arXiv:2302.05303v2 [math.CT] 4 Jul 2024

严格结合且幺元的 ∞-范畴语法

Eric Finster*、Alex Rice†和 Jamie Vicary‡

2024年7月8日

摘要

我们提出了严格结合且幺元的 ∞-范畴的首个定义。我们的方案采用类型论的形式，其项描述这类结构的运算，而其定义等价关系则强制满足所需的严格性条件。该理论定义等价中的一条新计算规则是关键技术手段，我们称之为 *insertion*，并以泛性质来定义。对于该运算有定义的项，它会将代入相干中的一个参数"插入"相干本身，适当地修改粘贴图和结果类型，并在此过程中简化语法。我们从这一归约关系生成一个等式理论，并详细研究其性质，证明它能够为等式提供一个判定过程。

以类型论形式表达后，我们的模型非常适合用于生成和验证高效的高阶范畴论命题证明。我们通过一个 OCaml 实现来展示这一点，并给出若干示例，包括对对称交换的一种简短编码；对称交换是一种在球面的同伦群中发挥重要作用的5维同伦。

1 引言

背景。 高阶范畴理论在计算机科学、数学和物理学中的重要性日益提升，如今人们已认识到它在类型论 [HS94; The13], 量子场论 [Ati09; Sch09], 和几何学 [Lur09]中的基础性应用。Hoffman 和 Streicher [HS94], 的群胚模型对 Martin-L¨of 类型论中恒等证明唯一性原则的违背，使其与逻辑的相关性得到了充分彰显。**恒等证明唯一性** 这一原则被打破，为现代证明相关逻辑系统的研究铺平了道路；在这类系统中，人们可以将证明本身作为基础对象来推理，正如人们可以研究拓扑空间中路径的同伦论一样。

尽管这种**以路径为证明** 的观点带来了相当大的额外能力，但一个关键缺点是，在处理由此产生的路径类型时，可能会出现大量额外的证明义务。通常认为这些义务分为三类：**结合子** 见证对于三个可复合路径 f，g，h，复合

*伯明翰大学， e.l.finster@bham.cs.ac.uk
†剑桥大学， alex.rice@cl.cam.ac.uk
‡剑桥大学， jamie.vicary@cl.cam.ac.uk

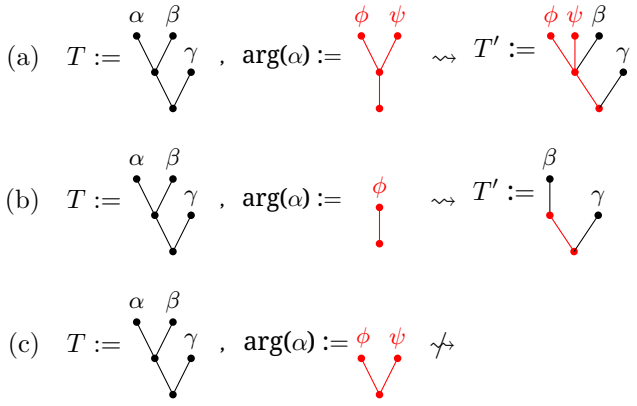


图 1：说明插入操作。

$f \circ (g \circ h)$ 和 $(f \circ g) \circ h$ 等价；单位子 见证 $\mathrm{id} \circ f$ 和 $f \circ \mathrm{id}$ 都应与其自身 f 等价；以及交换同构 见证不同维度上的复合应当交换。更糟的是，这些路径见证本身还受到进一步约束，例如结合子的五边形条件，而这又需要计算更高维见证，使问题在更高维度呈指数级加剧。

构造和管理此类见证（也称为弱结构）的需求，可能会使路径相关证明变得复杂，甚至复杂到难以处理。事实上，对称交换是低维拓扑中的一个重要同伦，它完全由此类路径见证构成；直到最近，才有人将其显式证明形式化 [SK22; FRVR22]。这促使人们寻求一种能够尽可能消去见证的语法。至少从 20 世纪 70 年代起，数学界便一直在为此努力。人们很早就认识到，在完全严格情形下，所有见证都被消去，但这会导致表达能力损失过多；Grothendieck 是最早注意到这一点的人之一 [Gro83, page 2]。

因此，研究重点转向寻找一种半严格 理论：在尽可能消去见证的同时，仍与完全弱理论等价。Gray 的早期工作 [Gra74] 给出了结合子和单位子均为平凡的半严格三范畴定义，只留下非平凡的交换同构；随后 Gordon、Power 和 Street 的工作表明，这一定义并未损失表达能力 [GPS95]。Simpson 猜想，只需“弱化所涉及的任意一种主要结构”，便足以得到半严格 n-范畴的定义 [Sim98], ; Street 则勾勒了一种基于迭代富集的可能方案，即在每个维数中定义一个由半严格 n-范畴构成的闭幺半范畴 [Str95]。然而，Dolan 后来的分析 [Dol96] 表明，所需的幺半闭性无法满足。从这一经历可以看出，要为这些对象找到一个合理的定义，本身就不是一项简单的任务。

C贡献。 我们定义具有严格结合子和单位子的 ∞范畴，因此只剩下

互换子结构是弱的，其方式是描述一种类型论，其中的项表示在这种结构中有效的运算。据我们所知，这是文献中首次提出这样的定义。在该理论中，运算赋予 ∞范畴以复合结构和相干律，而等式理论则使结合子和单位子结构平凡化。例如，等式（$f \circ g$）$\circ h = f \circ (g \circ h)$可以在我们的理论中推导出来。

我们的方案以类型论的形式实现，类型检查器可以自动应用此类等式，而无需用户显式指定结合子见证。这使用户能够直接使用半严格理论进行工作，构造忽略结合子和单位子见证及其高维对应物的证明，同时计算机仍能验证所得项的正确性。例如，即使看起来它们不应能直接复合，这也能让用户直接复合类型为 $p \Rightarrow (f \circ g) \circ h$ 和$f \circ (g \circ h) \Rightarrow q$ 的高阶路径。

或者，对于包含所有此类显式见证的证明，系统可以“将它们计算消去”，并返回一个范式，其中结合子和单位子结构已尽可能消除。这有望得到更简单的证明。

我们的核心技术贡献是一种插入 过程，它生成相等关系的半严格行为，并且我们证明它满足一个简单的泛性质。理论中的每个运算都相对于一个粘贴上下文来定义；粘贴上下文是由圆盘粘合而成、用于规定复合的结构。组合地说，这些结构对应于有限平面有根树。每个运算都有一个头树，其参数对应于树的叶子。我们需要两个简单的定义：对于一棵有根树，其主干高度 是“树干”的高度；对于任意叶子，其分支高度 是位于该叶子下方的最高分支点的高度。图 8 以图示说明了这些定义。对于复合运算，如果头树的参数本身又赋予了其他运算，则插入过程如下：对于头树中选定的某个叶子 α，如果 α 的分支高度不超过 α 处参数树的主干高度，并且参数运算处于“标准形式”，我们就可以将参数树插入头树中。

我们用图 1 来说明这一点，其中用希腊字母标记叶子。在每个部分中，头树 T 都有一个参数 α，其分支高度为 1（因为从 α向下时，我们遇到的第一个分支点位于高度 1。）在部分 (a) 中，红色绘制的参数树主干高度为 1，因此满足高度检验，可以进行插入，从而得到更新后的头树 T'；整个参数树已插入其中，并以红色子树的形式显现，取代原来的叶子 α。在部分 (b) 中，参数树的主干高度同样为 1，因此也可以进行插入，不过由于参数树很矮，插入的效果仅仅是移除头树的叶子 α。在部分 (c) 中，参数树的主干高度为 0，因此不满足高度检验，无法进行插入。最后这个例子直观地说明了高度检验为何重要：由于参数树的主干高度太小，若不影响叶子 β，就没有合理的方法将参数树插入头树。我们将在本文中证明，这种插入操作可以通过泛性质以代数方式描述。

我们将插入与另外两个较简单的过程——圆盘移除 和内自相干移除——结合起来，从而为该理论的运算构造归约关系。我们的主要技术成果涉及这一归约关系的行为。我们证明了它会终止，且具有唯一的范式，从而为

等式提供判定过程。

实现。 我们已经将该方案以类型论的形式实现为 OCaml 程序，并将其称为 $\textsc{Catt}_{\mathsf{sua}}$，意为“具有严格单位子和结合子的范畴类型论”。在第 5 节中，我们给出了三个具体示例，表明幺半范畴定义中的三角形条件和五边形条件完全变得平凡，并展示了一个已知的五维对称交换同伦证明如何化简为大幅更简单的形式。实现可在以下地址找到：

https://github.com/ericfinster/catt.io/tree/lics-sua

形式化。 本文的大部分技术结果已在 Agda 中完成形式化，我们在此提供其 [Ric24]：

https://github.com/alexarice/catt-agda/tree/paper

该形式化可使用 Agda 2.6.4.1 版和标准库 2.0 版进行编译。对于已完成形式化的结果，我们提供相应形式化证明的文件及行号。在 Agda 文件中，形式化证明上方的注释会指出本文中对应的定理编号。

相关工作。 我们的工作基于可缩 ∞-范畴理论。这是一种研究充分的球状 ∞-范畴模型，最初由 Maltsiniotis 提出 [Mal10]，；他是在 Grothendieck 早期给出的 ∞-群胚代数定义基础上发展而来的 [Gro83]。Leinster 以可缩球状拟 operad 的形式给出了出色的现代阐述 [Lei04]。

我们的代数理论建立在现有的类型论之上 $\textsc{Catt}$，该类型论针对可缩 ∞-范畴，发表于 LICS 2017 [FM17]，，后续扩展 $\textsc{Catt}_{\mathsf{su}}$ 发表于 LICS2022 [FRVR22]，描述了严格含单位情形。该工作包含一种称为修剪的归约关系，它会从粘贴上下文中移除一个叶变量。本文以插入取代了修剪操作；插入将修剪作为一种特殊情形，但通常会对头部上下文进行更大幅度的改造。因此，本文的终止性和合流性性质要复杂得多，难以确立。我们的终止性证明采用了量化项句法复杂度的新技术，而合流性证明则必须分析许多额外的临界对，其中一些本质上比先前处理的情况复杂得多。为了能够对粘贴上下文进行改造，我们还需要用树来以不同方式表示上下文，这改变了形式化开发的许多方面。此外，与 LICS 2022年论文不同，本文的所有技术引理都经过了形式化，从而使这项工作建立在更坚实的基础上。

上文讨论了 Street 的历史方法在定义半严格 n-范畴时遇到的问题。他的方法旨在逐维构建半严格理论；与之相反，我们保留完全弱结构的所有运算，而是通过运算上的归约关系来获得半严格性。我们不要求对半严格 n-范畴显式定义张量积，也不要求任何闭性。因此，Dolan 的批评并不适用。

2 类型理论 Catt

In 本节回顾类型论 $\textsc{Catt}$ 及其一些基本性质。我们
gen通过将理论参数化为给定的一组对象，推广原始表述 [FM17]

$$\frac{}{\emptyset : \mathsf{Ctx}} \qquad \frac{\Gamma : \mathsf{Ctx} \quad A : \mathsf{Type}_\Gamma}{\Gamma, (x : A) : \mathsf{Ctx}}$$

$$\frac{}{\langle\rangle : \emptyset \to \Gamma} \qquad \frac{\sigma : \Delta \to \Gamma \quad t : \mathsf{Term}_\Gamma}{\langle \sigma, x \mapsto t \rangle : (\Delta, x : A) \to \Gamma}$$

$$\frac{}{\star : \mathsf{Type}_\Gamma} \qquad \frac{A : \mathsf{Type}_\Gamma \quad s : \mathsf{Term}_\Gamma \quad t : \mathsf{Term}_\Gamma}{s \to_A t : \mathsf{Type}_\Gamma}$$

$$\frac{x \in \Gamma}{x : \mathsf{Term}_\Gamma} \qquad \frac{\Delta : \mathsf{Ctx} \quad A : \mathsf{Type}_\Delta \quad \sigma : \Delta \to \Gamma}{\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma] : \mathsf{Term}_\Gamma}$$

CATT中的语法构造。

相等规则，从而使我们能够一般性地证明一些普遍的结构性质，并让未来对严格性结果的研究建立在此处发展的理论之上。随后，我们将专门讨论理论 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$，这是本文的重点。

这一通用框架的特殊情形包括 Finster 和 Mimram 对 CATT 的原始表述 [FM17]，其中相等规则集为空；也包括理论 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{su}}$ [FRVR22]，其规则将在下文的这一框架中回顾。

2.1 Catt 的语法

CATT包含 4 类语法：上下文、代换、类型和项；各类语法的规则见图 2。为避免未定义变量的问题，我们将代换、类型和项按其上下文参数化，并用 Term_Γ 表示上下文 Γ中的一个项，用 Type_Γ 表示上下文 Γ中的一个类型，并用 $\sigma : \Gamma \to \Delta$ 表示从 Γ 到 Δ的代换。

我们用 $\equiv$ 表示模阿尔法重命名的句法相等。为提高可读性，我们将采用命名变量来表述，不过在实际应用中，使用 de Bruijn指标即可避免这种选择可能引入的任何歧义。

代换 $\sigma : \Delta \to \Gamma$ 将上下文 Δ 中的变量映射到上下文 Γ中的项。我们注意到，这在类型论中并不常见，但与 Grothendieck 和 Maltsiniotis 的相容器 [Mal10]中的态射方向一致，CATT 正是基于这些相容器构建的。对于任意的 $t : \mathsf{Term}_\Delta$、$A : \mathsf{Type}_\Delta$ 和 $\tau : \Theta \to \Delta$，可定义语义替换运算

$$t[\![\sigma]\!] : \mathsf{Term}_\Gamma \qquad A[\![\sigma]\!] : \mathsf{Type}_\Gamma \qquad \tau \circ \sigma : \Theta \to \Gamma$$

通过对类型、项和代换进行相互递归（如 [FM17] 中所示）。注意，这里用双括号 $[\![-]\!]$ 表示此运算；我们谨慎地区分它与单括号 $[-]$，后者是相容构造子语法的一部分。每个上下文都有一个恒等代换 $\mathsf{id}_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$，它将每个变量映射到自身；代换运算满足结合律和单位律，因此上下文与代换构成一个范畴。我们将此范畴记作 CATT，这是一种滥用记号的写法。

每个语法类的自由变量集合都以标准方式通过归纳定义。给定上下文 Γ 和变量集合 $S \subseteq \Gamma$，我们称 S 为向下

封闭的，当对于所有 $x : A \in \Gamma$， $x \in S$ 都意味着 A 的自由变量是 S的子集。对于任意集合 $S \subseteq \Gamma$，我们可以构造其向下闭包。随后，我们可以定义一段语法的支撑，直观来说，它就是该语法所依赖的变量集合。

