arXiv:2302.05344v1 [math.GR] 10 Feb 2023

具有初等层级的相对双曲群的拟等距

Aaron W. Messerla

摘要

Sela 在研究塔斯基问题时引入了极限群，并证明每个极限群都有一个循环层级。本文证明，配备了类似于极限群层级的相对双曲群类在拟等距下封闭。此外，这些群还具有极限群的某些性质。特别地，本文证明，与极限群拟等距的群是 LERF 群，且虚拟环面相对双曲。

1 引言

几何群论的核心问题之一，是理解有限生成群的有用拟等距不变量。端的数目就是这样一种不变量。Stallings 证明，端数多于一个的群可以沿有限子群 [41] 分裂。对于双曲群，边界是另一种有用的拟等距不变量。双曲群边界的拓扑性质能够揭示该群的分裂情况。Stallings群端定理指出，双曲群沿有限群分裂，当且仅当其边界不连通。在 [5], Bowditch 证明，对于非虚拟 Fuchsian 的双曲群，边界中的割对对应于沿双端子群的分裂，并为此类一端双曲群构造了一个典范 JSJ 分裂。特别地，由于边界在拟等距下保持不变，因此沿有限群或双端群分裂这一性质也在拟等距下保持不变，但边界同胚于圆的群这一特殊情形除外。

Drut¸u 证明了相对双曲性也是一种拟等距不变量 [15] （另见 Behrstock、Drut¸u 和 Mosher[3] 的工作）。相对双曲群具有一个边界，该边界由 Bowditch 在 [7] 中引入。沿着并推广 [5], 中的思想，可以从 Bowditch 边界中看出关于相对双曲群相对于其外围结构的分裂的信息。Bowditch 在 [7], 中研究了关于有限群的分裂，在[6], 中研究了关于外围群的分裂，而 Haulmark 和 Hruska 在 [26] 中研究了关于双端群的分裂。特别是， [26] 中构造的 JSJ 在拟等距意义下是不变的：如果两个相对单端的相对双曲群之间存在一个保留外围结构的拟等距

那么这两个 JSJ 树之间就存在一个同构，并且该同构保留关于顶点群类型的信息（[26, 推论 1.3]）。

极限群由 Sela 在 [38] 作为其研究塔斯基问题的一部分提出。Sela 证明，极限群具有循环层级（在 Sela 的工作中称为分析格），最终终止于自由群、阿贝尔群或曲面群。利用这一层级，Dahmani 在 [12] 证明了极限群相对于其极大非循环阿贝尔子群是相对双曲的。Alibegovi´c 也证明了相对双曲群的一个组合定理，并同样在 [2]证明极限群相对于极大阿贝尔子群是双曲的。Dahmani 还证明，极限群的有限生成子群是相对拟凸的 [12, 定理 4.6]。

本文证明，一类具有类似于极限群层级的群，也具有与极限群类似的性质。若群 G满足以下条件，则称其属于 $\mathcal{ATEH}$： G 相对于几乎阿贝尔子群是双曲的，并且相对于 $\mathcal{P}$ 具有一个有限初等层级，该层级终止于几乎自由群、几乎阿贝尔群或几乎福克斯群（定义 5.1）。由于分析格可充当所需的初等层级，任何极限群都属于 $\mathcal{ATEH}$。第一个结果是，这类群在拟等距下封闭:

定理 1.1. 假设 $G \in \mathcal{ATEH}$，且 G' 与 G拟等距，则 $G' \in \mathcal{ATEH}$。

将定理 1.1 限于 $G \in \mathcal{ATEH}$ 为双曲群（外围结构为空）且没有 2-挠元的情形，可以得到 Carrasco 和 Mackay 的工作 [10, 推论 1.2]的一个推论。具体而言， [10] 证明了：若双曲群 G 没有 2-挠元，则 G 具有一个以初等子群为基础、终止于有限群或虚拟福克斯群的有限层级，当且仅当 ∂G 的共形维数等于 1。由于边界的共形维数是拟等距不变量，因此具有这样的层级也是拟等距不变量。然而，本文并未使用 [10]的共形维数方法。

$\mathcal{ATEH}$中群的层级结构保证了某些代数性质。特别是，与极限群类似，若 $G \in \mathcal{ATEH}$，则 G 是局部相对拟凸的（即 G 的每个有限生成子群都是相对拟凸的）。Haglund 和 Wise 在 [23], 中引入的特殊立方复形，已被广泛研究，作为恢复虚拟紧致特殊群可分性性质的一种手段。Wise 证明了极限群是虚拟紧致特殊群 [44, 定理 18.7]。在 [43], 中，Wilton 证明了极限群是 LERF。本文利用 [44],[33], 和 [36] 的特殊立方复形理论结果，证明 $\mathcal{ATEH}$中的群也具有相同性质。

定理 1.2. 假设 $G \in \mathcal{ATEH}$，则 G 是 LERF。

由于极限群是无挠的且相对于阿贝尔群双曲，因此研究 $\mathcal{ATEH}$ 中一个更小的群类颇有意义，即环面型相对双曲群（也就是说，无挠且关于阿贝尔子群双曲的群

）。我们将具有初等层级且终端群受控的环面型相对双曲群类称为 $\mathcal{TEH}$。我们证明了 $\mathcal{ATEH}$ 中的群是虚无挠的，并利用 $\mathcal{ATEH}$ 中群的可分性性质证明：

定理 1.3。假设 $G \in \mathcal{ATEH}$，那么 G 几乎属于 $\mathcal{TEH}$。

由定理 1.1 和定理 1.3，以及极限群属于 $\mathcal{ATEH}$ 这一事实，立即可得以下结论。

推论 1.4。若 G 与某个极限群拟等距，那么 G 几乎属于 $\mathcal{TEH}$。

最后，Sela [38, 定理 3.2] 证明了自由不可分解的非阿贝尔极限群可沿循环子群分裂。对于 $\mathcal{ATEH}$ 中的群，也证明了一个类似的结果。这使我们得以证明，与极限群一样，$\mathcal{ATEH}$ 中的群实际上具有有限层级，其中所有分裂都沿几乎循环群进行。

定理 1.5。假设 $G \in \mathcal{ATEH}$，那么 G 具有一个有限的几乎循环层级，该层级终止于几乎自由群、几乎阿贝尔群或几乎福克斯群。

本文组织如下。第 2 节介绍相对双曲群、扭曲、LERF 性质和剩余有限性的背景知识。第 3 节回顾分裂、JSJ 分解，以及关于相对双曲群的边界与该群分裂之间关系的已有结果。第 4 节总结所需的已知拟等距结果，并证明引理 4.4；该引理用于本文后续部分的归纳证明。第 5 节回顾层级的定义，并引入类 $\mathcal{ATEH}$。在第 6 节中，我们定义 BHH–JSJ，并用它证明类 $\mathcal{ATEH}$ 在拟等距下封闭。第 7 节证明 $\mathcal{ATEH}$ 中的群是局部相对拟凸的、具有 LERF 性质、虚无挠，并且几乎属于 $\mathcal{TEH}$。最后，第 8 节证明 $\mathcal{ATEH}$ 中的群不仅具有几乎阿贝尔层级，也具有有限的几乎循环层级。

致谢

作者谨向导师 Daniel Groves 致谢，感谢他提出这一课题并指导作者完成研究；同时感谢 Benson Farb 就参考文献提供的有益意见。

2 预备知识

关于 δ-双曲度量空间和拟等距的背景及定义，请读者参阅 [9] 。

我们简要回顾 [20] 中给出的相对双曲群的定义。若 Γ 是一个图，我们始终假设 $V(\Gamma)$ 是顶点集，而 $E(\Gamma)$ 是边集。此外，假设 Γ 的每条边长度均为 1，并赋予 Γ 由此诱导的路径度量，记作 d_Γ。

定义 2.1（组合 horoball）。设 Γ 是一个连通图。基于 Γ 的组合 horoball 是一个图 $\hat{\Gamma}$，其 $V\left(\text{为 }\hat{\Gamma}\right) = V(\Gamma) \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$。边有两种类型，定义如下：

- 对于所有 $g \in V(\Gamma)$ 和 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，在 (g,i) 与 $(g,i+1)$ 之间有一条边；
- 若 $0 < d_\Gamma(g,h) \leq 2^i$，则在 (g,i) 与 (h,i) 之间有一条边。

$\hat{}$注意，Γ 包含 Γ 的一个同构副本，即以$V(\Gamma) \times \{0\}$为全子图。

设 G 是一个有限生成群，$\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ 是一组无限有限生成子群。若 $\mathcal{S}$ 是 G 的生成集，且对于每个 i，$\mathcal{S} \cap P_i$ 生成 P_i，则称 $\mathcal{S}$ 为相容生成集。

定义 2.2（尖点凯莱图）。设 G 和 $\mathcal{P}$ 如上。尖点凯莱图 $X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 是以下图的不交并的商：G 关于相容生成集 $\mathcal{S}$ 的凯莱图，以及对每个 i，在 P_i 上构造的组合 horoball（对应于 P_i的每个陪集）。将 horoball 附接到凯莱图上，使得凯莱图中的每个顶点 $gp \in gP_i$ 都与组合 horoball 中的 $(p,0)$ 相认同；该 horoball 构造在 P_i 上，并与 gP_i相关联。

关于这一构造的详情，见 [20, 第 3]节。

定义 2.3。设 G 和 $\mathcal{P}$ 如上。若对于某个 δ 以及某个相容生成集 $\mathcal{S}$，$G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的，当且仅当$X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 是 δ-双曲的。

文献 [20, 定理 3.25] 证明了，$(G,\mathcal{P})$ 在 Gromov [19] 意义下相对双曲，当且仅当对于某个相容生成集 $\mathcal{S}$，$X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 是双曲的；这表明上述定义不依赖于 $\mathcal{S}$的选择。我们注意到，根据 [18, 定理 6.3], ，采用两种不同相容生成集构造的尖点凯莱图是拟等距的。

