arXiv:2302.05384v1 [math.RT] 10 Feb 2023

等向环箭图的箭图格拉斯曼簇去奇异化

¨ALEXANDER PUTZ 和 MARKUS REINEKE

摘要。我们为等向环箭图的任意幂零表示构造箭图格拉斯曼簇的环面等变消奇化，并将其应用于计算这些簇的环面等变上同调。

1. 引言

箭图格拉斯曼簇是参数化箭图表示的子表示的射影簇。它们起源于箭图表示的几何研究 [Scho92] ，并在簇代数理论 [CC06], 中得到发展；近年来，它们还被广泛应用于李理论背景下，即作为（仿射）旗簇退化的丰富来源 [CFFFR17, CFR13, FFR17, Pue22]。这种方法使得能够将箭图表示理论中的同调方法应用于此类退化结构的研究。

由此得到的簇通常是奇异的，因此构造自然的解奇异化方法非常可取。对于 Dynkin 箭图表示的箭图格拉斯曼簇， [CFR13] 在 [FF13], 的基础上完成了这一工作；对于环箭图子表示的格拉斯曼簇， [FFR17]完成了这一工作。

本文综合了 [CFR13, FFR17] 的研究方法，并构造了等向循环箭图幂零表示的箭图格拉斯曼簇的解奇异化，从而特别地对退化仿射旗簇 [Pue22]进行了去奇异化。

作为一项重要应用，这使我们能够描述退化仿射旗簇及更一般的箭图格拉斯曼簇的等变上同调，延续了 [LP20, LP23]开启的研究计划。

第一节中，我们回顾等向循环箭图的幂零表示所对应的箭图格拉斯曼簇的一些背景知识。在第3节中，我们沿着 [CFR13]的思路，明确构造等向环的幂零表示所对应的箭图格拉斯曼簇的解奇异化。我们证明，这种解奇异化具有特别良好的几何结构，即它同构于一个格拉斯曼丛塔。因此，它具有与奇异箭图格拉斯曼簇的胞腔分解相容的胞腔分解。在第4节中，我们回顾循环箭图格拉斯曼簇上某些环面作用的定义，以及计算环面等变上同调所需的框架。最后，在第 5 节中，我们证明这种解奇异化相对于 [LP20]中引入的环面作用是等变的。这使我们能够将该文中的构造用于计算等向环幂零表示所对应的所有箭图格拉斯曼簇的环面等变上同调。

2. 等向环的箭图格拉斯曼簇

本节回顾一些有关等向环的箭图格拉斯曼簇和表示的定义。关于表示论性质的一般介绍，参见 [Ki16, Schi14] 。

关于箭图格拉斯曼簇的基本性质，参见 [CFR12] 。

2.1. **关于箭图表示的一般论述**。令 Q 为一个箭图，由顶点集合 Q_0 以及顶点之间的箭集合 Q_1 组成。一个 Q-表示M 由一组 $\mathbb{C}$-向量空间 $M^{(i)}$ （其中 $i \in Q_0$ ）以及一组线性映射M_α ： $M^{(i)} \to M^{(j)}$ （其中 $(\alpha : i \to j) \in Q_1$）构成。我们将有限维 Q-表示范畴记为 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$。两个对象 M和 N之间的态射是由线性映射 φ_i： $M^{(i)} \to N^{(i)}$ $i \in Q_0$组成的元组，满足对所有 $(\alpha : i \to j) \in Q_1$，都有 $\varphi_j \circ M_\alpha = N_\alpha \circ \varphi_i$。

定义 2.1。对于 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ 和 $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，**箭图格拉斯曼簇**$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 是 $\prod_{i \in Q_0} \mathrm{Gr}_{e_i}(M^{(i)})$ 的闭子簇，由所有满足对 $i \in Q_0$ 有 $\dim_{\mathbb{C}} U^{(i)} = e_i$ 的 U（M 的子表示）组成。

对于一个 $[N]$ Q-表示的同构类，分层 $\mathbf{S}_{[N]}$ 定义为所有点（即子表示） $U \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 的集合，其中 U 与 N同构。根据 [CFR12，引理 2.4], $\mathbf{S}_{[N]}$ 是局部闭且不可约的。如果 M的子表示只有有限个同构类（如下文所述），那么这些 $\mathbf{S}_{[N]}$ 便定义了箭图格拉斯曼簇的有限分层。

$M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ 的每个基 B 都由以下各空间的基组成

$$B^{(i)} = \left\{ v_k^{(i)} \;\middle|\; k \in [m_i] \right\}$$

Q-表示 M的每个向量空间 $M^{(i)}$，其中对所有 $i \in Q_0$都有 $m_i := \dim_{\mathbb{C}} M^{(i)}$，且 $[m] := \{1, \ldots\ldots, m\}$。

定义 2.2。设 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$，且 M有一个基 B。**系数箭图**$Q(M, B)$ 由以下部分组成:

(QM0) 顶点集 $Q(M, B)_0 = B$; (QM1) 箭集 $Q(M, B)_1$, 包含 $(\tilde{\alpha} : v_k^{(i)} \to v_\ell^{(j)})$ 当且仅当 $(\alpha : i \to j) \in Q_1$ 且 $v_\ell^{(j)}$ 在 $M_\alpha v_k^{(i)}$ 中的系数非零。

