arXiv:2302.05239v1 [math.DG] 10 Feb 2023

与广义四元数结构和拟四元数结构相伴的典范联络

Adara M. Blaga 和 Antonella Nannicini

摘要

我们阐明了一些广义近四元数结构和广义近拟四元数结构，并刻画了它们相对于光滑流形 M 的广义切丛 $TM \oplus T^*M$ 上由 M 上的仿射联络 ∇ 定义的 ∇-括号的可积性。此外，我们给出了这些结构为 ∇-平行且为 ∇^*-平行的充要条件。其中，∇ 是由 ∇ 在 $TM \oplus T^*M$ 上诱导的仿射联络，而 ∇^* 是相对于由 M 上非退化对称或反对称 (0, 2) 型张量场 h 在 $TM \oplus T^*M$ 上诱导的双线性形式 h 而定义的 ∇^* 的广义对偶联络。作为主要结果，我们证明了存在分别与广义四元数结构和广义拟四元数结构相伴的典范联络，即一种使这些结构平行的无挠广义仿射联络。我们证明，在四元数情形下，典范联络就是广义小俣联络；并且在拟统计流形 (M, h, ∇) 上，可积的 h-对称且 ∇-平行的 (1, 1) 型张量场会导出一种广义拟四元数结构，其典范联络恰为 ∇^*。最后，我们证明，使某些广义近复结构族和近乘积结构族平行的广义仿射联络具有保性。

2020年数学主题分类。53C15、53B05、53B12。关键词和短语。四元数结构和拟四元数结构；广义切丛；典范联络；拟统计结构。

1 引言

联络一般理论中的一个重要问题，是构造一种仿射联络，使某个张量场相对于该联络协变常数。伪黎曼度量张量场的列维-奇维塔联络就是一个基本例子。对于近复结构或近乘积结构，使它们平行的此类联络分别由 Obata [14] 和 Etayo [7], 确定。此外，Fr¨olicher 给出了一种构造此类典范联络的方法：从给定联络出发，构造出使近复结构平行的联络。特别地，他证明，若初始联络无挠，则所得联络的挠率与该近复结构的 Nijenhuis 张量 [6, 8] 成比例。

2003年，Hitchin [9] 首次将光滑流形 M的切丛 TM 几何推广到广义切丛 $TM \oplus T^*M$，其中 T^*M表示 M的余切丛，并以Courant括号取代李括号。这一新的广义版本在理论物理中也颇受关注。最近，本文作者在这一框架下发展了统计结构的几何，表明拟统计结构（即带挠率的统计结构）与广义几何的框架 [3, 4, 5, 12]完美契合。他们在广义切丛上构造了一些特殊联络，并通过一种不同于Courant括号的括号来刻画某些广义结构的可积性；该括号在 [11] 中通过在 M上定义的仿射联络 ∇ 构造，称为 ∇-括号。

本文在广义几何框架下，研究若干特定的广义结构，即近四元数结构和近拟四元数结构，并刻画它们相对于由仿射联络 ∇ 在 M 上定义的 ∇-括号在 $TM \oplus T^*M$ 上的可积性。此外，我们给出这些结构为 ∇-平行和 ∇^*-平行的充要条件，其中 ∇ 是由 ∇ 在 $TM \oplus T^*M$ 上诱导的仿射联络，而 ∇^* 是相对于由 h 在 M 上诱导的非退化对称或反对称 (0, 2) 型张量场所确定的双线性形式 h 在 $TM \oplus T^*M$ 上的广义对偶联络。作为主要结果，我们证明了与广义四元数结构和广义拟四元数结构相伴的典范联络存在，也就是说，存在一个使这些结构平行的无挠广义仿射联络。我们证明，在四元数情形下，典范联络就是广义小俣联络；并且在拟统计流形 (M, h, ∇) 上，一个可积的 h-对称且 ∇-平行的 (1, 1) 型张量场可导出广义拟

四元数结构，其典范联络恰为 ∇^*。最后，我们证明，使某些广义近复结构族和近乘积结构族平行的广义仿射联络具有保持性。

2 预备知识

设 M 为一个光滑流形，下文中我们将 M 上的 C^∞ 函数记为$C^\infty(M)$，将 TM的光滑截面记为 $\Gamma^\infty(TM)$，将 T^*M的光滑截面记为 $\Gamma^\infty(T^*M)$，并将 $TM\oplus T^*M$的光滑截面记为 $\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$。

2.1 Norden 与拟Norden结构

Definition 2.1. 设 h 是 M 上的伪黎曼度量，且 J: $\Gamma^\infty(TM)\ \to\Gamma^\infty(TM)$是一个 h-对称态射，即对于任意 $X,Y\ \in\Gamma^\infty(TM)$，有 $h(JX,Y)\ =\ h(X,JY)$。那么

(i) 若 J是一个近复结构，即 $J^2=-I$，则称(h,J)为近Norden结构（并称(M,h,J)为近Norden流形）[13]；

(ii) (h,J) 称为近超 Norden 结构（(M,h,J) 称为近超 Norden 流形），[15]如果 J 是近乘积结构，即 $J^2=I$。

此外，如果 J 可积，即其 Nijenhuis 张量场 N_J:

$$N_J(X,Y):=[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]+J^2[X,Y]$$

对任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$ 均为零，则省略“近”这一修饰词。

2.2 拟统计流形

拟统计结构的概念由 Matsuzoe 于 2012 年提出。

Definition 2.2. [10] 设 h 是一个非退化的 (0, 2) 型张量场，∇ 是 M 上的仿射联络。那么，如果 $d^\nabla h=0$，则 (h,∇) 称为 M 上的拟统计结构（(M,h,∇) 称为拟统计流形），其中

$$(d^\nabla h)(X,Y,Z):=(\nabla_X h)(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)+h(T^\nabla(X,Y),Z),$$

对于 X、Y、$Z\in\Gamma^\infty(TM)$，

$$(\nabla_X h)(Y,Z):=X(h(Y,Z))-h(\nabla_X Y,Z)-h(Y,\nabla_X Z)$$

是 h 关于 ∇ 的协变导数，而

$$T^{\nabla}(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

是 ∇的挠率算子，其中 $[\cdot,\cdot]$ 为李括号。

2.3 对偶结构

在伪黎曼几何的框架下，对偶联络这一概念最初由 Amari 提出，并用于处理统计推断问题。

Definition 2.3. [2] 设 (M,h) 为一个伪黎曼流形。若两个仿射联络 ∇ 和 ∇^* 在 M 上满足

$$X(h(Y,Z)) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z),$$

对任意 $X,Y,Z \in \Gamma^\infty(TM)$ 均成立，则称 $(h;\ \nabla, \nabla^*)$ 为 M上的对偶结构。

此外，也可以相对于 M上的非退化 (0, 2) 型张量场 h来定义对偶联络。

直接计算可得对偶联络的如下表达式。

Lemma 2。4. *[5]* 若 ∇ 是仿射联络，且 h 是 M上的非退化对称或斜对称 (0, 2) 型张量场，则关于 h 的 ∇的对偶联络 ∇^*由下式给出:

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + h^{-1}((\nabla_X h)(Y)),$$
$$\nabla^*_X \beta = \nabla_X \beta - (\nabla_X h)(h^{-1}(\beta)),$$

对任意 X、$Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$。此外，$(\nabla^*)^* = \nabla$。

2.4 广义切丛 $TM \oplus T^*M$

2.4.1 一些几何结构

设 h是一个非退化的 (0, 2) 型张量场，设 ∇是 M上的仿射联络。在[5] 中，我们定义了广义切丛 $TM \oplus T^*M$上的双线性形式 $\check{}h$ 和仿射联络 $\hat{}\nabla$ ，如下所示:

$$\check{h}(X+\eta, Y+\beta) := h(X,Y) + h(h^{-1}(\eta), h^{-1}(\beta)),$$
$$\hat{\nabla}_{X+\eta}(Y+\beta) := \nabla_X Y + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))),$$

对于 $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\eta,\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$。于是

$$T^{\hat{\nabla}}(X+\eta,Y+\beta)=T^{\nabla}(X,Y)+h\Big((\nabla_X h^{-1})\beta-(\nabla_Y h^{-1})\eta\Big).$$

ˆ 直接计算得出 ∇ 相对于 h 的广义对偶联络表达式。

Proposition 2.5. *[5]* 若 ∇ 是一个仿射联络，且 h 是定义在 M 上的非退化对称或反对称 (0, 2) 型张量场，那么， ∇ 关于 h 的对偶联络 ∇^* 定义如下:

$$\check{h}(Y+\beta,\hat{\nabla}^*_{X+\eta}(Z+\gamma))=X(\check{h}(Y+\beta,Z+\gamma))-\check{h}(\hat{\nabla}_{X+\eta}(Y+\beta),Z+\gamma),$$

对于 X、Y、$Z\in\Gamma^\infty(TM)$ 和 η、β、$\gamma\in\Gamma^\infty(T^*M)$，有:

$$\hat{\nabla}^*_{X+\eta}(Z+\gamma)=h^{-1}(\nabla_X(h(Z)))+\nabla_X\gamma. \tag{1}$$

Then

$$T^{\hat{\nabla}^*}(X+\eta,Y+\beta)=h^{-1}\Big((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X+h(T^{\nabla}(X,Y))\Big).$$

ˆ特别地，当且仅当 $(M,\ h,\ \nabla)$ 是一个拟统计流形时， $T^{\nabla^*}=0$。

对于上文讨论的对偶结构 $(h;\ \nabla,\ \nabla^*)$，我们在 $TM\oplus T^*M$ 上定义了一族联络 $\{\hat{\nabla}^{(\alpha)}\}$，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为任意参数，称为 α-联络 [3]:

$$\hat{\nabla}^{(\alpha)}:=\frac{1+\alpha}{2}\hat{\nabla}+\frac{1-\alpha}{2}\hat{\nabla}^*.$$

2.4.2 广义结构

接下来，我们将回顾一些众所周知的广义结构的定义。

ˆDefinition 2.6. 若态射 $J\colon\ \Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)\ \to\ \Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$ 满足 ˆ $J^2=-I$（分别满足 ˆ$J^2=I$），则称其为 M 上的广义近复结构（分别为 M 上的广义近乘积结构）。

ˆˆˆˆDefinition 2.7. (i) 若广义近复结构 J_1、ˆˆJ_2 和 J_3 构成的三元组 (J_1, J_2, J_3) 满足 $J_1J_2=-J_2J_1$ 和 $J_1J_2=J_3$，则称其为 M 上的广义近四元数结构，或近双复结构。

ˆˆˆˆ (ii) 广义近复结构 J_1 与两个广义近乘积结构 J_2 和 J_3 组成的三元组 (J_1, J_2, J_3)，若满足 $J_1J_2=-J_2J_1$ 和 $J_1J_2=J_3$，则称为 M 上的广义近 para-四元数结构。

ˆ ˆ ˆREMARK 2.8. (i) 如果 (J_1, J_2, J_3) 是一个广义几乎四元数结构，那么 ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ $J_1J_3 = -J_3J_1$ 和 $J_2J_3 = -J_3J_2$。

ˆ ˆ ˆ ˆ (ii) 如果（J_1, J_2, J_3）是广义近拟四元数结构，那么 J_1J_3 =ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ $-J_3J_1$ 和 $J_2J_3 = -J_3J_2$。

本文将研究广义近四元数结构和广义近拟四元数结构。不过，为了完整起见，我们也补充给出其他广义三元结构的定义。

ˆ ˆDEFINITION 2.9. (iii) 给定一个广义近复结构 J_1 ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ 和一个广义近乘积结构 J_2 的序对（J_1, J_2），使得 $J_1J_2 = J_2J_1$，则三元组 ˆ ˆ ˆ ˆ（J_1, J_2, $J_3 := J_1J_2$）称为 M 上的广义近复乘积结构，或广义近双复结构。

ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ (iv) 广义近乘积结构 J_1、J_2 和 J_3 构成的三元组 (J_1, J_2, J_3) 称为 M 上的广义近超乘积结构，当且仅当 $J_1J_2 = J_2J_1$ 和 $J_1J_2 = J_3$。

2.4.3 可积性

为了定义广义结构的可积性，我们需要在 $T(TM \oplus T^*M)$ 上定义适当的括号。对于 M 上的一个固定仿射联络 ∇，我们考虑在 [11] 中定义的括号 $[\cdot,\cdot]_\nabla$：

$$[X + \eta, Y + \beta]_\nabla := [X, Y] + \nabla_X\beta - \nabla_Y\eta,$$

对于 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\eta, \beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，我们定义广义结构关于此括号的可积性。

DEFINITION 2.10. 广义近复（或近乘积、近四元数或近超四元数）结构 J 称为 ∇-可积的，如果其关于 ∇ 的 Nijenhuis 张量场 $N^\nabla_{\hat{J}}$：

$$N^\nabla_{\hat{J}}(\sigma, \tau) := [\hat{J}\sigma, \hat{J}\tau]_\nabla - \hat{J}[\hat{J}\sigma, \tau]_\nabla - \hat{J}[\sigma, \hat{J}\tau]_\nabla + \hat{J}^2[\sigma, \tau]_\nabla$$

对于一个 y σ, $\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$。在这种情况下，我们将省略“almost”这一形容词 .