双曲空间的边界已在 [9, 第 III.H 节3], 中详细讨论，但我们在此回顾其定义。回想一下，度量空间 X 中的拟测地射线是从 $[0,\infty)$ 到 X 的拟等距嵌入。

定义 2.4. 设 X 为一个双曲度量空间。X的边界，记作 ∂X，定义为无穷拟测地射线的等价类集合；若两条这样的射线的像之间的 Hausdorff 距离有限，则它们属于同一个等价类。

如果 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的，那么空间 $X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 在拟等距意义下不依赖于 $\mathcal{S}$ 的选择。因此，如果 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 是两个相容的生成集，那么 $\partial X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 和 $\partial X(G,\mathcal{P},\mathcal{S}')$ 由

[9, 定理 III.H.3.9]。此外， [45, 定理 0.1] 保证 $X(G,\mathcal{P},\mathcal{S})$ 的边界与 [7] 中引入的边界 $\partial(G,\mathcal{P})$ 等变同胚。

若 $(G,\mathcal{P})$ 关于生成集 S 相对双曲，则 G 通过左乘在 G 上的作用会将 $P\in\mathcal{P}$ 的陪集映到 P 的陪集，因此该作用可延拓到空间 $X(G,\mathcal{P},S)$，进而延拓到边界 $\partial(G,\mathcal{P})$。若子群 H 是 G 的子群，且 H 固定了 $p\in\partial(G,\mathcal{P})$ 中的一个点，则称其为初等子群。若 H 是初等的，则要么 H 是双端的，要么 H 共轭于某个 $P\in\mathcal{P}$ 中。

本文中使用的关于相对双曲群的大多数其他一般事实，可见于 [34]。

接下来，我们回顾扭曲的概念。更多细节见 [14, 第 8 节。9] 或 [29]。对于函数 $f,g\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$，若存在一个 C，使得对所有 $r\geq 0$, $f(r)\leq Cg(Cr+C)+Cr+C$ 都成立，则称 $f\preceq g$。若 $f\preceq g$ 且 $g\preceq f$，则记为 $f\cong g$。注意， $\cong$ 是一种等价关系。若 $f(n)=n$ 且 $g(n)=0$，则 $f\cong g$。

定义 2.5（扭曲）。设 G 是一个有限生成群，其生成集为 $\mathcal{S}$，且 $H\leq G$ 是一个有限生成群，其生成集为 $\mathcal{T}$。(H) 在 (G) 中的扭曲为

$$\Delta_H^G(n):=\max\{|h|_{\mathcal{T}}:h\in H \text{ and } |h|_{\mathcal{S}}\leq n\}.$$

定义 2.6（非畸变）。子群是非畸变的，当且仅当 $\Delta_H^G\cong(n\mapsto n)$。

如 [14, 第 8 节9] 所述，子群是非畸变的，当且仅当包含映射是拟等距嵌入。由此事实和 [14, 命题 8.98 (6)] 可知，下面的引理很容易得出。

引理 2.7。几乎阿贝尔有限生成群的所有子群都是非畸变的。

下面的引理涉及相对双曲群 $(G,\mathcal{P})$ 的相对拟凸子群这一概念。相对拟凸子群有多个等价定义。各种定义及其等价性的证明，请参见 [29] 。本文采用 [29] 中的定义 (QC-1)。若子群 $H\subseteq G$ 的 H 在 H 的极限集 ΛH 上的诱导作用是几何有限的，则称其为相对拟凸。注意，若 H 是相对拟凸的，则根据 Yaman [45] 的工作， H 是相对双曲的，并且极限集 ΛH 与 $\partial(H,\mathcal{O})$ 等变同胚，其中 $\mathcal{O}$ 是诱导外围结构。由前一个引理和 [29, 定理 10.5], 可立即得到下面的引理。

引理 2.8. 假设 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的，且每个 $P\in\mathcal{P}$ 都是几乎阿贝尔的。那么 $(G,\mathcal{P})$ 的每个相对拟凸子群都拟等距嵌入于 G。

以下引理是众所周知的，可由 Osin [34] 的工作直接推出。本文利用它从初等分裂中顶点群所继承的外围结构里移除双端群。

引理 2.9. 假设 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的，且 $\{P_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}$ 是双曲的。若 $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P_i\}_{i=1}^n$，则 $(G,\mathcal{P}')$ 是相对双曲的。

证明。由 [34, 定理 2.40], 可得，因为相对双曲群的相对 Dehn 函数是线性的，而双曲群的（普通）Dehn 函数也是线性的。 □

在第 7 节中，我们证明所研究的群类中的群都是 LERF。若子群 H of G 在有限剩余拓扑中是闭的，则称其为可分离的。这等价于 H 是有限指数子群的交，或具有如下性质：对于任意 $g \in G \setminus H$，存在一个有限群 Q 和一个同态 $\phi: G \to Q$，使得 $\phi(g) \notin \phi(H)$。若群 G 的任意有限生成子群都G 可分离，则称该群是 LERF（或子群可分）。LERF 群类包括自由群（由 Hall 定理 [24]可知）、曲面群 [37], 和极限群 [43]。更多背景及参考文献，请参阅 [43] 。

如果对每个 $1 \neq g \in G$，都存在 G 的一个有限指数正规子群 N，使得 $g \notin N$，则称群 G 是残有限的。注意，若 G 是 LERF，则 G 是残有限的，因为 $\{1\}$ 是 G 的有限生成子群，因此它是有限指数子群的交集 G。特别地，存在某个有限指数正规子群不包含 G 中的任何非单位元。

3 分裂

群 G 的一个分裂，是指将其实现为某个有限群图的基本群。若分裂中的每个边群都属于某个类 $\mathcal{E}$，则称该分裂是关于类 $\mathcal{E}$ 的分裂。若群 G 的每个 $P \in \mathcal{P}$ 都固定 Bass-Serre 树中的一个顶点，则称该群的分裂相对于 $\mathcal{P}$。若群 G 的一个分裂中，G 是其中一个顶点群，则称该分裂是平凡的。

接下来我们回顾 JSJ 分解的概念。本文将采用的一般定义见 [22]。$\mathcal{E}$-树是与群 G 关于子群类 $\mathcal{E}$的分裂相对应的 Bass-Serre 树。$(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树是这样一种 $\mathcal{E}$-树：其中所有属于 $\mathcal{P}$ 的群都在树上椭圆地作用。

定义 3.1（普遍椭圆）。若每个边稳定子 G_e 都在任意其他 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$ 树上椭圆地作用，则称 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树 T 是普遍椭圆的。

给定两个群 T 作用于的树 T'，如果存在一个 G-等变映射 $f: T \to T'$，我们就称 T 支配 T'。

定义 3.2（JSJ 树）。若 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树 T 是普遍椭圆的，并且支配任意其他普遍椭圆的 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树，则称其为 JSJ 树。

接下来的两个定理归功于 Bowditch [7]。第一个定理将相对于外围结构在有限群上的分裂与边界的连通性联系起来，第二个定理是一个可达性结果。

定理 3.3（[7, 定理 10.1]）。相对双曲群（$\Gamma, \mathcal{P}$）的边界 ∂（$\Gamma, \mathcal{P}$）是连通的，当且仅当 Γ 不相对于 $\mathcal{P}$在有限子群上作非平凡分裂。

定理 3.4（[7, 定理 10.2]）。任何相对双曲群（$\Gamma, \mathcal{P}$）都可以表示为一个有限群图的基本群，该群图的边群有限，且分裂相对于 $\mathcal{P}$，并满足以下性质：没有任何顶点群能相对于外围子群沿任何有限子群作非平凡分裂。

根据定理 3.3，若相对双曲群（$G, \mathcal{P}$）满足 G 不相对于 $\mathcal{P}$ 沿有限群分裂，我们就称其为相对单端。

为了应用 Haulmark 和 Hruska 的工作 [26], ，我们需要相对双曲群的边界是局部连通的。下一个定理由 Dasgupta 和 Hruska 提出，是对 Bowditch [6, 定理 1.5] 中结果的推广。就我们的情况而言，Bowditch 的结果已足以应用 Haulmark 和 Hruska 的定理（下文概述为定理 3.6），但此处陈述的是更一般的版本。

定理 3.5（[13, 定理 1.1]）。若（G, $\mathcal{P}$）是一个边界 $M = \partial$（G, $\mathcal{P}$）连通的相对双曲群，则 M 是局部连通的。

如 [6], 所述，定理 3.3 和定理 3.4 的结果合起来表明，定理 3.4 中的分裂所对应的每个顶点群都是相对一端的。

定理 3.6（[26, 定理 1.1、定理 8.5 和命题 8.7]）。设（G, $\mathcal{P}$）是一个相对双曲群。假设 Bowditch 边界$M = \partial$（G, $\mathcal{P}$）连通且局部连通。对于 G 关于外围子群相对初等子群的分裂，其典范圆柱 JSJ 树是一棵树 T（M），它仅取决于边界 M 的拓扑结构。此外，树 T（M）的顶点集为 $Z \sqcup \Pi$，其中 Z 是所有全局割点和不可分离的精确割对的集合，而 Π 是 M 的块的集合。此外， T（M）的每个顶点稳定子都属于以下类型之一：

1. 外围
2. 非抛物型两端
3. 有限纤维的二次悬挂型，或
4. 刚性。

特别地，如果 H 是第三类的顶点群，则 [26] 中证明了H 可嵌入一个短正合列

$$1 \to F \to H \to \pi_1(\Sigma) \to 1,$$

其中 F 是有限的， Σ 是双曲二维轨形。我们指出，这个短正合列存在性的证明依赖于收敛群定理 [11, 17, 42]。

本文考虑这样的层级：几乎自由群和几乎福克斯群是终端群（见第 5 节，尤其是定义 5.1）。以下引理将用于说明定理 3.6 中第三类顶点群是终端群。专家们想必已知此引理，但为求完整，本文仍给出证明。