2.2. **等向环的表示**。用 Δ_n 表示顶点数为 n 的等向环箭图。因此，箭集与顶点集均与 $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 双射；更确切地说，我们有 $(\Delta_n)_0 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ，并且对所有 $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，箭为 $i \to i+1$。除非另有说明，本文及下文中的所有指标均按模 n 计算。

称一个 Δ_n-表示 M 对于 $N \in \mathbb{N}$ 是 **N-幂零的**，如果

$$M_{\alpha_{i+N-1}} \circ M_{\alpha_{i+N-2}} \circ \cdots \circ M_{\alpha_{i+1}} \circ M_{\alpha_i} = 0$$

对于所有 $i \in \mathbb{Z}_n$，也就是说，沿着 Δ_n 的箭将 M 的映射进行任意拼接，至多经过 N 步后均为零。若 M 对某个 N 是 N-幂零的，则称其为 **幂零的** 。

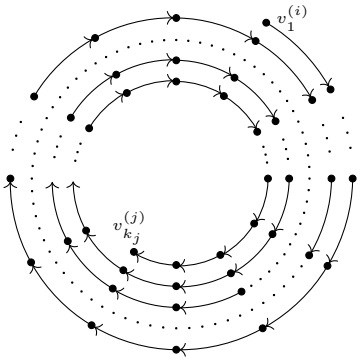
例2.3。令 $i \in \mathbb{Z}_n$ ，并令 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。考虑带有基 $B = \{b_1, \ldots, b_\ell\}$ 的 $\mathbb{C}$-向量空间 V，其上赋予由 $\deg(b_k) = i + k - 1 \in \mathbb{Z}_n$ 给出的 $\mathbb{Z}_n$-分次。取唯一确定的算子 $A \in \mathrm{End}(V)$，使得对任意 $k < \ell$ 和 $Aw_\ell = 0$ 均有 $Aw_k = w_{k+1}$。立即可验证，相应的 Δ_n-表示是幂零的。我们将该表示记为 $U_i(\ell)$。

命题2.4. *(*[Ki16，定理7.6.(1)]*)* Δ_n 的每个不可分解幂零表示都同构于某个 $U_i(\ell)$。

例 2.5. 注意， B 中的基显然可以重新排列为若干有序基的并集

$$B^{(i)} = \left\{ v_r^{(i)} : r \in [k_i] \right\} \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}_n,$$

其中， k_i 是满足度数 $\deg(b) = i$的元素 $b \in B$ 的个数。关于B， $U_i(\ell)$的系数箭图具有如下形式:



根据 [Ki16, Theorem 1.11], ，每个幂零 Δ_n-表示都同构于如下形式的Δ_n-表示:

$$M := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_n} \bigoplus_{\ell \in [N]} U_i(\ell) \otimes \mathbb{C}^{d_{i,\ell}},$$

其中 $d_{i,\ \ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$ 和 $\ell \in [N]$均成立。

令 $\mathbb{C}\Delta_n$ 为 Δ_n 的路径代数，并定义路径

$$p_i(N) := (i+N | \alpha_{i+N-1} \circ \alpha_{i+N-2} \circ \cdots \circ \alpha_{i+1} \circ \alpha_i | i)$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$ 以及某个固定的 $N \in \mathbb{N}$均成立。我们定义路径代数理想

$$\mathrm{I}_N := \langle\, p_i(N) : i \in \mathbb{Z}_n \,\rangle \subset \mathbb{C}\Delta_n,$$

由所有长度为 N 的路径生成，并将截断路径代数$\mathbb{C}\Delta_n/\mathrm{I}_N$ 记作 $A_n^{(N)}$。以下是 [Schi14, 定理 5.4]的一个特例。

命题 2.6. 有界箭图表示范畴 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 等价于截断路径代数上的模范畴 $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}}(A_n^{(N)})$ 。

注记 2.7. $i \in \mathbb{Z}_n$ 的 $U_i(N)$ 是 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 中最长的不可分解幂零表示。

令 $P_i \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 为从顶点 $i \in \mathbb{Z}_n$ 开始、对应于射影不可分解 $A_n^{(N)}$-模的 Δ_n-表示；类似地，令$I_j \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 为在顶点 $j \in \mathbb{Z}_n$ 结束、对应于内射不可分解 $A_n^{(N)}$-表示的 Δ_n-表示。通过不可分解幂零表示，我们可以将环的有界射影表示和有界内射表示相对应（参见 [Pue22, 命题 4.2]）：

命题 2.8。 对于 n、$N \in \mathbb{N}$以及所有 i、$j \in \mathbb{Z}_n$，带关系箭图 (Δ_n, I_N) 的射影表示和内射表示 P_i与 I_j满足

$$P_i \cong U_i(N) \cong I_{i+N-1} \quad \text{and} \quad I_j \cong U_{j-N+1}(N) \cong P_{j-N+1}.$$

注记 2.9。 特别地，每个不可分解幂零 Δ_n-表示 $U_i(N)$都是 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 中的射影对象和内射对象。若要强调不可分解 Δ_n-表示的内射性，我们有时使用记号$U(j;\ \ell) := U_{j-\ell+1}(\ell)$。