对于 M 上的广义近四元结构和广义近拟四元结构，我们有如下结论。

ˆ ˆ ˆPROPOSITION 2.11. 设 (J_1, J_2, J_3) 是 ˆ ˆ ˆM 上的广义几乎四元数结构。如果 J_1 和 J_2 是 ∇- 可积的，那么 J_3 也同样是 ∇- 可积的。

Proof. 事实上，由 $\hat{J}_1^2 = \hat{J}_2^2 = \hat{J}_3^2 = -I$、$\hat{J}_3 = \hat{J}_1\hat{J}_2$、$\hat{J}_1\hat{J}_2 = -\hat{J}_2\hat{J}_1$，经直接计算可得以下公式：

$$2N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\sigma,\tau) = N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_2\tau) + N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_1\sigma,\hat{J}_1\tau) - \hat{J}_1N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_1\sigma,\tau) - \hat{J}_1N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\hat{J}_1\tau) +$$
$$+N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\hat{J}_2\sigma,\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\sigma,\hat{J}_2\tau) + N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\sigma,\tau),$$

对于任意 $\sigma,\tau \in \Gamma^{\infty}(TM \oplus T^*M)$，结论成立。 □

Proposition 2.12. 设 (J_1, J_2, J_3) 是 M 上的广义近拟四元数结构。若 J_1 和 J_2 是 ∇-可积的，则 J_3 也 ∇-可积。此外，若 J_2 和 J_3 是 ∇-可积的，则 J_1 也 ∇-可积。

Proof. 事实上，由 $\hat{J}_1^2 = -I$、$\hat{J}_2^2 = \hat{J}_3^2 = I$、$\hat{J}_3 = \hat{J}_1\hat{J}_2$、$\hat{J}_1\hat{J}_2 = -\hat{J}_2\hat{J}_1$，经过直接计算可得以下公式：

$$2N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\sigma,\tau) = N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_2\tau) + N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_1\sigma,\hat{J}_1\tau) - \hat{J}_1N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_1\sigma,\tau) - \hat{J}_1N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\hat{J}_1\tau) +$$
$$+N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\hat{J}_2\sigma,\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\sigma,\hat{J}_2\tau) - N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\sigma,\tau)$$

and

$$2N^{\nabla}_{\hat{J}_1}(\sigma,\tau) = N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_3\sigma,\hat{J}_3\tau) + N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_2\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\hat{J}_2\sigma,\tau) - \hat{J}_2N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\sigma,\hat{J}_2\tau) -$$
$$-N^{\nabla}_{\hat{J}_3}(\sigma,\tau) - \hat{J}_3N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\hat{J}_3\sigma,\tau) - \hat{J}_3N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\hat{J}_3\tau) - N^{\nabla}_{\hat{J}_2}(\sigma,\tau),$$

对于任意 $\sigma,\tau \in \Gamma^{\infty}(TM \oplus T^*M)$，则该陈述成立。 □

3 一些广义近拟四元数结构与近拟四元数结构

3.1 由对易的 h-对称 (1,1) 张量场定义的广义几乎超四元数结构

设 h 是光滑流形 M 上的非退化对称 (0, 2) 型张量场。我们将考虑由 h-对称 (1, 1) 型张量场 J_1 和 J_2 在 M 上诱导的广义近拟四元数结构，其中二者可交换。

Let

$$\hat{J}_- := \begin{pmatrix} J_1 & -(J_1^2+I)h^{-1} \\ h & -J_1^* \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ := \begin{pmatrix} J_2 & -(J_2^2-I)h^{-1} \\ h & -J_2^* \end{pmatrix}. \tag{2}$$

PROPOSITION 3.1. 设 h 是非退化对称 (0,2) 型张量场，且 J_1和 J_2 是 M 上的两个 h-对称 (1,1) 型张量场，满足 $J_1J_2 = J_2J_1$ 且 $(J_1-J_2)^2 = \hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,0$。那么，$(J_-, J_+, J_-J_+)$是 M上的广义近拟四元数结构，其中 $\hat{}\,\hat{}J_-$ 是广义近复结构，而 J_+ 是由式 (2) 给出的广义近乘积结构。

PROOF. 我们有

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} J_1J_2 - (J_1^2 + I) & -J_1(J_2^2 - I)h^{-1} + (J_1^2 + I)h^{-1}J_2^* \\ hJ_2 - J_1^*h & -h(J_2^2 - I)h^{-1} + J_1^*J_2^* \end{pmatrix}$$

and

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \begin{pmatrix} J_2J_1 - (J_2^2 - I) & -J_2(J_1^2 + I)h^{-1} + (J_2^2 - I)h^{-1}J_1^* \\ hJ_1 - J_2^*h & -h(J_1^2 + I)h^{-1} + J_2^*J_1^* \end{pmatrix}$$

并考虑到

$$hJ_i = J_i^*h, \quad J_ih^{-1} = h^{-1}J_i^*, \ i = 1, 2, \quad (J_1J_2)^* = J_2^*J_1^*,$$

我们得到 $\hat{}J_-^2 = -I$, $\hat{}J_+^2 = I$, $\hat{}_{J_-}\hat{}J_+ = -\hat{}J_+\hat{}J_-$，因此得出结论。 □

对于 $J_1 = J_2$，我们有

$$\hat{J}_- := \begin{pmatrix} J & -(J^2 + I)h^{-1} \\ h & -J^* \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ := \begin{pmatrix} J & -(J^2 - I)h^{-1} \\ h & -J^* \end{pmatrix} \tag{3}$$

并且可以陈述如下。

COROLLARY 3.2. 若 h 是非退化对称 (0,2) 型张量场，且 J 是定义在 M 上的 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}h$- 对称 (1, 1) 型张量场，则 (J_-, J_+, J_-J_+) 是 M 上的广义近伪四元数结构，其中 J_- 是广义近复结构，$\hat{}J_+$ 是由 (3) 给出的广义近乘积结构。

REMARK 3.3. 若 J 是 M 上的近 Norden 结构，则:

$$\hat{J}_- := \begin{pmatrix} J & 0 \\ h & -J^* \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ := \begin{pmatrix} J & 2h^{-1} \\ h & -J^* \end{pmatrix}$$

并且，如果 J 是 M 上的近超 Norden 结构，则:

$$\hat{J}_- := \begin{pmatrix} J & -2h^{-1} \\ h & -J^* \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ := \begin{pmatrix} J & 0 \\ h & -J^* \end{pmatrix}.$$

记作

$$\hat{J} =: \hat{J}_-\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} -I & 2Jh^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们可以陈述以下结果。

PROPOSITION 3.4. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 ˆ (0, 2) 型张量场，J 为 h-对称的 (1, 1)型张量场（定义在 M上），且 J由式 (4) 给出。则以下断言等价:

ˆ ˆ(i) $\nabla J = 0$;
(ii) $\nabla J = 0$; ˆ ˆ
(iii) $\nabla^* J = 0$。

PROOF. 对于任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\eta, \beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，有

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$

$$= \hat{\nabla}_{X+\eta}\Big(-Y + 2J(h^{-1}(\beta)) + \beta\Big) - \hat{J}\Big(\nabla_X Y + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))\Big) =$$

$$= \nabla_X\Big(-Y + 2J(h^{-1}(\beta))\Big) + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))-$$

$$-\Big(-\nabla_X Y + 2J(\nabla_X(h^{-1}(\beta))) + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))\Big) = 2(\nabla_X J)(h^{-1}(\beta))$$

并且我们得到 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。此外:

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}^*_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$

$$= \hat{\nabla}^*_{X+\eta}\Big(-Y + 2J(h^{-1}(\beta)) + \beta\Big) - \hat{J}\Big(h^{-1}(\nabla_X(h(Y))) + \nabla_X\beta\Big) =$$

$$= h^{-1}(\nabla_X(h(-Y+2J(h^{-1}(\beta))))) + \nabla_X\beta - \Big(-h^{-1}(\nabla_X(h(Y))) + 2J(h^{-1}(\nabla_X\beta)) + \nabla_X\beta\Big) =$$

$$= 2\Big(h^{-1}(\nabla_X(h(J(h^{-1}(\beta))))) - J(h^{-1}(\nabla_X\beta))\Big) =$$

$$= 2\Big(h^{-1}(\nabla_X J^*\beta) - h^{-1}(J^*(\nabla_X\beta))\Big) = 2h^{-1}((\nabla_X J^*)\beta)$$

以及（ii）$\Longleftrightarrow$（iii）成立，因为对于任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，有 $((\nabla_X J^*)\beta)(Y) = \beta((\nabla_X J)Y)$。 □

COROLLARY 3.5. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 ˆ (0, 2) 型张量场，J为 h-对称的 (1, 1)型张量场，定义在 M上，并令 J由式 (4) 给出。那么，对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，ˆ$\nabla^{(\alpha)}$ ˆ$J = 0$ 当且仅当 $\nabla J = 0$。

Proof. 由于对于任意 $X,\ Y\in\Gamma^\infty(TM)$ 和 $\eta,\ \beta\in\Gamma^\infty(T^*M)$，我们有

$$(\hat{\nabla}^{(\alpha)}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta)=\frac{1+\alpha}{2}(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta)+\frac{1-\alpha}{2}(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta),$$

由命题 3.4 可得结论。 □

Proposition 3.6. 设 ∇ 为仿射联络，h 为非退化对称(0, 2) 型张量场，且 J是 M上的一个 h-对称(1, 1)型张量场。那么，由式(4)给出的广义近乘积结构 J 是 ∇-可积的，当且仅当

$$(\nabla_{JX}h)(JY)-(\nabla_{JY}h)(JX)+h(T^\nabla(JX,JY))=(\nabla_{JX}J^*)(h(Y))-(\nabla_{JY}J^*)(h(X)),$$

对任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$,

Proof. 对于任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$，有

$$N^\nabla_{\hat{J}}(X,Y)=0,\quad N^\nabla_{\hat{J}}(X,h(Y))=0,$$

$$N^\nabla_{\hat{J}}(h(X),h(Y))=4\Big([JX,JY]-J\big(h^{-1}(\nabla_{JX}(h(Y))-\nabla_{JY}(h(X)))\big)\Big).$$

考虑到

$$J\big(h^{-1}(\nabla_{JX}(h(Y)))\big)=h^{-1}(\nabla_{JX}(h(JY)))-h^{-1}((\nabla_{JX}J^*)(h(Y)))=$$

$$=h^{-1}((\nabla_{JX}h)(JY))+\nabla_{JX}JY-h^{-1}((\nabla_{JX}J^*)(h(Y))),$$

我们推断

$$N^\nabla_{\hat{J}}(h(X),h(Y))=4\Big(h^{-1}\big((\nabla_{JX}J^*)(h(Y))-(\nabla_{JY}J^*)(h(X))\big)-$$

$$-h^{-1}\big((\nabla_{JX}h)(JY)-(\nabla_{JY}h)(JX)-h(T^\nabla(JX,JY))\big)\Big).$$

那么证明就完成了。 □

ˆ 借助命题 3.6，我们可以用拟统计结构刻画 ∇-可积性。

Lemma 3.7. 设 (M,h,∇) 是一个拟统计流形，且 J是 h-对称的 ˆ (1, 1)型张量场。则由式 (4) 给出的广义近乘积结构 J是∇-可积的，当且仅当

$$(\nabla_{JX}J^*)(h(Y))=(\nabla_{JY}J^*)(h(X)),$$

对于任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$。

Proposition 3.8. 设 ∇ 为仿射联络， h 为非退化对称 (0,2) 型张量场，且 J为定义在 M 上的可逆 ∇-平行、 h-对称 (1, 1)型张量场。那么，由 (4) 给出的广义近乘积结构 J 是 ∇-可积的，当且仅当 (h, ∇) 是 M上的拟统计结构。

另一方面，我们有如下结论。

Proposition 3.9. 设 (M, h, ∇) 是一个拟统计流形，且 J 是 h-对称、 ∇-平行的 (1, 1)型张量场，定义在 M 上，并且 J, N_J 的 Nijenhuis 张量为零。那么，广义结构 $J_\mp := \begin{pmatrix} J & 0 \\ h & -J^* \end{pmatrix}$ 是 ∇-可积的。此外，$\nabla^* J_\mp = 0$。

Proof. 直接计算可得：

$$N^\nabla_{J_\mp}(X,Y) = N_J(X,Y) + \Big((\nabla_{JX}h)Y - (\nabla_Y h)JX + h(T^\nabla(JX,Y))\Big) +$$

$$+\Big((\nabla_X h)JY - (\nabla_{JY}h)X + h(T^\nabla(X,JY))\Big) + (J^2 \pm I)h^{-1}\Big((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X + h(T^\nabla(X,Y))\Big),$$

$$N^\nabla_{J_\mp}(h(X),h(Y)) = h^{-1}\Big((\nabla_{(J^2\pm I)Y}h)(J^2 \pm I)X - (\nabla_{(J^2\pm I)X}h)(J^2 \pm I)Y) +$$

$$+h(T^\nabla((J^2 \pm I)Y, (J^2 \pm I)X))\Big),$$

$$N^\nabla_{J_\mp}(X,h(Y)) = h^{-1}\Big((\nabla_{JX}h)(J^2 \pm I)Y - (\nabla_{(J^2\pm I)Y}h)(JX) + h(T^\nabla(JX,(J^2 \pm I)Y))\Big) +$$

$$-J\Big(h^{-1}\Big((\nabla_X h)(J^2 \pm I)Y - (\nabla_{(J^2\pm I)Y}h)X + h(X, T^\nabla((J^2 \pm I)Y))\Big)\Big) -$$

$$-\Big((\nabla_X h)(J^2 \pm I)Y - (\nabla_{(J^2\pm I)Y}h)X + h(T^\nabla(X,(J^2 \pm I)Y))\Big),$$

对于任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$，均有 ∇^2。此外，直接计算可得 $\nabla^* J_\mp = 0$。 □