引理 3.7。假设 H 是定理 3.6 中的第三类顶点群，则 H 要么是几乎自由群，要么是几乎福克斯群。

证明。令

$$1 \to F \to H \to \pi_1(\Sigma) \to 1,$$

为上述短正合列。令 Σ' 为 Σ 的一个有限覆盖，使得 Σ' 是双曲曲面。若 Σ' 不是闭的，则 $\pi_1(\Sigma')$ 是几乎自由群。由于 H 与自由群拟等距，其边界同胚于康托尔集。如 [30, 定理 8.1], Dunwoody 可达性结果 [16] 中所述，可以利用该结果证明 H 作用于一个具有有限顶点稳定子的树上，因此 [39, II.2.6 命题 11] 表明 H 是几乎自由群。

在 Σ' 为闭曲面的情况下，根据 [37], $\pi_1(\Sigma')$ 是 LERF。由于 $\pi_1(\Sigma')$ 是 $\pi_1(\Sigma)$ 的有限指数子群，$\pi_1(\Sigma)$ 也是 LERF，因而是残有限的（注意，曲面群是残有限的；例如参见 Hempel 在 [27] 中的工作）。此外，根据 [21, 命题 3.7]和 [40, 第 1 章第 2 节6], $\pi_1(\Sigma)$ 在 Serre 的意义下是良好的。因此，由于 H 处于一个短正合列中

$$1 \to F \to H \to \pi_1(\Sigma) \to 1,$$

H 由 [21, 命题 6.1]知是残有限的。因此，存在一个 N，它是 H 的有限指数正规子群，并且满足 $N \cap F = \{1\}$。于是 N 嵌入一个福克斯群中，因此 H 是几乎福克斯群。

□

4 拟等距结果

本节的目标是证明引理 4.4，该引理用于说明所研究的群类在拟等距下是闭的。第一个结果综合了已知的拟等距结果。

引理 4.1. 假设（$G, \mathcal{P}$）是相对双曲的，并且每个 $P \in \mathcal{P}$都是几乎阿贝尔且一端的。设 G' 是一个与 G拟等距的群。那么存在一族子群 $\mathcal{P}'$，使得（$G', \mathcal{P}'$）是相对双曲的，并且每个 $P' \in \mathcal{P}'$ 都是几乎阿贝尔且一端的。

证明。由 [3, 定理 4.8]可知，G' 上存在外围结构。此外，由于每个 $P' \in \mathcal{P}'$ 都是有限生成的，并且与某个 $P \in \mathcal{P}$拟等距，根据 [8, 定理 5.9], P' 是几乎阿贝尔的。由于端在拟等距下保持不变，$\mathcal{P}'$ 中的每个群也都是一端的。

□

我们需要 Mackay 和 Sisto 的以下结果 [32]，以便比较两个拟等距群的 JSJ 分裂中的顶点群。第二个结果

在 [32], 中是隐含的，但并未明确陈述。下面的引理 4.3 与 [32, 定理 1.2] 之间唯一的区别在于，[32, 定理 1.2] 的证明表明，边界映射也保持阴影。

引理 4.2（[32, 定理 1.3]）。设 $(G,\mathcal{P})$ 和 $(G',\mathcal{P}')$ 是具有无限真外围群的相对双曲群，并且 $h:\partial_\infty(G,\mathcal{P}) \to \partial_\infty(G',\mathcal{P}')$ 是保持阴影的准对称映射。那么存在一个拟等距映射 $\hat{}h: G \to G'$，使得 $\hat{}h$ 延拓后得到 $\partial_\infty\left(\hat{}h\right) = h$。

引理 4.3。设 $(H,\mathcal{O})$ 和 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲群，并且 $f: H \to G$ 是一个拟等距嵌入，粗略地保持外围结构。那么 f 诱导出一个保持阴影的准对称嵌入 $\partial_\infty f: \partial(H,\mathcal{O}) \to \partial(G,\mathcal{P})$。

证明。由于 f 是一个粗略地保持外围结构的拟等距嵌入，因此 f 在外围上进行雪花化（[32, 定义 2.3]），所以我们可以应用[32, 定理 2.8]。 □

引理 4.4. 假设 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的，并且每个 $P \in \mathcal{P}$ 都是几乎阿贝尔且一端的。令 G' 为任意一个与 G 拟等距的群，并令 $\mathcal{P}'$ 如引理 4.1 中所述。

(1) 边界 $\partial(G,\mathcal{P})$ 与 $\partial(G',\mathcal{P}')$ 同胚。特别地，$(G',\mathcal{P}')$ 是相对单端的，当且仅当 $(G,\mathcal{P})$ 是相对单端的。(2) 如果 $\partial(G,\mathcal{P})$ 有无穷多个端，那么 Bowditch 的最大分裂中的每个顶点都与 $(G',\mathcal{P}')$ 的最大分裂中的某个顶点群拟等距。(3) 假设 $(G,\mathcal{P})$ 是相对单端的。如果 $H \subset G$ 是由定理 3.6 给出的 JSJ 分解中的刚性顶点群，那么在 G' 的 JSJ 分解中存在一个与 H 拟等距的刚性顶点群 H'。

证明。设 $f: G \to G'$ 和 $g: G' \to G$ 是互为准逆的拟等距。注意，f 和 g 粗略地保持外围结构。由 [32, 定理 $\hat{}$ 2.9], 可知，存在保持阴影的拟对称映射 $f: \partial(G,\mathcal{P}) \to \partial(G',\mathcal{P}')$ 和 $\hat{}\hat{}g: \partial(G',\mathcal{P}') \to (G,\mathcal{P})$。复合映射 $\hat{}g \circ f$ 等于诱导映射 $\frown g \circ f: \partial(G,\mathcal{P}) \to (G,\mathcal{P})$。由于 $g \circ f$ 在 $(G,\mathcal{P})$ 的尖点空间上与恒等映射相距有界，$\hat{}g \circ f$ 是 $\partial(G,\mathcal{P})$ 上的恒等映射。类似地，$f \circ \hat{}g$ 是 $\partial(G',\mathcal{P}')$ 上的恒等映射。因此，f 和 $\hat{}g$ 是同胚，所以 $\partial(G',\mathcal{P}')$ 连通，当且仅当 $\partial(G,\mathcal{P})$ 连通。这证明了 (1)。

为证明（2），回顾 Dunwoody 在 [16] 中证明了，所有有限表示群都是可达的，即存在 G 的一个分裂，使得每个顶点群都是一端的。由于每个 $P \in \mathcal{P}$ 都是一端的，P 不能沿有限群分裂，因此 P 在 Dunwoody 的极大分裂中椭圆地作用。因此，Dunwoody 和 Bowditch 给出的极大分裂一致，对于 G' 也可以作出同样的结论。现在，[35, 定理 0.4] 表明，

$(G,\mathcal{P})$ 和 $(G',\mathcal{P}')$ 的 Bowditch 分裂具有相同的顶点群拟等距类型集合。

最后我们证明 (3)。根据引理 2.8，$(G,\mathcal{P})$ 和 $(G',\mathcal{P}')$ 中的所有相对拟凸子群都是拟等距嵌入的。

现在，由定理 4.3，$\partial(G,\mathcal{P})$ 与 $\partial(G',\mathcal{P}')$ 之间存在保持阴影的准对称映射。注意，这是一个同胚，因此必定保持不可分离的精确割对集合。

设 H 是 $(G,\mathcal{P})$ 的 JSJ 分解中的一个刚性顶点群。与[26, 定理 8.5]，的证明一样，令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{P}$ 与 $(\partial,G,\mathcal{P})$ 中精确不可分离割对的 G-稳定子的并。因此，$\partial\left(G,\hat{}\mathcal{P}\right)$ 是连通的，并且 $(G,\mathcal{P})$ 的块集合与 $\partial\left(G,\hat{}\mathcal{P}\right)$ 的非平凡循环元素集合一一对应。现在，JSJ 分解中的刚性顶点群恰好是 $\partial\left(G,\hat{}\mathcal{P}\right)$ 中循环元素的非二次悬挂稳定子（引理 8.6]）。令 $\mathcal{O}$ 为形如 $H\cap gPg^{-1}$ 的无限子群集合，其中 $g\in\hat{}G$ 且 $P\in\mathcal{P}$。注意，根据 [29, 定理 9.1]，$(H,\mathcal{O})$ 是相对双曲的。现在，由 [26, 命题 8.2(2)]，$\partial(H,\mathcal{O})$ 与 C G-等变同胚，其中 C 是 $\partial\left(G,\hat{}\mathcal{P}\right)$ 中由 H 稳定的非平凡循环元素。

由于不可分离的精确割对集合在同胚下保持不变，我们可以通过添加精确不可分离割对的 G' 稳定子来构造 $\hat{}\mathcal{P}'$。由于 $\partial\left(G',\hat{}\mathcal{P}'\right)$ 是将不可分离的精确割对识别后的 $\partial(G,\mathcal{P}')$ 的商，因此 $\partial\left(G,\hat{}\mathcal{P}\right)$ 与 $\partial\left(G',\hat{}\mathcal{P}'\right)$ 之间存在一个同胚。此同胚保持非平凡循环元素。此外，观察到对应于 H 的循环连通分支不是项链，可知在 $(G',\mathcal{P}')$ 的 JSJ 树中存在一个相应的刚性顶点群 H'。