定义 1. 给定一个项 $t : \mathsf{Term}_\Gamma$， t 的支撑 $\mathsf{supp}(t)$ 是 t 在 Γ 中自由变量的向下闭包。类型或代换的支撑也类似定义。

例 2. 考虑上下文 $\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \to_\star y$。那么变量 f 是此上下文中的一个有效项，其自由变量集合就是单元素集合 $\{f\}$。然而， f 的支撑是 $\{x, y, f\}$。

最后，我们定义类型 A 的维数 $\dim(A)$：$\dim(\star) = 0$，而 $\dim(s \to_A t) = 1 + \dim(A)$。项 $t : \mathsf{Term}_\Gamma$ 的维数定义为：当 $x : A \in \Gamma$ 时，$\dim(x) = \dim(A)$，且 $\dim(\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]) = \dim(A)$。上下文 $\dim(\Gamma)$ 的维数是其中所含类型维数的最大值。容易通过归纳证明，维数在代换下保持不变。

2.2 Catt 的类型判定

CATT 的相干由一类特殊的上下文决定，我们称之为粘贴上下文。直观而言，这些上下文对应于应当允许唯一复合的球状胞腔配置。特别地，要使相干项 $\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]$ 类型正确， Δ 必须是粘贴上下文。判断任意上下文是否为粘贴上下文是可判定的，我们将这一判断写作

$$\Delta \vdash_p$$

当 Δ 是粘贴上下文时。

CATT 的类型规则中至关重要的一点是，每个粘贴上下文 Δ 都有定义良好的边界，而且该边界本身也是一个粘贴上下文。对于自然数 n，我们可以构造 Δ 的 n 维边界 ∂^n_Δ；并且对于每个 n 和 $\epsilon \in \{-, +\}$，都有包含代换 $\delta^{\epsilon,n}_\Delta : \partial^n_\Delta \to \Delta$。

关于粘贴上下文的规则以及边界算子的定义可见 [FM17]。我们将在第 2.4 节稍后给出一种将粘贴上下文描述为树的替代方式。

有了这些概念， CATT 的类型规则见图 3。除了最后两条用于描述相干项的类型规则外，这些规则对于依赖类型论而言都相当标准。这两条用于对相干项 $\mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A t)[\sigma]$ 进行类型判定的规则都要求 Δ 必须是粘贴上下文，且 $s \to_A t$和 σ 都具有良好的类型。第一条规则指出， s 必须由 Δ 的源支撑，而 t 必须由 Δ的目标支撑。按此规则判定类型的项表示复合。第二条规则则指出， s 和 t 是全的，即它们由整个上下文支撑。这些项见证了粘贴图上的任意两个全项都应当等价。我们注意到，尽管为一个构造子设置两条类型规则并不常见，但这两条规则的区别仅在于其语法上的附加条件，因此可以合并为一条规则。将这两条规则分开，是为了符合此前对 CATT的表述。

$$\frac{}{\emptyset \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma, (x : A) \vdash}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \star} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash s : A \quad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash s \to_A t}$$

$$\frac{}{\Delta \vdash \langle\rangle : \emptyset} \qquad \frac{\Delta \vdash \sigma : \Gamma \quad \Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash t : A[\![\sigma]\!]}{\Delta \vdash \langle \sigma, x \mapsto t \rangle : (\Gamma, x : A)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad (x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash_p \quad \Delta \vdash s \to_A t \quad \Gamma \vdash \sigma : \Delta \\ \mathsf{supp}(s) = \mathsf{supp}(\delta_\Delta^{-,\dim(\Delta)-1}) \quad \mathsf{supp}(t) = \mathsf{supp}(\delta_\Delta^{+,\dim(\Delta)-1})\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A t)[\sigma] : s[\![\sigma]\!] \to_{A[\![\sigma]\!]} t[\![\sigma]\!]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash_p \quad \Delta \vdash s \to_A t \quad \Gamma \vdash \sigma : \Delta \\ \mathsf{supp}(s) = \mathsf{supp}(t) = \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A t)[\sigma] : s[\![\sigma]\!] \to_{A[\![\sigma]\!]} t[\![\sigma]\!]}$$

Figure 3: Typing rules for CATT.

2.3 构造与示例

圆盘上下文。在粘贴上下文中，我们可以特别区分出**圆盘上下文**，它们在后续构造中发挥着重要作用。图 4 展示了一个圆盘上下文的例子。

定义 3。 n维圆盘上下文有一个 n维变量d_n，并且对每个 $k < n$都有变量 d_k^- ， d_k^+ 。我们有 $d_0^\pm$： $\star$，并且对于所有$0 < k \leq n$都有 $d_k^\pm$： $d_{k-1}^- \to d_{k-1}^+$。

从 D^n 出发的替换很特殊，因为它们完全由一个维数为 n的类型和该类型的一个项决定。也就是说，给定 A： Type_Γ 和 t： Term_Γ，存在一个替换 $\{A, t\}$： $D^{\dim(A)} \to \Gamma$，而任何从圆盘出发的替换都具有这种形式。

标准运算。 给定的粘贴上下文 Γ通常会产生许多不同的有效相干。在这些相干中，有一类特别的相干，即**标准相干**，它们将在下面的定义等式中发挥重要作用。直观地说，这些相干会“一次性”合成粘贴图中的所有胞元，而不是先合成子图。它们可以递归地定义如下:

定义 4. 给定一个粘贴图 Δ，我们对所有 n 互相定义**标准相干** $\mathcal{C}_\Delta^n$、**标准项** $\mathcal{T}_\Delta^n$和**标准类型** $\mathcal{U}_\Delta^n$:

$$\mathcal{C}_\Delta^n = \mathsf{coh}\ (\Delta : \mathcal{U}_\Delta^n)[\mathrm{id}]$$

$$\mathcal{T}_\Delta^n = \begin{cases} d_n & \text{when } \Delta \text{ is a disc} \\ \mathcal{C}_\Delta^n & \text{otherwise} \end{cases}$$

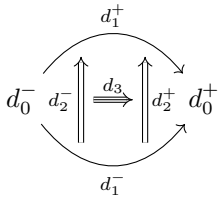


图 4：圆盘上下文 D^3。

$$\mathcal{U}_\Delta^0 = \star$$
$$\mathcal{U}_\Delta^{n+1} = \mathcal{T}_{\partial_\Delta^n}^n[\![\delta_\Delta^{-,n}]\!] \to_{\mathcal{U}_\Delta^n} \mathcal{T}_{\partial_\Delta^n}^n[\![\delta_\Delta^{+,n}]\!]$$

标准类型取出 Δ 每个边界上的标准项，将它们全部包含回 Δ 中，并将它们组装成一个类型。当 n =dim(Δ) 时，我们将标准相干称为标准复合。

首先看几个示例。我们从一些基本的范畴运算示例开始。下面的粘贴上下文包含态射 $f : x \to y$ 和$g : y \to z$构成的可复合对：

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \to_\star y, z : \star, g : y \to_\star z$$

我们可以用它构造 f 和 g的复合项，作为 Γ中的一个项：

$$f \cdot g := \mathsf{coh}\ (\Gamma : x \to_\star z)[\mathrm{id}] : x \to_\star z$$

这满足相干的第一条类型规则的支撑条件，因为 x 在上下文 $x : \star$上是满的， z也同样如此。给定一个类型为 $\star$的变量 t，我们可以构造与 t 相关联的恒等相干（不要与恒等代换混淆），如下所示：

$$\mathbb{1}_t := \mathsf{coh}\ ((x : \star) : x \to_\star x)[\langle x \mapsto t\rangle] : t \to_\star t$$

可以使用相干的第二条类型规则为其赋予类型。

相干中的代换部分使我们能够构造复合运算。例如，下面的语法表示上下文 $\Delta = x$ 中的一个项： $\star$， $y : \star$， $f : x \to_\star y$:

$$f \cdot \mathbb{1}_y := \mathsf{coh}\ (\Gamma : x \to_\star z)[\langle f \mapsto f, g \mapsto \mathbb{1}_y\rangle] : x \to_\star y$$

这里我们省略了代换的低维分量，因为它们可以推断出来；这种技巧我们会反复使用。基于最后这个例子，我们可以构造单位子 ρ_f，以见证𝟙的单位性：

$$\rho_f := \mathsf{coh}\ (\Delta : f \cdot \mathbb{1}_y \to_{x \to_\star y} f)[\mathrm{id}] : f \cdot \mathbb{1}_y \to_{x \to_\star y} f$$

类似地，我们可以将结合子生成为上下文 $\Theta = \Gamma$， $w :\star$， $h : z \to_\star w$ 上的相干。

$$\alpha_{f,g,h} := \mathsf{coh}\ (\Theta : (f \cdot g) \cdot h \to_{x \to_\star w} f \cdot (g \cdot h))[\mathrm{id}]$$

$$: (f \cdot g) \cdot h \to_{x \to \star w} f \cdot (g \cdot h)$$

我们注意到，复合和恒等项的示例实际上都是
st标准相干，如直接计算所示。

更一般地，我们可以如下定义任意 n维类型为 s 的项的恒等项 A 如下：

$$\mathbb{1}[\![\{A, s\}]\!] = \mathcal{C}^{n+1}_{D^n}[\![\{A, s\}]\!]$$

2.4 树

像 CATT中所用的粘贴图，与有限平面有根树（以下简称“树”）之间有众所周知的对应关系 [Str00]。我们的插入构造（见第3节）使用树来表示粘贴上下文会更容易定义，因此我们在此暂停，先梳理这种对应关系。

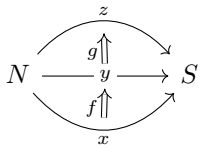
悬挂。在拓扑学中，给定一个空间 X，我们可以构造一个新空间 ΣX ：将 X 拉伸成圆柱体，再把顶部和底部的“端帽”各自压缩为一点。更形式化地说，悬挂是积空间 $X \times [0, 1]$的一个商，其中 $X \times \{0\}$ 中的所有点被识别为同一点，而 $X \times \{1\}$中的所有点也被识别为同一点。这个构造也可以简单地用路径来描述：空间 ΣX 有两个点，对于 X中的每个元素，这两点之间都有一条路径。例如，将一个圆悬挂会得到一个球面，原来的圆嵌入其中，成为赤道。圆上的每个点随后确定一条子午线，这也促使我们将另外两个点称为“北极”和“南极”。

在理论 CATT [BM19] 中存在一种悬挂运算的类似形式。与 CATT 中的许多构造一样，它是在语法的所有部分上相互归纳定义的。

- 对于上下文 Γ，其悬挂 $\Sigma\Gamma$ 有两个新的变量 $N : \star$，$S : \star$（N 表示北极，S 表示南极），此外，对于每个 $x : A \in \Gamma$，还有一个变量 $x : \Sigma(A)$。
- 对于类型 $A : \mathsf{Type}_\Gamma$，其悬挂 $\Sigma A : \mathsf{Type}_{\Sigma(\Gamma)}$ 由 $\Sigma\star = N \to_\star S$ 和 $\Sigma(s \to_A t) = \Sigma s \to_{\Sigma A} \Sigma t$给出。注意，这会使类型的维数增加 1。
- 对于项 $s : \mathsf{Term}_\Gamma$，其悬挂 Σs: $\mathsf{Term}_{\Sigma(\Gamma)}$ 对变量$x \in \Gamma$定义为 $\Sigma x = x$，而对 $\Sigma(\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]) =$ 定义为 $\mathsf{coh}\ (\Sigma\Delta : \Sigma A)[\Sigma\sigma]$。
- 对于代换 $\sigma : \Delta \to \Gamma$，悬挂 $\Sigma\sigma : \Sigma\Delta \to \Sigma\Gamma$ 将 N 映射到 N，将 S 映射到 S，并将 x 映射到 Σt（对每个 $x \mapsto t \in \sigma$）。

我们注意到，要使 $\Sigma(\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma])$ 类型正确，必须有 $\Sigma\Delta$ 是一个粘贴图。事实上，只要 Δ 本身是一个粘贴图，情况便是如此。此外，还可以证明悬挂构成了上下文范畴上的一个函子 $\Sigma : \text{CATT} \to \text{CATT}$。

例 5。 $x : \star$，$y : \star$，$f : x \to_\star y$，$z : \star$，$g : y \to_\star z$ 的悬挂是以下上下文：

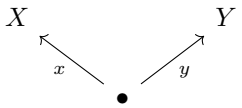


而 1-复合运算的悬挂给出 2-胞腔的垂直复合。

引理 6。 对所有 n、 $\Sigma D^n \equiv D^{n+1}$均成立。此外，对所有粘贴上下文 Δ:

$$\Sigma\mathcal{C}^n_\Delta \equiv \mathcal{C}^{n+1}_{\Sigma\Delta} \quad \Sigma\mathcal{T}^n_\Delta \equiv \mathcal{T}^{n+1}_{\Sigma\Delta} \quad \Sigma\mathcal{U}^n_\Delta \equiv \mathcal{U}^{n+1}_{\Sigma\Delta}$$

楔和。 在拓扑学中，两个带基点空间 $(X,\ x)$、$(Y,\ y)$ 的楔和是 $X \coprod Y$ 的不交并，其中 x 与 y 识别为同一点。它可以实现为下图的余极限:



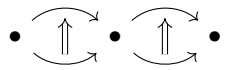
粘贴上下文也可以进行类似的构造。首先注意，根据其定义，每个粘贴上下文都以一个类型为 $\star$ 的变量开头，这是一个基本推论。现在，给定 $\Gamma = \Gamma',\ (x :\ \star)\ \Gamma''$，其中 Γ'' 不包含类型为 $\star$ 的变量（即变量 x 是此类型的最后一个 变量），以及 $\Delta = (y :\ \star)\ \Delta'$，我们可以定义

$$\Gamma \vee \Delta := \Gamma', (x : \star), \Gamma'', \Delta'[x/y]$$

其中 $\Delta'[x/y]$ 表示将 x 代入 Δ' 中出现的所有类型里的 y 后所得的结果。容易验证，所得结果仍是一个粘贴图。此外，这一构造显然可以推广到多个粘贴上下文，我们将其记作:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \Gamma_i = \Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \cdots \vee \Gamma_n$$

例 7. 我们考虑 $D^2 \vee D^2$。它将两个 2-圆盘在一点处粘合起来，并得到以下形式的上下文:



我们注意到，这是一个可用于定义 2-胞之间水平复合运算的粘贴图。

为了简化粘贴上下文楔和之间代换的定义，我们将通过指定各个分量，以图示方式表示代换。事实上，给定代换 $\sigma : \Gamma \to \Gamma'$ 和 $\tau :\ \Delta \to \Delta'$，其中 σ 将 Γ 中最后一个类型为终端$\star$的变量映射到 Γ'中的相应变量，而 τ 将 Δ 中的初始变量映射到 Δ'中的相应变量，很容易看出存在一个代换 $\sigma \vee \tau :\ \Gamma \vee \Delta \to \Gamma' \vee \Delta'$，我们将其描绘如下:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \vee & \Delta' \\ {\scriptstyle\sigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\tau} \\ \Gamma & \vee & \Delta \end{array}$$