根据前面的结果，我们可以得出如下结论。

Corollary 3.10. 设 (M, h, ∇) 是一个拟统计流形，并设 J 是 h-对称、 ∇-平行的 (1, 1)型张量场，定义在 M 上，且 J, N_J, ∇^2 的 Nijenhuis 张量消失。则由 (3) 和 (4) 给出的广义结构 $J_\mp$ 和 J 是 ∇-可积的，且 ∇^* 是使广义超-∇^3 四元数结构 (J_-, J_+, J) 平行的无挠广义仿射联络。

对于 $J_1 = J_2 = 0$, 我们有

$$\hat{J}_- := \begin{pmatrix} 0 & -h^{-1} \\ h & 0 \end{pmatrix},\ \hat{J}_+ := \begin{pmatrix} 0 & h^{-1} \\ h & 0 \end{pmatrix},\ \hat{J} =: \hat{J}_-\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{5}$$

并且我们可以给出以下结论。

Proposition 3.11. 设 ∇ 为一个仿射联络, h 为一个非退化对称 $\hat{}\,\hat{}$ (0, 2) 型张量场, 且 $J_\mp$ 和 J 由式 (5) 给出。那么

(i) $\hat{}\nabla^{(\alpha)}\hat{}J_\mp = 0$ 和 $\hat{}\nabla^{(\alpha)}\hat{}J = 0$, 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$均成立; 特别地, $\hat{}\nabla\hat{}J_\mp = 0$, $\hat{}\nabla\hat{}J = 0$, $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\nabla^* J_\mp = 0$ 和 $\nabla^* J = 0$;

$\hat{}\,\hat{}$ (ii) 由式 (5) 给出的广义结构 $J_\mp$ 和 J 是 ∇-可积的。

Proof. (i)由命题 3.4 得出, 而 (ii)由命题 3.6 和直接计算得出。

□

3.2 由两个 h 对称的 (1, 1) 型张量场和两个从 T^*M 到 TM 的态射定义的广义三元结构

对于一般的 h 对称 (1,1) 型张量场 J_1 和 J_2, 我们将考虑以下广义近拟四元数结构和广义近拟四元数结构。

Let

$$\hat{J}_i := \begin{pmatrix} J_i & H_i \\ h & -J_i^* \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \tag{6}$$

其中 H_i: $\Gamma^\infty(T^*M) \to \Gamma^\infty(TM)$ 是两个态射。

Proposition 3.12. 设 h 是一个非退化对称 (0,2) 型张量场, 设 J_i 是定义在 M 上的两个 h 对称 (1, 1) 型张量场, $i = 1, 2$, 并设 J_i 由 (6) 给出, 其中 H_i: $\Gamma^\infty(T^*M) \to \Gamma^\infty(TM)$ 是两个态射。那么 $J_1J_2 = -J_2J_1$ 当且仅当

$$\begin{cases} J_1J_2 + J_2J_1 = -(H_1 + H_2)h \\ J_1^*J_2^* + J_2^*J_1^* = -h(H_1 + H_2) \\ J_1H_2 - H_2J_1^* = H_1J_2^* - J_2H_1 \end{cases}.$$

Proof. 我们有

$$\hat{J}_1\hat{J}_2 = \begin{pmatrix} J_1J_2 + H_1h & J_1H_2 - H_1J_2^* \\ hJ_2 - J_1^*h & hH_2 + J_1^*J_2^* \end{pmatrix}$$

and

$$\hat{J}_2\hat{J}_1 = \begin{pmatrix} J_2J_1 + H_2h & J_2H_1 - H_2J_1^* \\ hJ_1 - J_2^*h & hH_1 + J_2^*J_1^* \end{pmatrix}$$

并考虑到

$$hJ_i = J_i^*h,\ i = 1, 2,$$

我们得出结论。 □

设 $H_i = \lambda_i I$, $i = 1, 2$。则

$$\hat{J}_i := \begin{pmatrix} J_i & \lambda_i h^{-1} \\ h & -J_i^* \end{pmatrix},\quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \tag{7}$$

因此

$$\hat{J}_i^2 = \begin{pmatrix} J_i^2 & 0 \\ 0 & (J_i^*)^2 \end{pmatrix} + \lambda_i I$$

并且我们注意到

(i) $\hat{J}_i$ 是广义近复结构，当且仅当 $J_i^2 = -(\lambda_i + 1)I$；(ii) $\hat{J}_i$ 是广义近乘积结构，当且仅当 $J_i^2 = -(\lambda_i - 1)I$；(iii) $J_1J_2 = -J_2J_1$ 当且仅当 $J_1J_2 + J_2J_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)I$。

Proposition 3.13. 设 h 为一个非退化对称 (0,2) 型张量场，设 J_i 为 M 上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，$i = 1, 2$，满足对于 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 有 $J_i^2 = -(\lambda_i + 1)I$，并且 $J_1J_2 + J_2J_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)I$；设 J_i 由 (7) 给出。则 (J_1, J_2, J_1J_2) 是 M 上的广义几乎四元数结构。

Proof. 我们有 $\hat{J}_1^2 = -I$、$J_2^2 = -I$、$J_1\hat{J}_2 = -\hat{J}_2\hat{J}_1$，因此结论 n. □

Proposition 3.14. 设 h 为一个非退化对称 (0,2) 型张量场，设 J_i 为 M 上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，$i = 1, 2$，满足对于 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{R}$ 有 $J_1^2 = -(\lambda_1 + 1)I$、$J_2^2 = -(\lambda_2 - 1)I$，并且 $J_1J_2 + J_2J_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)I$；设 $\hat{J}_i$ 由 (7) 给出。则 (J_1, J_2, J_1J_2) 是 M 上的广义近拟四元数结构。

Proof. 我们有 $\hat{J}_1^2 = -I$, $\hat{J}_2^2 = I$, $\hat{J}_1\hat{J}_2 = -\hat{J}_2\hat{J}_1$，因此得出结论。 □

Proposition 3.15. 设 h 为非退化对称 (0,2) 型张量场，设 J_i为 M 上两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，$i = 1, 2$，使得 $J_i^2 = -(\lambda_i - 1)I$，对于 $\lambda_i \in \mathbb{R}$，并且 $J_1J_2 + J_2J_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)I$，再设 J_i 由 (7) 给出。则 (J_1J_2, J_1, J_2) 是 M 上的广义近拟四元数结构。

Proof. 我们有 $\hat{J}_1^2 = I$, $\hat{J}_2^2 = I$, $\hat{J}_1\hat{J}_2 = -\hat{J}_2\hat{J}_1$，因此得出结论。 □

记为

$$\hat{J} =: \hat{J}_1\hat{J}_2 = \begin{pmatrix} J_1J_2+\lambda_1 I & (\lambda_2 J_1-\lambda_1 J_2)h^{-1} \\ hJ_2-J_1^*h & J_1^*J_2^*+\lambda_2 I \end{pmatrix}. \tag{8}$$

我们可以陈述以下结果。

PROPOSITION 3.16. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 (0, 2) 型张量场，J_1 和 J_2 为定义在 M上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 $\hat{J}$ 由 (8) 给出。那么以下断言等价:

(i) $\hat{\nabla}\hat{J}=0$;

(ii) $\begin{cases} \lambda_1=\lambda_2 \\ \nabla J_1=\nabla J_2 \\ (\nabla J_i)\circ J_j + J_i\circ(\nabla J_j)=0,\ i,j=1,2, i\neq j \end{cases}$;

(iii) $\hat{\nabla}^*\hat{J}=0$.

特别地，若 $\nabla J_1=0$ 和 $\nabla J_2=0$，则 $\nabla J=0$ 和 $\nabla^* J=0$。

PROOF. 对于任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$ 以及 $\eta,\beta\in\Gamma^\infty(T^*M)$，有

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$

$$= \hat{\nabla}_{X+\eta}\Big((J_1J_2+\lambda_1 I)(Y)+(\lambda_2J_1-\lambda_1J_2)(h^{-1}(\beta))+h((J_2-J_1)(Y))+(J_1^*J_2^*+\lambda_2 I)(\beta)\Big)-$$

$$-\hat{J}\Big(\nabla_X Y + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))\Big) =$$

$$= \nabla_X(J_1J_2Y)+\lambda_1\nabla_X Y+\lambda_2\nabla_X(J_1(h^{-1}(\beta)))-\lambda_1\nabla_X(J_2(h^{-1}(\beta)))+$$

$$+h\big(\nabla_X(J_2Y-J_1Y+h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta)+\lambda_2 h^{-1}(\beta))\big)-$$

$$-\Big((J_1J_2+\lambda_1 I)(\nabla_X Y)+(\lambda_2J_1-\lambda_1J_2)(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))+$$

$$+h((J_2-J_1)(\nabla_X Y))+(J_1^*J_2^*+\lambda_2 I)(h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))\Big) =$$

$$= (\nabla_X(J_1J_2))Y+\lambda_2(\nabla_X J_1)(h^{-1}(\beta))-\lambda_1(\nabla_X J_2)(h^{-1}(\beta))+$$

$$+h\big((\nabla_X J_2)Y-(\nabla_X J_1)Y\big)+h(\nabla_X(h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta)))-J_1^*J_2^*h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))).$$

考虑到

$$J_1^*J_2^*h = hJ_2J_1$$

（因此，$h^{-1}J_1^*J_2^*=J_2J_1h^{-1}$），我们得到

$$h(\nabla_X(h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta)))-J_1^*J_2^*h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))) =$$

$$= h(\nabla_X((J_2J_1)(h^{-1}(\beta))))-h((J_2J_1)(\nabla_X(h^{-1}(\beta))))=h\big((\nabla_X(J_2J_1))(h^{-1}(\beta))\big),$$

因此

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta)=(\nabla_X(J_1J_2))Y+\lambda_2(\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta))-\lambda_1(\nabla_XJ_2)(h^{-1}(\beta))+$$

$$+h\big((\nabla_XJ_2)Y-(\nabla_XJ_1)Y+(\nabla_X(J_2J_1))(h^{-1}(\beta))\big).$$

此外:

$$(\nabla_X(J_1J_2))Y=(\nabla_XJ_1)(J_2Y)+J_1((\nabla_XJ_2)Y)$$

并且我们得到

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta)=(\nabla_XJ_1)(J_2Y)+J_1((\nabla_XJ_2)Y)+$$

$$+\lambda_2(\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta))-\lambda_1(\nabla_XJ_2)(h^{-1}(\beta))+$$

$$+h\big((\nabla_XJ_2)Y-(\nabla_XJ_1)Y+(\nabla_XJ_2)(J_1(h^{-1}(\beta)))+J_2((\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta)))\big).$$

^^因此, $\nabla J=0$ 当且仅当

$$\begin{cases}(\nabla_XJ_1)(J_2Y)+J_1((\nabla_XJ_2)Y)+\lambda_2(\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta))-\lambda_1(\nabla_XJ_2)(h^{-1}(\beta))=0\\(\nabla_XJ_2)Y-(\nabla_XJ_1)Y+(\nabla_XJ_2)(J_1(h^{-1}(\beta)))+J_2((\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta)))=0\end{cases},$$

对于任意的 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta\in\Gamma^\infty(T^*M)$。因此, 取 $\beta=0$ 和 $Y=0$, 我们^^得出结论: $\nabla J=0$ 当且仅当

$$\begin{cases}(\nabla_XJ_1)(J_2Y)+J_1((\nabla_XJ_2)Y)=0\\(\nabla_XJ_2)Y-(\nabla_XJ_1)Y=0\\\lambda_2(\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta))-\lambda_1(\nabla_XJ_2)(h^{-1}(\beta))=0\\(\nabla_XJ_2)(J_1(h^{-1}(\beta)))+J_2((\nabla_XJ_1)(h^{-1}(\beta)))=0\end{cases},$$

对于任意的 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta\in\Gamma^\infty(T^*M)$, 即,

$$\begin{cases} (\nabla J_1)\circ J_2 + J_1\circ(\nabla J_2) = 0 \\ \nabla J_2 = \nabla J_1 \\ \lambda_2\nabla J_1 = \lambda_1\nabla J_2 \\ (\nabla J_2)\circ J_1 + J_2\circ(\nabla J_1) = 0 \end{cases}$$

并且我们得到 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

Now

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}^*_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$

$$= \hat{\nabla}^*_{X+\eta}\Big((J_1J_2+\lambda_1 I)(Y)+(\lambda_2J_1-\lambda_1J_2)(h^{-1}(\beta))+h((J_2-J_1)(Y))+(J_1^*J_2^*+\lambda_2 I)(\beta)\Big)-$$

$$-\hat{J}\Big(h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))+\nabla_X\beta\Big) =$$

$$= h^{-1}(\nabla_X(h(J_1J_2Y)))+\lambda_1h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))+$$

$$+\lambda_2h^{-1}(\nabla_X(h(J_1(h^{-1}(\beta)))))-\lambda_1h^{-1}(\nabla_X(h(J_2(h^{-1}(\beta)))))+$$

$$+\nabla_X\big(h(J_2Y)-h(J_1Y)+J_1^*J_2^*\beta+\lambda_2\beta\big)-$$

$$-\Big(J_1J_2(h^{-1}(\nabla_X(h(Y))))+\lambda_1h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))+\lambda_2J_1(h^{-1}(\nabla_X\beta))-\lambda_1J_2(h^{-1}(\nabla_X\beta))+$$

$$+h(J_2(h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))))-h(J_1(h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))))+J_1^*J_2^*(\nabla_X\beta)+\lambda_2\nabla_X\beta\Big).$$

