎曼体积形式为 $R(s) ds d\theta$，拉普拉斯-贝尔特拉米算子则由下式给出

$$\Delta_{s,\theta} = \frac{1}{R(s)} \partial_s (R(s) \partial_s) + \frac{1}{R^2(s)} \partial_\theta^2.$$

现在选取一点 $s_0 \in (0, L)$，并定义 $\Omega_- = \{N\} \cup \zeta^{-1}((0, s_0) \times \mathbb{S}^1)$、$\Omega_+ = \zeta^{-1}((s_0, L] \times \mathbb{S}^1)$，$S = \zeta^{-1}(\{s_0\} \times \mathbb{S}^1)$。我们也考虑系数 $c = c(s) = \mathbb{1}_{\Omega_-} c_- + \mathbb{1}_{\Omega_+} c_+$，并且

$$\Delta_c := \frac{1}{R(s)} \partial_s (c(s) R(s) \partial_s) + \frac{c(s)}{R^2(s)} \partial_\theta^2,$$

它在空间 $\mathcal{A}$中是良定义且自伴的，A如第 1.2 节所述，定义见（1.2）。更准确地说，对于 $u \in \mathcal{A}$，有

$$\partial_s (c(s) R(s) \partial_s u) = \mathbb{1}_{\Omega_-} c_- \partial_s (R(s) \partial_s u_-) + \mathbb{1}_{\Omega_-} c_+ \partial_s (R(s) \partial_s u_+), \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathcal{M}),$$

其中 $u_\pm = u_{|\Omega_\pm}$。此时有效势变为 $V_c(s) = \frac{c(s)}{R^2(s)}$，并定义 $V_c(s_0) = \frac{c_-}{R^2(s_0)}$ 以及 $E_0 = \min V_c$。现在考虑由下式给出的算子 $\tilde{P}_h$

$$\tilde{P}_h = -h^2 \left(\frac{1}{R(s)} \partial_s (c(s) R(s) \partial_s) \right) + \frac{c(s)}{R^2(s)} \partial_\theta^2.$$

˜正如 [LL21a第 3 节2] 所示，若 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 P_h 的一个特征值，则存在形如$e^{in\theta}\psi(s)$的特征函数，且 $n \in \mathbb{Z}$ 以及 $\psi \in L^2((0, R_2), R(s) ds)$。结合这一点以及命题2.1 证明中所用的论证，可得：

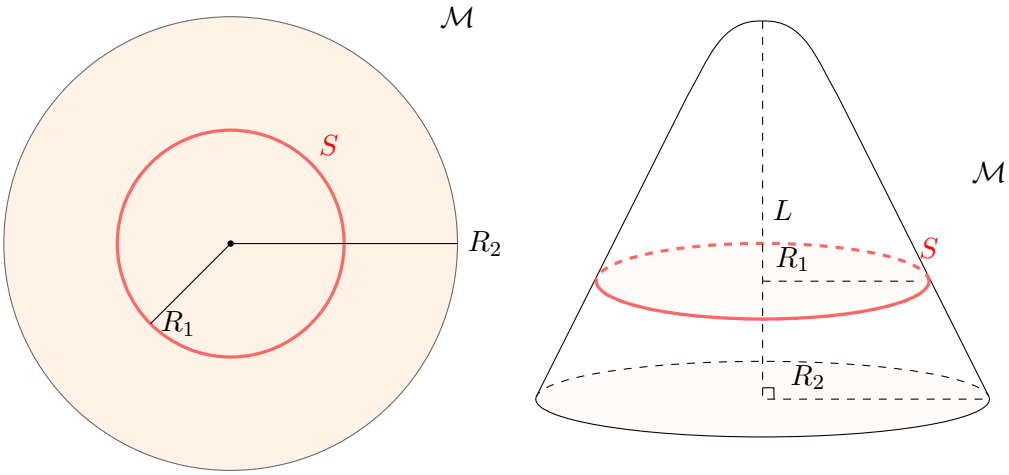

图3：一个圆盘以及一个与圆盘微分同胚的旋转曲面，对于该曲面，在满足关于系数 c 的假设时，定理 3.3成立；该假设与圆环情形中考虑的假设类似。

命题3.1。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 $u_n \in$ 一个 A 使得：

$$-\Delta_c u_n = n^2 \left(E_0 + O\left(\frac{1}{n^{2/3}} \right) \right) u_n, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathcal{M})} = 1, \quad u_n(s,\theta) = e^{in\theta}\psi_n(s).$$

随后，我们可以重复第 2 节中的相同步骤。我们按照式（2.10）定义到能级 E 的Agmon距离：

$$d_{A,E}(s) = \inf_{y \in K_E} \left| \int_y^r \sqrt{\frac{(V_c(x) - E)_+}{c(x)}} dx \right|,$$

它满足方程 $c|\partial_s d_{A,\ E}|^2 = (V_c(s)\ - E)_+$，在 $\mathcal{D}'((0,L))$ 中。直接在 $\mathcal{M}$上进行分析，并利用 $u_n \in \mathcal{A}$ 这一事实，我们可以得到引理 2.2中的关键恒等式。我们将 $\mathcal{M}$ 上的Agmon距离定义为 ζ 对为 $s \in (0, L]$.