树上下文。 现在我们已经具备了定义由一棵树生成的上下文所需的工具。我们对树的定义将基于列表，并将使用方括号记号 $[x_1, \ldots, x_n]$ 表示。我们还使用常见的列表记号，例如 $+\!\!+$ 表示连接

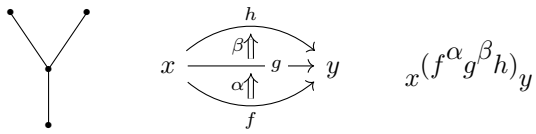


图5：树和恒等标记示例。

两个列表，$[]$ 表示空列表，以及 $n :: ns$ 表示首元素为 n、尾部为列表 ns 的列表。

按照这些约定，我们可以如下归纳定义树：

定义 8. 平面有根树是一个平面有根树（可以为空）列表。

树的子树可由自然数列表 P 编号，从而得到子树 T^P，令 $T^{[]} = T$ 和 $T^{k::P} = (T_k)^P$ 当且仅当 $T = [T_1, \ldots, T_n]$。

每棵树都利用前面几个小节中的构造生成一个上下文。

定义 9. 对于树 $T = [T_1, \ldots, T_n]$，由它生成的上下文 $\lfloor T \rfloor$ 定义如下：

$$\lfloor T \rfloor := \bigvee_{i=1}^{n} \Sigma \lfloor T_i \rfloor$$

这里我们约定，当 T 是空列表时，我们得到一个形如 $:\star$ 的单元素上下文。我们通常会滥用记号，省略 $\lfloor - \rfloor$ 算子，并在不会引起混淆时将树用作上下文。

通过简单地运用悬挂和楔和的性质进行归纳，我们得到：由树生成的任意上下文都是粘贴上下文。更强的结论是，$\lfloor - \rfloor$ 是树与粘贴图之间的一个同构，不过此处略去证明，因为插入的定义并不需要它。接下来，我们给出一些之后会用到的关于树的简单定义。

定义 10. 树的维数 $\dim(T)$ 在 T 为空时为 0；否则为 $1 + \max_k \dim(T_k)$，其中 $T = [T_1, \ldots, T_n]$。对于一棵树 T，其 主干高度 $\mathrm{th}(T)$ 在 $T = [T_1]$ 时为 $1 + \mathrm{th}(T_1)$，否则为 0。若一棵树的主干高度等于其维数，则称该树为线性的 。

在树与粘贴上下文之间的双射下，从与 T 相关联的上下文到任意上下文 Γ 的代换 $\sigma : \lfloor T \rfloor \to \Gamma$，可以用 T 的一种适当类型的标记 来表示，我们现在给出其定义：

定义 11（树标记）。从树 $T = [T_1, \ldots, T_n]$ 到 Γ 的标记 $L : T \to \Gamma$ 包含以下数据：

$$t_0 {}^{L_1}t_1 \ \ldots \ {}^{L_n}t_n$$

其中，每个 t_i 都是 Γ 的一个项，并且每个 $L_i : T_i \to \Gamma$ 本身都是 Γ 中 T_i 的一个标记。项 t_i 标记树的零维变量，而标记 L_i 则递归地为树的高维变量赋予项。每棵树都有一个恒等标记 $\mathrm{id}_T : T \to T$。

Ex例 12. 图5以图示方式展示了树 $[[[]\,[]]]$ 以及
con它所生成的项。它还给出了这棵树上的恒等标记。

$$\frac{x \in \Gamma}{\Gamma \vdash x = x} \qquad \frac{\Gamma \vdash s = t}{\Gamma \vdash t = s} \qquad \frac{\Gamma \vdash s = t \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash s = u}$$

$$\frac{\Delta \vdash A = B \qquad \Gamma \vdash \sigma = \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma] = \mathsf{coh}\ (\Delta : B)[\tau]} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \star = \star}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s = s' \qquad \Gamma \vdash t = t' \qquad \Gamma \vdash A = A'}{\Gamma \vdash s \to_A t = s' \to_{A'} t'} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \langle\rangle = \langle\rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma = \tau \qquad \Gamma \vdash s = t}{\Gamma \vdash \langle \sigma, x \mapsto s \rangle = \langle \tau, x \mapsto t \rangle}$$

图 6：定义等价的结构规则。

2.5 带有相等规则的 Catt

我们通过添加由一组相等生成元 $\mathcal{R}$确定的定义等价，来结束本节对 CATT 的扩展。我们将所得理论记为 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$。形式上，每个生成元 $R \in \mathcal{R}$ 都由一个三元组 $R = (\Gamma, s, t)$给出，其中 Γ 是一个上下文，且 $s, t \in \mathsf{Term}_\Gamma$。接下来，我们将指出一组生成元 $\mathcal{R}$ 可能具备的若干性质；这些性质能赋予所得定义等价有用的元理论行为。随后，我们给出一些初步示例。本节的技术性展开遵循我们形式化工作所采用的方法。

首先，我们固定一组相等生成元 $\mathcal{R}$ ，并加入归纳定义的相等判断

$\Gamma \vdash s = t$	Terms $s, t : \mathsf{Term}_\Gamma$ are equal.
$\Gamma \vdash A = B$	Types $A, B : \mathsf{Type}_\Gamma$ are equal.
$\Gamma \vdash \sigma = \tau$	Substitutions $\sigma, \tau : \Delta \to \Gamma$ are equal.

这些判断将与类型规则一同互相归纳定义。请注意，定义等价并未以类型为纤维，因为本研究无需如此；而这种设置使形式化得以继续推进 [Ric24]。我们还加入以下新的类型规则，称为转换规则：

$$\frac{\Gamma \vdash s : A \qquad \Gamma \vdash A = B}{\Gamma \vdash s : B}$$

最后，除了图 6 所示的结构规则外，我们还加入一个规则族 ：

$$\frac{(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R} \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash s = t}$$

这些规则有意设置为非对称的；只有左侧需要有效性证明。提前参见第 4.1 节，这是因为我们在理论中使用的等式将采取归约的形式，其中右侧将由等式左侧构造。我们将由这些规则定义的相等关系 $=$ 称为 定义等价。

现在我们确定相等规则 $\mathcal{R}$ 可以满足的一些吸引人的性质，这些性质使所得的类型论具有良好的性质。

弱化条件。 $\mathcal{R}$ 满足弱化条件，当对于所有 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$ 和 A : 类型$_\Gamma$，我们都有：

$$((\Gamma, x : A), s, t) \in \mathcal{R}$$

请注意，尽管 s 和 t 是关于 Γ的项，它们可以弱化为关于Γ, A的项；这里我们不显式写出这一点。

这个条件使我们能够证明，所有等式和类型判定都在上下文扩展下保持不变。它还让我们很容易证明恒等代换是类型正确的。

Su代换条件。 $\mathcal{R}$ 满足代换条件，当对于所有 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$ 和 $\sigma : \Gamma \to \Delta$ 满足 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$ 时，我们有：

$$(\Delta, s[\![\sigma]\!], t[\![\sigma]\!]) \in \mathcal{R}$$

请注意，此处 σ 的类型判定前提是相对于由规则集 $\mathcal{R}$生成的类型判定而言的。如果 $\mathcal{R}$ 满足代换条件，那么更一般地，类型判定和等式在代换下保持不变。我们还可以得出，给定 $\Delta \vdash \sigma = \tau$ 和s : 项$_\Gamma$ ，则 $\Delta \vdash s[\![\sigma]\!] = s[\![\tau]\!]$；不过这实际上并不需要代换条件。

如果规则集合 $\mathcal{R}$ 满足弱化和代换条件，那么就存在一个由类型良构的上下文和代换构成的良定义商范畴，我们将其记作（略微滥用记号）$\mathsf{Catt}_{\mathcal{R}}$。最后我们指出，代换条件通过使用弱化代换 $\Gamma \to \Gamma, A$ 蕴含弱化条件，但在形式化过程中，将二者分别给出会更为方便。

S悬置条件。 如果 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$ 蕴含以下内容，则称 $\mathcal{R}$ 具有悬置条件：

$$(\Sigma\Gamma, \Sigma s, \Sigma t) \in \mathcal{R}$$

这足以说明，类型判定和等式在悬置下保持不变。

定义 13。 如果一组相等生成元 $\mathcal{R}$ 满足弱化、代换和悬置条件，则称其为温和的。

在任何温和理论中，都可以证明楔和之间的树标记和代换是类型良构的，也可以证明标准构造（类型、项和相干）是有效的。

支撑条件。 如果对于所有满足 $\Gamma \vdash s$ 的 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$，都有 $\mathsf{supp}(s) = \mathsf{supp}(t)$，则称 $\mathcal{R}$ 具有支撑条件。毫不意外，该条件成立意味着所有等式都保持支撑不变。

尽管乍看之下这条规则似乎显而易见，但事实证明它并没有那么简单。虽然我们知道 s 有效，却无法保证它在支撑方面表现良好，因为它可能包含不保持支撑的等式。因此，我们给出以下引理和证明策略，沿用[FRVR22]中用于证明支撑保持性的方法。我们首先定义一个集合：

$$\mathcal{R}_{\mathsf{s}} = \{(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R} \mid \mathsf{supp}(s) = \mathsf{supp}(t)\}$$

这将生成一个新的类型论 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}}$。为清楚起见，我们规定该类型论具有如下形式的判断：$\vdash_{\mathsf{s}}$。

引理 14. 假设对于所有满足以下条件的 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$：存在某个 A : 类型$_\Gamma$，使得 $\Gamma \vdash_{\mathsf{s}} s : A$，且 支撑$(s)$ =支撑(t)。那么 $\mathcal{R}$ 满足支撑条件。

利用这个引理，我们可以在 $\mathcal{R}$ in $\mathrm{CATT}_{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}}$ 中进行任意构造，从而自动保证某些等式保持支撑。稍后我们将在插入操作中看到这一点，并证明该插入操作在满足相应条件的任何理论中都是有效的。

转换条件。 最后一个条件是转换条件，它指出，如果 $(\Gamma, s, t) \in \mathcal{R}$ then $\Gamma \vdash s : A$，则 蕴含 $\Gamma \vdash t : A$。这个条件与支撑条件结合起来，足以证明等式保持类型判定。

我们可以立即看出 $\mathrm{CATT} = \mathrm{CATT}_\emptyset$，并且由于 $\emptyset$ 显然满足上述条件，因此上面的所有结果对 CATT 本身也成立。

圆盘移除。 我们给出两个来自 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{su}}$ [FRVR22] 的相等规则示例，它们将在 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$中再次使用。第一个将一元复合平凡化。

定义 15 （圆盘移除）。 回想一下，任何来自圆盘的代换都具有如下形式$\{A, t\}$，其中某个项为 t，类型为 A。对于任意 n, s: Term_Γ 以及 $A : \mathsf{Type}_\Gamma$，圆盘移除将上下文 Γ 中的项 $\mathcal{C}^n_{D^n}[\![\{A, s\}]\!]$ 和 s视为相等。换言之，展开上述构造后，圆盘移除给出以下形式的等式：

$$\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (D^n : U^n_{D^n})[\{A, s\}] = s$$

直观地说，这可以理解为："项 s 等于 (s)，即 s 的一元复合项"。

圆盘移除给出了性质 $\mathcal{C}^n_\Delta = \mathcal{T}^n_\Delta$ （对于 $n > 0$），从而在进行定义等价层面的讨论时，无须再区分二者。

内自洽性消去。 第二条等式规则简化了一类称为"自同相干项"的项。它们具有以下形式：

$$\mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A s)[\sigma]$$

这些是"相干律"，直观地可以理解为："项 $s[\sigma]$ 等于项 $s[\sigma]$"。但我们已经有一种规范的方式来表达这一点—— $s[\sigma]$ 上的恒等项。这启发了以下归约。

定义 16 （内自洽性消去）。 内自洽性消去是以下这类等式：

$$\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A s)[\sigma] = \mathbb{1}[\![\{A[\![\sigma]\!], s[\![\sigma]\!]\}]\!]$$

对所有 Δ、 s、 A 和 σ 均成立。

可以验证（利用来自 [FRVR22]的证明），圆盘移除和自同态相干移除均满足上述所有条件。定义规则集

$$\mathsf{su} = \text{disc removal} \cup \text{endo-coherence removal} \cup \text{pruning}$$

类型论 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{su}}$ 得以恢复。这表明， $\mathrm{CATT}_{\mathsf{su}}$ 是本节所介绍的一般模式的一部分。

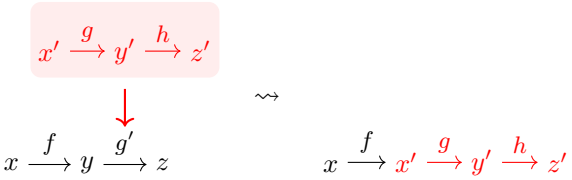


图 7：作用于复合项 $f \cdot (g \cdot h)$ 的插入

2.6 Catt 的模型$_{\mathcal{R}}$

$\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$ 的模型以与 $\textsc{Catt}_{\mathsf{su}}$的模型相同的方式定义，并且 [FRVR22] 中证明的许多结果可直接应用于 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$的良态变体。为完整起见，我们在此总结这些结果。回顾语法范畴 $\mathsf{Catt}_{\mathcal{R}}$的定义，我们可以定义 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$的模型。

定义 17。 设 $\mathcal{R}$ 是一个温和的相等生成元集合。 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$ 的一个模型 是 $\mathsf{Catt}_{\mathcal{R}}$ 上的一个预层，并且其对偶函子 $\mathsf{Catt}_{\mathcal{R}} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 保持球状和。

我们将 $\mathcal{R}$-半严格 ∞-范畴定义为这些模型中的一个。当 $\mathcal{R}$ 满足支撑条件时， [FRVR22] 中的复原 算法允许从一个 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}}$ 项 s 得到一个 $\textsc{Catt}$ 项 t ，使得 $s =_{\mathcal{R}} t$。这意味着显然的函子 $\mathsf{Catt} \to \mathsf{Catt}_{\mathcal{R}}$ 是满的，因此，成为 $\mathcal{R}$-半严格的，是 ∞-范畴的一个性质 ，正如所预期的那样。

这些预层之间的自然变换对应于严格函子。 ∞-范畴之间的弱函子可以通过 Garner [Gar10] 提出的一个众所周知的过程，由这些严格函子构造出来。

3 插入

我们的类型论 $\textsc{Catt}_{\mathsf{sua}}$（即对带有严格单位和结合子的 $\textsc{Catt}$ 的改编）具有半严格行为，这主要由一条称为“插入”的新等式规则驱动。该等式规则将参数上下文的部分结构纳入头部上下文，从而简化项的整体语法。