考虑到

$$J_1^*J_2^*h = hJ_2J_1,\quad J_i^*h = hJ_i,\ i=1,2$$

(and, 因此, $h^{-1}J_1^*J_2^* = J_2J_1h^{-1}$和 $h^{-1}J_i^* = J_ih^{-1}$, $i=1,2$), 我们得到

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = h^{-1}\big((\nabla_X(J_2^*J_1^*))(h(Y))+\lambda_2(\nabla_XJ_1^*)\beta-\lambda_1(\nabla_XJ_2^*)\beta\big)+$$

$$+(\nabla_XJ_2^*)(h(Y))-(\nabla_XJ_1^*)(h(Y))+(\nabla_X(J_1^*J_2^*))\beta.$$

此外:

$$(\nabla_X(J_1^*J_2^*))\beta = (\nabla_XJ_1^*)(J_2^*\beta)+J_1^*((\nabla_XJ_2^*)\beta)$$

并得到

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = h^{-1}\big((\nabla_XJ_2^*)(J_1^*(h(Y)))+J_2^*((\nabla_XJ_1^*)(h(Y)))+\lambda_2(\nabla_XJ_1^*)\beta-\lambda_1(\nabla_XJ_2^*)\beta\big)+$$

$$+(\nabla_XJ_2^*)(h(Y))-(\nabla_XJ_1^*)(h(Y))+(\nabla_XJ_1^*)(J_2^*\beta)+J_1^*((\nabla_XJ_2^*)\beta).$$

ˆ ˆ因此， $\nabla^* J = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} (\nabla_X J_2^*)(J_1^*(h(Y))) + J_2^*((\nabla_X J_1^*)(h(Y))) + \lambda_2(\nabla_X J_1^*)\beta - \lambda_1(\nabla_X J_2^*)\beta = 0 \\ (\nabla_X J_2^*)(h(Y)) - (\nabla_X J_1^*)(h(Y)) + (\nabla_X J_1^*)(J_2^*\beta) + J_1^*((\nabla_X J_2^*)\beta) = 0 \end{cases},$$

对任意 X、$Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$。因此，取 $\beta = 0$和 $Y = 0$，我们得出结论：当且仅当 $\nabla^* J = 0$

$$\begin{cases} (\nabla_X J_2^*)(J_1^*(h(Y))) + J_2^*((\nabla_X J_1^*)(h(Y))) = 0 \\ (\nabla_X J_2^*)(h(Y)) - (\nabla_X J_1^*)(h(Y)) = 0 \\ \lambda_2(\nabla_X J_1^*)\beta - \lambda_1(\nabla_X J_2^*)\beta = 0 \\ (\nabla_X J_1^*)(J_2^*\beta) + J_1^*((\nabla_X J_2^*)\beta) = 0 \end{cases},$$

对任意 X、$Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，即

$$\begin{cases} (\nabla J_2^*) \circ J_1^* + J_2^* \circ (\nabla J_1^*) = 0 \\ \nabla J_2^* = \nabla J_1^* \\ \lambda_2 \nabla J_1^* = \lambda_1 \nabla J_2^* \\ (\nabla J_1^*) \circ J_2^* + J_1^* \circ (\nabla J_2^*) = 0 \end{cases}$$

且 (ii) $\Longleftrightarrow$。(iii) 成立，这是因为 $((\nabla_X J_i^*)\beta)(Y) = \beta((\nabla_X J_i)Y)$，对任意 X、$Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，$i = 1, 2$。 □

Corollary 3.17. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 (0, 2) 型张量场，J_1和 J_2为 M上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 J由 (8) 给出。则对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，ˆ$\nabla^{(\alpha)}$ ˆ$J = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \nabla J_1 = \nabla J_2 \\ (\nabla J_i) \circ J_j + J_i \circ (\nabla J_j) = 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j \end{cases}.$$

特别地，如果 $\nabla J_1 = 0$ 和 $\nabla J_2 = 0$，那么对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有 ˆ$\nabla^{(\alpha)}$ ˆ$J = 0$。

Proof. 由于我们有

$$\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = \frac{1+\alpha}{2} \hat{\nabla} \hat{J} + \frac{1-\alpha}{2} \hat{\nabla}^* \hat{J},$$

由命题 3.16 可得结论。 □

此外，对于 $H_1 = H_2 = 0$，我们考虑

$$\hat{J}_i := \begin{pmatrix} J_i & 0 \\ h & -J_i^* \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \quad \hat{J} := \begin{pmatrix} J_1 J_2 & 0 \\ h(J_2 - J_1) & J_1^* J_2^* \end{pmatrix} \tag{9}$$

并且我们可以陈述如下结论。

PROPOSITION 3.18. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 (0, 2) 型张量场，J_1 和 J_2 为 M 上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 $\hat{J}$ 由式 (9) 给出。

(i) 若 $J_1 J_2 = J_2 J_1$，则 $\hat{J}^2 = \begin{pmatrix} J_1^2 J_2^2 & 0 \\ 0 & J_1^{*\,2} \end{pmatrix}$。

(ii) 以下断言等价：

(ii_1) $\hat{\nabla} \hat{J} = 0$;

(ii_2) $\begin{cases} \nabla J_1 = \nabla J_2 \\ (\nabla J_i) \circ J_j + J_i \circ (\nabla J_j) = 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j \end{cases}$;

(ii_3) $\hat{\nabla}^* \hat{J} = 0$.

特别地，若 $\nabla J_1 = 0$ 和 $\nabla J_2 = 0$，则 $\nabla J = 0$ 和 $\nabla^* J = 0$。

PROOF. 我们有

$$\hat{J}^2 = \begin{pmatrix} J_1 J_2 J_1 J_2 & 0 \\ h(J_2 - J_1) J_1 J_2 + J_1^* J_2^* h(J_2 - J_1) & J_1^* J_2^* J_1^* J_2^* \end{pmatrix}.$$

考虑到

$$J_1^* J_2^* h J_1 = h J_2 J_1^2, \quad J_1^* J_2^* h J_2 = h J_1 J_2^2,$$

即可得到 (i)。然后由命题 3.16 可得 (ii)。 □

由推论 3.17 可得

COROLLARY 3.19. 设 ∇ 为一个仿射联络，h 为一个非退化对称 (0, 2) 型张量场，J_1 和 J_2 为 M 上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 J 由 (9) 给出。则对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = 0$ 成立，当且仅当

$$\begin{cases} \nabla J_1 = \nabla J_2 \\ (\nabla J_i) \circ J_j + J_i \circ (\nabla J_j) = 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j \end{cases}.$$

特别地，若 $\nabla J_1 = 0$ 且 $\nabla J_2 = 0$，则对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = 0$。

REMARK 3.20. 在命题 3.18 的假设下，若 $J_1^2 J_2^2 = -I$，则 $\hat{J}$ 是广义近复结构；若 $J_1^2 J_2^2 = I$，则 $\hat{J}$ 是广义近乘积结构。

3.3 通过两个反对易的近复结构或近乘积结构得到的广义三元结构

此外，我们将考虑通过两个反对易的近复结构和近乘积结构 J_1 和 J_2所得到的广义近四元数结构和广义近伪四元数结构。

设 J_1 和 J_2 是两个反对易的 (1, 1) 型张量场，并且

$$\hat{J}_i := \begin{pmatrix} J_i & 0 \\ 0 & -J_i^* \end{pmatrix},\ i = 1, 2. \tag{10}$$

Proposition 3.21. 设 J_1 和 J_2 是 M 上的两个近复结构，满足 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ $J_1J_2 = -J_2J_1$。那么 (J_1, J_2, J_1J_2) 是 M上的广义几乎四元数结构，其中 $\hat{}\hat{}$ J_1 和 J_2 是由 (10) 给出的广义近复结构。

Proof. 我们有 $\hat{}J_1^2 = -I$、$\hat{}J_2^2 = -I$、$\hat{}J_1\hat{}J_2 = -\hat{}J_2\hat{}J_1$，故结论成立。 □

Proposition 3.22. 设 (J_1, J_2) 是 M上的近复乘积结构，即 J_1 是近复结构， J_2 是近乘积结构，且满足 $J_1J_2 = \hat{}\hat{}\hat{}\hat{}-J_2J_1$。那么 (J_1, J_2, J_1J_2) 是 M上的广义近拟四元数结构，其中 $\hat{}\hat{}$ J_1 是由 (10) 给出的广义近复结构， J_2 是由 (10) 给出的广义近乘积结构。

Proof. 我们有 $\hat{}$ $J_1^2 = -I$、$\hat{}J_2^2 = I$、$\hat{}J_1\hat{}J_2 = -\hat{}J_2\hat{}J_1$，因此结论成立。 □

Proposition 3.23. 设 J_1 和 J_2 是 M 上的两个近乘积结构，使得 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ $J_1J_2 = -J_2J_1$。则（J_1J_2， J_1， J_2）是 $\hat{}\hat{}M$ 上的广义近拟四元数结构，其中 J_1 和 J_2 是由（ 10 ）给出的广义近乘积结构。

Proof. 我们有 $\hat{}$ $J_1^2 = I$、$\hat{}J_2^2 = I$、$\hat{}J_1\hat{}J_2 = -\hat{}J_2\hat{}J_1$，因此结论成立。 □

记

$$\hat{J} =: \hat{J}_1\hat{J}_2 = \begin{pmatrix} J_1J_2 & 0 \\ 0 & J_1^*J_2^* \end{pmatrix}. \tag{11}$$

我们可以陈述以下结果。

PROPOSITION 3.24. 设 ∇ 为一个仿射联络， h 为一个非退化对称的 (0, 2) 型张量场， J_1和 J_2为 M上的两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 $\hat{J}$ 由（11）给出。则以下断言等价：

(i) $\nabla J = 0$; (ii) $(\nabla J_i) \circ J_j + J_i \circ (\nabla J_j) = 0$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$; (iii) $\nabla^* J = 0$. 特别地，若 $\nabla J_1 = 0$ 和 $\nabla J_2 = 0$, 则 $\nabla J = 0$ 和 $\nabla^* J = 0$。

PROOF. 对于任意的 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$和 $\eta, \beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，有

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$

$$= \hat{\nabla}_{X+\eta}\Big(J_1J_2Y + J_1^*J_2^*\beta\Big) - \hat{J}\Big(\nabla_X Y + h(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))\Big) =$$

$$= \nabla_X(J_1J_2Y) + h\big(\nabla_X(h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta))\big) - \Big(J_1J_2(\nabla_X Y) + J_1^*J_2^*(h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))))\Big) =$$

$$= (\nabla_X(J_1J_2))Y + h(\nabla_X(h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta))) - J_1^*J_2^*h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))).$$

考虑到

$$J_1^*J_2^*h = hJ_2J_1$$

（并且因此有 $h^{-1}J_1^*J_2^* = J_2J_1h^{-1}$），我们得到

$$h(\nabla_X(h^{-1}(J_1^*J_2^*\beta))) - J_1^*J_2^*h(\nabla_X(h^{-1}(\beta))) =$$

$$= h(\nabla_X((J_2J_1)(h^{-1}(\beta)))) - h((J_2J_1)(\nabla_X(h^{-1}(\beta)))) = h\big((\nabla_X(J_2J_1))(h^{-1}(\beta))\big),$$

因此

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = (\nabla_X(J_1J_2))Y + h\big((\nabla_X(J_2J_1))(h^{-1}(\beta))\big).$$

此外：

$$(\nabla_X(J_1J_2))Y = (\nabla_X J_1)(J_2Y) + J_1((\nabla_X J_2)Y)$$

于是我们得到

$$(\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = (\nabla_X J_1)(J_2Y) + J_1((\nabla_X J_2)Y) +$$

$$+h\big((\nabla_X J_2)(J_1(h^{-1}(\beta))) + J_2((\nabla_X J_1)(h^{-1}(\beta)))\big).$$

因此，$\nabla J = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} (\nabla_X J_1)(J_2Y) + J_1((\nabla_X J_2)Y) = 0 \\ (\nabla_X J_2)(J_1(h^{-1}(\beta))) + J_2((\nabla_X J_1)(h^{-1}(\beta))) = 0 \end{cases},$$

对于任意的 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，即，

$$\begin{cases} (\nabla J_1)\circ J_2 + J_1\circ(\nabla J_2) = 0 \\ (\nabla J_2)\circ J_1 + J_2\circ(\nabla J_1) = 0 \end{cases}$$

并且我们得到 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

Now

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) := \hat{\nabla}^*_{X+\eta}(\hat{J}(Y+\beta)) - \hat{J}(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}(Y+\beta)) =$$
$$= \hat{\nabla}^*_{X+\eta}\Big(J_1J_2Y + J_1^*J_2^*\beta\Big) - \hat{J}\Big(h^{-1}(\nabla_X(h(Y))) + \nabla_X\beta\Big) =$$
$$= h^{-1}(\nabla_X(h(J_1J_2Y))) + \nabla_X(J_1^*J_2^*\beta) -$$
$$-\Big(J_1J_2(h^{-1}(\nabla_X(h(Y)))) + J_1^*J_2^*(\nabla_X\beta)\Big).$$

考虑到

$$J_1^*J_2^*h = hJ_2J_1$$

（因此，$h^{-1}J_1^*J_2^* = J_2J_1h^{-1}$），我们得到

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = h^{-1}\big((\nabla_X(J_2^*J_1^*))(h(Y))\big) + (\nabla_X(J_1^*J_2^*))\beta.$$

此外:

$$(\nabla_X(J_1^*J_2^*))\beta = (\nabla_XJ_1^*)(J_2^*\beta) + J_1^*((\nabla_XJ_2^*)\beta)$$