2.3. **不可约分支的参数化**。 在第3节中，我们将为等向环的幂零表示的所有箭图格拉斯曼簇构造解奇异化，这需要了解它们的不可约分支。先回顾一下这一方法：由于在任意固定维数下，幂零 Δ_n-表示只有有限多个同构类，因此每个箭图格拉斯曼簇按层 $\mathsf{S}^{[N]}$ 的分层都是有限的。由于这些层是不可约的，箭图格拉斯曼簇的不可约分支因此具有如下形式：对于某些同构类 $[N]$，相应的分支为 $\mathsf{S}^{[N]}$；这些同构类为各分支提供了自然的标记（以及一个典范代表）。

对于等向环的任意幂零表示，其不可约分支的结构尚不为人所知。在所有 Δ_n-表示 M 的不可分解直和项长度均为 $N = \omega n$，且$\mathbf{e} = (\omega k, \dots, \omega k) \in \mathbb{Z}^n$的特殊情形下，我们可以显式描述箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ [的不可约分支，见 Pue22, 引理 4.10]:

引理2.10。 设 M表示 Δ_n-表示 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}_n} U(i;\ \omega n)\otimes\mathbb{C}^{d_i}$，其中 $d_i \in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$成立，定义 $m := \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} d_i$ 以及 $\mathbf{e} := (\omega k,\dots,\omega k) \in \mathbb{Z}^n$。$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 的不可约分支与以下集合之间存在双射

$$C_k(\mathbf{d}) := \Big\{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : p_i \leq d_i \text{ for all } i \in \mathbb{Z}_n, \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} p_i = k\Big\}$$

并且它们的维数均为 $\omega k\,(m-k)$。

注记 2.11。 对应于不可约分支中开稠密层的一个代表元，其中 $\mathbf{p} \in C_k(\mathbf{d})$ 为

$$U_{\mathbf{p}} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_n} U(i;\omega n)\otimes\mathbb{C}^{p_i}.$$

例2.12。 令 $d_i = 1$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$成立。于是根据引理2.10，不可约分支由 k 元子集参数化，而代表元为

$$\bigoplus_{j\in I} U(j;\omega n)$$

对于 $I \in \binom{[n]}{k}$。不可约分支的维数为 $\omega k(n-k)$。

3. 消解的构造

本节所采用的等向环箭图的箭图格拉斯曼簇去奇异化构造方法，是对 [CFR 13] 针对 Dynkin 箭图的方法与 [FFR17] 针对环箭图的方法的综合。我们将构造另一个箭图，使其某些箭图格拉斯曼簇能够给出去奇异化；这依赖于某些有利的同调性质，这些性质类似于 [CFR13，第 4] 节中的性质。

3.1. **等向圆柱的有界表示**。 在本小节中，我们为某个带关系箭图 (Q, I) 引入映射 $\Lambda : \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N) \to \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q, \mathrm{I})$，使得对于所有 $\hat{}M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$，与 $\Lambda(M)$ 相关联的每个箭图格拉斯曼簇都是光滑的。我们从定义 Q 和理想 I 开始。令 $\Delta_{n,N}$ 为顶点为 $\big(\hat{}\Delta_{n,N}\big)_0 = \{(i,k) :\ i \in \mathbb{Z}_n,\ k \in [N]\}$ 的箭图，其箭为

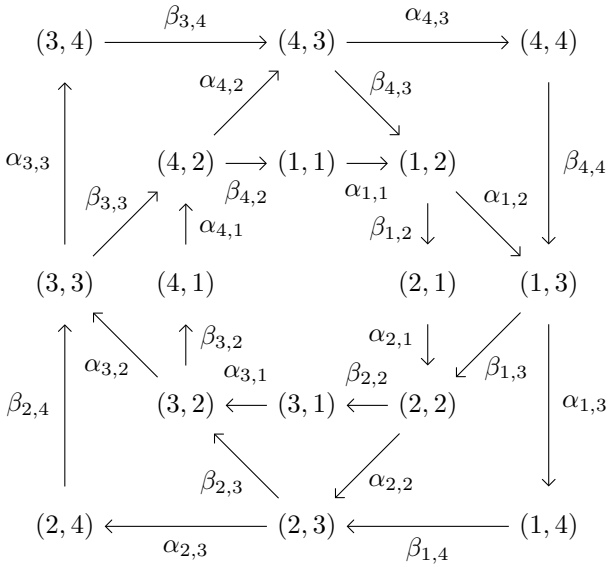
$$\begin{aligned}\big(\hat{\Delta}_{n,N}\big)_1 = &\big\{\alpha_{i,k} : (i,k) \to (i,k+1)\ :\ i \in \mathbb{Z}_n,\ k \in [N-1]\big\}\cup\\ &\big\{\beta_{i,k} : (i,k) \to (i+1,k-1)\ :\ i \in \mathbb{Z}_n,\ k \in [N]\setminus\{1\}\big\}\end{aligned}$$