若要成为插入的候选项，参数不能作为该项中另一个参数的源或目标；我们称这样的参数为局部极大。考虑复合项 $f \cdot (g \cdot h)$。该项有两个局部极大参数， f 和 $g \cdot h$，其中后者是一个（标准）相干。插入允许我们将这两个复合项合并为一个，方法是将内层相干的粘贴图“插入”外层相干的粘贴图中。在上述情形下，我们会得到项$f \cdot (g \cdot h)$等于三元复合 $f \cdot g \cdot h$，后者是一个仅含单个相干的项。由于项 $(f \cdot g) \cdot h$ 也可通过插入化简为该三元复合，我们看到结合子的两边在插入下相等。插入对这些上下文的作用如图 7 所示。

更一般地，我们考虑一个相干项 $\mathsf{coh}\ (\Delta\colon A)[\sigma]\colon \mathsf{Term}_{\Gamma}$，其中存在某个局部极大变量 $x : A \in \Delta$ ，使得 $x[\![\sigma]\!]$ 本身就是一个标准相干

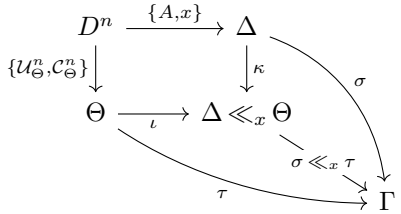
$\mathcal{C}^n_\Theta[\![\tau]\!]$。在对 Θ 和 Δ 的形状施加某些条件后（将在第3.1节中具体说明），我们将构造以下数据，作为插入操作的一部分：

- 通过沿着 x将 Θ 插入 Δ 而得到的插入上下文 $\Delta \ll_x \Theta$。插入上下文是一个粘贴图。
- 内部代换 $\iota\colon \Theta \to \Delta \ll_x \Theta$，即将 Θ 包含到一个位于插入上下文中的 Θ 副本里。
- 外部代换 $\kappa\colon \Delta \to \Delta \ll_x \Theta$，它将 x 映射为 Θ副本上的标准相干，或者更具体地说，映射为 $\mathcal{C}^n_\Theta[\![\iota]\!]$；并将其他局部极大变量映射到它们在插入上下文中的副本。
- 插入代换 $\sigma \ll_x \tau\colon \Delta \ll_x \Theta \to \Gamma$，它汇集了 σ 和 τ的适当部分。

使用这一记号，插入给出如下归约：

$$\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma] \rightsquigarrow \mathsf{coh}\ (\Delta \ll_x \Theta : A[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_x \tau]$$

这些构造可以组合成如下图：



外边界的交换性由等式 $x[\![\sigma]\!] = \mathcal{C}^n_\Theta[\![\tau]\!]$ 给出，这是构造的条件之一。内方块的交换性是如上所述的外部代换的性质。此外，正如图示所暗示的，$\Delta \ll_x \Theta$ 是一个推出，而 $\sigma \ll_x \tau$ 是由推出的泛性质确定的到 Γ 的唯一映射。这为理解插入提供了另一种方式，也让我们直观地看到，插入是将两个上下文作不交并，并将第一个上下文中的 x 与第二个上下文上的标准相干粘合在一起的结果。

3.1 插入构造

我们已经陈述了插入上下文及其相关映射的存在性，并声称它们满足一个泛性质。本节将直接构造这些对象。所有构造都将通过对粘贴图的树结构作归纳来完成，这些粘贴图已在第 2.4 节中介绍。与上下文相比，树更便于我们的技术性推导，因此我们将始终使用树。

为了能够继续进行归纳定义，我们需要局部极大变量的一个归纳版本，称之为分支。我们定义分支的一些性质如下，见图 8。

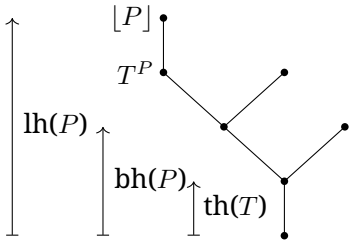


图 8：叶高、分支高度和主干高度。

定义 18. 树 T 的分支 P 是其线性子树 T的一个非空索引列表。分支 P给出 T的一个局部极大变量 $\lfloor P \rfloor$，方法是取 $\lfloor T_P \rfloor$的唯一局部极大变量。定义 P的分支高度 bh(P) 为 P 长度减一（注意， P 总是非空的）。最后，定义路径 P 的叶高 lh(P) 为 $\lfloor P \rfloor$的维数。与树类似，在含义明确时，我们将省略 $\lfloor - \rfloor$ 记号，并将分支用作变量。

对于每个局部极大变量，都存在某个表示它的分支，但该分支不一定唯一。回顾树的主干高度的定义 10。现在我们给出本文的核心定义之一；该定义也曾在引言中作过非正式说明，并通过图 1 加以阐释。

定义 19 （插入树）。给定树 S 和树 T，以及树 S 的一个分支 P，满足 th(T) $\geq$ bh(P)，我们通过对 P 的长度进行归纳来定义插入树 $S \ll_P T$：

- Suppose $P = [k]$ and $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$. Then:

$$S \ll_P T = [S_1, \ldots, S_{k-1}] +\!\!+ T +\!\!+ [S_{k+1}, \ldots, S_n]$$

- 假设 P 的长度大于 1，因此 $P = k :: P'$，并且再次有 $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$。注意， P' 是 S_k 的一个分支，根据 T 的主干高度条件，我们有 $T = [T_1]$。于是：

$$S \ll_P T = [S_1, \ldots, S_{k-1}, S_k \ll_{P'} T_1, S_{k+1}, \ldots, S_n]$$

请注意， T 的主干高度至少等于 P的分支高度这一条件是归纳得以进行的必要条件。回想一下，树可以视为树列表；在插入的第一种情形中， T 被视为一个列表，而在第二种情形中， $S_k \ll_{P'} T_1$ 被视为一棵单独的树，它构成了 $S \ll_P T$的一个子树。

现在我们来定义内部代换和外部代换，这将使用第 2.4 节中引入的图示记法来完成。

定义 20 （内部代换）。给定 S, T 树，其中 P S 的一条分支满足 th(T) $\geq$bh(P)，我们通过对 P 作归纳来定义内部代换 $\iota_{S,\ P,\ T}$: $T \to S \ll_P T$。

- 当 $P = [k]$、 $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$ 时，我们得到：

$$\begin{array}{ccccc} [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & T & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \\ & & \mathrm{id}\uparrow & & \\ & & T & & \end{array}$$

- 当 $P = k :: P'$， $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$ 我们得到：

$$\begin{array}{ccccc} [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & \Sigma S_k \ll_{P'} T_1 & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \\ & & \Sigma\iota_{S_k, P', T_1}\uparrow & & \\ & & \Sigma T_1 & & \end{array}$$

当能够轻易推断出下标时，我们可以省略 ι 上的下标。

定义 21（外部代换）。给定 S， T 树，其中 P S 有一条分支，且 th(T) $\geq$ bh(P)，我们通过对P进行归纳来定义外部代换 $\kappa_{S,\ P,\ T}$： $S \to S \ll_P T$。

- 当 $P = [k]$， $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$ 我们得到：

$$\begin{array}{ccccc} [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & T & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \\ \mathrm{id}\uparrow & & \{\mathcal{U}_T^n, \mathcal{C}_T^n\}\uparrow & & \mathrm{id}\uparrow \\ [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & \Sigma S_k & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \end{array}$$

这里需要注意，根据 P 为分支这一条件可知， S_k 是线性的，因此 $\Sigma\lfloor S_k \rfloor$ 是一个圆盘。

- 当 $P = k :: P'$， $S = [S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n]$ 我们得到：

$$\begin{array}{ccccc} [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & \Sigma S_k \ll_{P'} T_1 & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \\ \mathrm{id}\uparrow & & \Sigma\kappa_{S_k, P', T_1}\uparrow & & \mathrm{id}\uparrow \\ [S_1, \ldots, S_{k-1}] & \vee & \Sigma S_k & \vee & [S_{k+1}, \ldots, S_n] \end{array}$$

同样，在可以推知下标时，也可以省略 κ 的下标。

最后，我们定义插入代换。

定义 22（插入代换）。给定 S， T 树，其中 P 是 S 的一个分支，且 th(T) $\geq$ bh(P)，以及 σ： $S \to \Gamma$、 τ： $T \to \Gamma$，我们定义插入代换 $\sigma \ll_P \tau$:$S \ll_P T \to \Gamma$。不失一般性，我们可以假设 σ 和 τ 分别由 S 和 T 的标记 L， M 给出，并且我们需要给出一个标记 $L \ll_P M$： $S \ll_P T \to \Gamma$。令

$$S = [S_1, \ldots, S_n] \qquad L = {}_{s_0}L_1{}_{s_1} \ \ldots \ L_n{}_{s_n}$$

然后对 P 进行归纳。

- 令 $P = [k]$，并且

$$T = [T_1, \ldots, T_m] \qquad M = {}_{t_0}M_1{}_{t_1} \ \ldots \ M_m{}_{t_m}$$

然后定义 $L \ll_{[k]} M$ 为：

$${}_{s_0}L_1{}_{s_1} \ \ldots \ L_{k-1}{}_{t_0}M_1{}_{t_1} \ \ldots \ M_m{}_{t_m}L_{k+1}{}_{s_{k+1}} \ \ldots \ L_n{}_{s_n}$$

- 假设 $P = k :: P'$，使得

$$T = [T_1] \qquad M = {}_{t_0}M_{1}{}_{t_1}$$

定义 $L \ll_P M$ 如下：

$${}_{s_0}L_{1}{}_{s_1} \ \ldots \ L_{k-1}{}_{t_0}(L_k \ll_{P'} M_1)_{t_1} L_{k+1}{}_{s_{k+1}} \ \ldots \ L_n{}_{s_n}$$

插入代换随后定义为与此标记相对应的代换。

由于执行插入需要大量数据，我们将把这些数据打包起来，以避免重复。

定义 23. 插入点 是一个三元组 $(S,\ P,\ T)$，其中 S和 T是树，且P是 S的一个分支，满足 $\mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{th}(T)$ 且 $\mathsf{lh}(S) \geq \dim(T)$。插入重写元 是一个六元组 $(S,\ P,\ T,\ \Gamma,\ \sigma,\ \tau)$，其中 $(S,\ P,\ T)$ 是一个插入点，$\sigma\colon S \to \Gamma$ 和 $\tau\colon T \to \Gamma$是代换，并且 $\lfloor P \rfloor [\![\sigma]\!] \equiv \mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau]\!]$。

3.2 插入的性质

这里，所有类型判断均相对于一个驯服规则集 $\mathcal{R}$进行，并将其视为隐含条件。我们将在任意此类 $\mathrm{CATT}_{\mathcal{R}}$中陈述上一节构造的各种性质。

命题 24. 若(S, P, T) 是一个插入点，则：

$$S \ll_P T \vdash \iota : T \quad S \ll_P T \vdash \kappa : S$$

若进一步地，$(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$ 是一个插入重写元，则：

$$\Gamma \vdash \sigma \ll_P \tau : S \ll_P T$$

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Typing.agda(28)。 □

引理 25. 对于任意插入重写元$(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$：

$$\Sigma(\sigma \ll_P \tau) \equiv \Sigma\sigma \ll_{0::P} \Sigma\tau$$

给定另一个代换 $\mu\colon \Gamma \to \Delta$，我们有：

$$(\sigma \ll_P \tau) \circ \mu \equiv (\sigma \circ \mu) \ll_P (\tau \circ \mu)$$

并且上述构造都是良定义的。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(218)。 □

下面这个关于向圆盘中插入的引理，对于证明我们在第 4.1 节中定义的归约与我们的等式一致至关重要。

引理 26. 设 T是一棵树，$n \geq \dim(T)$，且 P是 D^n 的一条分支，并且 $\mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{th}(T)$。则 $D^n \ll_P T = T$ 且 $\iota_{D^n,\ P,\ T} \equiv \mathrm{id}$。进一步假设 $\sigma\colon D^n \to \Gamma$ 且 $\tau\colon T \to \Gamma$。则 $\sigma \ll_P \tau \equiv \tau$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(151)。 □

接下来我们陈述插入的泛性质所需的条件。这些条件都可以通过对 P 归纳来证明。

引理 27。 对于所有插入点(S, P, T)，项 $P[\![\kappa]\!]$和 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\iota]\!]$ 在语法上相等。若扩展为插入重写元$(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$，则有以下结论：

$$\iota_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau) = \tau \qquad\qquad \kappa_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau) = \sigma$$

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(108,233)。 □

这引出了以下定理，它证明插入是一个推出。

定理28。 对于任意插入点(S, P, T)，下图在$\mathsf{Catt}_{\mathcal{R}}$ 中是一个推出，其中 A 是 $\lfloor P \rfloor$的类型：

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\{A,P\}} & S \\ {\scriptstyle \{\mathcal{U}_\Theta^{\mathsf{lh}(P)}, \mathcal{C}_\Theta^{\mathsf{lh}(P)}\}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} \\ T & \xrightarrow[\iota]{} & S \ll_P T \end{array}$$

证明。 引理 27 之后剩下要证明的只有：插入代换是满足交换性条件的唯一代换。我们只需注意到， $S \ll_P T$中的每个变量要么是 S中的变量的像，要么是 T中的变量的像。 □

3.3 类型理论 $\mathbf{Catt}_{\mathsf{sua}}$

现在，定义主要类型论 $\textsc{Catt}_{\mathsf{sua}}$所需的所有要素都已齐备。我们先正式定义插入规则。

定义 29 （插入）。 插入规则 指出，下列等式成立：

$$\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma] = \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

对于所有插入可约式 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$ 以及类型 $A : \mathsf{Type}_S$。

现在，我们将规则集 sua 定义为插入、圆盘移除和内自洽性消去的并集，并令 $\textsc{Catt}_{\mathsf{sua}}$ 为由这些规则生成的类型论。由于圆盘移除和内自洽性消去满足所有条件，接下来只需检验插入是否也满足这些条件。弱化条件显然成立，因为插入不会与项所处的环境上下文发生交互。代换条件和悬挂条件可由引理 25 和一些计算迅速推出。剩下的是支撑和转换。

关于支撑，我们采用第2.5节详述的证明策略。假设

$$\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma] = \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

是符合插入规则的有效插入，并且进一步有 $\Gamma \vdash_{\mathsf{s}} \mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma] : B$ （该规则左侧在 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}}$ 中类型正确）。那么，引理 27 在 $\textsc{Catt}_{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}}$ 中成立

这意味着 $\mathsf{supp}(\kappa \circ (\sigma \ll_P \tau)) = \mathsf{supp}(\sigma)$，并且由于 κ 是完整的（其支撑是整个上下文），因此可得 $\mathsf{supp}(\sigma \ll_P \tau) = \mathsf{supp}(\sigma)$，正如所需。