由于 G 的每个相对拟凸子群 H 都是拟等距嵌入的，定理 4.3 给出了一个保持阴影的拟对称嵌入，该嵌入将 $\partial(H,\mathcal{O})$ 渐近雪花化到 $\partial(G,\mathcal{P})$，并将 $\partial(H',\mathcal{O}')$ 渐近雪花化到 $(G',\mathcal{P}')$。这两个嵌入的像恰好都是循环元素 C。由于保持阴影的拟对称嵌入这一性质在将陪域限制到子集时得以保留，因此得到 $\partial(H,\mathcal{O})$ 与 C 之间的保持阴影的拟对称映射 f，以及 $\partial(H',\mathcal{O}')$ 与 C 之间的保持阴影的拟对称映射 g；其中 C 赋予其作为 $\partial(G,\mathcal{P})$ 子集时的诱导度量结构，而该结构与作为 $\partial(G',\mathcal{P}')$ 子集时的度量结构拟对称。因此，$g^{-1}\circ f$ 是从 $\partial(H,\mathcal{O})$ 到 $\partial(H',\mathcal{O}')$ 的保持阴影的拟对称映射。由定理 4.2 可知，H 和 H' 拟等距，证毕。 □

5 层级

群 G 的层级 $\mathcal{H}$ 是一棵有根树，每条边都从根向外定向，每个顶点都标记为一对 (H,Δ_H)，其中 H 是 G 的子群，而 Δ_H 是 H 的分裂，并满足以下条件：

- $\mathcal{H}$ 的根标记为（G， Δ_G），其中某个分裂为 Δ_G。

- 如果（H，Δ_H）标记一个顶点且 Δ_H 是非平凡的，则 Δ_H 的顶点群与从（H，Δ_H）到（H'，$\Delta_{H'}$）的边之间存在双射对应关系，其中 H' 是 Δ_H 的一个顶点群。

- 如果 (H,Δ_H) 标记了 $\mathcal{H}$ 的一个顶点，且 Δ_H 是一个平凡分裂，那么 (H,Δ) 没有后代；此时我们称 (H,Δ_H) 是终端的

我们注意到，层级的定义也可以将每个分裂 Δ 替换为该分裂的 Bass-Serre 树，就像 [28] 中所做的那样。这种做法需要额外加入一个“共轭不变性”假设，作为交换，可以得到 G 在 $\mathcal{H}$ 的底层树上的作用。然而，由于本文不使用 G 在层级上的作用，我们选择了上述定义。

$\mathcal{H}$ 中顶点 (H,Δ_H) 的深度，是从 $\mathcal{H}$ 的根到 (H,Δ_H) 的距离。令 $\mathcal{H}^i$ 为深度为 i 的顶点集合。若对于足够大的 i，$\mathcal{H}^i$ 为空集，则称层级 $\mathcal{H}$ 为有限层级。层级 $\mathcal{H}$ 的长度是使得对于所有 $j \geq i$，$\mathcal{H}^j$ 为空集的最小 i。

设 $\mathcal{E}$ 是一个对取子群封闭的子群类。若每个分裂都相对于 $\mathcal{E}$，则称层级 $\mathcal{H}$ 是相对于 $\mathcal{E}$ 的。假设 $(G,\mathcal{P})$ 是相对双曲的。若 $\mathcal{H}$ 是相对于初等子群类的层级，则根据 [26, 定理 5.2]，Δ_G 的每个顶点群都是相对拟凸的。设 H 是 Δ_G 的一个顶点群，并令 $\mathcal{O}'_H$ 表示形如 $gPg^{-1}\cap H$ 的无限子群集合。则 $(H,\mathcal{O}'_H)$ 是相对双曲的。令 $\mathcal{O}_H$ 为移除了任意双端元素后的 $\mathcal{O}'_H$。根据引理 2.9，$(H,\mathcal{O}_H)$ 是相对双曲的。沿层级继续向下推，我们在相对于初等子群的层级中，为每个标记某个顶点的群都得到一个外围结构。若某个相对于初等子群的层级 $\mathcal{H}$ 相对于 $\mathcal{P}$，则称其为相对于 $\mathcal{P}$；具体而言，对于每个如上的顶点群 (H,Δ_H) 和 $\mathcal{O}_H$，每个 $O\in\mathcal{O}_H$ 都在与 Δ_H 关联的树上椭圆地作用。

定义 5.1（几乎环面且具有初等层级）。如果满足以下条件，则称 $G\in\mathcal{ATEH}$：

1. G 相对于 $\mathcal{P}$ 为双曲，其中每个 $P\in\mathcal{P}$ 都是几乎阿贝尔的 2. G 具有一个关于初等子群的有限层级 $\mathcal{H}$，且 $\mathcal{H}$ 相对于$\mathcal{P}$3. $\mathcal{H}$ 的每个终端顶点都标记为 (H,Δ_H)，其中 H 或者是几乎自由的、几乎阿贝尔的，或者是几乎福克斯群。显然，所要求的层级是关于几乎阿贝尔子群的。

定义 5.2（环面型初等层级）。设 $(G,\mathcal{P})\in\mathcal{ATEH}$。如果 $(G,\mathcal{P})$ 是环面型相对双曲的，即 G 是无挠的且每个 $P\in\mathcal{P}$ 都是阿贝尔的，则称 $(G,\mathcal{P})\in\mathcal{TEH}$。

注意，如果 G 是环面型相对双曲群，则任何一端几乎阿贝尔群都必须是外围群，因此也是阿贝尔群。由于无挠虚循环群是循环群，故为 $G\in\mathcal{TEH}$ 给出的层级实际上是一个阿贝尔层级。

6 BHH–JSJ 层级

在本节中，我们假设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个相对双曲群，其中每个$P \in \mathcal{P}$ 都是几乎阿贝尔且一端的。本节的目标是定理 6.3，这是引言中定理 1.1 的一个更精确版本。首先定义 BHH–JSJ 层级。随后在定理 6.2 中证明，$\mathcal{ATEH}$ 中群的 BHH–JSJ 层级是有限的。接下来，我们应用引理 4.4 (2) 和 (3) 来完成证明。

如果边界 $\partial(G,\mathcal{P})$ 不连通，那么 G 可相对于 $\mathcal{P}$ 沿有限子群分裂。利用定理 3.3 和定理 3.4，G 可相对于 $\mathcal{P}$ 沿有限群分裂，从而每个顶点群都相对于其所包含的 $\mathcal{P}$ 中的元素双曲。此外，每个顶点群要么是有限群，要么是相对单端的。现在，利用定理 3.5，该分裂中每个顶点群的边界都是连通且局部连通的。

根据定理 3.6，Bowditch 分裂中每个相对单端顶点群的边界给出了一个相对于外围结构、沿初等子群分裂的典范 JSJ 分裂。该 JSJ 中的顶点群要么是外围的、非抛物型两端的、有限纤维的二次悬挂型，要么是刚性的。

定义6.1（BHH–JSJ层级）。设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个相对双曲群。我们如下定义 $(G,\mathcal{P})$ 的 BHH–JSJ。在任意阶段，若 G 几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群，则赋予 G 一个平凡分裂，并将其视为终端。否则，若 G 相对于 $\mathcal{P}$ 有多于一个端，则取 Bowditch 给出的相对于 $\mathcal{P}$ 沿有限群的极大分裂。对于每个顶点群，赋予其由 $\mathcal{P}$ 中该顶点群所包含的元素构成的外围结构。若 G 相对于 $\mathcal{P}$ 是一端的，则取 Haulmark 和 Hruska 给出的典范 JSJ 树。对于每个刚性顶点群 H，赋予 H 外围结构 $\mathcal{O}$，其中对于每个 $O \in \mathcal{O}$，有某个 $g \in G$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $O = gPg^{-1} \cap H$。从 $\mathcal{O}$ 中移除任何有限或双端元素。

以下观察将在本文余下部分中一直发挥作用。若 H 是定理 3.6 的 JSJ 分裂中的刚性顶点群，则根据定理2.9，$\mathcal{O}$ 仍然是 H 上的外围结构，但特别是，它只包含一端子群，因此我们可以应用引理 4.4。BHH–JSJ 层级是初等的，因为所有分裂都是关于双端子群或外围子群的。此外，BHH–JSJ 是相对于 $\mathcal{P}$ 的。若 BHH–JSJ 层级是有限的，则它只能终止于以下几类群：几乎自由群、几乎阿贝尔群（外围的）、几乎福克斯群，或边界中没有割点或割对的一端群。

以下结果使我们能够考虑任意群 $G \in \mathcal{ATEH}$ 的 BHH–JSJ 层级，因为它满足定义 5.1 中所要求层级的条件。特别地，文中证明了，给定任意一个合适的层级，BHH–JSJ 层级都是有限的。我们注意到，Louder 和 Touikan[31, 推论 2.7] 的一个结果也可以用来证明：一旦已知群 $\mathcal{ATEH}$ 几乎不含 2-挠元，BHH-JSJ 层级就是有限的。

定理 6.2. 假设 $(G, \mathcal{P}) \in \mathcal{ATEH}$。那么， G的 BHH–JSJ 层级是有限的，并且终止于几乎自由群、几乎阿贝尔群或虚拟福克斯群。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是满足定义 5.1 假设的 G，这是因为假设了 $G \in \mathcal{ATEH}$。首先注意，通过折叠 $\mathcal{H}$ 的分裂中的边，并至多将 $\mathcal{H}$ 的长度加倍，可以使 $\mathcal{H}$ 在偶数深度处具有有限边群，在奇数深度处具有无限初等边群。证明对 $\mathcal{H}$ 的深度进行归纳。如果 $\mathcal{H}$ 的深度为 0，那么 G 是几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群，因此结论显然成立。现在，假设对于深度小于 $\mathcal{H}$ 深度的层级，结论均成立。下面将证明， G 的 BHH–JSJ 层级中的每个非终端顶点群，都从 $\mathcal{H}$ 继承一个严格更短的层级。首先，设 $(H, \mathcal{P}')$ 是 BHH–JSJ 层级中深度为 1 的相对单端顶点群。那么，由于该顶点群不能在有限群上进行分裂，它在 $\mathcal{H}$ 的深度为 0 的树上椭圆地作用。因此，$(H, \mathcal{P}')$ 是这棵树中某个顶点群的子群，并且由于它包含于一个深度至少为 1 的顶点群中，它从 $\mathcal{H}$ 继承一个严格更短的层级。