并且我们得到

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) = h^{-1}\big((\nabla_XJ_2^*)(J_1^*(h(Y))) + J_2^*((\nabla_XJ_1^*)(h(Y)))\big) +$$

$$+(\nabla_XJ_1^*)(J_2^*\beta) + J_1^*((\nabla_XJ_2^*)\beta).$$

^^因此，$\nabla^*J = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} (\nabla_XJ_2^*)(J_1^*(h(Y))) + J_2^*((\nabla_XJ_1^*)(h(Y))) = 0 \\ (\nabla_XJ_1^*)(J_2^*\beta) + J_1^*((\nabla_XJ_2^*)\beta) = 0 \end{cases},$$

对于任意的 X、$Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$，即,

$$\begin{cases} (\nabla J_2^*)\circ J_1^* + J_2^*\circ(\nabla J_1^*) = 0 \\ (\nabla J_1^*)\circ J_2^* + J_1^*\circ(\nabla J_2^*) = 0 \end{cases}$$

且 (ii) $\Longleftrightarrow$(iii) 成立，因为对于任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$, $i = 1, 2$, 有 $((\nabla_XJ_i^*)\beta)(Y) = \beta((\nabla_XJ_i)Y)$。 □

Corollary 3.25. 设 ∇ 为仿射联络， h 为非退化对称 (0, 2) 型张量场， J_1 和 J_2 为 M 上两个 h-对称 (1, 1) 型张量场，并设 J 由式 (11) 给出。则对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = 0$ 当且仅当

$$(\nabla J_i) \circ J_j + J_i \circ (\nabla J_j) = 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j.$$

特别地，若 $\nabla J_1 = 0$ 且 $\nabla J_2 = 0$，则对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，有 $\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = 0$。

Proof. 由于我们有

$$\hat{\nabla}^{(\alpha)} \hat{J} = \frac{1+\alpha}{2} \hat{\nabla} \hat{J} + \frac{1-\alpha}{2} \hat{\nabla}^* \hat{J},$$

由命题 3.24 可得结论。 □

Proposition 3.26. 设 ∇ 为一个仿射联络， h 为一个非退化对称 (0, 2) 型张量场， J_1 和 J_2 为 M 上两个 h-对称的 (1, 1) 型张量场，并设 $\hat{} \hat{J}$ 由式 (11) 给出。那么， J 是 ∇-可积的，当且仅当

$$\begin{cases} N_{J_1 J_2} = 0 \\ (\nabla_{J_1 J_2 X}(J_1^* J_2^*))\beta = J_1^* J_2^*((\nabla_X (J_1^* J_2^*))\beta) \end{cases},$$

对任意 $X \in \Gamma^\infty(TM)$ 和 $\beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$。

Proof. 对于任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$，有

$$N_{\hat{J}}^{\nabla}(X, Y) = N_{J_1 J_2}(X, Y),$$

$$N_{\hat{J}}^{\nabla}(X, h(Y)) = (\nabla_{J_1 J_2 X}(J_1^* J_2^*))(h(Y)) - J_1^* J_2^*((\nabla_X (J_1^* J_2^*))(h(Y))),$$

$$N_{\hat{J}}^{\nabla}(h(X), h(Y)) = 0.$$

于是证明完成。 □

另一方面，有如下结论。

Proposition 3.27. 设 J 是定义在M上的一个 h-对称且 ∇-平行的 (1, 1)型张量场，并且 J, N_J的 Nijenhuis 张量为零。则广义结构 $\hat{J} := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$ 是 ∇-可积的。此外， $\hat{\nabla}^* \hat{J} = 0$。

Proof. 直接计算可得:

$$N_{\hat{J}}^{\nabla}(X, Y) = N_J(X, Y), \quad N_{\hat{J}}^{\nabla}(h(X), h(Y)) = 0,$$

$$N_{\hat{J}}^{\nabla}(X, h(Y)) = -(\nabla_{JX} J^*)(h(Y)) - J^*((\nabla_X J^*)(h(Y))),$$

对任意 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ 均成立。此外，直接计算可得 $\nabla^* J = 0$。 □

4 广义近复乘积结构与广义近双曲乘积结构的例子

为了给出所有类型广义三元结构的例子，本节将介绍广义近复乘积结构和广义近超乘积结构。它们分别由两个彼此可交换的近复结构和两个彼此可交换的近乘积结构 J_1 和 J_2 构成。关于它们，有以下两个结果。

Proposition 4.1. 设 J_1 和 J_2 是 M上的两个可交换近复结构，并设 $\hat{J}_1:=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_1^* \end{pmatrix}$ 和 $\hat{J}_2:=\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & -J_2^* \end{pmatrix}$。则 $(\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_1\hat{J}_2)$ 是 M上的广义近复乘积结构。此外，若 ∇是 M 上的仿射联络，则 J_1 和 J_2 是 ∇-平行的充要条件是 J_1 和 J_2 是 ∇-平行。

Proof. 我们有 $\hat{J}_1\hat{J}_2=\hat{J}_2\hat{J}_1$和 $\hat{J}_1^2=-I,\hat{J}_2^2=-I,(\hat{J}_1\hat{J}_2)^2=\hat{J}_1^2\hat{J}_2^2=I$，因此得到第一个结论。此外，对任意 $X+\eta,Y+\beta\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$，当 $i=1$取 2 时，我们得到 $\hat{\nabla}_{X+\eta}\hat{J}_i)(Y+\beta)=(\nabla_X J_i)Y-(\nabla_X J_i^*)\beta$，证明完毕。 □

Proposition 4.2. 设 J_1 和 J_2 是 M上的两个可交换近乘积结构，并且 $\hat{J}_1:=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_1^* \end{pmatrix}$ 和 $\hat{J}_2:=\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & -J_2^* \end{pmatrix}$。那么，$(\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_1\hat{J}_2)$ 是 M上的广义近超乘积结构。此外，若 ∇是 M上的仿射联络，则 $\hat{\nabla}\hat{J}_1$ 和 J_2 是 ∇-平行的，当且仅当 J_1 和 J_2 是 ∇-平行的。

Proof. 我们有 $\hat{J}_1\hat{J}_2=\hat{J}_2\hat{J}_1$和 $\hat{J}_1^2=I,\hat{J}_2^2=I,(\hat{J}_1\hat{J}_2)^2=\hat{J}_1^2\hat{J}_2^2=I$，因此得到第一个结论。按照前一个命题中的方法进行直接计算，可得第二个结论。

□

5 使结构平行化的广义仿射联络

我们回顾以下 [5]:

Definition 5.1. 如果 $\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)\times\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)\to\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$ 是 $TM\oplus T^*M$ 上的仿射联络，或是 M 上的广义仿射联络，则称其为 D：当它是$\mathbb{R}$-双线性的，并且对于任意 $f\in C^\infty(M)$ 及任意 σ、$\tau\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$，都有

$$D_{f\sigma}\tau = fD_{\sigma}\tau,$$

$$D_{\sigma}(f\tau) = \sigma(f)\tau + fD_{\sigma}\tau,$$

其中，对于 $X+\eta \in \Gamma^{\infty}(TM \oplus T^{*}M)$，$(X+\eta)(f) := X(f)$。

本节首先在 $TM \oplus T^{*}M$ 上构造一个使广义近拟四元数结构平行化的仿射联络，将 [7] 的结果推广到我们的情形；随后定义使广义几乎四元数结构平行化的广义小俣联络。

5.1 广义超四元数结构的典范联络

^ ^ 设 M 是一个 n维光滑流形，设 J_1 和 J_2 是两个反交换的广义近乘积结构，并设 $(J_1, J_2, J = J_1J_2)$是与之对应的广义近拟四元数结构。设 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是 TM的一个局部标架，$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 $T^{*}M$的一个局部标架。那么 $\{\sigma_{ij} := X_i + \alpha_j\}_{i,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ n}$是 $TM \oplus T^{*}M$的一个局部标架。我们用 $V_{\pm}(J_k)$表示 J_k关于 $k = 1$的 ± 1特征子丛，2。立即可得如下结论：

$$\eta_{ij} := \sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij} \in V_{+}(\hat{J}_1),$$

$$\hat{J}_2\eta_{ij} = \hat{J}_2(\sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij}) \in V_{-}(\hat{J}_1),$$

$$\eta_{ij} + \hat{J}_2\eta_{ij} = \sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij} + \hat{J}_2(\sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij}) \in V_{+}(\hat{J}_2),$$

$$\eta_{ij} - \hat{J}_2\eta_{ij} = \sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij} - \hat{J}_2(\sigma_{ij} + \hat{J}_1\sigma_{ij}) \in V_{-}(\hat{J}_2).$$

^ ^ ^ 此外，我们记 $V_1 := V_{+}(J_1)$、$V_2 := V_{-}(J_1)$ 和 $V_3 := V_{+}(J_2)$，并注意到

$$TM \oplus T^{*}M = V_1 \oplus V_2.$$

我们将关于 [7] 的典范联络的结果推广如下。

^ ^ ^LEMMA 5.2. 设 (J_1, J_2, J) 是广义近拟四元数结构，且令D为 $TM \oplus T^{*}M$上的仿射联络。则以下条件等价：(i) 对任意 $\sigma \in \Gamma^{\infty}(TM \oplus T^{*}M)$ 及任意 $\tau_l \in \Gamma^{\infty}(V_l)$，$D_{\sigma}\tau_l \in \Gamma^{\infty}(V_l)$，$l = 1$，2，3；^ ^ (ii) $DJ_1 = DJ_2 = 0$.

PROOF. 这可直接由 D的性质、 V_l 在 $l=1$，2，3时的性质以及以下内容得出:

$$D_\sigma\eta_{ij}=D_\sigma\sigma_{ij}+\hat{J}_1(D_\sigma\sigma_{ij})+(D_\sigma\hat{J}_1)\sigma_{ij},$$
$$D_\sigma(\hat{J}_2\eta_{ij})=\hat{J}_2(D_\sigma\eta_{ij})+(D_\sigma\hat{J}_2)\eta_{ij},$$
$$D_\sigma(\eta_{ij}+\hat{J}_2\eta_{ij})=D_\sigma\eta_{ij}+\hat{J}_2(D_\sigma\eta_{ij})+(D_\sigma\hat{J}_2)\eta_{ij}.$$

□

THEOREM 5.3. 设 M 为一个光滑流形， ∇ 为 Mˆ ˆ ˆ上的一个仿射联络，且(J_1, J_2, J)为一个广义近拟四元数结构。那么，在 $TM\oplus T^*M$上存在唯一的仿射联络 D，满足以下性质:

(i) $D\hat{J}_1=D\hat{J}_2=D^{\hat{J}}=0$;

(ii) 对任意 $\sigma\in\Gamma^\infty(V_1)$和任意 $\tau\in\Gamma^\infty(V_2)$，有 $T^D(\sigma,\tau)=0$，其中 T^D是 D 的挠率张量，其定义为给定联络 ∇ 的括号:

$$T^D(\sigma,\tau):=D_\sigma\tau-D_\tau\sigma-[\sigma,\tau]_\nabla.$$

ˆ ˆ 联络 D称为(J_1, J_2, ∇)的典范联络。

PROOF. 假设这样的 D 存在，令ˆ J_1^+、ˆJ_1^-分别为作用于 V_1 和 V_2截面上的典范投影，其定义如下:

$$2\hat{J}_1^+\sigma:=2\sigma^+=\sigma+\hat{J}_1\sigma,\ 2\hat{J}_1^-\sigma:=2\sigma^-=\sigma-\hat{J}_1\sigma,\ \sigma\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M).$$

那么，对于任意 $\sigma\in\Gamma^\infty(V_1)$ 和任意 $\tau\in\Gamma^\infty(V_2)$，我们有

$$0=T^D(\sigma,\tau)=D_\sigma\tau-D_\tau\sigma-\hat{J}_1^+[\sigma,\tau]_\nabla-\hat{J}_1^-[\sigma,\tau]_\nabla.$$

利用引理 5.2，我们得到

$$D_\sigma\tau=\hat{J}_1^-[\sigma,\tau]_\nabla,\ D_\tau\sigma=\hat{J}_1^+[\tau,\sigma]_\nabla.$$

容易验证，这些条件刻画了 D。事实上，若 $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$，我们将 $\sigma=\sigma^++\sigma^-$ 和 $\tau=\tau^++\tau^-$ 分解，便得到

$$D_\sigma\tau=D_{\sigma^+}\tau^++D_{\sigma^+}\tau^-+D_{\sigma^-}\tau^++D_{\sigma^-}\tau^-.$$

注意到

$$D_{\sigma^+}\tau^-=\hat{J}_1^-([\sigma^+,\tau^-]_\nabla)=([\sigma^+,\tau^-]_\nabla)^-,$$
$$D_{\sigma^-}\tau^+=\hat{J}_1^+([\sigma^-,\tau^+]_\nabla)=([\sigma^-,\tau^+]_\nabla)^+,$$

$$D_{\sigma^+}\tau^+ = D_{\sigma^+}(\hat{J}_2^2(\hat{J}_1^+\tau)) = \hat{J}_2(D_{\sigma^+}(\hat{J}_2(\hat{J}_1^+\tau))) = \hat{J}_2(D_{\sigma^+}(\hat{J}_2(\hat{J}_1^+\tau)))^- =$$
$$= \hat{J}_2\hat{J}_1^-[\sigma^+, \hat{J}_2(\hat{J}_1^+\tau)]_\nabla,$$
$$D_{\sigma^-}\tau^- = D_{\sigma^-}(\hat{J}_2^2(\hat{J}_1^-\tau)) = \hat{J}_2(D_{\sigma^-}(\hat{J}_2(\hat{J}_1^-\tau))) = \hat{J}_2(D_{\sigma^-}(\hat{J}_2(\hat{J}_1^-\tau)))^+ =$$
$$= \hat{J}_2\hat{J}_1^+[\sigma^-, \hat{J}_2(\hat{J}_1^-\tau)]_\nabla.$$