最后，转换可由命题 24 得出。还需要证明生成的项满足支撑条件，这一点已在形式化中完成[1]。

在 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$ 中，以下性质成立：

定理 30. 设 (S, P, T) 是一个插入点。那么，对于所有的 $n \leq \dim(S) + 1$，$\mathcal{U}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!] = \mathcal{U}^n_{S \ll_P T}$，若 $\dim(S) = n$，则 $\mathcal{T}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!] = \mathcal{T}_{S \ll_P T}$。

证明。 参见Catt/Typing/Insertion/Equality.agda(319)。 □

推论 31. 将标准相干插入到另一个标准相干中，所得结果等于插入上下文上的一个标准相干。具体而言：

$$\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : \mathcal{U}^n_S[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_P \tau] = \mathcal{C}^n_{S \ll_P T}[\![\sigma \ll_P \tau]\!]$$

对于任意插入重写元 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$ 以及 $n \geq \dim(T)$。

4 Catt 的判定过程$_{\mathsf{sua}}$

我们证明了 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$ 上的等式是可判定的，因此类型检查也是可判定的。这给出了一个用于检查 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$ 项有效性的算法，我们已将其实现，并将在第 5 节讨论。

通过给出一个归约关系 $\rightsquigarrow$，我们证明了可判定性：该关系的对称传递自反闭包 $\rightsquigarrow$ 与有效项集合上的等式一致。我们还证明了 $\rightsquigarrow$ 是终止的，也就是说，对于每个项 t，我们都可以生成一个范式$N(t)$；此外，它还是合流的，这意味着范式唯一。因此，检查两个项 s 和 t 是否相等，可以通过检查它们的范式 $N(s)$和 $N(t)$是否句法相等来完成。我们首先引入一种更精细的等式概念，这对于证明本节所需的许多句法性质至关重要。

定义 32。 定义如下的 n-有界相等关系：当$\Gamma \vdash s = t$ 时，若 $\Gamma \vdash s =_n t$ 有一个仅使用规则（Δ, s', t'）的推导，则 $\Gamma \vdash s =_n t$ 成立；当 $\dim(s') < n$ 时，$\in \mathcal{R}$ 成立。我们进一步定义极大相等：当代换 σ 和 τ 作用于局部极大变量时句法相等，则令 $\Gamma \vdash \sigma \equiv^{\mathsf{max}} \tau$ 成立；当它们在所有局部极大变量上按定义相等时，则令 $\Gamma \vdash \sigma =^{\mathsf{max}} \tau$ 成立。

显然，有界相等蕴含相等。有效代换之间的极大相等（无论哪一种）也由于转换而蕴含相等。此外，维数为 $n-1$ 的任意相等项都是 n 有界相等的，因此，如果 $\Gamma \vdash \sigma \equiv^{\mathsf{max}} \tau$，则可推出 $\Gamma \vdash \sigma =_{\dim(\sigma)} \tau$。最后，如果 $\Gamma \vdash \sigma \equiv^{\mathsf{max}} \tau$，且 σ 和 τ 都在 $\mathrm{CATT}_{\emptyset}$ 中有效，则可推出 $\sigma \equiv \tau$。

4.1 Catt 的归约$_{\mathsf{sua}}$

为了定义 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{sua}}$ 的归约，我们通过相互归纳，在项、类型和替换上定义归约关系，并将这些归约记作 $\Gamma \vdash \ \rightsquigarrow$，并用适当的 - -

[1] Catt/Typing/Insertion/Support.agda(214)

$$\frac{\Delta \vdash A \rightsquigarrow B}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma] \rightsquigarrow \mathsf{coh}\ (\Delta : B)[\sigma]}\ \textsc{Cell} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma \rightsquigarrow \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma] = \mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\tau]}\ \textsc{Arg}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \rightsquigarrow s'}{\Gamma \vdash s \to_A t \rightsquigarrow s' \to_A t} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \rightsquigarrow A'}{\Gamma \vdash s \to_A t \rightsquigarrow s \to_{A'} t} \qquad \frac{\Gamma \vdash t \rightsquigarrow t'}{\Gamma \vdash s \to_A t \rightsquigarrow s \to_A t'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma \rightsquigarrow \tau}{\Gamma \vdash \langle \sigma, x \mapsto s \rangle \rightsquigarrow \langle \tau, x \mapsto s \rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash s \rightsquigarrow t}{\Gamma \vdash \langle \sigma, x \mapsto s \rangle \rightsquigarrow \langle \sigma, x \mapsto t \rangle}$$

图 9：结构归约规则

语法片段替换下划线；其自反传递闭包记作$\Gamma \vdash \ \rightsquigarrow^*$ 。单步归约的结构规则见图 9；此外，我们还加入圆盘移除、对非恒等项进行内自洽性消去，以及插入规则，其中头项既不是恒等项也不是圆盘，且插入参数是标准复合或恒等项。不允许对恒等项进行头部归约，对于终止性至关重要；对插入规则加以限制，则简化了合流性证明，并由下面的引理予以论证。

引理 33. 设$(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$是一个插入重写元。进一步假设 $a \equiv \mathsf{coh}\ (S{:}A)[\sigma]$ 既非恒等项，也非圆盘。则存在一个项 s，使得：

$$a \rightsquigarrow^* s =_{\dim(a)} \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

即使 $P[\![\sigma]\!]$ 不是标准复合或恒等项，也成立。

在给出证明之前，我们先给出一些定义和进一步的引理。

定义 34. 对于树 S 和分支 P，令

$$S /\!\!/ P = S \ll_P D^{\mathsf{lh}(P)-1}$$

并令$\pi_P = \kappa_{S,P,D^{\mathsf{lh}(P)-1}}$。

定义 35. 给定 S和分支 P，若 $2 + \mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{lh}(P)$，则存在 $S /\!\!/ P$ 的一个分支 P'，它与 P 由相同的列表给出。

引理 *36.* 若 S 有一个分支 P，且 $2+bh(P) \leq lh(P)$，则$\lfloor P' \rfloor \equiv d_{\mathsf{lh}(P)-1}[\![\iota_{S,P,D^{\mathsf{lh}(P)-1}}]\!]$。若 (S, P, T) 是一个插入点，我们还可得 $(S /\!\!/ P) \ll_{P'} T = S \ll_P T$和$\pi_P \circ \kappa_{S/\!\!/P,P',T} =^{\mathsf{max}} \kappa_{S,P,T}$。若还给定 $\sigma\colon S \to \Gamma$ 和 $\tau\colon T \to \Gamma$，则：

$$(\sigma \ll_P (\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau)) \ll_{P'} \tau \equiv^{\mathsf{max}} \sigma \ll_P \tau$$

证明。参见 Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(1094)
Catt/Typing/Insertion/Equality.agda(139)。 □

引理 37。 如果 P 是 S的一个分支，且 $\sigma, \sigma' :\ S \to \Gamma$ 是仅在$\lfloor P \rfloor$上有所不同的替换，那么对于插入重写元 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$，有如下结论：

$$\sigma \ll_P \tau \equiv \sigma' \ll_P \tau$$

证明。 根据定义可知， $\sigma \ll_P \tau$ 不使用项 $\lfloor P \rfloor [\![\sigma]\!]$。 □

引理 *33* 的证明。 我们对 $\mathsf{lh}(P) - \dim(T)$ 进行归纳。如果 $\mathsf{lh}(P) - \dim(T) = 0$，那么 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 是一个复合项，因此可以进行通常的插入。现在假设 $\mathsf{lh}(P) > \dim(T$。不失一般性，我们还可以假设 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 不是恒等项，否则它可以直接插入。这样，我们便可以进行内自洽性消去，得到:

$$\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)} \rightsquigarrow \mathbb{1}[\![\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau]\!]$$

现在假设 $a \equiv \mathsf{coh}\,(S : A)[\sigma]$ 且 $b \equiv \mathsf{coh}\,(S : A)[\sigma']$，其中 σ' 是对 σ 中适当的项应用上述归约所得的结果。由于 $P[\![\sigma']\!]$ 现在是一个恒等项，因此可以将其插入，得到 $b \rightsquigarrow c$，其中:

$$c \equiv \mathsf{coh}\,(S /\!\!/ P : A[\![\pi_P]\!])[\sigma' \ll_P (\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau)]$$

现在我们希望证明 $2 + \mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{lh}(P)$，从而 P' 作为 $S /\!\!/ P$ 的一个分支存在。由于总有 $1 + \mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{lh}(P)$，我们考虑 $1 + \mathsf{bh}(P) = \mathsf{lh}(P)$ 的情形。我们知道 $\mathsf{bh}(P) \leq \dim(T) \leq \mathsf{lh}(P)$，因此它必须等于二者之一。若 $\dim(T) = \mathsf{lh}(P)$，则 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 是一个标准复合。若 $\dim(T) = \mathsf{bh}(P)$，则 $\mathsf{th}(T) = \dim(T)$，因此 T 是线性的。然而，这意味着 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 是一个恒等项。两种情形都会导致矛盾，因此 $2 + \mathsf{bh}(P) \leq \mathsf{lh}(P)$，从而 P' 是 $S /\!\!/ P$ 的一个分支。

根据引理 27 和 36，我们现在有:

$$\begin{aligned}
& P'[\![\sigma' \ll_P (\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau)]\!] \\
\equiv\ & d_{\mathsf{lh}(P)-1}[\![\iota_{S,P,D^{\mathsf{lh}(P)-1}} \circ (\sigma' \ll_P (\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau))]\!] \\
\equiv\ & d_{\mathsf{lh}(P)-1}[\![\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau]\!] \\
\equiv\ & \mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}[\![\tau]\!] \\
\equiv\ & \mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}[\![\tau]\!]
\end{aligned}$$

其中，最后一个等价关系成立，是因为如果 $\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}$ 是一个变量，那么 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 就会是一个恒等项。由于 $\mathsf{lh}(P') - \dim(T) = \mathsf{lh}(P) - \dim(T) - 1$ 我们可以使用归纳假设得到 $c \rightsquigarrow d$ 以及:

$$\begin{aligned}
d =_{\dim(a)} \mathsf{coh}\,((S /\!\!/ P) \ll_{P'} T : A[\![\pi_P \circ \kappa_{S/\!\!/P,P',T}]\!])[\\
(\sigma' \ll_P (\{\mathcal{T}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}, \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)-1}\} \circ \tau)) \ll_{P'} \tau]
\end{aligned}$$

根据引理 36 和 37,

$$d =_{\dim(a)} \mathsf{coh}\,(S \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

这就完成了证明，因为 $a \rightsquigarrow^* d$。 □

这使我们能够证明，归约关系与等式一致。

命题 38. 归约的自反、对称、传递闭包等于定义等价。

证明. 显然，归约是定义等价的子关系。反过来，我们对子项和维数进行互相归纳。假设我们有等式 $\Gamma \vdash s = t$。唯一困难的情形是内自洽性消去和插入。如果 s 是一个恒等项，且该等式由内自洽性消去给出，那么 $s \equiv t$。

现在假设 $s = t$ 由插入给出。首先假设 s 是一个恒等项。由引理 26 和一些计算可得：

$$s \equiv \mathbb{1}[\![\{\mathcal{C}^n_\Delta[\![\tau]\!], A\}]\!] = \mathsf{coh}\ (\Delta : \mathcal{C}^n_\Delta \to_{\mathcal{U}^n_{D^n}[\![\kappa]\!]} \mathcal{C}^n_\Delta)[\tau] \equiv t$$

现在我们注意到，对 t 应用内自洽性消去可得：

$$t \rightsquigarrow \mathbb{1}[\![\{\mathcal{C}^n_\Delta[\![\tau]\!], \mathcal{U}^n_{D^n}[\![\kappa]\!][\![\tau]\!]\}]\!]$$

由有效性，我们必有 $\mathcal{U}^n_{D^n}[\![\kappa]\!][\![\tau]\!] = A$，因此根据归纳假设，此情形得证。接下来假设 s 是一个圆盘。那么由引理 26：

$$s \equiv \mathcal{C}^n_{D^n}[\![\{\mathcal{C}^n_\Delta[\![\tau]\!], A\}]\!] = \mathsf{coh}\ (\Delta : \mathcal{U}^n_{D^n}[\![\kappa]\!])[\tau] \equiv t$$

由定理 30，$t =_n \mathcal{C}^n_\Delta[\![\tau]\!]$，因此对 s 应用圆盘移除，并使用关于维数的归纳假设，即可得证。

最后，假设 s 既不是恒等项也不是圆盘，且该等式由插入给出。那么由引理 33 和关于维数的归纳假设，证明即告完成。 □

由于转换条件，如果我们从一个类型良构项开始，那么由它归约得到的任何项也都是类型良构的。实际上，这意味着归约一个项时，我们很少需要检查类型判定条件，因此当我们知道 s 是类型良构项时，会省略上下文 Γ，仅写作 $s \rightsquigarrow t$ 或 $s \rightsquigarrow^* t$。通过检查 sua 是温和的证明，特别是注意到这些证明并未使用等式的对称性，我们可以推断 $\rightsquigarrow^*$ 保持上下文扩展和代换。

终止性。 我们证明该归约具有强终止性，即不存在无限归约序列。我们的策略是为每个项赋予一个序数，证明每个单步归约都会使相应的序数减小，由此推断，任何上述形式的无限归约序列都意味着存在一个无限的序数链；然而，由于序数的良基性，这种序数链不可能存在。我们将与每个项相关联的序数称为其句法复杂度。

为了定义句法复杂度，我们需要用到不超过 ω^ω 的序数。我们还需要一种称为序数自然和的运算，$\alpha \# \beta$；它具有结合性、交换性，并且对其两个参数 [Lip16] 均严格单调。

定义 39。 对于所有项 t 和代换 σ，句法复杂度 $\mathsf{sc}(t)$ 和 $\mathsf{sc}(\sigma)$ 相互定义如下：

- 对于代换，我们有：

$$\mathsf{sc}(\langle t_0, \ldots, t_n \rangle) = \#_{i=0}^{n} t_i$$

- 对于项，我们有 $\mathsf{sc}(x) = 0$ 对于变量 x。

如果 $\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]$ 是一个恒等项，那么：

$$\mathsf{sc}(\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]) = \omega^{\dim(A)} \# \mathsf{sc}(\sigma)$$

否则：

$$\mathsf{sc}(\mathsf{coh}\ (\Delta : A)[\sigma]) = 2\omega^{\dim(A)} \# \mathsf{sc}(\sigma)$$

句法复杂度的动机如下。我们希望证明每次归约都会降低语法树的深度，但这并不完全成立，因为插入之类的归约可能会在被归约项中加入新的构造。关键在于，这些构造增加的复杂度只处于低于被归约项的维度。我们将句法复杂度表示为一个序数，以便利用已有结果；不过需要指出的是，低于 ω^ω 的序数可以用按字典序排列的自然数列表表示。按照这种解释，句法复杂度实际上计算的是各维度上的相干数量。因此，即使我们在较低维度上增加任意复杂度，移除一个维数为 n 的相干仍会降低复杂度。句法复杂度还以特殊方式处理恒等式，因为恒等式在阻碍该理论中的归约方面起着特殊作用。