ˆ，称之为同向圆柱箭图。我们将 $\mathrm{I}_{n,N}$ 定义为 ˆ 路径代数$\mathbb{C}\Delta_{n,N}$ 中由以下关系生成的理想

$$\beta_{i,k+1}\circ\alpha_{i,k}\equiv\alpha_{i+1,k-1}\circ\beta_{i,k}\quad\text{and}\quad\alpha_{i+1,N-1}\circ\beta_{i,N}\equiv 0$$

对于所有 $i\in\mathbb{Z}_n$ 以及所有 $k\in[N-1]\backslash\{1\}$。

ˆ例3.1。 $\Delta_{4,\,4}$ 是如下箭图：



ˆ ˆ 我们定义一个函子 $\Lambda\colon\ \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n,\ \mathrm{I}_N)\to\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,\,N},\ \mathrm{I}_{n,\,N})$，其在对象上的定义为

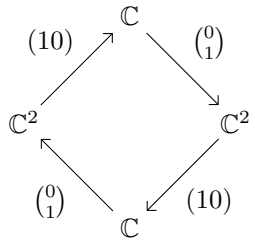
$$\Lambda(M):=\hat{M}=\big((\hat{M}^{(i,k)})_{i\in\mathbb{Z}_n,k\in[N]},(\hat{M}_{\alpha_{i,k}},\hat{M}_{\beta_{i,k+1}})_{i\in\mathbb{Z}_n,k\in[N-1]}\big)$$

with

$$\begin{aligned}
\hat{M}^{(i,1)}&:=M^{(i)} && \text{for } k=1\\
\hat{M}^{(i,k)}&:=M_{i+k-2}\circ M_{i+k-3}\circ\cdots\circ M_{i+1}\circ M_i(M^{(i)}) && \text{for } k\geq 2\\
\hat{M}_{\alpha_{i,k}}&:=M_{i+k-1} && \text{for } k\geq 1\\
\hat{M}_{\beta_{i,k}}&:=\iota:\hat{M}^{(i,k)}\hookrightarrow\hat{M}^{(i+1,k-1)} && \text{for } k\geq 2
\end{aligned}$$

其中，最后一行中的包含映射自然源于表示 M 的向量空间的定义。

ˆ例3.2。 设 $n=N=2$和 $M=U(1;\ 2)\oplus U(2;\ 2)$。$\Delta_{2,\,2}$-表示$\Lambda(M)$为



ˆ ˆ 命题 *3.3.* 如上所定义的 $\Lambda\colon \mathit{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, I_N)\to\mathit{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,N}, I_{n,N})$ 诱导出双射 $\Lambda_{N,M}\colon \mathit{Hom}_{\Delta_n}(N,M)\to\mathit{Hom}_{\hat{\Delta}_{n,N}}(\hat{N},\hat{M})$，对所有 $N,M\in\mathit{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, I_N)$ 均成立，因此它是一个完全忠实函子。

证明。根据 Λ 的构造，构成 $\hat{} M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\hat{}\Delta_{n,N}, \hat{}\mathrm{I}_{n,N})$ 的向量空间是构成 M 的对应向量空间的子空间。因此，$\mathrm{Hom}_{\Delta_n}(N,M)$ 中的每个态射都会诱导出 $\mathrm{Hom}_{\hat{}\Delta_{n,N}}(\hat{}N, \hat{}M)$ 中的一个态射，其在新增顶点处的分量通过限制得到。显然，这会诱导出所需的双射 $\Lambda_{N,M}$，$\Lambda_{N,M}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\hat{}M}$，并且对所有 $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\Delta_n}(N,M)$ 以及所有 $N, M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$，均有 $\Lambda_{N,M}(\phi) \circ \Lambda_{N,M}(\psi) = \Lambda_{N,M}(\phi \circ \psi)$ 成立。□

现在我们想描述不可分解对象 $U_i(\ell)$ 在 Λ 下的像。令 $A_{\infty\times N}$ 为高度为 N 的无限带状箭图，即其顶点为 (i,k)（其中 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in [N]$），箭为 $\alpha_{i,k}\colon (i,k) \to (i,k+1)$ 以及 $\beta_{i,k}\colon (i,k) \to (i+\hat{}\,1, k-1)$（只要两个顶点均存在）。定义箭图映射 $\phi\colon A_{\infty\times N} \to \Delta_{n,N}$，将每个指标 $i \in \mathbb{Z}$ 映至其等价类 $i \in \mathbb{Z}_n$。这将 $\hat{}$ 扩展为降维函子 $\Phi\colon \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(A_{\infty\times N}) \to \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,N})$，满足

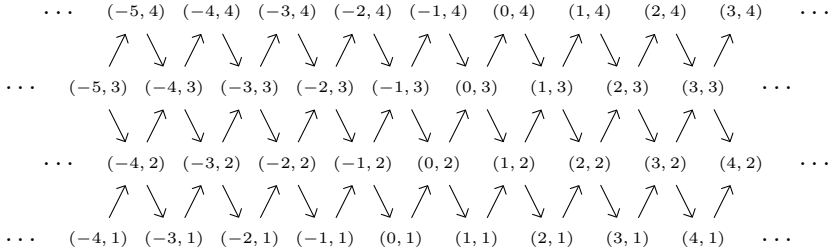
$$\begin{aligned}\Big(\Phi(V)\Big)^{(i,k)} &= \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} V^{(i+rn,k)}\\ \Big(\Phi(V)\Big)_{\alpha_{i,k}} &= \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} V_{\alpha_{i+rn,k}}\\ \Big(\Phi(V)\Big)_{\beta_{i,k}} &= \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} V_{\beta_{i+rn,k}}\end{aligned}$$