那么，利用 $\hat{J}_2\hat{J}_1^- = \hat{J}_1^+\hat{J}_2$ 和 $\hat{J}_2\hat{J}_1^+ = \hat{J}_1^-\hat{J}_2$ 这一事实，我们得到

$$D_\sigma\tau = \hat{J}_1^+\Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big) + \hat{J}_1^-\Big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big) =$$
$$= \Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big)^-.$$

因此，条件 (i) 和 (ii) 唯一确定了联络 D。

现在证明这样的 D 满足这两个条件。我们很容易验证， D是 $TM \oplus T^*M$上的仿射联络，且条件 (i) 成立。此外，注意到对于任意$\eta \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，有

$$(\hat{J}_1\eta)^+ = \hat{J}_1\eta^+ = \eta^+, \ (\hat{J}_1\eta)^- = \hat{J}_1\eta^- = -\eta^-,$$
$$(\hat{J}_2\eta)^- = \hat{J}_2\eta^+, \ (\hat{J}_2\eta)^+ = \hat{J}_2\eta^-.$$

于是，对于任意 σ、$\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，有

$$D_\sigma(\hat{J}_1\tau) = \Big([\sigma^-, (\hat{J}_1\tau)^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2(\hat{J}_1\tau)^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, (\hat{J}_1\tau)^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2(\hat{J}_1\tau)^-]_\nabla\Big)^- =$$
$$= \Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, -\tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, -\hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big)^- =$$
$$= \hat{J}_1\Big(\big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\big)^+ + \big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\big)^-\Big) = \hat{J}_1(D_\sigma\tau),$$

因此， $DJ_1 = 0$，类似的计算可得 $DJ_2 = 0$，故证明完成。 □

作为一个应用，我们立即得到以下结论。

PROPOSITION 5.4. 设 (M, h, ∇) 是一个拟统计流形，并且 J 是 h-对称、 ∇-平行的 (1, 1)型张量场，其定义在 M 上，且 J, N_J, $\hat{J}\hat{J}\hat{J}$ 的 Nijenhuis 张量消失。设 (J_-, J_+, J) 是由 (3) 和 (4) 中给出的 $J_\mp$ 和 $\hat{J}\hat{J}J$ 所定义的广义超四元数结构。那么，典范联络就是由 (1) 给出的对偶联络 ∇^* 。

PROOF. 这直接由推论 3.10 得出。 □

ˆ ˆ 令我们考虑由 ∇ 定义的 J_1 和 J_2 的 Fr¨olicher-Nijenhuis 括号，其中 σ、$\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，如下：

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma,\tau) := [\hat{J}_1\sigma, \hat{J}_2\tau]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma, \hat{J}_1\tau]_\nabla + \hat{J}_1\hat{J}_2[\sigma,\tau]_\nabla +$$

$$+\hat{J}_2\hat{J}_1[\sigma,\tau]_\nabla - \hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma,\tau]_\nabla - \hat{J}_1[\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla - \hat{J}_2[\hat{J}_1\sigma,\tau]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla.$$

由于ˆ ˆ J_1 和 J_2 反对易，我们得到

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma,\tau) = [\hat{J}_1\sigma, \hat{J}_2\tau]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma, \hat{J}_1\tau]_\nabla -$$

$$-\hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma,\tau]_\nabla - \hat{J}_1[\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla - \hat{J}_2[\hat{J}_1\sigma,\tau]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla.$$

LEMMA 5.5. 设 M 是一个光滑流形，∇ 是 M上的一个仿射联络。设ˆ ˆ ˆ(J_1, J_2, J)是一个广义近拟四元数结构，且 D是 $TM \oplus T^*M$上(J_1, J_2, ∇)的典范联络。那么以下断言成立：

(i) $[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma,\tau) = 2\hat{J}_2(T^D(\sigma,\tau))$，对任意 $\sigma,\tau \in \Gamma^\infty(V_1)$成立；**(ii)** $[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma, \tau) = -2\hat{J}_2(T^D(\sigma,\tau))$，对任意 $\sigma,\tau \in \Gamma(V_2)$成立；**(iii)** $[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma,\tau) = 2\hat{J}_1^-[\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla - 2\hat{J}_1^+[\hat{J}_2\sigma,\tau]_\nabla$，对任意 $\sigma \in \Gamma^\infty(V_1)$ $\tau \in \Gamma^\infty(V_2)$成立。

PROOF. **(i)** 对于 $\sigma = \sigma^+, \tau = \tau^+ \in \Gamma^\infty(V_1)$，利用 D 的性质，我们 get

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma^+,\tau^+) = [\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma^+, \tau^+]_\nabla - \hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma^+,\tau^+]_\nabla - \hat{J}_1[\sigma^+,\hat{J}_2\tau^+]_\nabla -$$

$$-\hat{J}_2[\sigma^+,\tau^+]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+,\tau^+]_\nabla = -T^D(\sigma^+,\hat{J}_2\tau^+) - T^D(\hat{J}_2\sigma^+,\tau^+) +$$

$$+\hat{J}_1T^D(\hat{J}_2\sigma^+,\tau^+) + \hat{J}_1T^D(\sigma^+,\hat{J}_2\tau^+) + \hat{J}_2T^D(\sigma^+,\tau^+) + \hat{J}_2T^D(\sigma^+,\tau^+) = 2\hat{J}_2T^D(\sigma,\tau).$$

(ii) 对于 $\sigma = \sigma^-, \tau = \tau^- \in \Gamma^\infty(V_2)$，利用 D 的性质，我们得到

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma^-,\tau^-) = [-\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma^-, -\tau^-]_\nabla - \hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma^-,\tau^-]_\nabla - \hat{J}_1[\sigma^-,\hat{J}_2\tau^-]_\nabla -$$

$$-\hat{J}_2[-\sigma^-,\tau^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^-,-\tau^-]_\nabla = T^D(\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-) + T^D(\hat{J}_2\sigma^-,\tau^-) +$$

$$+\hat{J}_1T^D(\hat{J}_2\sigma^-,\tau^-) + \hat{J}_1T^D(\sigma^-,\hat{J}_2\tau^-) - \hat{J}_2T^D(\sigma^-,\tau^-) - \hat{J}_2T^D(\sigma^-,\tau^-) = -2\hat{J}_2T^D(\sigma,\tau).$$

（iii）最后，对于 $\sigma = \sigma^+ \in \Gamma^\infty(V_1)$ $\tau = \tau^- \in \Gamma^\infty(V_2)$，利用 D 的性质可得

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma^+,\tau^-) = [\sigma^+, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma^+, -\tau^-]_\nabla - \hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma^+,\tau^-]_\nabla - \hat{J}_1[\sigma^+,\hat{J}_2\tau^-]_\nabla -$$

$$-\hat{J}_2[\sigma^+,\tau^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+,-\tau^-]_\nabla = -T^D(\sigma^+,\hat{J}_2\tau^-) + T^D(\hat{J}_2\sigma^+,\tau^-) +$$

$$+\hat{J}_1T^D(\hat{J}_2\sigma^+,\tau^-) + \hat{J}_1T^D(\sigma^+,\hat{J}_2\tau^-) + \hat{J}_2T^D(\sigma^+,\tau^-) - \hat{J}_2T^D(\sigma^+,\tau^-) =$$

$$= \hat{J}_1 T^D(\sigma^+, \hat{J}_2\tau^-) - \hat{J}_1 T^D(\sigma^+, \hat{J}_2\tau^-) + \hat{J}_1 T^D(\hat{J}_2\sigma^+, \tau^-) + \hat{J}_1 T^D(\hat{J}_2\sigma^+, \tau^-) =$$
$$= 2\hat{J}_1^-[\sigma, \hat{J}_2\tau]_\nabla - 2\hat{J}_1^+[\hat{J}_2\sigma, \tau]_\nabla$$

证明完毕。 □

THEOREM 5.6. 设 M 是一个光滑流形，且 ∇ 是 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}M$上的一个仿射联络。设 (J_1, J_2, J) 是一个广义近拟四元数结构，且 D 是 $TM \oplus T^*M$上与 (J_1, J_2, ∇) 相应的典范联络。那么以下条件等价:

$\hat{}\,\hat{}$(i) $[J_1, J_2]_\nabla = 0$; (ii) D 无挠; $\hat{}\,\hat{}$ (iii) J_1 和 J_2 是 ∇-可积的。

PROOF. 设 $[\hat{}J_1, \hat{}J_2]_\nabla = 0$。那么，由引理 5.5 可得，对于任意 $\sigma, \tau \in \Gamma^\infty(V_1)$ 以及任意 $\sigma, \tau \in \Gamma^\infty(V_2)$, $T^D(\sigma, \tau) = 0$。另一方面，对于 $\sigma \in \Gamma^\infty(V_1)$ 和 $\tau \in \Gamma^\infty(V_2)$, $T^D(\sigma, \tau)$ 消失，因为 D 是典范联络。因此 $T^D = 0$。

现在设 $T^D = 0$。那么，对于任意 σ、$\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，我们得到 $\hat{}\,\hat{}$ $[\sigma, \tau]_\nabla = D_\sigma\tau - D_\tau\sigma$；利用 $DJ_1 = DJ_2 = 0$ 这一事实，我们立即得到 $N^\nabla_{\hat{J}_1} = 0$ 和 $N^{\nabla_{\hat{}J_2}} = 0$。此外，注意到由命题 2.12 可知，$\hat{}J$ 也是 ∇-可积的。

现在，设 $\hat{}\,J_1$ 和 $\hat{}\,J_2$ 是 ∇-可积的。那么，对于 $\sigma = \sigma^+$、$\tau = \tau^+ \in \Gamma^\infty(V_1)$，我们得到

$$N^\nabla_{\hat{J}_1}(\sigma^+, \tau^+) = 2\hat{J}_1 T^D(\sigma^+, \tau^+) = 0$$

$\hat{}\,\hat{}$，并且由引理 5.5，$[J_1, J_2](\sigma, \tau) = 0$ 对任意 σ、$\tau \in \Gamma^\infty(V_1)$ 成立。

此外，对于 $\sigma = \sigma^-$、$\tau = \tau^- \in \Gamma^\infty(V_2)$，我们得到

$$N^\nabla_{\hat{J}_2}(\sigma^-, \tau^-) = -T^D(\hat{J}_2\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-) - T^D(\sigma^-, \tau^-) = 0$$

$\hat{}\,\hat{}$ 并由引理 5.5，$[J_1, J_2](\sigma, \tau) = 0$ 对任意 $\sigma, \tau \in \Gamma^\infty(V_2)$。

最后，对于任意 $\sigma = \sigma^+ \in \Gamma^\infty(V_1)$ $\tau = \tau^- \in \Gamma^\infty(V_2)$，我们有

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_\nabla(\sigma, \tau) = 2\hat{J}_1^-[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla - 2\hat{J}_1^+[\hat{J}_2\sigma^+, \tau^-]_\nabla - =$$
$$= 2\hat{J}_1^-\Big(D_{\sigma^+}\hat{J}_2\tau^- - D_{\hat{J}_2\tau^-}\sigma^+ - T^D(\sigma^+, \hat{J}_2\tau^-)\Big) -$$
$$-2\hat{J}_1^+\Big(D_{\hat{J}_2\sigma^+}\tau^- - D_{\tau^-}\hat{J}_2\sigma^+ - T^D(\hat{J}_2\sigma^+, \tau^-)\Big) =$$
$$= 2\hat{J}_1^-\hat{J}_2 D_{\sigma^+}\tau^- - 2\hat{J}_1^- D_{\hat{J}_2\tau^-}\sigma^+ - 2\hat{J}_1^+ D_{\hat{J}_2\sigma^+}\tau^- + 2\hat{J}_1^+\hat{J}_2 D_{\tau^-}\sigma^+.$$

Now, 注意， $D_{\sigma^+}\tau^- \in \Gamma^\infty(V_2)$ ， $\hat{}$那么 $J_2^{-}D_{\sigma^+}\tau^- \in \Gamma^\infty(V_1)$ ， $\hat{}$因此 $J_1^{-}\hat{}J_2^{-}D_{\sigma^+}\tau^- = 0$ 。 $\hat{}\hat{}$ 类似地， $D_{\hat{}J_2\tau^-}\sigma^+ \in \Gamma^\infty(V_1)$，因此 $J_1^{-}D_{\hat{}J_2\tau^-}\sigma^+ = 0$, $D_{\hat{}J_2\sigma^+}\tau^-$, $J_2D_{\tau^-}\sigma^+ \in \Gamma^\infty(V_2)$，因此 $\hat{}J_1^{+}D_{\hat{}J_2\sigma^+}\tau^- = 0$， $\hat{}J_1^{+}\hat{}J_2D_{\tau^-}\sigma^+ = 0$。

因此 $[\hat{}\hat{}J_1, J_2]_\nabla(\sigma,\tau) = 0$ 对任意 $\sigma,\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$ 均成立，证明完毕 e. □