句法复杂度没有考虑相干中的类型，因为这种类型很难编码。我们不去证明所有归约都会降低句法复杂度，而是证明所有非“单元归约”（即推导中标记为“Cell”规则的归约）都会降低句法复杂度，并由此推断，假设存在的无限归约序列在有限步之后必定只包含单元归约，随后再诉诸按维度归纳。

定理 40. 不使用 *cell* 规则的单步归约会降低语法复杂度。使用 *cell* 规则的单步归约则不会改变复杂度。

我们先证明以下引理，再证明此定理。

引理 41. 以下不等式对任意插入重写元 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$均成立：

$$\mathsf{sc}(\sigma \ll_P \tau) < \mathsf{sc}(\sigma)$$

证明。 首先注意到：

$$\begin{aligned}
\mathsf{sc}(\sigma) &= \left(\mathop{\#}_{x \neq \lfloor P \rfloor} \mathsf{sc}(x[\![\sigma]\!]) \right) \# \mathsf{sc}(P[\![\sigma]\!]) \\
&= \left(\mathop{\#}_{x \neq \lfloor P \rfloor} \mathsf{sc}(x[\![\sigma]\!]) \right) \# \mathsf{sc}(\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau]\!]) \\
&> \left(\mathop{\#}_{x \neq \lfloor P \rfloor} \mathsf{sc}(x[\![\sigma]\!]) \right) \# \mathsf{sc}(\tau)
\end{aligned}$$

进一步，我们以显而易见的方式将句法深度的概念扩展到标签，因此证明对于满足适当条件的所有标签 L 和 M，有：

$$\mathsf{sc}(L \ll_P M) \leq \mathop{\#}_{x \neq \lfloor P \rfloor} \mathsf{sc}(x[\![L]\!]) \# \mathsf{sc}(M)$$

我们通过对 P 进行归纳来证明这一点。若 $P = [k]$，显然 $L \ll_P M$ 包含 M 的所有项以及 L 的部分项，而且关键的是不包含 $\lfloor P \rfloor [\![L]\!]$。若 $P = k :: P'$，则根据归纳假设可得：

$$\mathsf{sc}(L_k \ll_{P'} M_1) \leq \mathop{\#}_{x \neq \lfloor P' \rfloor} \mathsf{sc}(x[\![L']\!]) \# \mathsf{sc}(M_1)$$

由此再次显然，$L \ll_P M$ 包含来自 M 的项，以及属于 L 但不属于$P[\![L]\!]$的项，因此该不等式成立。 □

定理 *40* 的证明。我们希望证明，对于所有归约 $s \rightsquigarrow t$和 $\sigma \rightsquigarrow \tau$，$\mathsf{sc}(t) < \mathsf{sc}(s)$，且 $\mathsf{sc}(\tau) < \mathsf{sc}(\sigma)$（若该归约是单元归约，则将这些关系替换为等式）。我们对归约的推导进行归纳，并注意到结构规则的所有情形均由自然和的严格单调性推出。剩下的是以下基本情形。

圆盘移除。假设 $\mathcal{C}^n_{D^n}[\![\{A, s\}]\!] \rightsquigarrow s$ 是通过圆盘移除得到的。由简单归纳可得，$\mathsf{sc}(\{A, s\}) \geq \mathsf{sc}(s)$，因此：

$$\mathsf{sc}(s) \leq \mathsf{sc}(\{A, s\}) < \mathsf{sc}(\mathcal{C}^n_{D^n}[\![\{A, s\}]\!])$$

内自洽性消去。设 $\mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A s)[\sigma] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{\{A[\![\sigma]\!], s[\![\sigma]\!]\}}$ 是通过内自洽性消去得到的归约。那么：

$$\begin{aligned}
\mathsf{sc}(\mathbb{1}_{\{A[\![\sigma]\!], s[\![\sigma]\!]\}}) &= \omega^{1+\dim(A)} \# \mathsf{sc}(\{A[\![\sigma]\!], s[\![\sigma]\!]\}) \\
&< \omega^{1+\dim(A)} \# \omega^{1+\dim(A)} \\
&\leq \mathsf{sc}(\mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A s)[\sigma])
\end{aligned}$$

这里，第二行成立是因为 $\dim(s) = 1 + \dim(A)$，而最后一行成立是因为根据假设，$\mathsf{coh}\ (\Delta : s \to_A s)[\sigma]$ 不可能是恒等项。

插入。设 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$ 是一个插入重写元，使得：

$$\mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma] \rightsquigarrow \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

由插入可得。这意味着 $\mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma]$ 不是恒等项。于是：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{sc}(\mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa]\!])[\sigma \ll_P \tau]) \\
&\quad \leq 2\omega^{\dim(A)} \# \mathsf{sc}(\sigma \ll_P \tau) \\
&\quad < 2\omega^{\dim(A)} \# \mathsf{sc}(\sigma) \\
&\quad \leq \mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma]
\end{aligned}$$

简单归纳可知，使用 cell 规则进行归约不会改变复杂度，因为使用 cell 规则时，我们修改的是一个不影响句法复杂度的类型。

□

推论42. CATT_{sua} 的归约是强终止的。

证明. 我们按维度进行强归纳。假设存在一个无限归约序列，它从一个维数为k 的项开始：

$$s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow s_2 \rightsquigarrow \cdots$$

那么，根据定理 40，这些归约中只有有限多个不使用 cell 规则，因此存在一个 n，使得：

$$s_n \rightsquigarrow s_{n+1} \rightsquigarrow \cdots$$

全都是单元归约。这些归约中的每一个都会归约 s_n 的有限多个子项之一，而每个子项的维数都小于 k，因此根据归纳假设，这些子项都不可能被无限次归约，这与存在无限归约序列矛盾。

□

合流性。 为了证明合流性，我们采用标准方法，证明局部合流性：项的所有单步约化都可以经过任意多步归约到一个公共归约式。这意味着完全合流性（即多步约化具有菱形性质）；若再结合强终止性，还能得到范式的唯一性。

定理 43。 归约是局部合流的：如果 a 关于 $a \rightsquigarrow b$ 和 $a \rightsquigarrow c$ 有效，那么存在某个 d，使得 $b \rightsquigarrow^* d$ 和 $c \rightsquigarrow^* d$。

证明。 我们对子项和维数同时归纳。假设 $a \rightsquigarrow b$和 $a \rightsquigarrow c$。只需证明 $b \rightsquigarrow^* b'$、$c \rightsquigarrow^* c'$，以及 $b' =_{\dim(a)} c'$，因为随后按维度归纳可得，b' 和 c' 有一个公共归约式，例如可以将两项都归约到范式来得到它。取 $a \equiv \mathsf{coh}\,(S : A)[\sigma]$，最棘手的情形是 $a \rightsquigarrow b$ 是沿某个分支 P进行插入的实例，而 $a \rightsquigarrow c$ 是在参数 $\lfloor P \rfloor[\![\sigma]\!]$上进行的插入。这个临界对的难点在于，$\lfloor P \rfloor[\![\sigma]\!]$ 不一定处于头正规形，而且归约 $a \rightsquigarrow c$ 可能会使原来的插入失效。在前身理论 $\mathrm{CATT}_{\mathsf{su}}$中不会出现这种现象，因为只有恒等式可以被剪除，且恒等式的所有约化项仍然是恒等式。我们将在下文从这个临界对开始讨论。

插入。 设 $a \rightsquigarrow b$是沿可约表达式 $(S,\ P,\ T,\ \Gamma,\ \sigma,\ \tau)$ 进行的一次插入，其中 $a \equiv \mathsf{coh}\,(S : A)[\sigma]$既不是恒等项也不是圆盘，而 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 是复合项或恒等项。现在我们对归约 $a \rightsquigarrow c$分类讨论。

在插入参数上的插入。 现在假设 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau]\!]$ 允许沿可约表达式 $(T,\ Q,\ U,\ \Gamma,\ \tau,\ \mu)$ 进行插入。那么：

$$\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau]\!] \rightsquigarrow \mathsf{coh}\,(T \ll_Q U : \mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\kappa_{T,Q,U}]\!])[\tau \ll_Q \mu]$$

于是我们得到 $c \equiv \mathsf{coh}\,(S : A)[\sigma']$，其中 σ' 是应用上述归约后的 σ。我们可以得出结论：$\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 必定是复合项（也就是说不是恒等项），否则第二次插入将无法进行。同理，T 不能是线性的，否则 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}$ 就会是一个圆盘。

我们现在需要以下引理，其中第一个是定理 30 的一个带有更多条件的有向版本。

引理 44. 设(S, P, T)是一个插入点。那么，如果 S不是线性的或 $n \leq \dim(S)$,$\mathcal{U}_S^n[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{U}^n_{S \ll_P T}$，并且如果$\dim(S) \leq n$且 S不是线性的或$\dim(S) = n$，那么$\mathcal{T}_S^n[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{T}^n_{S \ll_P T}$。

为证明引理 44，必须研究插入与边界映射之间的相互作用。以下引理将完成这项工作。

引理 45。 设 $n \in \mathbb{N}$，并假设 （S、 P、 T）是一个满足以下条件的插入点：

- $n < \mathsf{lh}(P)$
- $n \leq \mathsf{th}(T)$

则 ∂_n（S） $= \partial_n$（$S \ll_P T$），并且对于 $\epsilon \in \{-, +\}$:

$$\delta_n^\epsilon(S) \circ \kappa_{S,P,T} \equiv^{\mathsf{max}} \delta_d^\epsilon(S \ll_P T)$$

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(810)。 □

定义 46. 设 $n \in \mathbb{N}$，并假设 S 是一棵带有分支 P 的树，且 $n > \mathsf{bh}(P)$。那么我们可以定义 ∂_S^n 的一个新分支 ∂_P^n，它由与 P 相同的列表给出。

引理 47. 设 $n \in \mathbb{N}$，并假设 (S, P, T) 是一个插入点，且满足以下条件之一：

1. $n > \mathsf{th}(T)$和 $n \leq \mathsf{lh}(P)$
2. $n \geq \mathsf{lh}(P)$

那么 $\partial_S^n \ll_{\partial_P^n} \partial_T^n = \partial^n_{S \ll_P T}$ 和：

$$\delta_S^{\epsilon,n} \circ \kappa_{S,P,T} \equiv^{\mathsf{max}} \kappa_{\partial_S^n, \partial_P^n, \partial_T^n} \circ \delta^{\epsilon,n}_{S \ll_P T}$$

对于 $\epsilon \in \{-, +\}$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(938)。 □

引理 48。 设 (S, P, T) 为一个插入点。则：

$$\kappa_{S,P,T} \ll_P \iota_{S,P,T} \equiv \mathrm{id}$$

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(233)。 □

引理 49。 对于所有 n 和 S, $\mathcal{C}_S^n \rightsquigarrow^* \mathcal{T}_S^n$。

证明。 唯一一种 $\mathcal{C}_S^n \neq \mathcal{T}_S^n$ 的情形是 $S = D^n$，此时一次圆盘移除即可得到所需的归约。 □

现在我们可以给出引理 44 的证明。

引理 *44* 的证明。我们对 n进行归纳，从类型的陈述开始。如果 $n = 0$，那么两个标准类型都是 $\star$，因此得证。否则，我们有：

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_S^{1+n}[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \equiv\ & \mathcal{T}^n_{\partial^n_S}[\![\delta_S^{-,n} \circ \kappa_{S,P,T}]\!] \\ \to & \mathcal{U}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \\ & \mathcal{T}^n_{\partial^n_S}[\![\delta_S^{+,n} \circ \kappa_{S,P,T}]\!]\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{S \ll_P T}^{1+n} \quad \equiv\ & \mathcal{T}^n_{\partial^n_{S \ll_P T}}[\![\delta^{-,n}_{S \ll_P T}]\!] \\ \to & \mathcal{U}^n_{S \ll_P T} \\ & \mathcal{T}^n_{\partial^n_{S \ll_P T}}[\![\delta^{+,n}_{S \ll_P T}]\!]\end{aligned}$$

由归纳假设：$\mathcal{U}^n_S[\![\kappa_{S,\ P,\ T}]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{U}^n_{S \ll_P T}$，因此我们需要证明：

$$\mathcal{T}^n_{\partial^n_S}[\![\delta_S^{\epsilon,n} \circ \kappa_{S,P,T}]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{T}^n_{\partial^n_{S \ll_P T}}[\![\delta^{\epsilon,n}_{S \ll_P T}]\!]$$

现在注意到，引理 45 或引理 47 的条件必有一个成立。若引理 45 的条件成立，那么（由于 $\textsc{Catt}_\emptyset$ 中所有内容的类型都正确）所需的归约就是平凡的。因此我们专注于第二种情况。此时由引理 47 可得：

$$\mathcal{T}^n_{\partial^n_S}[\![\delta_S^{\epsilon,n} \circ \kappa_{S,P,T}]\!] \equiv \mathcal{T}^n_{\partial^n_S}[\![\kappa_{\partial^n_S,\partial^n_P,\partial^n_T} \circ \delta^{\epsilon,n}_{S \ll_P T}]\!]$$

然后，我们可以对项应用归纳假设：若 $n \leq \dim(S)$，则 $\dim(\partial^n_S) = n$；否则 $\partial^n_S = S$ 不是线性的，因此可得所需的归约。

现在转到项的情形。若 $\mathcal{T}^n_S$是一个变量，则必有 S是线性的 $S = D^n$。在这种情况下，我们还必须有 $\mathcal{T}^n_S = \lfloor P \rfloor$。于是由引理 27，$\mathcal{T}^n_S[\![\kappa_{S,\ P,\ T}]\!] \equiv \mathcal{C}^n_T[\![\iota_{S,\ P,\ T}]\!]$，再由引理 26 和 49，这可归约为 $\mathcal{T}^n_{S \ll_P T}$，正如所需。若 $\mathcal{T}^n_S$不是变量，则 $\mathcal{T}^n_S \equiv \mathcal{C}^n_S$，且 $\mathcal{C}^n_S$不可能是恒等项（因为 S 是非线性的，或者 $n =\dim(S)$）。由引理 27 及其他假设可得，$\mathcal{C}^n_S[\![\kappa_{S,\ P,\ T}]\!]$在分支点 P 处允许插入，因此：

$$\begin{aligned}& \mathcal{T}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \\ \equiv\ & \mathcal{C}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!] \\ \rightsquigarrow\ & \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : \mathcal{U}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\kappa_{S,P,T} \ll_P \iota_{S,P,T}] \\ \equiv\ & \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : \mathcal{U}^n_S[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\mathrm{id}] \\ \rightsquigarrow^*\ & \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : \mathcal{U}^n_{S \ll_P T})[\mathrm{id}] \\ \equiv\ & \mathcal{C}^n_{S \ll_P T} \\ \rightsquigarrow^*\ & \mathcal{T}^n_{S \ll_P T}\end{aligned}$$