对所有 $V \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(A_{\infty\times N})$ 均成立。考虑 $A_{\infty\times N}$-表示 $V(i;\ell)$，其向量空间为 $V(i;\ell)^{(j,k)} = \mathbb{C}$，当 (j,k) 时为 $\in (A_{\infty\times N})_0$（其中 $i \le j \le i+\ell-1$ 和 $1 \le k \le i+\ell-j$），其他情况下为零。沿 $A_{\infty\times N}$ 的箭上的映射，在源空间和目标空间均为一维时取恒等映射，否则为零。利用函子 Λ 和 Φ 的显式定义，以及表示 $U_i(\ell)$ 和 $V(i;\ell)$ 的显式描述，我们现在可以直接验证

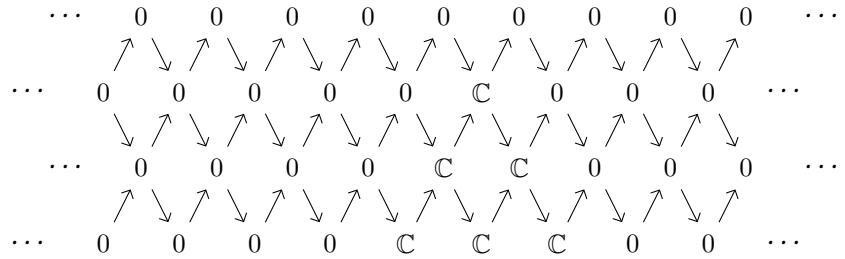
$$\Lambda(U_i(\ell)) = \Phi(V(i;\ell)).$$

类似地，我们定义由向量空间 $V(i,k;\ell)^{(j,r)} = \mathbb{C}$ 构成的 $A_{\infty\times N}$-表示 $V(i,k;\ell)$，其中对于 $(j,r) \in (A_{\infty\times N})_0$，满足 $j \ge i$ 和 $i+k \le j+r \le i+k+\ell$；以及由向量空间 $W(i,k;\ell)^{(j,r)} = \mathbb{C}$ 构成的 $(i,k;\ell)$，其中对于 $(j,r) \in (A_{\infty\times N})_0$，满足 $j \le i$ 和 $i-\ell+1 \le j+r \le i+k$。

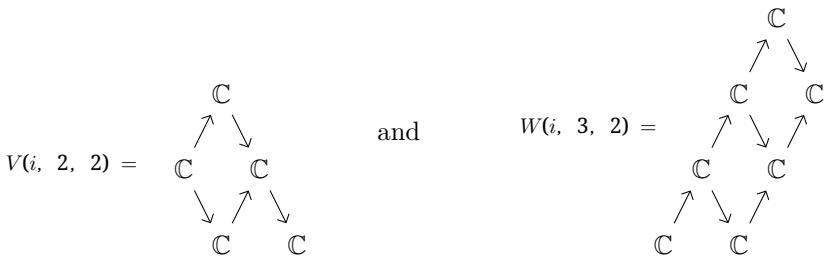
例 3.4。对于 $N=4$ 箭图 $A_{\infty\times N}$ 是



其表示 $V(i,\ 3)$ 具有如下形式



从现在起，我们从图中删去所有的零以及与零相连的箭。因此，我们得到



3.2.圆柱表示范畴的同调性质。 本节中，我们紧密沿用 [CFR13] 的方法，证明函子 Λ 的像具有某些良好的同调性质。

命题 3.5. $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\hat{\Delta}_{n,N},\hat{\mathrm{I}}_{n,N})$中的单对象、射影对象和内射对象分别为

$$S_{i,k} := \Phi\big(V(i,k;0)\big),\quad P_{i,k} := \Phi\big(V(i,k;N-k)\big),\quad I_{i,k} := \Phi\big(W(i,k;N-k)\big),$$

$\hat{}$分别地，对所有 $(i,k) \in (\Delta_{n,N})_0$。

证明。 对于单对象，这是显而易见的。射影表示和内射表示的参数化可直接利用基于箭图$\Delta_{n,N}$ 中路径的公式计算（见 [Schi14，定义 5.3]），其关系来自 $\hat{\mathrm{I}}_{n,N}$，如本节开头所述。 □

$\hat{}$ $\hat{}$**定理 3.6.** 范畴 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,N},\mathrm{I}_{n,N})$ 的整体维数至多为二。

证明。 只需为 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,N},\mathrm{I}_{n,N})$ 中所有 $\hat{}$ $\hat{}$ 单表示构造长度至多为二的投射分解。这些表示记作$S_{i,k}$，由位于顶点 (i,k) 处的一个 $\mathbb{C}$ 副本构成，其他所有向量空间及映射均为零。$S_{i,1}$ 的投射分解形式如下