现在，设 H 是 BHH–JSJ 层级中深度 2 处的典范 JSJ 分裂的刚性顶点群。那么， H 是 BHH–JSJ 层级中深度 1 处的顶点群 H' 的子群。由于 H' 是一端的，根据上文， H' 是 $\mathcal{H}$ 中深度至少为 1 的顶点群 K 的子群。为方便起见，我们可以假设， K 被选为包含 H' 且深度最大的 $\mathcal{H}$ 的顶点群。

如果 K 在 $\mathcal{H}$ 上关于初等群作非平凡分裂，那么 H 必须在 K 的分裂上椭圆地作用，因为 H 是 H' 关于初等子群、相对于外围结构的 JSJ 分裂中的刚性顶点群。这给出了一个由 K 的分裂中被 H 固定的顶点群继承而来的、关于 H 的严格更短层级。如果 K 关于初等子群的分裂是平凡的，那么 K 可能无法相对于其外围结构在有限群上作分裂，因为 H' 在这棵树中固定了一个顶点（因为 H' 是一端的）。否则， H' 包含于 $\mathcal{H}$ 中更深的顶点群内，这与我们对 K 的选择相矛盾。在这种情况下，由于 K 不作分裂，它是终端的；又由于 K 是一端的， H 要么是几乎阿贝尔的，要么是几乎福克斯群的，并且是终端的，因此不存在这样的 H'。

□

定理 6.3. 设 $G \in \mathcal{ATEH}$ 和 $(G, \mathcal{P})$ 是相对双曲的，其中每个$P \in \mathcal{P}$ 都是几乎阿贝尔且一端的。若 G' 是一个与G拟等距的群，则 G' 存在一个外围结构 $\mathcal{P}'$ 和一个层级 $\mathcal{H}'$，使得 $\mathcal{H}'$ 是相对于 $\mathcal{P}'$、基于 G' 的初等子群构成的层级，并终止于几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群子群。特别地， $G' \in \mathcal{ATEH}$。

证明。引理 4.1 给出了外围结构 $\mathcal{P}'$。现在利用定理 6.2，用 BHH–JSJ 层级替换 $\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{H}$ 仍然有限，并最终得到几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群，但每个分裂都是 JSJ 分裂。令 $\mathcal{H}'$ 为 $(G', \mathcal{P}')$ 的 BHH–JSJ 层级。为简便起见，如果 G （因此 G'）是相对单端的，我们认为 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 在深度 0 处有一个平凡分裂，随后在深度 1 处沿无限初等群分裂

，因此偶数深度的群沿有限子群分裂，而奇数深度的群沿无限初等子群分裂。

引理 4.4(2) 表明， $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 的深度为 0 的树中相对单端顶点群的拟等距类型相同。

设 H 是 G 的分裂的一个顶点群，并带有诱导外围结构 $\mathcal{O}$，使得 H 相对单端。根据上一段， $\mathcal{H}'$ 的深度为 1 处存在一个与之拟等距的顶点群 H'。根据引理 4.4(3)， H' 的 JSJ 中所有刚性群都与 H 的 JSJ 中的某个刚性群拟等距。对于标记深度为 1 的非终端顶点的每个顶点群，这一结论都成立，因此 $\mathcal{H}$ 的深度为 1 处的 JSJ 分裂中的刚性顶点群的拟等距类型集合，与 $\mathcal{H}'$ 的深度为 1 处的 JSJ 分裂中的刚性顶点群的拟等距类型集合相同。由于 JSJ 树中的所有其他顶点群都是终端的，结论由归纳法得出。 □

7 可分性

本节的目标是证明定理 1.2：群 $G \in \mathcal{ATEH}$ 是 LERF。我们分两部分证明这一点。首先，我们证明 G 是局部相对拟凸的。然后，我们证明 G 虚嵌入于一个虚特殊群中。应用 Sageev 和 Wise 的一项可分性结果，以及有关拟凸性和可分性的标准论证，即可得到结论。

第一个引理是通过改编 Dahmani 在 [12] 中的工作得出的。同样，也可以改编 Bigdely 和 Wise 在 [4] 中的工作，从而避免对小终端顶点群的限制。由于本文始终在讨论边界，改编 Dahmani 的工作似乎更为合适。

定理 7.1. 假设 $G \in \mathcal{ATEH}$。那么 G 是局部相对拟凸的。

证明。我们遵循 [12, 命题 4.6] 的证明，并采用了 [12, 定理 0.1] 证明中的一些方法。我们对分裂中的边数和层级的深度进行归纳。对于自由群、阿贝尔群和曲面群，结论成立。由于拟凸性在可公度性下不变，因此对于几乎自由群、几乎阿贝尔群和几乎福克斯群，结论也成立。

现在，假设 $G = A *_C B$ 具有 A, B 局部相对拟凸且 C 初等。令 T 为该分裂对应的 Bass-Serre 树。若 C 是有限群或非抛物虚循环群，则 C 在 A 中几乎自共轭，且在 B中也几乎自共轭，因此 T 是近似自由的。此外， C 要么是有限群，要么是非外围双端群，因此对所有 $g \in G$ 和 $P \in \mathcal{P}$，交集 $C \cap gPg^{-1}$ 都是有限的。因此， C在 A 中完全拟凸，且在 B中也完全拟凸。令 H 为G的一个有限生成子群。由于 C 的每个子群都是有限生成的， H 在 T 上作用时边稳定子均为有限生成群，因此 H 作用下的顶点稳定子也必定是有限生成的。因此， H 与 A 或 B 的每个共轭的交集都是有限生成的。由归纳假设， $H \cap hAh^{-1}$ 在 A 中相对拟凸，且 $H \cap hBh^{-1}$ 在 B 中相对拟凸，对于

所有 $h \in H$。令 T' 为 T 的最小 H 不变子树，则 $H\backslash T'$ 是 H 的一个有限分裂，其边群和顶点群均为有限生成群。由于 $H\backslash T'$ 的顶点群在 A 和 B 的共轭中相对拟凸，因此每个顶点群的边界都嵌入 ∂G 中 ∂A 或 ∂B 的一个平移像。由于 T' 嵌入 T，Dahmani 根据分裂 $H\backslash T'$ 构造边界 ∂H 的方法表明，∂H 作为 H 的极限集嵌入 ∂G。因此，H 在其极限集上作为一个几何有限群作用，故在 G 中相对拟凸。

若 C 是外围的，令 P 为包含 C 的极大外围群。令 $C_A = A \cap P$ 和 $C_B = B \cap P$。由于我们假设分裂相对于 $\mathcal{P}$，因此 $C_A = P$ 或 $C_B = P$。不失一般性，可以假设 $C_A = P$，并将分裂写作 $G = A *_P (P *_{C_B} B)$。注意，$B' = P *_{C_B} B$ 的边界由 Dahmani 在 [12, 定理 0.1], 的情形 (2) 中构造；据此，$A *_P B'$ 的边界是在情形 (1) 中构造的，因为子群 P 在 A 和 B' 中都是极大外围群。若 H 是有限生成子群，由于 B 是局部相对拟凸的，利用 B' 的边界构造可知 $H \cap B'$ 是相对拟凸的，进而利用 $A *_P B' = G$ 的边界构造可知 H 在 G 中是相对拟凸的。

最后，在 $G = A*_{tC_1t^{-1}=C_2}$ 的情形下，如果 C_1 和 C_2 是有限群或非抛物的双端群，那么 C 在 A 中仍然几乎自共轭且完全拟凸，证明与之前相同，使用 [12, 定理 0.1] 中情形 (1) 的边界构造即可。假设 C_1 是无限抛物子群。令 P_i 为包含 C_i 的 G 的极大抛物子群，并注意到，由于 $C_2 \subset P_1 \cap tP_2t^{-1}$，根据 G 上外围结构的几乎自共轭性，$P_2 = tP_1t^{-1}$。现在，A 上的外围结构由 $gPg^{-1} \cap A$ 给出，其中 $g \in G$ 且 $P \in \mathcal{P}$，因此我们注意到 C_1 和 C_2 是 A 中的无限外围子群，故为相对拟凸。

令 $C_1 \subseteq D_1$ 和 $C_2 \subseteq D_2$，其中每个 D_i 都是 A 中的极大外围子群。假设 $d_1 \in D_1 \setminus C_1$ 且 $d_2 \in D_2 \setminus C_2$。那么 $td_1t^{-1} \in P_2$ 并稳定分裂所对应的 Bass-Serre 树中的顶点 tA。此外，由于 $td_1t^{-1} \notin C_2$，它不稳定从 A 到 tA 的边。同样，$d_2 \in A \setminus C_2$，因此它稳定顶点 A，但不稳定从 A 到 tA 的边。因此，P_2 不可能稳定任何顶点，但我们假设该分裂相对于 $\mathcal{P}$，这就产生了矛盾。因此，C_1 或 C_2 是 A 中的极大外围子群。不失一般性，假设 C_1 是 A 中的极大外围子群。

考虑分裂 $G = (A *_{C_1} D_2) *_{D_2}$，其中 HNN 扩张的粘合映射分别由 D_2 上的恒等映射和到 A 的包含映射给出。令$A' = A *_{C_1} D_2$，我们看到，和之前一样，利用 [12, 定理 0.1] 的情形 (2)，A' 是相对双曲且局部拟凸的。然后我们可以再次应用 [12, 定理 0.1] 的情形 (1)，从而看到 G 是局部拟凸的。 □

接下来，我们证明每个 $G \in \mathcal{ATEH}$ 都虚嵌入某个特殊群中。由于特殊群具有许多可分性，定理 1.2 很快便可推出。下面的引理使我们能够将 Wise 的结果应用于 $\mathcal{ATEH}$ 中的群，但首先，我们需要引入强稀疏特殊立方复形的概念。以下定义出现在 [44] 中。