5.2 广义四元数结构的典范联络

根据小俣定理 [14], ，我们知道，对于可积的近四元数结构，存在唯一的使其平行的无挠仿射联络，称为典范联络。

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 对于光滑流形 M 上的广义几乎四元数结构（J_1, J_2, J_3），利用 [1], 中给出的 Obata 联络的显式表达式，我们在 $TM \oplus T^*M$, D 上定义一个仿射联络，称为广义小俣联络，如下：

$$D_\sigma\tau = \frac{1}{12}\Big\{\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\hat{J}_\alpha([\hat{J}_\beta\sigma,\hat{J}_\gamma\tau]_\nabla + [\hat{J}_\beta\tau,\hat{J}_\gamma\sigma]_\nabla) + 2\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{J}_\alpha([\hat{J}_\alpha\sigma,\tau]_\nabla + [\hat{J}_\alpha\tau,\sigma]_\nabla) - \\ -\sum_{\alpha=1}^{3}N^\nabla_{\hat{J}_\alpha}(\sigma,\tau)\Big\} + \frac{1}{2}[\sigma,\tau]_\nabla, \tag{12}$$

其中 ∇ 是 M, $\sigma,\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$ 上给定的仿射联络，第一项求和中的 α,β,γ 按 1、2、3 的循环置换取值。

Proposition 5.7. 设 M 为一个光滑流形， ∇ 为 M上的一个仿射联络，$\hat{}\hat{}\hat{}$设 (J_1, J_2, J_3) 为一个广义几乎四元数结构，且 D 为广义小俣联络。则：

$$D\hat{J}_1 = D\hat{J}_2 = D\hat{J}_3 = 0.$$

Proof. 对于任意 $\sigma,\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，广义小俣联络 (12) 由下式给出：

$$D_\sigma\tau = \frac{1}{12}\big\{\hat{J}_1[\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_3\tau]_\nabla - \hat{J}_1[\hat{J}_3\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla + \hat{J}_2[\hat{J}_3\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla - \hat{J}_2[\hat{J}_1\sigma,\hat{J}_3\tau]_\nabla + \hat{J}_3[\hat{J}_1\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla - \\ -\hat{J}_3[\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla + \hat{J}_1[\hat{J}_1\sigma,\tau]_\nabla - 3\hat{J}_1[\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla + \hat{J}_2[\hat{J}_2\sigma,\tau]_\nabla - 3\hat{J}_2[\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla + \hat{J}_3[\hat{J}_3\sigma,\tau]_\nabla - \\ -3\hat{J}_3[\sigma,\hat{J}_3\tau]_\nabla + [\hat{J}_1\sigma,\hat{J}_1\tau]_\nabla + [\hat{J}_2\sigma,\hat{J}_2\tau]_\nabla + [\hat{J}_3\sigma,\hat{J}_3\tau]_\nabla + 3[\sigma,\tau]_\nabla\big\}.$$

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 直接计算得出 $D_\sigma(J_1\tau) = J_1(D_\sigma\tau)$， $D_\sigma(J_2\tau) = J_2(D_\sigma\tau)$，因此 $DJ_1 = \hat{}\hat{}\hat{}\hat{}DJ_2 = 0$ ，此外 $D(J_1J_2) = DJ_3 = 0$，故证明完毕。 □

Proposition 5.8. 广义小俣联络的挠率 T^D 为:

$$T^D(\sigma,\tau)=\frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{3}N^{\nabla}_{\hat{J}_\alpha}(\sigma,\tau),$$

对任意 $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$。

Proof. 根据由给定联络 ∇的括号定义的 D 的挠率张量，即 $T^D(\sigma,\tau)$: $=D_\sigma\tau-D_\tau\sigma-[\sigma,\tau]_\nabla$，直接计算可得该结论。

□

Corollary 5.9. 设 M 为光滑流形， ∇ 为定义在 Mˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ 上的仿射联络，且 (J_1,J_2,J_3) 为广义几乎四元数结构。那么， J_1,J_2,J_3 是 ∇- 可积的，当且仅当广义小俣联络无挠。

ˆ ˆ ˆProof. 事实上，若 J_1,J_2,J_3 是 ∇-可积的，则由命题 5.8 可得$T^D=0$。另一方面，由于 D 使ˆ J_1、ˆJ_2 和ˆ J_3平行，挠率ˆ张量的消失意味着，对于 $i=1$（其中为 2、3）， J_i 的 Nijenhuis 张量为 0。 □

记 $E=TM\oplus T^*M$和 $E^{\mathbb{C}}=(TM\oplus T^*M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$。ˆ J_i、 $i=1$ 的 $\pm\sqrt{-1}$ 特征子空间分解，2、3，为 $E^{\mathbb{C}}=E^{1,0}_i\oplus E^{0,1}_i$，其中

$$E_i^{1,0}=\{\sigma-\sqrt{-1}\hat{J}_i\sigma\,|\,\sigma\in E\},\ E_i^{0,1}=\overline{E_i^{1,0}}=\{\sigma+\sqrt{-1}\hat{J}_i\sigma\,|\,\sigma\in E\}.$$

令 $V_1=E^{1,0}_1$、 $V_2=E^{0,1}_1$ 和 $V_3=E^{1,0}_2$。我们立即得到，对于任意 $\tau\in\Gamma^\infty(V_1)$， ˆ $J_2\tau\in\Gamma^\infty(V_2)$。最后，定义典范投影:

$$\hat{J}_i^-:E\to E_i^{1,0},\ \hat{J}_i^+:E\to E_i^{0,1},\ \hat{J}_i^\mp\tau:=\tau_i^\mp=\frac{1}{2}(\tau\mp\sqrt{-1}\hat{J}_i\tau).$$

直接计算立即得到以下结果。

Lemma 5.10. 对于任意 $\sigma\in\Gamma^\infty(E)$，我们有

$$(\hat{J}_1\sigma)^\mp=\hat{J}_1\sigma^\mp=\pm\sqrt{-1}\sigma^\mp,\ \ (\hat{J}_2\sigma)^\mp=\hat{J}_2\sigma^\pm,\ \ (\hat{J}_3\sigma)^\mp=\mp\sqrt{-1}(\hat{J}_2\sigma^\mp).$$

ˆ ˆ ˆLemma 5.11. 设 (J_1,J_2,J) 为一个广义几乎四元数结构，设 D 是 $E=TM\oplus T^*M$ 上的仿射联络，并考虑将 D 扩张到 $E^{\mathbb{C}}$ 上。则以下条件等价:

(i) $D_\sigma\tau_i\in\Gamma^\infty(V_i)$，对于任意 $\sigma\in\Gamma^\infty(TM\oplus T^*M)$ 和任意 $\tau_i\in\Gamma^\infty(V_i)$， $i=1$, 2， 3； ˆ ˆ (ii) $DJ_1=DJ_2=0$.

PROOF. 这可由 D 的性质、 V_i 对于 $i = 1$、2、3 的性质以及以下内容立即得出:

$$D_\sigma(\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_1\tau) = D_\sigma\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_1(D_\sigma\tau) \mp (D_\sigma\hat{J}_1)\tau,$$
$$D_\sigma(\hat{J}_2(\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_1\tau)) = \hat{J}_2(D_\sigma(\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_1\tau)) + (D_\sigma\hat{J}_2)(\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_1\tau),$$
$$D_\sigma(\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_2\tau) = D_\sigma\tau \mp \sqrt{-1}\hat{J}_2(D_\sigma\tau) \mp (D_\sigma\hat{J}_2)\tau,$$

其中 $\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$。 □

THEOREM 5.12. 设 M 为一个光滑流形， ∇ 为 M 上的一个仿射联络，且 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}(J_1, J_2, J)$ 为一个广义四元数结构。则 $TM \oplus T^*M$ 上存在唯一的仿射联络 D，满足以下性质:

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ (i) $DJ_1 = DJ_2 = DJ = 0$;

(ii) 对任意 $\sigma \in \Gamma^\infty(V_1)$ 及任意 $\tau \in \Gamma^\infty(V_2)$，均有 $T^D(\sigma, \tau) = 0$，其中 T^D 是将 D 延拓到 $E^{\mathbb{C}}$ 后得到的挠率张量，该延拓由给定联络 ∇ 的括号定义如下:

$$T^D(\sigma, \tau) := D_\sigma\tau - D_\tau\sigma - [\sigma, \tau]_\nabla.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 联络 D 将称为 (J_1, J_2, ∇) 的典范联络。

PROOF. 我们基本上按照赜四元数情形的处理方式进行，只需作相应的调整。假设这样的 D存在，令 $\hat{}\,J_1^-$、$\hat{}J_1^+$为作用于 V_1 和 V_2的截面上的典范投影。

于是，对于任意的 $\sigma \in \Gamma^\infty(V_1)$ 和任意的 $\tau \in \Gamma^\infty(V_2)$，我们有

$$0 = T^D(\sigma, \tau) = D_\sigma\tau - D_\tau\sigma - \hat{J}_1^-[\sigma, \tau]_\nabla - \hat{J}_1^+[\sigma, \tau]_\nabla.$$

利用引理 5.11，我们得到

$$D_\sigma\tau = \hat{J}_1^+[\sigma, \tau]_\nabla,\ D_\tau\sigma = \hat{J}_1^-[\tau, \sigma]_\nabla.$$

这些条件刻画了 D。事实上，若 σ、$\tau \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$，则将$\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ 和 $\tau = \tau^+ + \tau^-$ 分解后，我们得到

$$D_\sigma\tau = D_{\sigma^-}\tau^- + D_{\sigma^-}\tau^+ + D_{\sigma^+}\tau^- + D_{\sigma^+}\tau^+.$$

注意到

$$D_{\sigma^+}\tau^- = \hat{J}_1^-([\sigma^+, \tau^-]_\nabla) = ([\sigma^+, \tau^-]_\nabla)^-,$$
$$D_{\sigma^-}\tau^+ = \hat{J}_1^+([\sigma^-, \tau^+]_\nabla) = ([\sigma^-, \tau^+]_\nabla)^+,$$

$$D_{\sigma^+}\tau^+ = D_{\sigma^+}(-\hat{J}_2^2\tau^+) = -\hat{J}_2(D_{\sigma^+}(\hat{J}_2\tau^+)) = -\hat{J}_2(D_{\sigma^+}(\hat{J}_2\tau^+)^-) =$$
$$= -\hat{J}_2([\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+)]_\nabla)^-,$$
$$D_{\sigma^-}\tau^- = D_{\sigma^-}(-\hat{J}_2^2\tau^-) = -\hat{J}_2(D_{\sigma^-}(\hat{J}_2\tau^-)) = -\hat{J}_2(D_{\sigma^-}(\hat{J}_2\tau^-)^+) =$$
$$= -\hat{J}_2([\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla)^+.$$

然后，利用 $\hat{J}_2\hat{J}_1^- = \hat{J}_1^+\hat{J}_2$ 和 $\hat{J}_2\hat{J}_1^+ = \hat{J}_1^-\hat{J}_2$ 这一事实，我们得到

$$D_\sigma\tau = \hat{J}_1^+\Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big) + \hat{J}_1^-\Big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big) =$$
$$= \Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big)^-.$$

因此，条件 (i) 和 (ii) 唯一确定了联络 D。

现在我们证明这样的 D 满足这两个条件。我们很容易验证，D 是 $TM \oplus T^*M$ 上的仿射联络，且条件 (i) 成立。此外，根据引理 5.10，对于任意 σ、$\tau \in \Gamma^\infty$（$TM \oplus T^*M$），有

$$D_\sigma(\hat{J}_1\tau) = \Big([\sigma^-, (\hat{J}_1\tau)^+]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2(\hat{J}_1\tau)^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, (\hat{J}_1\tau)^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2(\hat{J}_1\tau)^-]_\nabla\Big)^- =$$
$$= -\sqrt{-1}\Big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\Big)^+ + \sqrt{-1}\Big([\sigma^+, -\tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, -\hat{J}_2\tau^-]_\nabla\Big)^- =$$
$$= \hat{J}_1\Big(\big([\sigma^-, \tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla\big)^+ + \big([\sigma^+, \tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla\big)^-\Big) = \hat{J}_1(D_\sigma\tau),$$

因此，$DJ_1 = 0$。通过类似的计算，我们得到

$$D_\sigma(\hat{J}_2\tau) = \Big([\sigma^-, (\hat{J}_2\tau)^+]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2(\hat{J}_2\tau)^+]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, (\hat{J}_2\tau)^-]_\nabla - \hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2(\hat{J}_2\tau)^-]_\nabla\Big)^- =$$
$$= \Big([\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^+, \tau^-]_\nabla\Big)^+ + \Big([\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla + \hat{J}_2[\sigma^-, \tau^+]_\nabla\Big)^- =$$
$$= \hat{J}_2\Big(\Big(-\hat{J}_2[\sigma^-, \hat{J}_2\tau^-]_\nabla + [\sigma^+, \tau^-]_\nabla\Big)^- + \Big(-\hat{J}_2[\sigma^+, \hat{J}_2\tau^+]_\nabla + [\sigma^-, \tau^+]_\nabla\Big)^+\Big) = \hat{J}_2(D_\sigma\tau),$$

thus, $D\hat{J}_2 = 0$. Then the proof is complete. □

作为一个应用，我们得到如下结论。

Proposition 5.13. 设 M 是一个光滑流形，∇ 是 M 上的仿射联络，且 (J_1, J_2, J) 是一个广义四元数结构。那么典范联络就是广义小俣联络。

Proof. 若 J_1, J_2, J 是 ∇-可积的，则由命题 5.8 可知，广义小俣联络无挠；由命题 5.7 可知，它平行化四元数结构，因此满足定理 5.12 的假设，特别地，它就是典范联络。