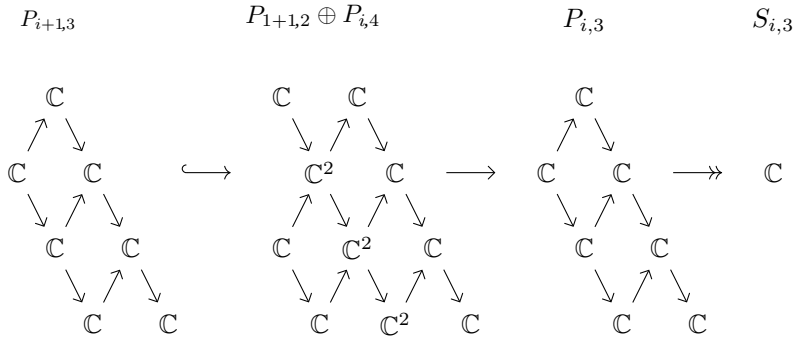
$$0 \to P_{i,2} \to P_{i,1} \to S_{i,1} \to 0$$

以及对于 $S_{i,\ k}$ 结合 $k \geq 2$，这推广为

$$0 \to P_{i+1,k} \to P_{i+1,k-1} \oplus P_{i,k+1} \to P_{i,k} \to S_{i,k} \to 0.$$

□

例 3.7。 对于 $N = 4$ 和 $S_{i,\ 3}$ 我们得到以下投射分解：



引理 3.8. 对于 $M \in$ 表示$\mathbb{C}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$，$\hat{}M$的内射维数和投射维数至多为一，且 $\mathrm{Ext}^1_{\hat{\Delta}_{n,N},\hat{}\mathrm{I}_{n,N}}(\hat{}M, \hat{}M) = 0$。

证明。 只需通过给出射影分解和内射分解，计算所有不可分解表示 $U_i(\ell) \in$ 表示$\mathbb{C}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 的像的投射维数和内射维数，即：

$$0 \to P_{i,\ell+1} \to P_{i,1} \to \hat{U}_i(\ell) \to 0,$$

$$0 \to \hat{U}(j;\ell) \to I_{j,1} \to I_{j-\ell,\ell+1} \to 0$$

其中 $j := i + \ell - 1$，因此 $U(j;1\ell) = U_i(\ell)$。

剩下的工作是证明所有 $\mathrm{Ext}^1_{\hat{\Delta}_{n,N},\hat{}\mathrm{I}_{n,N}}(\hat{}U_i(\ell), \hat{}U_j(\ell'))$均消失。我们将函子 $\mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}_{n,N},\hat{}\mathrm{I}_{n,N}}(\ ,\ \hat{}U_j(\ell'))$作用于上述 $\hat{}\,U_i(\ell)$ 的投射分解，化简涉及射影对象的项，并得到正合列

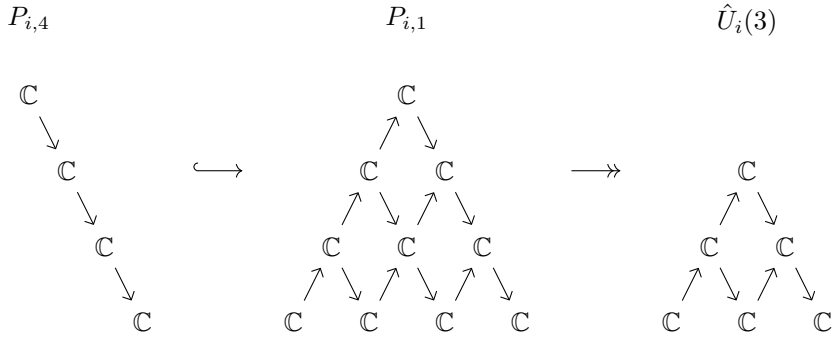
$$0 \to \mathrm{Hom}(\hat{U}_i(\ell), \hat{U}_j(\ell')) \to \hat{U}_j(\ell')^{(i,1)} \xrightarrow{\alpha} \hat{U}_j(\ell')^{(i,\ell+1)} \to \mathrm{Ext}^1(\hat{U}_i(\ell), \hat{U}_j(\ell')) \to 0.$$

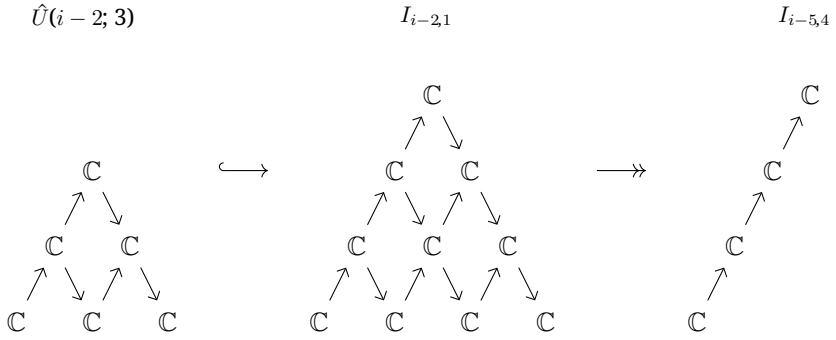
根据 Λ 的定义，映射 α 是典范满射

$$U_j(\ell')^{(i)} \to (U_j(\ell')_{i+\ell-1} \circ \ldots \circ U_j(\ell')_i)(U_j(\ell')^{(i)},$$