定义 7.2（强拟平坦 [44, 定义 7.18]）。强拟平坦是一个˜ ˜
局部有限 CAT(0)立方复形 F，其上有一个有限生成的几乎阿贝尔群 P 的作用 F，使得超平面有有限多个 P 轨道，相切超平面组成的对有有限多个 P 轨道，相交超平面组成的对有有限多个 P 轨道。

作为一个例子，我们注意到， $\mathbb{Z}^n$ 以标准方式作用于 $\mathbb{R}^n$ 所得的标准立方化是一个强拟平坦。

定义 7.3（强余稀疏 [44, 定义 7.21]）。若 G 相对双曲于有限生成的几乎阿贝尔群 $\{P_i\}$，则称 G 在 CAT(0)立方复形 X 上˜强余稀疏地作用，如果存在紧致子˜ ˜
复形 K以及强拟平坦 F_i，使得 P_i 是每个 F_i的稳定子，并且

- $\tilde{X} = GK \cup \bigcup_i G\tilde{F}_i$.
- 对每个 i，存在某个紧致的 K_i，使得 $\left(\tilde{F}_i \cap GK\right) \subseteq P_i K_i$。
- *For i, j, and $g \in G$, either $\left(\tilde{F}_i \cap g\tilde{F}_j\right) \subseteq GK$ or else $i = j$ and $\tilde{F}_i = g\tilde{F}_j$.*

˜ ˜若 G 在 X上自由且强余稀疏地作用，则称 $X = G\backslash X$ 是强稀疏的。

特殊立方复形是在 [23]中引入的。有关特殊立方复形的定义，请参阅该论文。以下结论众所周知，已有多种证明，例如 [44, 例 6.1]。

引理 7.4. 假设 Γ 是有限图。那么，与 Γ 关联的直角阿廷群的 Salvetti复形是紧致且特殊的。

下面的引理表明， $\mathcal{ATEH}$ 中的群具有终止于强稀疏特殊群的层级，因此我们可以应用 [44, 注 18.17]。

引理 7.5. 假设 $(G, \mathcal{P}) \in \mathcal{ATEH}$。那么 G 相对于几乎阿贝尔子群双曲，并且具有一个终止于虚拟强稀疏特殊群的几乎阿贝尔层级。

证明。根据 $\mathcal{ATEH}$的定义，我们知道 G 相对于几乎阿贝尔子群双曲。$(G, \mathcal{P})$ 的 BHH–JSJ 层级有限，且基于初等子群。由于外围群是虚拟阿贝尔的，BHH–JSJ层级基于虚拟阿贝尔群，因此只需证明终端顶点群是强稀疏特殊群。

有限生成自由群和有限生成阿贝尔群都是特殊群，因为它们是某个有限图的直角阿廷群。由于几乎自由群的外围结构为空，它们是虚拟强稀疏特殊群。当外围子群是整个群时，也满足强稀疏的条件，因此虚拟阿贝尔群也是虚拟强稀疏特殊群。这样就只剩下几乎福克斯群。

令 $\mathcal{QVH}$ 为所有虚拟特殊双曲群的集合。根据 [44, 定理 13.3]，这等价于 [44, 定义 11.5] 中的定义。回忆一下，在定理 3.6 中作为第三类顶点出现的几乎福克斯群 H 适合于一个短正合列

$$1 \to F \to H \to \pi_1(\Sigma) \to 1$$

其中 Σ 是一个双曲轨形。双曲曲面群是虚拟特殊群，因为它们是自由群沿循环群的融合自由积。因此，$\pi_1(\Sigma)$ 是虚拟特殊群，因为它有一个有限指数子群是双曲曲面群。根据 [1, 引理 2.10], ，如果 $\phi : H \to G$ 是一个具有有限纤维的满同态，且 $G \in \mathcal{QVH}$，那么 $H \in \mathcal{QVH}$。因此，如果 H 是几乎福克斯群，那么 H 是虚拟特殊群。同样，几乎福克斯顶点群上的外围结构是平凡的，因此这些终端顶点群是虚拟强稀疏特殊群。

□

由 [44, 注 18.17], 可立即得到：

推论 7.6。设 $(G, \mathcal{P}) \in \mathcal{ATEH}$，则 G 有一个有限指数子群，它是某个强稀疏特殊立方复形的基本群。

定理 7.7。若 $G \in \mathcal{ATEH}$，则 G 有一个有限指数子群嵌入于某个虚拟紧致特殊群中。

证明。由推论 7.6，G 有一个有限指数子群 G'，它是一个强稀疏特殊立方复形 X 的基本群。注意，G' 上的诱导外围结构表明，G' 仍相对于虚拟阿贝尔子群双曲。因此，根据 Dahmani 组合定理 7.54]，G' 嵌入到群 G 中，而 G 是紧致非正曲率立方复形 X 的基本群。由定理 7.54]给出的分裂的树结构，以及 Dahmani 组合定理的情形 (2)（定理 0.1]），可知 G 仍相对于虚拟阿贝尔群双曲。因此，只需证明 G 是虚拟特殊的。由推论 1.3] 可得此结论，因为 G 相对于虚拟阿贝尔子群双曲，并且在 X的万有覆盖上适当且余紧地作用，而该万有覆盖是 CAT(0) 的。

□

定理 7.8. 假设 $G \in \mathcal{ATEH}$。那么 G 是 LERF。

证明。首先，由引理 7.1，G 是局部相对拟凸的，因此只需证明：对于 G 的任意相对拟凸子群 H，H 都是可分离的。

令 G 是 和 的有限指数特殊子群。由于所述。令 G 中相对拟凸，$H' = G' \cap H$ 在 G' 中相对拟凸。注意，根据 Dahmani 组合定理，G' 在 $\hat{G}$ 中相对拟凸，因此 H' 在 $\hat{G}$ 中也相对拟凸。令 $H = H' \cap G$。G 相对于几乎阿贝尔子群双曲。几乎阿贝尔群 P 的每个子群在 P 中都可分离，因此我们可以应用 [36, 推论 6.4]，得出 H 在 G 中可分离。

~ ~现在，由于 H 在 G 的有限剩余拓扑中是闭的，我们知道它在 G 的有限剩余拓扑中也是闭的。由于 G 在 G 中是有限指数子群， H 是 H 的有限个平移的并，因此 H 在 G 的有限剩余拓扑中也闭，因为它是有限个闭集的并。写作 $H = \bigcap K_i$，其中每个 K_i 都是 $\hat{}G$ 的有限指数子群，这表明每个 $K_i \cap G'$ 都是 G' 的有限指数子群，由此可知 $H' = \bigcap(K_i \cap G')$，因此 H' 在 G' 中可分离。

□

接下来的两个结果旨在加强对 $\mathcal{ATEH}$ 中的群与虚极限群之间比较的结果。

引理 7.9。假设 $G \in \mathcal{ATEH}$。则 G 是虚无挠的。

证明。由于 $G \in \mathcal{ATEH}$，根据 [44, 备注 18.17], ，我们知道 G 具有一个有限指数子群 G' ，其为某个稀疏特殊立方复形的基本群。因此， G' 在该立方复形的万有覆盖上适当不连续地作用；该万有覆盖是一个 CAT(0) 空间且为非球面的，所以 G' 具有有限上同调维数，并且是无挠的。 □

引理 7.10。假设 $G \in \mathcal{ATEH}$。则 G 具有一个有限指数子群，该子群与 $\mathcal{P}$ 中元素的共轭的交均为阿贝尔子群，因此它关于阿贝尔子群双曲。

证明。利用引理 7.9，我们可以假设 G 是无挠的；特别地，这说明 $\mathcal{P}$ 是一个几乎阿贝尔群的自共轭集合。假设 $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$。对于每个 $i \in \{1, ..., n\}$，我们构造一个 G_i，它是 G 的有限指数子群，并且使得 $G_i \cap P_i$ 是阿贝尔的。注意，每个 P_i 都假设为 1–端的，并且 G 的每个非循环阿贝尔子群都必须包含在一个外围子群中。

对每个 i，令 P_i' 为 P_i 的极大有限指数阿贝尔子群。首先，我们断言每个 P_i' 在 G 中都是可分离的。事实上，假设 $a \in G \setminus P_i'$，因此对于某个 $p \in P_i'$，有 $[a, p] \neq 1$。由于 G 是残有限的，存在一个同态 $h\colon G \to Q$，其中 Q 是有限的，且 $h([p, a]) \neq 1$。由于 $h(A)$ 是阿贝尔群，我们知道 $h(a) \notin h(P_i')$。因此， P_i' 在 G 中是可分离的。

现在，令 $\{1, k_1^i ..., k_{m_i}^i\}$ 为 P_i' 在 P_i 中的一组陪集代表元。利用 G 是 LERF 这一事实，对每个 $j \in \{1, ..., m_i\}$，取 G_i^j 为 G 的一个有限指数子群，它包含 P_i'，但不包含 k_j^i。那么， $G_i = \bigcap_{j=1}^{m_i} G_i^j$ 是 G 的有限指数子群，且包含 P_i'。此外， $G_i \cap P_i = P_i'$。

最后，取 $G' = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ，我们得到 G 的一个有限指数子群，使得对于每个 i，$P_i \cap G'$ 都是阿贝尔的。取 G'' 为 G 的一个有限指数正规子群，且包含于 G'，对于所有 i， $G'' \cap P_i \subset P_i'$。此外，由于 G'' 是 G 的正规子群，对于每个 $g \in G$， $G'' \cap gP_ig^{-1} = g(G'' \cap P_i)\ g^{-1} \subseteq g(G' \cap P_i')\ g^{-1}$，它是阿贝尔的，因此 G'' 相对 $\{G'' \cap P_i'\}_{i=1}^n$ 的无限多个共轭子群构成的族双曲。 □

对于任意 $G \in \mathcal{ATEH}$，取引理 7.9 给出的有限指数无扭子群与引理 7.10 中的有限指数子群的交，我们得到 G 的一个有限指数环面型相对双曲子群。由于这个有限指数子群与 G 具有相同的 Bowditch 边界，BHH–JSJ