□

5.3 示例

PROPOSITION 5.14. 设 (h, J_1) 和 (h, J_2) 是两个 Norden 结构（或一个 Norden 结构和一个拟Norden 结构，或两个拟Norden 结构），且 $J_1J_2 = -J_2J_1$，并设 ∇ 是 (J_1, J_2, J_1J_2) 的典范联络。若 (h, ∇) 是统计结构，则 J_1 和 $J_2\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 是 ∇- 可积的，即 (J_1, J_2, J_1J_2) 是广义四元数结构（分别为广义拟四元数结构），其中 J_1 和 J_2 由式 (9) 或式 (10) 给出。

PROOF. 由 $N_{J_1} = N_{J_2} = 0$蕴含 $N^{\nabla_{\hat{}}}{}_{J_1} = N^{\nabla}_{\hat{J}_2} = 0$这一事实可知。 □

基于这一结果，我们将证明以下结论。

PROPOSITION 5.15. 设(h, J_1)和(h, J_2)是定义在 M 上的两个 Norden 结构（分别为一个 Norden 结构和一个拟Norden结构，或两个拟Norden结构），满足 $J_1J_2 = -J_2J_1$，且令 ∇ 为(J_1, J_2, J_1J_2)的典范联络。若(h, ∇)是一个统计结构，则(J_1, J_2, J_1J_2)的典范联络是由式(1)给出的对偶联络 ∇^*，其中 J_1 和 J_2 由式(9)或式(10)给出。

PROOF. 通过直接计算，在这两种情况下，对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\eta, \beta \in \Gamma(T^*M)$，我们得到

$$(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}\hat{J}_i)(Y+\beta) := \hat{\nabla}^*_{X+\eta}(\hat{J}_i(Y+\beta)) - \hat{J}_i(\hat{\nabla}^*_{X+\eta}Y + \beta) =$$

$$= h^{-1}((\nabla_X J_i^*)(h(Y))) - (\nabla_X J_i^*)\beta,\ i = 1, 2.$$

现在考虑到

$$\big((\nabla_X J_i^*)\eta\big)(Y) := (\nabla_X(J_i^*\eta))(Y) - J_i^*(\nabla_X\eta)(Y) :=$$

$$:= X((J_i^*\eta)(Y)) - (J_i^*\eta)(\nabla_X Y) - (\nabla_X\eta)(JY) = X(\eta(JY)) - \eta(J(\nabla_X Y)) - (\nabla_X\eta)(JY) =$$

$$= X(\eta(JY)) + \eta((\nabla_X J)Y) - \eta(\nabla_X JY) - (\nabla_X\eta)(JY) = \eta\big((\nabla_X J_i)Y\big),$$

对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\eta \in \Gamma(T^*M)$，由定理 5.3 和定理 5.12 可得结论。

□

5.4 三元结构族

最后，我们证明，使某些广义复结构和乘积结构族平行化的广义仿射联络保持不变。

ˆˆˆˆPROPOSITION 5.16. 设（J， K， JK）为广义几乎 para-四元结构，并设 a、$b \in \mathbb{R}$。则

(i) $\hat{J}_{a,\ b} := a\,\hat{J} + b\hat{}_J\hat{K}$ 是广义近复结构，当且仅当 $a^2 - b^2 = 1$；是广义近乘积结构，当且仅当 $b^2 - a^2 = 1$;

(ii) $\hat{K}_{a,\ b} := a\,\hat{K} + b\,\hat{J}\hat{K}$ 是广义近乘积结构，当且仅当 $a^2 + b^2 = 1$。

ˆˆˆˆPROOF. 通过直接计算，并考虑到 $JK = -KJ$，我们因而得到

$$\hat{J}^2_{a,b} = -(a^2 - b^2)I, \quad \hat{K}^2_{a,b} = (a^2 + b^2)I,$$

由此得出结论。 □

作为命题 5.16 的推论，我们得到

ˆˆˆˆCOROLLARY 5.17. 若 (J, K, JK) 是广义近拟四元数结构，则

(i) $\hat{J}^{\pm}_{\theta} := \cosh\ \theta \cdot \hat{J} \pm \sinh\ \theta \cdot \hat{J}\hat{K}$ 对任意 $\theta \in \mathbb{R}$ 都是广义近复结构;

(ii) $\hat{K}^{\pm}_{1\ ,\theta} := \sinh\ \theta \cdot \hat{J} \pm \cosh\ \theta \cdot \hat{J}\hat{K}$、$\hat{K}^{\pm}_{2\ ,\theta} := \cos\theta \cdot \hat{J} \pm \sin\ \theta \cdot \hat{J}\hat{K}$ 和 $\hat{K}^{\pm}_{3\ ,\theta} := \sin\ \theta \cdot \hat{J} \pm \cos\theta \cdot \hat{J}\hat{K}$ 对任意 $\theta \in \mathbb{R}$ 都是广义近乘积结构。

关于相关联络，我们证明如下结果。

ˆˆˆˆPROPOSITION 5.18. 设 (J, K, JK) 是 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}M$ 上的广义超四元数结构，设 $(J_{a,b}, K)_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2-b^2=\pm1}$，并设 $(J, K_{a,b})_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1}$ 如上所述。那么 (J, K)、$(J_{a,b}, K)$ 和 $(J, K_{a,b})$ 的典范联络重合。

ˆˆˆˆPROOF. 设 D 为 (J, K, JK) 的典范联络。那么，对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\eta, \beta \in \Gamma(T^*M)$，我们有

$$(D_{X+\eta}\hat{J}_{a,b})(Y+\beta) := D_{X+\eta}(\hat{J}_{a,b}(Y+\beta)) - \hat{J}_{a,b}(D_{X+\eta}Y+\beta) =$$

$$= a(D_{X+\eta}\hat{J})(Y+\beta) + b\Big((D_{X+\eta}\hat{J})(\hat{K}(Y+\beta)) + \hat{J}((D_{X+\eta}\hat{K})(Y+\beta))\Big)$$

and

$$(D_{X+\eta}\hat{K}_{a,b})(Y+\beta) := D_{X+\eta}(\hat{K}_{a,b}(Y+\beta)) - \hat{K}_{a,b}(D_{X+\eta}Y+\beta) =$$

$$= a(D_{X+\eta}\hat{K})(Y+\beta) + b\Big((D_{X+\eta}\hat{J})(\hat{K}(Y+\beta)) + \hat{J}((D_{X+\eta}\hat{K})(Y+\beta))\Big),$$

结论由定理 5.3 得出。 □

同样，我们将得到以下结果。

ˆˆˆˆProposition 5.19. (i) 设 (J_1, J_2, J_1J_2) 是广义几乎四元数结构 ˆˆˆˆ，且 $a, b \in \mathbb{R}$。那么 $J_{a,b} := aJ_1 + bJ_1J_2$ 是广义近复结构，当且仅当 $a^2 + b^2 = 1$。

ˆˆˆˆ (ii) 设 (K_1, K_2, K_1K_2) 是广义近拟四元数结构，且$a, b \in \mathbb{R}$。那么 $\hat{K}_{a,b} := a\hat{K}_1 + b\hat{K}_1\hat{K}_2$ 是广义近复结构，当且仅当 $b^2 - a^2 = 1$；当且仅当 $a^2 - b^2 = 1$ 时，则为广义近乘积结构。

ˆˆˆˆProof. 通过直接计算，并考虑到 $J_1J_2 = -J_2J_1$ 和 ˆˆˆˆ$K_1K_2 = -K_2K_1$, 由此得到

$$\hat{J}^2_{a,b} = -(a^2 + b^2)I, \quad \hat{K}^2_{a,b} = (a^2 - b^2)I,$$

因此得出结论。 □

由命题5.19可得以下两个推论。

ˆˆCorollary 5.20. 设 J_1 和 J_2 是两个反对易广义近复结构。则对任意 $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{J}^{\pm}_{1,\theta} := \cos\theta \cdot \hat{J}_1 \pm \sin\theta \cdot \hat{J}_1\hat{J}_2$和$\hat{J}^{\pm}_{2,\theta} := \sin\theta \cdot \hat{J}_1 \pm \cos\theta \cdot \hat{J}_1\hat{J}_2$都是广义近复结构。

ˆˆCorollary 5.21. 设 K_1 和 K_2 是两个反对易广义近乘积结构。则

(i) $\hat{K}^{\pm}_{\theta} := \sinh\theta \cdot \hat{K}_1 \pm \cosh\theta \cdot \hat{K}_1\hat{K}_2$ 对任意$\theta \in \mathbb{R}$都是广义近复结构；

(ii) $\hat{K}^{\pm}_{\theta} := \cosh\theta \cdot \hat{K}_1 \pm \sinh\theta \cdot \hat{K}_1\hat{K}_2$ 对任意 $\theta \in \mathbb{R}$都是广义近乘积结构。

关于相关联络，我们证明以下结果。

ˆˆˆˆProposition 5.22. 设 (J_1, J_2, J_1J_2) 是 M 上的广义四元数结构，ˆˆˆˆ设 $(J_{a,b}, J_1)_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1}$，并设 $(J_{a,b}, J_2)_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1}$ 如上所述。那么，(J_1, J_2)、$(J_{a,b}, J_1)$ 和 $(J_{a,b}, J_2)$ 的典范联络重合。

ˆˆˆˆProof. 设 D 是 (J_1, J_2, J_1J_2) 的典范联络。那么，对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\eta, \beta \in \Gamma(T^*M)$，我们有

$$(D_{X+\eta}\hat{J}_{a,b})(Y + \beta) := D_{X+\eta}(\hat{J}_{a,b}(Y + \beta)) - \hat{J}_{a,b}(D_{X+\eta}Y + \beta) =$$
$$= a(D_{X+\eta}\hat{J}_1)(Y + \beta) + b\Big((D_{X+\eta}\hat{J}_1)(\hat{J}_2(Y + \beta)) + \hat{J}_1((D_{X+\eta}\hat{J}_2)(Y + \beta))\Big),$$

结论由定理 5.12 得出。 □

ˆˆˆˆPROPOSITION 5.23. 设 (K_1, K_2, K_1K_2) 是 M 上的广义超四元数结构，ˆˆˆˆ并设 $(K_{a,b}, K_1)_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2-b^2=\pm1}$ 以及 $(K_{a,b}, K_2)_{a,b\in\mathbb{R},\ a^2-b^2=\pm1}$ 如上所述。那么，(K_1, K_2)、$(K_{a,b}, K_1)$ 和 $(K_{a,b}, K_2)$ 的典范联络重合。

ˆˆˆˆPROOF. 设 D 是（K_1， K_2， K_1K_2）的典范联络。那么，对于任意 X， $Y \in \Gamma$（TM）以及 η， $\beta \in \Gamma$（T^*M），有

$$(D_{X+\eta}\hat{K}_{a,b})(Y+\beta) := D_{X+\eta}(\hat{K}_{a,b}(Y+\beta)) - \hat{K}_{a,b}(D_{X+\eta}Y+\beta) =$$

$$= a(D_{X+\eta}\hat{K}_1)(Y+\beta) + b\Big((D_{X+\eta}\hat{K}_1)(\hat{K}_2(Y+\beta)) + \hat{K}_1((D_{X+\eta}\hat{K}_2)(Y+\beta))\Big),$$

结论由定理 5.3 得出。 □

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky、S. Marchiafava：流形上的类四元数结构：注释 I。1-可积性与可积条件，Rend. Lincei Mat. e Appl. serie 9, 4(1) (1993), 43–52。

[2] S.-I. Amari：统计学中的微分几何方法，统计学讲义 28，Springer-Verlag：纽约，1985。

[3] A. M. Blaga、A. Nannicini：广义几何中的 α联络，J. Geom. Phys. 2021, 165, 104225。[4] A. M. Blaga、A. Nannicini：广义几何背景下的对偶性与统计镜像对称，Filomat 37(8) (2023), 2577–2586。[5] A. M. Blaga、A. Nannicini：广义准统计结构，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 27(5) (2020), 731–754。[6] B. Eckmann、A. Fr¨olicher：关于几乎复结构的可积性，C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2284–2286。[7] F. Etayo、R. Santamar`ıa：函子性地附属于几乎复乘积结构的联络，Houston J. Math. 35 (2009), 411–434。[8] A. Fr¨olicher：复结构的微分几何，Math. Ann. 129 (1955), 50–95。

[9] N. J. Hitchin：广义卡拉比–丘流形，Q. J. Math. 54 (2003), 281–308。

[10] H. Matsuzoe：拟统计流形与仿射分布的几何，《2012纯粹与应用微分几何：纪念Franki Dillen》，数学报告，Joeri Van der Veken、Ignace Van de Woestyne、Leopold Verstraelen、Luc Vrancken 编，Shaker出版社（2013）。

[11] A. Nannicini：黎曼流形的广义切丛上的校准复结构，J. Geom. Phys. 56（2006），903–916。

[12] A. Nannicini：一类与Norden、拟Norden及统计流形相关的伪校准广义复结构，《巴尔干几何及其应用杂志》 22(1) （ 2017 ），51–69。

[13] A. P. Norden：一类四维A空间，Russian Math. (Izv VUZ) 17(4)（1960），145–157。

[14] M. Obata：具有近复、四元数或厄米结构的流形上的仿射联络，《日本数学杂志》26（1956），43–79。

[15] A. Salimov、M. Iscan、F. Etayo：拟全纯B流形及其性质，《拓扑学及其应用》154（2007），925–933。

Adara M. BLAGA，数学系，数学与计算机科学学院，蒂米什瓦拉西部大学，V. Pˆarvan大道4-6号，300223，蒂米什瓦拉，罗马尼亚。电子邮箱：adarablaga@yahoo.com

Antonella NANNICINI，数学与信息学系，“U. Dini”，佛罗伦萨大学，Morgagni大道67/a号，50134，佛罗伦萨，意大利。电子邮箱：antonella.nannicini@unifi.it