现在我们假设 $V_c^{-1}(E_0) = \{s_0\}$。也就是说

$$\frac{1}{R^2(s)} > \frac{1}{R^2(s_0)},\ s \in (0, s_0) \quad \text{and} \quad \frac{c_-}{R^2(s_0)} < \min_{s \in [s_0, L]} \frac{c_+}{R^2(s)}.$$

有了关键恒等式，我们便可得到命题 3.2中的Agmon估计。其证明与命题 2.3的证明非常相似，但需要谨慎处理极点 N 处的退化，此处Agmon距离趋于无穷（见图 2）。 [LL22定理39] 讨论了这个问题，这里略去。

命题3.2。 对于所有 $\delta > 0$ 和 $\epsilon(n)$ 且满足 $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$的情形，存在 C, n_0，使得对于所有 u_n 满足

$$-\Delta_c u_n = n^2(E_0 + \epsilon(n))u_n, \quad \|u_n\|_{L^2} = 1, \quad u_n \in \mathcal{A},$$

对于 $n \geq n_0$，有：

$$\left\| e^{n d_{A,E_0}} u_n \right\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C e^{n\delta}.$$

最终得到以下结果：

定理 3.3。 设 $\mathcal{M}$ S, c 如第 3 节所定义。假设 $V_c^{-1}(E_0) = \{s_0\}$。

那么存在序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ，使得对于所有满足$\mathrm{dist}_g(\overline{\omega}, S) > 0$ 的 $\omega \subset \mathcal{M}$ ，都存在满足以下条件的 $C, d > 0$:

$$-\Delta_c u_n = \lambda_n u_n, \quad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} E_0 n^2, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathcal{M})} = 1, \quad \|u_n\|_{L^2(\omega)} \leq Ce^{-dn},$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$。

注 3.4. 如果假设函数 $s \mapsto R(s)$ 是递增的（例如，当 M 是圆盘或锥状曲面时，情况便是如此），那么假设 $V_c^{-1}(E_0) = \{s_0\}$ 等价于

$$\frac{c_-}{R_1^2} < \frac{c_+}{R_2^2},$$

其中 $R_1 := R(s_0)$ 且 $R_2 := R(L)$。这与圆环情形下的假设 (2.9) 相同。

注 3.5. 定理 3.3 及其证明同样适用于系数 c具有旋转不变性且分段光滑（不一定为常数），并满足 $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$的情形。请注意，在圆盘或圆环的情况下，为了满足 $V_c^{-1}(E_0) = \{s_0\}$ 且 $s_0 \in (0, L)$，系数 $c(s)$ 确实必须在 $s = s_0$ 处存在跳跃间断，前提是假设 c 在 Ω 中为常数$_+$ （从物理应用的角度来说，这意味着光纤外包层的折射率为常数）。

参考文献

[All98] Brice Allibert。旋转曲面上波动方程与薛定谔方程的解析控制。《偏微分方程通讯》，23(9-10):1493–1556，1998。[BBAD22] Assia Benabdallah、Matania Ben-Artzi 和 Yves Dermenjian。分层介质中二阶椭圆算子的特征函数集中与非集中。*arXiv:2212.05872*，2022。[BDDM20]Stéphane Balac、Monique Dauge、Yannick Dumeige 和 Zoïs Moitier。渐变折射率光学微盘谐振腔中耳语廊模的数学分析。*https://hal.science/hal-02157635/document*，2020。[BDM21] Stéphane Balac、Monique Dauge 和 Zoïs Moitier。径向变化折射率光学微盘中二维耳语廊模的渐近分析。*hal-02528150 , version 2*，2021。[DS99] Mouez Dimassi 和 Johannes Sjöstrand。半经典极限下的谱渐近，伦敦数学会讲义系列第268卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999。[Fil22] Spyridon Filippas。具有界面跳跃间断的波算子的定量唯一延拓及其在近似控制中的应用。*arXiv*预印本 *arXiv:2210.04634*，2022。[Hel88] Bernard Helffer。薛定谔算子的半经典分析及其应用，数学讲义第1336卷。Springer-Verlag，柏林，1988。[Leb96] Gilles Lebeau。阻尼波动方程。载于数学物理中的代数与几何方法（卡齐韦利，*1993*），Math. Phys. Stud.第19卷，第73–109页。Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1996。

[Lew18] Mathieu Lewin。谱理论与量子力学。讲义。
https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01935749v4，2018。[LL19] Camille Laurent 和 Matthieu Léautaud。部分解析系数算子的定量唯一延拓。波的近似控制应用。欧洲数学会杂志，21(4):957–1069，2019。[LL21a] Camille Laurent 和 Matthieu Léautaud。热方程的可观测性、控制理论中的几何常数以及 Luc Miller 的一个猜想。《分析与偏微分方程》，14(2):355–423，2021。[LL21b] Camille Laurent 和 Matthieu Léautaud。消失黏性极限下梯度流的一致可观测性。《综合理工学院数学杂志》，8:439–506，2021。[LL22] Camille Laurent 和 Matthieu Léautaud。区间上半经典薛定谔特征函数的一致观测。即将发表于《突尼斯数学杂志》，2022。[LR10] Jérôme Le Rousseau 和 Luc Robbiano。任意维数下具有界面跳跃系数的椭圆算子的Carleman估计及其在线性抛物方程零控制中的应用。《理性力学与分析档案》，105:953–990，2010。[LRL13] Jérôme Le Rousseau 和 Nicolas Lerner。具有界面跳跃的各向异性椭圆算子的Carleman估计。《分析与偏微分方程》，6(7):1601–1648，2013。[LRLR13] Jérôme Le Rousseau、Matthieu Léautaud 和 Luc Robbiano。具有弥散界面的抛物系统的可控性。《欧洲数学会杂志》，15(4):1485–1574，2013。[Zwo12] Maciej Zworski。半经典分析，数学研究生教材第138卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012。