层级是有限的，并且最终终止于自由群、阿贝尔群或双曲轨形群。下面的结论是直接的。

定理 1.3。假设 $G \in \mathcal{ATEH}$，那么 G 在 $\mathcal{TEH}$中几乎是。

8 循环层级

本文最后一节旨在证明， $\mathcal{ATEH}$ 中的群也具有有限的虚拟循环层级。首先，我们证明给定层级中的非终端顶点群可沿几乎循环群分裂。通过考察边界，我们可以证明，将定理 3.6 给出的 JSJ 中所有一端边群折叠后，所得分裂是相对于 $\mathcal{P}$、沿双端子群分裂这一类分裂中的一个 JSJ。这使我们能够应用 Louder 和 Touikan 的一个结果，从而得知，即使将所有一端边群都折叠，BHH–JSJ 层级仍然是有限的。

引理 8.1。设 $(G, \mathcal{P}) \in \mathcal{ATEH}$，并假设 G 不是几乎阿贝尔群、几乎自由群或几乎福克斯群。那么 G可沿有限子群或几乎循环子群分裂。

证明。首先，假设 G 的 BHH–JSJ 层级深度为一。如果 G 不是相对单端的，则极大 Bowditch 分裂是相对于 $\mathcal{P}$ 且沿有限子群进行的，因此结论成立。如果 G 相对单端，则考虑 G 的 Haulmark-Hruska JSJ。由于 JSJ 树是二部的，因此没有两个外围群彼此相邻。虚拟福克斯群顶点群不是几乎非循环阿贝尔群。刚性顶点群的边界不是一个点，但每个刚性顶点群都相对于其包含或与之相交的外围群是双曲的。特别是，由于刚性顶点群和二次悬挂顶点群都不是几乎阿贝尔群，因此在 G 的 JSJ 树中，没有两个几乎阿贝尔群彼此相邻。由于几乎自由群和几乎福克斯群不含非循环阿贝尔子群，这个分裂中的所有边都必须是双端的，因此结论再次成立。

现在假设 G 不是相对单端的，且其 BHH–JSJ 层级的深度为 2。Bowditch 的分裂仍然是关于几乎循环子群的，因此该断言成立。

假设 G 是相对单端的，且其 BHH–JSJ 的深度为 2。假设 G 的 JSJ 中没有双端的边稳定子。这意味着每个边群都是一端的。假设 G_e 是一条边的边稳定子，该边与一个由 G_v 稳定的顶点 v 相接，且 G_v 不是终端的。由于我们假设层级的深度为 2，这种情况必然发生。由于 G_v 相对于其诱导外围结构按有限群分裂， G_e 共轭于 G_v 的这一分裂中的某个顶点。然而，对于与 v 相接的每条边，这一点都成立，因此可以通过将 v 替换为 G_v 的分裂来细化该 JSJ。这表明 G 并非相对单端的，因为它相对于 $\mathcal{P}$ 按有限群分裂，矛盾。

设 G 的 BHH–JSJ 层级深度为 n。根据上述论证，深度为 $n-1$ 或 $n-2$ 的顶点群可沿几乎循环

子群分裂。假设存在一个深度为 k 的顶点群 H，它不能沿几乎循环子群分裂，并且选取它使得 k 最大。下面将证明 H 是终端的。如果 H 的诱导层级深度为 1 或 2，那么如前所述，H 可沿几乎循环子群分裂。如果 H 有多个端，那么 H 可沿几乎循环子群分裂。如果 H 是虚拟单端的，那么根据假设，H 的 Haulmark-Hruska JSJ 只有单端外围边群。这些边群在每个顶点群 H_v的 Bowditch 分裂中都椭圆地作用，因为它们是单端的，且不能沿有限群分裂，因此每个非终端顶点群的 Bowditch 分裂都必定平凡；否则，JSJ 仍可进一步细化，而 H 就不会是相对单端的。根据 k 取最大值这一假设，JSJ 中的每个刚性顶点群H_v 在 H 的 JSJ 分裂中都必须有一条循环边。然而，由于与 v 相邻的每条边的边群在 H_v 中都是外围的，它在 H_v 的 JSJ 中椭圆地作用。因此，可以通过将 v 替换为 H_v 的 JSJ 来细化该 JSJ；于是，H 确实沿双端子群分裂，因为 H_v 也是如此。这就产生了矛盾，因此 H 必定是终端的。 □

特别地，如果 $(G,\mathcal{P})$ 的 BHH–JSJ 层级非平凡，那么 G 可以沿一个几乎循环子群分裂。

对于相对单端的 $G \in \mathcal{ATEH}$，如下定义其压缩 JSJ $\mathcal{T}'$。令 $\mathcal{T}$ 为 Haulmark 和 Hruska 的典范 JSJ。通过将所有一端的边压缩，我们从 $\mathcal{T}$ 得到 $\mathcal{T}'$。根据 JSJ 的构造，所有被压缩的边都连接外围顶点群与非二次悬挂的刚性块。此外，根据 [25, 定理 1.3], ，我们知道边群的端数——例如，连接外围群 P 与刚性群 H 的边群——与 $C\setminus p$ 的端数相同，其中 p 是与群 P 对应的局部割点，而 C 是 H 的极限集。特别地，因此仅凭 $(G,\mathcal{P})$ 的 Bowditch 边界，就可以辨认出 JSJ 树中哪些边会被压缩。

回顾第 3 节中的以下内容。若所有边群都属于 $\mathcal{E}$，且 $\mathcal{S}$ 中的所有群都在 T 上椭圆地作用，则 G-树 T 是群类 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{S}$ 的 $(\mathcal{E},\mathcal{S})$-树。若 $(\mathcal{E},\mathcal{S})$-树 T的每个边稳定子都在任意其他 $(\mathcal{E},\mathcal{S})$-树上椭圆地作用，则该树是普遍椭圆的。若存在一个 G-等变映射 $T \to T'$，则 $(\mathcal{E},\mathcal{S})$-树 T支配树 T'。令 $\mathcal{E}$ 为 G的几乎循环子群所成的集合。$(G,\mathcal{P})$的虚循环 JSJ 是一个普遍椭圆的 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树 T，并且支配任何其他普遍椭圆的 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树。

引理 8.2. 假设 $(G,\mathcal{P}) \in \mathcal{ATEH}$，且 G 是相对单端的。那么，G 的压缩 JSJ 是 G 的虚循环 JSJ。

证明。令 $\mathcal{T}'$ 为 G 的压缩 JSJ 对应的树，令 $\mathcal{T}$ 为定理 3.6 中 G 的 JSJ 对应的树。首先，我们注意到，$\mathcal{T}$ 的非抛物型双端顶点群和二次悬挂群，其关联边群都只有双端边群，因此它们仍是作用在 $\mathcal{T}'$ 上的作用的顶点稳定子。我们注意到，$\mathcal{T}'$ 中的边群也是 $\mathcal{T}$ 中的边群，因此 $\mathcal{T}'$ 是普遍椭圆的，因为 $\mathcal{T}$ 是普遍椭圆的。接下来，我们必须证明 $\mathcal{T}'$ 支配任意其他普遍椭圆的 $(\mathcal{E},\mathcal{P})$-树 $\mathcal{S}$，其中 $\mathcal{S}$ 的边群为双端群，并且

相对于 $\mathcal{P}$。根据定义， $\mathcal{T}'$ 中的任何外围顶点群在 $\mathcal{S}$ 中都是椭圆的。非外围双端顶点群和二次悬挂顶点群在 $\mathcal{S}$ 上椭圆地作用，这一点可用与证明 [26, 定理 9.1] 相同的方法证明。这里回顾一下证明。若 G_v 是 $\mathcal{T}'$ 的一个双端、非外围顶点群，则其极限集为 $\{\eta,\chi\}\in\partial(G,\mathcal{P})$。若该极限集与 $\mathcal{S}$ 的一个边群 G_e 的极限集重合，则 G_v 和G_e 共初等，且 G_v 有一个有限指数子群在$\mathcal{S}$上椭圆地作用，因此 G_v 在 $\mathcal{S}$ 上也椭圆地作用。若 $\{\eta,\chi\}$ 与 $\mathcal{S}$ 中每个边群的极限集均不相交，则根据 [26, 命题 6.9], , $\{\eta,\chi\}$ 包含于 $\mathcal{S}$ 的某个顶点群的极限集中，因此固定 $\mathcal{S}$ 中的该顶点。

现在假设 G_v 是二次悬挂的。根据 [22, 引理 2，15] $\mathcal{S}$ 可以细化为一个 JSJ 分裂；根据 [22, 定理 5， G_v 在 $\mathcal{S}$上椭圆，因此在 $\mathcal{S}$上也椭圆。

如果 G_v 是刚性的，并且来自 $\mathcal{T}$中的一个刚性顶点，那么 G_v 在 G 的任何关于初等子群的分裂中都会椭圆，因此它在任何关于双端子群的分裂中也会椭圆。

最后，对于 $v\in\mathcal{T}'$， G_v 可能是由外围群和 $\mathcal{T}$的刚性顶点沿一端边群合并而成的。我们声称，极限集 ΛG_v不能包含 ∂（G， $\mathcal{P}$）的精确割点对，也不能包含 ∂（G， $\mathcal{P}$）的全局割点 p；其中 ∂（G， $\mathcal{P}$）的某个连通分支 C 满足 $C\setminus p$ 是双端的。这是因为在这两种情况下， $\mathcal{T}$中都会有一条双端边不会在 $\mathcal{T}'$中被压缩。由于 ΛG_v 不包含此类拓扑特征，它包含在 $\mathcal{S}$每条边的一个半空间中；根据 [26, 引理 6, ΛG_v 包含在 $\mathcal{S}$某个顶点的极限集中。因此， G_v 在 $\mathcal{S}$中稳定该顶点。