其中，第二个等价来自引理 48，第二个归约来自归纳假设（这是良基的，因为类型的证明只使用了 n 的严格较低值处的项的证明），最后一个归约来自引理 49。

□

引理 50. 设(S, P, T)是一个插入点。进一步假设 S不是线性的。那么$\mathsf{th}(S \ll_P T) \geq \mathsf{th}(S)$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(1165)。 □

根据这个引理（因为 T 不是线性的），我们有

$$\mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\kappa_{T,Q,U}]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{U}_{T \ll_P Q}^{\mathsf{lh}(P)}$$

因此 $\mathcal{C}_T^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau]\!] \rightsquigarrow^* \mathcal{C}_{T \ll_Q U}^{\mathsf{lh}(P)}[\![\tau \ll_Q \mu]\!]$。令 c'为对相应参数应用这次进一步归约后得到的项。现在由引理 50 可知，$\mathsf{th}(T \ll_Q U) \geq \mathsf{th}(T)$，因此由引理 33，存在 $c' \rightsquigarrow^* c''$，使得:

$$\begin{aligned} c'' =_{\dim(a)} \mathsf{coh}\ & (S \ll_P (T \ll_Q U) : \\ & A[\![\kappa_{S,P,T \ll_Q U}]\!])[\sigma \ll_P (\tau \ll_Q \mu)] \end{aligned}$$

现在我们来考察 b 如何归约。首先，我们构造插入上下文上的一个分支，并给出所得插入的一些性质。

定义 51。 设 (S, P, T) 是一个插入点。进一步假设 T不是线性的，且有一个分支 Q。那么 $S \ll_P T$ 有一个分支 $S \ll_P Q$ ，其高度与 Q相同。这个新分支指向与 Q相同的位置，但位于 $S \ll_P T$中存在的 T 副本内。

引理 52。 设(S, P, T)是一个插入点。进一步假设 T不是线性的，且有一个分支 Q。那么 $\lfloor S \ll_P Q \rfloor \equiv Q[\![\iota_{S,\ P,\ T}]\!]$。此外，如果$(T, Q, U)$是一个插入点，那么

$$\begin{aligned} S \ll_P (T \ll_Q U) = \quad & (S \ll_P T) \ll_{S \ll_P Q} U \\ \kappa_{S,P,T \ll_Q U} \quad & =^{\mathsf{max}} \kappa_{S,P,T} \circ \kappa_{S \ll_P T, S \ll_P Q, U} \\ \sigma \ll_P (\tau \ll_Q \mu) \ & \equiv^{\mathsf{max}} (\sigma \ll_P \tau) \ll_{S \ll_P Q} \mu \end{aligned}$$

对于任意 $\sigma : S \to \Gamma$、 $\tau : T \to \Gamma$ 以及 $\mu : U \to \Gamma$。

证明。参见 Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(1190)
Catt/Typing/Insertion/Equality.agda(489)。 □

由于 T 不是线性的，因此 $S \ll_P T$ 有一个分支 $S \ll_P Q$ ，由引理 27 和 52 可得:

$$S \ll_P Q[\![\sigma \ll_P \tau]\!] \equiv Q[\![\iota_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau)]\!] \equiv Q[\![\tau]\!] \equiv \mathcal{C}_U^{\mathsf{lh}(Q)}[\![\mu]\!]$$

由于 $\mathsf{th}(U) \geq \mathsf{bh}(Q) = \mathsf{bh}(S \ll_P Q)$，我们可以通过插入将 b 化简为 b'，如下所示:

$$\begin{aligned} b' \equiv \mathsf{coh}\ & ((S \ll_P T) \ll_{S \ll_P Q} U : \\ & A[\![\kappa_{S,P,T} \circ \kappa_{S \ll_P T, S \ll_P Q, U}]\!])[(\sigma \ll_P \tau) \ll_{S \ll_P Q} \mu] \end{aligned}$$

然后由引理 52 可得所需的 $b' =_{\dim(a)-1} c''$ 。

插入。 假设 $a \rightsquigarrow c$ 也是沿着 S的一条分支 Q 进行的插入。现在根据 $\lfloor P \rfloor = \lfloor Q \rfloor$是否成立分情况讨论。首先假设 $\lfloor P \rfloor = \lfloor Q \rfloor$；那么根据下面的引理，我们有$b =_{\dim(a)} c$。

引理 53。 假设(S, P, T)和(S, Q, T)是满足 $\lfloor P \rfloor \equiv \lfloor Q \rfloor$的插入点。那么$S \ll_P T = S \ll_Q T$且 $\kappa_{S,\ P,\ T} \equiv^{\mathsf{max}} \kappa_{S,\ Q,\ T}$。如果进一步有 $\sigma :\ \ S \to \Gamma$ 和 $\tau :\ \ T \to \Gamma$，那么 $\sigma \ll_P \tau \equiv^{\mathsf{max}} \sigma \ll_Q \tau$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(290)。 □

现在假设 $\lfloor P \rfloor \neq \lfloor Q \rfloor$，且 $Q[\![\sigma]\!] \equiv \mathcal{C}_U^{\mathsf{lh}(Q)}[\![\mu]\!]$，使得

$$c \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_Q U : A[\![\kappa_{S,Q,U}]\!])[\sigma \ll_Q \mu]$$

对于这种情况，我们定义插入树的以下分支点。

定义 54。 设 $(S,\ P,\ T)$ 是一个插入点，且 Q 是 S 的一个分支，使得$\lfloor P \rfloor \neq \lfloor Q \rfloor$。那么我们可以定义 $S \ll_P T$ 的一个新分支 $Q \ll_P T$，满足 $\mathsf{bh}(Q \ll_P T) = \mathsf{bh}(Q)$ 且 $\lfloor Q \ll_P T \rfloor \equiv Q[\![\kappa_{S,\ P,\ T}]\!]$。直观地说，该分支指向 S 的同一部分，并且不受插入 T 的影响。

现在我们希望 b 和 c 进一步按如下方式归约:

$$\begin{aligned}
&b \rightsquigarrow b' \equiv \mathsf{coh}\ ((S \ll_P T) \ll_{Q \ll_P T} U :\\
&\ \ A[\![\kappa_{S,P,T} \circ \kappa_{S \ll_P T, Q \ll_P T, U}]\!])[(\sigma \ll_P \tau) \ll_{Q \ll_P T} \mu]\\
&c \rightsquigarrow c' \equiv \mathsf{coh}\ ((S \ll_Q U) \ll_{P \ll_Q U} T :\\
&\ \ A[\![\kappa_{S,Q,U} \circ \kappa_{S \ll_Q U, P \ll_Q U, T}]\!])[(\sigma \ll_Q \mu) \ll_{P \ll_Q U} \tau]
\end{aligned}$$

我们将证明第一个归约是有效的，而另一个由对称性可知也成立。我们需要 b 不是恒等项。首先，假设 a 由相干规则定型。那么，如果$A \equiv s \to_B t$，我们必有 $\mathsf{supp}(s) = \mathsf{supp}(S)$。然而， S 显然不是线性的，因为它有两个不同的叶子。因此， s 不可能是变量，所以 $s[\![\kappa_{S,\ P,\ T}]\!]$ 也不是变量，这使得 b 不是恒等项。现在改为假设 a 是一个复合项。那么，如果 $\partial^-(S)$ 不是线性的，我们可以应用前面的同一推理，因此 S 的高度必须比其维数小一。然而，这意味着 $\lfloor P \rfloor$ 和 $\lfloor Q \rfloor$ 都是与该树维数相同的不同变量，因此 $\mathsf{dim}(S \ll_P T) = \mathsf{dim}(S) = \mathsf{dim}(a)$，所以 b 不可能是恒等项。

我们还注意到:

$$\begin{aligned}
Q \ll_P T[\![\sigma \ll_P \tau]\!] &\equiv Q[\![\kappa]\!][\![\sigma \ll_P \tau]\!]\\
&\equiv Q[\![\sigma]\!]\\
&\equiv \mathcal{C}_U^{\mathsf{lh}(Q)}[\![\mu]\!]\\
&\equiv \mathcal{C}_U^{\mathsf{lh}(Q \ll_P T)}[\![\mu]\!]
\end{aligned}$$

这是插入所要求的，其中第三个等式来自以下引理 a.

引理 55。 对于插入重写元$(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$，以下结论成立:

$$\iota_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau) \equiv \tau$$

$$\kappa_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau) \equiv^{\mathsf{max}} \sigma$$

由此可得第 *3.2* 节中的等式结果。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(108)。 □

最后，主干高度条件得到满足，因为 $\mathsf{bh}(Q) = \mathsf{bh}(Q \ll_P T)$，因此这两个归约都是有效的插入。现在给出以下定义和引理，由此可推出 $b' =_{\dim(a)} c'$。

定义 56。 我们定义插入代换的一个变体，并将其记作 $\sigma \ll'_P \tau$。原始定义会尽可能多地使用来自 τ 的项，而这个变体则会尽可能多地使用来自 σ 的项。更具体地说，我们将 $L \ll'_{[k]} M$ 定义为:

$$s_0 L_1 s_1 \ \dots \ L_{k-1} \boldsymbol{s_k} M_1 t_2 \ \dots \ M_m \boldsymbol{s_{k+1}} L_{k+1} s_{k+1} \ \dots \ L_n s_n$$

并将 $L \ll'_{k::P'} M$定义为:

$$s_0 L_1 s_1 \ \dots \ L_{k-1} \boldsymbol{s_k} (L_k \ll_{P'} M_1) \boldsymbol{s_{k+1}} L_{k+1} s_{k+1} \ \dots \ L_n s_n$$

其中，粗体部分相较于原始定义有所修改。在 $M = []$的边界情况下，我们在定义 $L \ll'_{[k]} M$时任意地使用 s_k，而不是 s_{k+1}。

引理 57。 以下等式成立

$$\sigma \ll_P \tau =_{\dim(S)} \sigma \ll'_P \tau$$

对任意插入重写元 $(S, P, T, \Gamma, \sigma, \tau)$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Typing.agda(188)。 □

引理 58。 设 $(S、\ P、\ T)$ 和 $(S、\ Q、\ U)$ 是满足 $\lfloor P \rfloor \neq \lfloor Q \rfloor$ 的插入点。则有:

$$(S \ll_P T) \ll_{Q \ll_P T} U = (S \ll_Q U) \ll_{P \ll_Q U} T$$
$$\kappa_{S,P,T} \circ \kappa_{S \ll_P T, Q \ll_P T, U} \equiv^{\mathsf{max}} \kappa_{S,Q,U} \circ \kappa_{S \ll_Q U, P \ll_Q U, T}$$

此外

$$(\sigma \ll_P \tau) \ll'_{Q \ll_P T} \mu \equiv^{\mathsf{max}} (\sigma \ll_Q \mu) \ll'_{P \ll_Q U} \tau$$

对于任意插入重写元 $(S、\ P、\ T、\ \Gamma、\ \sigma、\ \tau)$ 和 $(S、\ P、\ T、\ \Gamma、\ \sigma、\ \mu)$。

证明。 参见Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(662)。 □

单元归约。 如果 $A \rightsquigarrow B$ 和 $c \equiv$ 是来自单元归约的 $\mathsf{coh}\ (S : B)[\sigma]$，那么如果 c 既不是恒等项也不是圆盘，则它可以通过插入归约为:

$$c' \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : B[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

由于归约与代换相容， b 也归约到 c'。如果 c 是一个恒等项，那么

$$\begin{aligned} b &\equiv \mathsf{coh}\ (D^n \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau] \\ &\rightsquigarrow \mathsf{coh}\ (D^n \ll_P T : \mathcal{U}^{n+1}_{D^n}[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau] \\ &\rightsquigarrow^* \mathbb{1}[\![\{\mathcal{U}^n_{D^n}, d_n\} \circ \kappa_{S,P,T} \circ \sigma \ll_P \tau]\!] \\ &=_{n+1} \mathbb{1}[\![\sigma]\!] \end{aligned}$$

$$\equiv c$$

其中，等式由引理 27 以及 $\{\mathcal{U}^n_{D^n}, d_n\}$ 是恒等代换得出，第二个归约则由以下引理得出。

L引理 59. 以下归约成立，即使左侧是一个恒等项：

$$\mathsf{coh}\ (\Gamma : s \to_A s)[\sigma] \rightsquigarrow^* \mathbb{1}[\![\{s, A\} \circ \sigma]\!]$$

证明。 如果 coh (Γ: $s \to_A s$)$[\sigma]$ 不是恒等项，那么我们可以通过内自洽性消去进行归约。否则，我们有 $\Gamma = D^n$，其中 n、 $s \equiv d_n$和 $A \equiv \mathcal{U}^n_{D^n}$，因此：

$$\mathbb{1}[\![\{s, A\} \circ \sigma]\!] \equiv \mathbb{1}[\![\{d_n, \mathcal{U}^n_{D^n}\} \circ \sigma]\!] \equiv \mathbb{1}[\![\sigma]\!]$$

由此可知，该归约是平凡的。 □

如果 c 是一个圆盘，那么：

$$\begin{aligned} b &\equiv \mathsf{coh}\ (D^n \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau] \\ &\rightsquigarrow \mathsf{coh}\ (D^n \ll_P T : \mathcal{U}^n_{D^n}[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau] \\ &=_n \mathsf{coh}\ (T : \mathcal{U}^n_T)[\tau] \\ &\equiv c \end{aligned}$$

其中的等式由引理 26 和定理 30 给出。

圆盘移除。 根据假设，插入不能应用于圆盘，因此这种情况是空的。内自洽性消去。假设通过内自洽性消去得到 $A \equiv s \to_B s$ 和 $a \rightsquigarrow c$。在这种情况下， $c \equiv \mathbb{1}[\![\{A, s\} \circ \sigma]\!]$ 和

$$b \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : (s \to_B s)[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

经内自洽性消去归约为：

$$b' \equiv \mathbb{1}[\![\{s, A\} \circ \kappa_{S,P,T} \circ (\sigma \ll_P \tau)]\!]$$

最后，由引理 27 可得 $\kappa_{S,\ P,\ T} \circ (\sigma \ll_P \tau) =_{\dim(S)} \sigma$ 因此 $b' =_{\dim(S)} c$，且由于 dim(S) ≤dim(a)，我们得到 $b' =_{\dim(a)} c$，如所要求。

非插入参数的归约。 假设 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 沿着一个不是$\lfloor P \rfloor$且 $c \equiv$ coh (S: A)$[\sigma']$的参数。于是，由于 $P[\![\sigma']\!] \equiv \mathcal{C}^{\mathsf{lh}(P)}_T$，仍可对 c 执行插入，得到：

$$c \rightsquigarrow c' \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma' \ll_P \tau]$$