从而证明所需的 Ext^1 消失。 □

例 3.9. 对于 $N = 4$，我们得到 $U_i(3) = U(i-2; 3)$ 的以下射影和单射分解：





3.3. **限制函子**。 对于每个 $W \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\hat{\Delta}_{n,N}, \hat{\mathrm{I}}_{n,N})$，我们定义表示 $\mathrm{res}\ W \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 如下：

$$\mathrm{res}\, W := \Big((W^{(i,1)})_{i\in\mathbb{Z}_n}, (W_{\beta_{i,2}} \circ W_{\alpha_{i,1}})_{i\in\mathbb{Z}_n} \Big).$$

这诱导出映射 $\mathrm{res}_{V,W}\colon \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}_{n,N}}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\Delta_n}(\mathrm{res}\ V, \mathrm{res}\ W)$，方法是遗忘态射在顶点 (i,k) 处的分量，其中 $k \geq 2$。因此我们得到一个函子 $\mathrm{res} : \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_{n,N}, \mathrm{I}_{n,N}) \to \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$。由 Λ 和 res 的构造可立即得到以下命题的证明。

命题 3.10. $\mathrm{res} \circ \Lambda(M) = M$对所有 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$均成立。

3.4. **消奇异映射**。 本小节给出消奇异映射的构造，同样紧随 [CFR13]。例子见第 5.3 节。

定义 3.11. $[N]$ 的 Δ_n-表示的一个同构类称为 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 到维数向量$\mathbf{e}$的一般子表示类型，当且仅当分层 $\mathrm{S}_{[N]}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 中是开集。一般子表示类型的集合记为 $\mathrm{gsub}_{\mathbf{e}}(M)$。

注记 3.12. 根据构造，对于某个 $[N] \in \mathrm{gsub}_{\mathbf{e}}(M)$，分层 $\mathrm{S}_{[N]}$ 的闭包是 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 的一个不可约分支，并且所有不可约分支都以这种方式得到。

注记 3.13. 一般而言，$\mathrm{gsub}_{\mathbf{e}}(M)$没有显式描述。但若 M 的不可分解直和项的长度对于 $n, \omega \in \mathbb{N}$均为 ωn，则可应用引理2.10。

例3.14. 设 $n = 3$, $N = 2$，并考虑对应于 $M = U_1(2)^2 \oplus U_2(2)^3 \oplus U_3(2)$ 和 $\mathbf{e} = (1,2,3)$ 的箭图格拉斯曼簇。它有八个子表示同构类，但只有两个不可约分支。即 $\mathrm{S}_{[N_{1,2}]}$，对应于 $N_1 = U_2(2)^2 \oplus U_3(2)$ 和 $N_2 = U_1(2) \oplus U_2(2) \oplus U_3(1)^2$。 N_1 的分层是 7 维的，而 N_2 的分层只有 5 维。

对于 $[N] \in \mathrm{gsub}_{\mathbf{e}}(M)$，我们定义一个映射，将圆柱箭图的箭图格拉斯曼簇映到环箭图的箭图格拉斯曼簇

$$\pi_N : \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) \to \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$$

由 $\pi_N(U) := \mathrm{res}\ U$ 定义，对所有 $U \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M})$ 均成立。

命题 3.15. 对于每个 $[N] \in \mathrm{gsub}_{\mathbf{e}}(M)$ 映射

$$\pi_N : \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) \to \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$$

在$\mathcal{S}_{[N]}$上是单射。

证明。 设 $U \in \mathsf{S}_{[N]} \subseteq \mathsf{Gr_e}(M)$，则**维数** $\hat{}U = $ **维数** $\hat{}N$ 且

$$\pi_N^{-1}(U) = \left\{ V \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) \;:\; V^{(i,1)} = U^{(i)} \text{ for all } i \in \mathbb{Z}_n \right\}.$$

特别地，$\hat{}U$包含于 $\pi_N^{-1}(U) \subset \mathsf{Gr}_{\mathbf{dim}}\hat{}_N(\hat{}M)$中。剩下需要证明$\pi_N^{-1}(U) = \{\hat{}U\}$: 根据 res 和 Λ的构造可知，$\hat{}_U(i,2) \subset V(i,2)$，且对于所有 $V \in \pi_N^{-1}(U)$，$\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\hat{}U^{(i,2)} = \mathsf{dim}_{\mathbb{C}} V(i,2)$成立，因为 U和 N同构。这意味着对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$，$\hat{}U^{(i,2)} = V(i,2)$成立。归纳可得$\hat{}V = U$。□

命题 3.16。 对于每个 $[N] \in \mathrm{gsub_e}(M)$， π_N在 $U \in \mathrm{Gre}(M)$ 上的纤维为

$$\pi_N^{-1}(U) = \mathcal{F}_U := \left\{ F \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) \;\middle|\; \hat{U} \subseteq F \right\} \cong \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N} - \mathbf{dim}\,\hat{U}}\left(\hat{M}/\hat{U}\right).$$