因此， $\mathcal{T}'$ 支配任意普遍椭圆分裂 $\mathcal{S}$，所以 $\mathcal{T}'$ 是 G 关于 $\mathcal{P}$、以双端子群为边群的一个 JSJ。 □

定理 8.3。设$(G,\mathcal{P})\in\mathcal{ATEH}$。那么 G 有一个关于 $\mathcal{P}$ 、以几乎循环子群为边群的有限层级，最终到达几乎自由群、几乎阿贝尔群或虚拟福克斯群。

证明。我们令 $\mathcal{H}$ 为 $(G,\mathcal{P})$ 的层级，其中在每一层，我们取相对于 $\mathcal{P}$ 的、关于有限群的 Bowditch 分裂，然后取引理 8.2 中的压缩 JSJ。将此层级称为循环 JSJ 层级。我们假设所有外围群和几乎福克斯群都是终端的，并赋予非终端顶点群诱导外围结构，其中不包含任何双端群。这是一个相对于 $\mathcal{P}$、关于几乎循环子群的 G 的 JSJ 层级。令 $G_0\leq G$ 为 G 的一个有限指数无挠子群，该子群由引理 7.9 保证存在。注意，由于 $\mathcal{H}$ 完全可以由边界 $\partial(G,\mathcal{P})$ 的拓扑确定，G_0, $\mathcal{H}'$ 的循环 JSJ 层级以同样方式定义，因此 $\mathcal{H}'$ 有限当且仅当 $\mathcal{H}$ 有限。于是，我们可以令 G 无挠。在此情形下，由于 G 没有 2-挠元， G 中不可能存在在 $\mathcal{H}$ 的树上二面体式地作用的纤细子群，因此 $\mathcal{H}$ 是一个双曲层级。特别地， G 的每个纤细子群要么是椭圆的，要么固定 $\mathcal{H}$ 中任意树的一个端。由于所有边群都是几乎循环的，因而是诺特的， $\mathcal{H}$ 满足 [31, 中所需的升链条件

定理 2.5]。由于假设 G 是有限表示的，因此它是 $\mathcal{H}$-几乎有限表示的。于是根据 [31, 定理 2.5], , 存在一个 N 和一个 C , 使得每个深度至少为 N 的顶点群 G_v 都具有一个高度至多为 C 的层级 $\mathcal{K}_v$, 其终端顶点群或者是 $\mathcal{H}$-椭圆的，或者是纤细的。

设 G_v 是 $\mathcal{H}$ 中深度至少为 N 的一个群。注意， G_v 继承了来自 G 的外围结构，以及来自 $\mathcal{H}$ 的层级。若 G_v 不是终端的，则继承的层级是一个 JSJ 层级。采用与定理 6.2 相同的论证，并以引理 8.2 的论证代替针对刚性顶点群的论证，可知，若存在一个相对于 $\mathcal{P}$ 的有限几乎循环层级 $\mathcal{K}_v$, 则 G_v 从 $\mathcal{H}$ 继承的 JSJ 层级是有限的。特别地， $\mathcal{H}$ 是有限的。

现在，只需证明 $\mathcal{H}$ 的终端顶点群是几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群。设 G_v 是 $\mathcal{H}$ 的一个终端顶点群。那么 $G_v \in \mathcal{ATEH}$, 因为 $G \in \mathcal{ATEH}$。若 G_v 不是几乎自由、几乎阿贝尔或几乎福克斯群，则根据引理 8.1， G_v 按一个几乎循环子群分裂，因此它在 $\mathcal{H}$ 中不是终端的。 □

参考文献

[1] I. Agol, *The virtual Haken conjecture*, Documenta Mathematica 18 (2013), 1045–1087.[2] E. Alibegovi´c, *A combination theorem for relatively hyperbolic groups*, 伦敦数学会通报 37 (2005年6月), no. 3, 459–466.[3] J. Behrstock, C. Drut¸u, and L. Mosher, *Thick metric spaces, relative hyperbolicity, andquasi-isometric rigidity*, Mathematische Annalen 344 (2009), no. 3, 543–595.[4] H. Bigdely and D.T. Wise, *Quasiconvexity and relatively hyperbolic groups that split*, 密歇根数学杂志 62 (2013), no. 2, 387–406.[5] B.H. Bowditch, *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta mathemat- ica 180 (1998), no. 2, 145–186.[6] , *Peripheral splittings of groups*, Transactions of the American Mathematical So- ciety 353 (2001), no. 10, 4057–4082.[7] , *Relatively hyperbolic groups*, 代数与计算国际期刊 22 (2012), no. 3, 1250016–66.[8] M.R. Bridson and S.M. Gersten, *The optimal isoperimetric inequality for torus bundles over the circle*, 数学季刊 47 (1996), no. 185, 1–23.[9]M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Vol. 319, Springer, 柏林, 1999.[10] M. Carrasco and J.M. Mackay, *Conformal dimension of hyperbolic groups that split over elementary subgroups*, Inventiones mathematicae 227 (2022), no. 2, 795–854.[11] A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Inven- tiones mathematicae. 118 (1994), no. 3, 441–456.[12] F. Dahmani, *Combination of convergence groups*, Geometry & Topology. 7 (2003), no. 2, 933–963.[13] A.Dasgupta and G.C. Hruska, *Local connectedness of boundaries for relatively hyperbolic groups* (2022), 可见于 `arXiv:2204.02463`.[14] C. Drut¸u and M. Kapovich, *Geometric group theory*, 几何群论, vol. 63, 美国数学会, Providence, Rhode Island, 2018.[15] C. Drut¸u, *Relatively hyperbolic groups: geometry and quasi-isometric invariance*, Commentarii mathematici Helvetici 84 (2009), no. 3, 503–546.

[16] M.J. Dunwoody, *The accessibility of finitely presented groups*, Inventiones mathematicae 81 (1985), no. 3, 449–457.[17] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Bulletin (new series) of the American Mathematical Society. 25 (1991), no. 2, 395–402.[18] B.W. Groff,

Quasi-isometries boundaries and JSJ-decompositions of relatively hyperbolic , , groups **5** 2013 4, 451 475
Journal of Topology and Analysis ( ), no. – .[19] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, 第1版, Essays in Group Theory, vol. 8, Springer, 纽约, NY, 1987.[20] D. Groves and J.F. Manning,

Dehn filling in relatively hyperbolic groups, Israel journal of mathematics. 168 (2008), no. 1, 317–429.[21] F. Grunewald, A. Jaikin-Zapirain, and P.A. Zalesskii, *Cohomological goodness and the profinite completion of Bianchi groups* **144** 2008 ,

Duke mathematical journal. ( ), no. 1, 53 72– .[22] V. Guirardel and G. Levitt,

JSJ decompositions of groups, Expos´es 395 (2017), 1–165.[23] F. Haglund and D.T. Wise,

A combination theorem for special cube complexes, Annals of mathematics 176 (2012), no. 3, 1427–1482.[24] M. Hall Jr., *Subgroups of finite index in free groups*, Canadian journal of mathematics 1 (1949), no. 2, 187–190.[25] M. Haulmark,

Local cut points and splittings of relatively hyperbolic groups, Algebraic & Geometric Topology. 19 (2019), no. 6, 2795–2836.[26] M. Haulmark and G.C. Hruska,

On canonical splittings of relatively hyperbolic groups (2019), 可见于 `arXiv:1912.00886`.[27] J. Hempel, *Residual finiteness of surface groups*, Proceedings of the American Mathematical Society. 32 (1972), no. 1.[28]M.E. Hill,

Strong accessibility for hyperbolic groups (2021), 可见于 `arXiv:2103.01067`.[29] G.C. Hruska, *Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups*, Al- gebraic & Geometric Topology 10 (2010), no. 3, 1807–1856.[30] I. Kapovich and N. Benakli,

Boundaries of hyperbolic groups, Combinatorial and Geomet- ric Group Theory, vol. 296, 美国数学会, Providence, Rhode Island, 2002.[31] L. Louder and N. Touikan,

Strong accessibility for finitely presented groups, Geometry & Topology. 21 (2017), no. 3, 1805–1835.[32] J.M. Mackay and A. Sisto, *Maps between relatively hyperbolic spaces and between their boundaries* 2020 `arXiv:2012.11902` ( ), 可见于 .[33]E. Oreg´on-Reyes, *On cubulated relatively hyperbolic groups* (2020), 可见于 `arXiv:2003.12702`.[34] D.V. Osin,

Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry algebraic properties and al- , , , gorithmic problems **179** 2006
Memoirs of the American Mathematical Society ( ), no. 843, 1 100– .[35] P. Papasoglu and K. Whyte, *Quasi-isometries between groups with infinitely many ends*, Commentarii mathematici Helvetici 77 (2002), no. 1, 133–144.[36] M. Sageev and D.T. Wise,

Cores for quasiconvex actions, Proceedings of the American Mathematical Society 143 (2015), no. 7, 2731–2741.[37] P. Scott, *Subgroups of surface groups are almost geometric*, Journal of the London Math- ematical Society. 17 (1978), no. 3, 555–565.[38] Z. Sela,

Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams, Publications math´ematiques. 93 (2001), no. 93, 31–105.

[39] J.P. Serre, *Trees*, 施普林格出版社，柏林；纽约，1980年。[40] , *Galois cohomology*, 第2次印刷勘误版，施普林格，柏林；纽约，1997年。[41] J. Stallings,
Group theory and three-dimensional manifolds, 耶鲁大学出版社，1971年。[42] P. Tukia,
Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups, 《纯粹与应用数学杂志》。391 (1988)，第391期，1–54。[43] H. Wilton, *Hall's theorem for limit groups*, 《几何与泛函分析：GAFA》。18 (2008)，第1期，271–303。[44] D.T. Wise,
The structure of groups with a quasiconvex hierarchy, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2021年。[45] A. Yaman,
A topological characterisation of relatively hyperbolic groups, 《纯粹与应用数学杂志》。566 (2004)，第566期，41–89。