由以下引理可得 $b \rightsquigarrow^* c'$。

引理 60。 给定 $\sigma \rightsquigarrow^* \sigma'$ 和 $\tau \rightsquigarrow^* \tau'$，若 $\sigma \ll_P \tau$有定义，则有：

$$\sigma \ll_P \tau \rightsquigarrow^* \sigma' \ll_P \tau'$$

证明。 $\sigma \ll_P \tau$中的每个项都是 σ 或 τ 中的项，因此我们可以直接应用给定的归约。

□

对插入参数进行论证约化。假设 $\tau \rightsquigarrow \tau'$，且 σ' 是 σ，只是将 $\lfloor P \rfloor$ 的参数替换为 coh (T: $\mathcal{U}_T^{\mathsf{lh}(P)}$)$[\tau']$，使得 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 且 $a \rightsquigarrow c \equiv \mathsf{coh}\ (S{:}A)[\sigma']$。那么 c 存在一次插入，并按如下方式归约：

$$c \rightsquigarrow c' \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_P T : A[\![\kappa_{S,P,T}]\!])[\sigma' \ll_P \tau']$$

根据引理 60，我们得到 $b \rightsquigarrow^* c'$。

对插入参数进行圆盘移除。如果 $a \rightsquigarrow c$ 是通过圆盘移除对 $P[\![\sigma]\!]$ 进行约化所得的结果，那么 T 必须等于 D^n（其中 $n = \mathsf{lh}(P)$），且 $c \equiv \mathsf{coh}\ (S :\ A)[\sigma']$，其中 σ' 是将 $\lfloor P \rfloor$ 的参数替换为 $d_n[\![\tau]\!]$ 后得到的 σ。此外：

$$b \equiv \mathsf{coh}\ (S \ll_P D^n : A[\![\kappa_{S,P,D^n}]\!])[\sigma \ll_P \tau]$$

现在给出以下引理。

Lemma 61. 设 S 是一棵树，S 的一个分支为 P。那么我们得到 $S \ll_P D^{\mathsf{lh}(P)} = S$ and $\kappa_{S,P,D^{\mathsf{lh}(P)}} =^{\mathsf{max}} \mathrm{id}$。此外

$$\sigma \ll_P \tau \equiv^{\mathsf{max}} \sigma$$

如果 $(S, P, D^{\mathsf{lh}(P)}, \Gamma, \sigma, \tau)$ 是一个插入重写元。

证明。参见 Catt/Tree/Insertion/Properties.agda(184) Catt/Typing/Insertion/Equality.agda(265)。 □

由此引理，$S \ll_P D^n = S$、$\sigma' \ll_P \tau \equiv^{\mathsf{max}} \sigma'$ 和 $\kappa_{S,\ P,\ D^n}$ = 恒等项。此外，由引理 37 可得 $\sigma \ll_P \tau \equiv \sigma' \ll_P \tau$。由于 $\dim(A[\![\kappa_{S,\ P,\ D^d}]\!]) \leq \dim(a)$：

$$\begin{aligned} b &\equiv \mathsf{coh}\ (S : A[\![\kappa_{S,P,D^d}]\!])[\sigma' \ll_P \tau] \\ &=_{\dim(a)} \mathsf{coh}\ (S : A)[\sigma'] \\ &\equiv c \end{aligned}$$

插入参数上的内自洽性消去。插入参数必须已经是标准复合或恒等项，因此无法通过内自洽性消去进行归约，所以此情形为空。

对插入参数进行插入。本文正文中给出了此情形。

单元归约。如果 $a \rightsquigarrow b$ 是单元归约的一个实例，那么 $a \equiv \mathsf{coh}\ (\Gamma : A)[\sigma]$、$A \rightsquigarrow B$，且 $b \equiv \mathsf{coh}\ (\Gamma : B)[\sigma]$。现在我们对归约 $a \rightsquigarrow c$ 分类讨论。

单元归约。如果 $a \rightsquigarrow c$ 是另一个单元归约 $A \rightsquigarrow C$ 的结果，那么要么这两个归约作用于类型的不同部分，此时存在一个公共归约式 D；要么我们可以对项的子项应用归纳假设，从而找到一个公共归约式。

圆盘移除。A 不是范式，因此 a 的头部不可能是圆盘，所以 $a \rightsquigarrow c$ 不可能是圆盘移除。

内自洽性消去。假设 $A \equiv s \to_{A'} s$，且 $c \equiv \mathbb{1}[\![\{A', s\} \circ \sigma]\!]$。如果归约 $A \rightsquigarrow B$ 源自 $A' \rightsquigarrow B'$，那么 b 立即允许进行内自洽性消去，并按如下方式归约：

$$b' \equiv \mathbb{1}[\![\{B', s\} \circ \sigma]\!]$$

于是 $\{s, A'\} \rightsquigarrow \{s, B'\}$，因此 $c \rightsquigarrow^* b'$。

否则，我们有归约 $s \to_{A'} s \rightsquigarrow s' \to_{A'} s$ 或 $s \to_{A'} s \rightsquigarrow s \to_{A'} s'$。在这两种情况下，我们都有 $b \rightsquigarrow \mathsf{coh}\,(\Gamma : s' \to_{A'} s')[\sigma]$，因此通过内自洽性消去，得到如下结果：

$$b \rightsquigarrow^* b' \equiv \mathbb{1}[\![\{A', s'\} \circ \sigma]\!]$$

因此，我们得出结论 $c \rightsquigarrow^* b'$，这正是所需的。

论证约化。如果 $c \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : A)[\sigma']$ 是由论证约化 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 得到的，那么 b 和 c 都可以通过论证约化或单元归约归约到 $\mathsf{coh}\,(\Gamma : B)[\sigma']$。

圆盘移除。如果 $a \rightsquigarrow b$ 是圆盘移除，那么对于某个 n，有 $a \equiv \mathcal{C}^n_{D^n}[\![\sigma]\!]$ 和 $b \equiv d_n[\![\sigma]\!]$。现在，$a$ 不能通过内自洽性消去归约，而圆盘移除是唯一的，因此剩下的唯一情况是论证约化。设 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 和 $c \equiv \mathcal{C}^n_{D^n}[\![\sigma']\!]$，后者通过圆盘移除归约到 $c' \equiv d_n[\![\sigma]\!]'$。如果归约 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 沿着 d_n 进行，那么根据定义，$c \rightsquigarrow c'$；否则，$c \equiv c'$。

内自洽性消去。要使 $a \rightsquigarrow b$ 成为内自洽性消去的一个实例，我们必须有 $a \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : s \to_A s)[\sigma]$ 和 $b \equiv \mathbb{1}[\![\{A, s\} \circ \sigma]\!]$。第二个归约剩下的唯一情形是参数约化，因为其余情形都可由对称性或内自洽性消去的唯一性推出。因此，设 $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ 和 $c \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : s \to_A s)[\sigma']$，它经内自洽性消去归约为 $c' \equiv \mathbb{1}[\![\{A, s\} \circ \sigma']\!]$。由于归约的传递闭包与代换相容，$\{A, s\} \circ \sigma \rightsquigarrow^* \{A, s\} \circ \sigma'$，因此 $b \rightsquigarrow^* c'$。

参数约化。我们假设 $a \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : A)[\sigma]$ 和 $b \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : A)[\sigma']$，其中 σ' 是将 σ 的一个参数 x 归约后的结果。剩下的唯一情形是 $a \rightsquigarrow c$ 也是一次参数插入，因此 $c \equiv \mathsf{coh}\,(\Gamma : A)[\sigma'']$，其中 σ'' 是将 σ 的一个参数 y 归约后的结果。若 x 不等于 y，则 σ' 和 σ'' 都归约为同时应用这两个归约所得的代换。否则，若 $x = y$，则根据对子项的归纳，σ' 和 σ'' 有一个公共归约式。 □

5 实现

我们提供了类型论 $\textsc{Catt}_{\mathsf{sua}}$ 的 OCaml 实现。在此，我们展示一些示例用例，并注明补充材料中示例的文件名。

三角方程。 examples/monoidal.catt
In 在幺半范畴中，三角方程表示左单位约束、
ri右单位约束和结合子的相容性:

$$\begin{array}{ccc} (f \cdot \mathrm{id}) \cdot g & \xrightarrow{\alpha_{f,\mathrm{id},g}} & f \cdot (\mathrm{id} \cdot g) \\ & {\scriptstyle \rho_f \cdot g} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle f \cdot \lambda_g} & \\ & f \cdot g & \end{array}$$

在我们的实现中，我们将其表示为按如下方式构造的 3-态射:

```
coh triangle (x(f)y(g)z) :
  vert (assoc f (id y) g) (horiz (id1 f) (unitor-l g))
   => horiz (unitor-r f) (id1 g)
```

这将“三角形”定义为一个函数，它接受一组参数，并返回具有给定类型的相干。

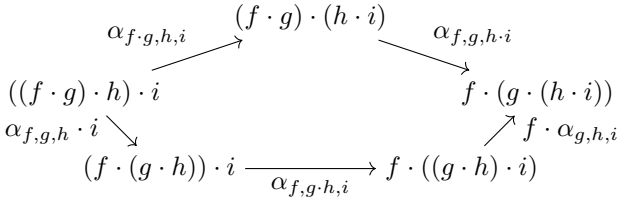
由于三角方程完全由结合子和单位子的结构表达，我们预期在严格结合且严格含单位元的设定中，这个 3-态射会归一化为恒等项。我们可以如下进行测试：

```
normalize {x :: *} {y :: *} (f :: x => y) {z :: *} (g :: y => z)
  | triangle f g
```

结果如预期，是一个恒等项。

五边形方程。 examples/monoidal.catt

接下来我们考察五边形约束，即幺半范畴的第二组公理：



与三角方程一样，我们可以在 CATT 中将其构造为如下 3-态射：

```
coh pentagon (v(f)w(g)x(h)y(i)z) :
    vert (assoc (comp f g) h i) (assoc f g (comp h i))
    => vert
    (horiz (assoc f g h) (id1 i))
    (vert (assoc f (comp g h) i) (horiz (id1 f) (assoc g h i)))
```

再次使用 normalize 命令，我们展示它会如预期那样化简为恒等项。

对称交换。 examples/syllepsis.catt

对称交换是一种5维同伦，它表达了这样一个事实：在4维空间中，上交叉与下交叉等价：



这是低维拓扑中的一个基本变换，在球面的同伦群中发挥着重要作用。弱高阶结构繁琐的形式体系意味着，人们早已认识到，要以形式化的方式直接描述它十分困难，因为构造它需要大量使用交换同构、单位子和结合子。

在 LICS 2022 上展示了两种用于对称交换的形式模型：一种采用同伦类型论 [SK22], ，另一种则采用类型论 CATT_{su} [FRVR22]。理论 CATT_{sua} 能够仅用交换同构相干性来表示对称交换，表示还要更加简短。对称交换的 CATT_{sua} 形式化全程使用内置的 ucomp，它根据由维数和余维数交替组成的序列所指定的粘贴图，生成无偏复合。例如，“ucomp `[ 1 0 3 ]`”是“沿共同的 0 胞边界复合一个 1 胞与一个 3 胞”的简写。这个内置功能省去了定义许多复合运算时的样板代码，但并未增强 CATT的表达能力，因为所有这些运算都可以用相容构造子来定义。

参考文献

[Ati09] 迈克尔·阿蒂亚。《纽结的几何与物理》中的“拓扑量子场论”。剑桥大学出版社，2009年。 DOI：10.1007/bf02698547。[BM19] 蒂博·本杰明和塞缪尔·米姆拉姆。“悬挂与函子性：CaTT 中两个有用的隐式运算”。载于：法语应用语言会议。2019年。hal：hal-01985195。[Dol96] 詹姆斯·多兰。私人通信。1996年。[FM17] Eric Finster 和塞缪尔·米姆拉姆。“弱ω-范畴的类型论定义”。载于：第32届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集（LICS）。2017年，第1–12页。 DOI：10.1109/LICS. 2017.8005124。[FRVR22] Eric Finster、戴维·罗伊特、Jamie Vicary 和 Alex Rice。“严格幺 ∞-范畴的类型论”。载于：第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集。LICS '22。以色列海法：计算机协会，2022年。 ISBN：9781450393515。DOI：10.1145/3531130.3533363。[Gar10] 理查德·加纳。“高阶范畴的同态”。载于：《数学进展》224.6（2010年），第2269–2311页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10.1016/j. aim.2010.01.022。[GPS95] 理查德·戈登、约翰·鲍尔和 Ross Street。“三范畴的相干性”。载于：Mem. AMS 117.558（1995年）。[Gra74] 约翰·格雷。《形式范畴论：2-范畴的伴随性》。Springer-Verlag，1974年。 DOI：10.1007/BFb0061280。[Gro83] 亚历山大·格罗滕迪克。“追踪叠”。致丹尼尔·奎伦的未发表信件。1983年。[HS94] 马丁·霍夫曼和托马斯·施特赖歇尔。“群胚模型驳斥了恒等证明唯一性”。载于：第9届IEEE计算机科学逻辑年会论文集。1994年。 DOI：10.1109/lics.1994.316071。[Lei04] 汤姆·莱恩斯特。《高阶幺半群，高阶范畴》。298。剑桥大学出版社，2004年。[Lip16] 保罗·利帕里尼。“无限自然和”。载于：《数学逻辑季刊》62.3（2016年），第249–257页。 DOI：10.1002/malq.201500017。[Lur09] 雅各布·卢里。《高阶托扑斯理论》。普林斯顿大学出版社，2009年。 DOI：10.1515/9781400830558。电子版：math/0608040。[Mal10] 乔治·马尔齐尼奥蒂。“Grothendieck ∞-群胚，以及另一种 ∞-范畴定义”。2010年。arXiv：1009.2331 [math.CT]。[Ric24] Alex Rice。catt-agda。论文版本。2024年5月。 DOI：10 . 5281 / zenodo . 11149192。[Sch09] 克里斯托弗·肖默-普赖斯。“二维扩展拓扑场论的分类”。博士论文。加州大学伯克利分校，2009年。电子版：1112.1000。

[Sim98] Carlos Simpson。《严格 3-群胚的同伦类型》。1998年。电子预印本：math/ 9810059。[SK22] Kristina Sojakova 和 G. A. Kavvos。《同伦类型论中的对称交换》。载于：第 *37* 届 *ACM/IEEE* 计算机逻辑年度研讨会论文集。LICS '22。以色列海法：计算机协会，2022年。 ISBN：9781450393515。 DOI：10.1145/3531130.3533347。[Str00] Ross Street。《球状集合的小拓扑斯》。载于：《纯粹与应用代数杂志》154.1（2000年）。范畴论及其应用，第 299–315 页。 ISSN：0022-4049。 DOI：10.1016/S0022-4049(99)00183-8。[Str95] Ross Street。《关于下降理论的 Oberwolfach 笔记》。1995年。[The13] 单价基础项目。《同伦类型论：数学的单价基础》。高等研究院：https: // homotopytypetheory.org/book，2013年。