证明。注意到 $\mathsf{dim}\ U = \mathsf{dim}\ N$，因此对所有$i \in \mathbb{Z}_n$，都有 $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\hat{}U^{(i,1)} = \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\hat{}_N(i,1)$，而子空间 $F^{(i,k)}$ 的第一个非平凡选择对应于满足$k \geq 2$的顶点 (i,k)。包含 $\mathsf{F}_U \subseteq \pi_N^{-1}(U)$成立，因为 $\pi_N(F) = U$由 F_U 的定义以及限制函子的构造可直接得出。另一方向的包含关系成立，因为纤维 $\pi_N^{-1}(U)$中的每个点 V 都必须在其向量空间 $V(i,k)$中，包含 $\hat{}U$ 在箭头图 $\hat{}\Delta_{n,N}$的每个顶点 (i,k)处的向量空间，才能映射到 U。F_U 与箭图格拉斯曼簇之间的同构直接由纤维的显式描述得出。□

现在我们可以陈述本文的主要结果了，该结果将在下一个命题之后证明。

定理 3.17。设 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$。映射

$$\pi := \bigsqcup_{[N] \in \mathrm{gsub_e}(M)} \pi_N : \bigsqcup_{[N] \in \mathrm{gsub_e}(M)} \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) \to \mathrm{Gr_e}(M)$$

是$\mathrm{Gre}(M)$的解奇异化。

注记 3.18。 利用命题 3.16，我们可以计算该解奇异化的纤维维数，以考察它是否是小解奇异化，这与 [FF13 第 2] 节的思路一致。对于 [LP23 的例 3.13] 中的箭图格拉斯曼簇 $\mathsf{Gr}_2(M)$，情况确实如此，其中 $Q = \Delta_1$ 且 $M = U_1(2) \oplus S_1^2$。一般而言，环的箭图格拉斯曼簇的解奇异化并非小解奇异化。对于环箭图（即 Δ_1）以及箭图格拉斯曼簇 $\mathsf{Gr}_2(N)$（其中 $N = U_1(2)^2$），这一性质就已不成立。

为证明定理 3.17，我们回顾映射 π_N 的主要性质:

命题 3.19。设 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$和 $[N] \in \mathrm{gsub}(M)$。则:

(i) 簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}N}(\hat{}M)$是光滑的，且其连通分支不可约并具有相同维数。
(ii) 映射 π_N 在$\mathcal{S}^{[N]}$上是一一对应的。(iii) π_N 的像在$\mathrm{Gre}(M)$ 中是闭的，且包含$\mathcal{S}^{[N]}$。(iv) 映射 π_N 是射影的。 ——

证明。 根据定理 3.6 和引理 3.8，我们可以将 [CFR13, 命题 7.1]应用于每个箭图格拉斯曼簇 $\mathsf{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}N}(\hat{}M)$，从而得到 (i) 中所述的性质。命题 3.15 正是 (ii) 部分。其余部分的证明与[CFR13, 定理 7.5] 类似，因为函子 Λ 由命题 3.3 可知是完全忠实的。□

定理 *3.17* 的证明。 由 [CEFR21，命题 37], 可得

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) = \overline{\mathcal{S}_{[\hat{N}]}}$$

ˆ ˆ 因为 M 由引理 3.8 可知是刚性的。结合定理 3.6 和引理 3.8 中关于 $\Delta_{n,N}$-表示的性质，以及命题 3.19 中的映射 π_N 和命题 3.3 中的映射 Λ ，证明的其余部分与 [CFR13，推论 7.7] 相同。□

注记 3.20。特别地， [CEFR21, 命题 37] 证明了[CFR13, 注记 7.8], 中关于任意 Dynkin 箭图的表示 M 下 $\mathbf{Gr_e}(\hat{}M)$ 的不可约性猜想 [CFR13, 推论 7.7]。

下面的结果推广了 [FLP22, 定理 7.10]。

定理 3.21。对于每个 $[N] \in \mathrm{gsub_e}(M)$，箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}N}(\hat{}M)$同构于一个纤维化塔

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{N}}(\hat{M}) = X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_N = \prod_{i\in\mathbb{Z}_n} \mathrm{Gr}_{\hat{n}^{(i,N)}}\left(\mathbb{C}^{\hat{m}^{(i,N)}}\right)$$

其中 $\hat{}\mathbf{n} :=$ **维数** $\hat{}N$，且 $\hat{}\mathbf{m} :=$ **维数** $\hat{}M$，并且对于 $k \in [N-1]$，每个映射 $X_k \to X_k{+}1$ 都是纤维化，其纤维同构于若干普通子空间格拉斯曼簇的乘积。

证明。箭图格拉斯曼簇 $\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M)$ 中的每个点 U都由一组子空间 $U^{(i,k)} \subseteq M_{(i,k)}$参数化，其中 $i \in \mathbb{Z}_n$和 $k \in [N]$。特别地，它是

$$\mathrm{Gr}_{\hat{\mathbf{n}}}\left(\mathbb{C}^{\hat{\mathbf{m}}}\right) := \prod_{i\in\mathbb{Z}_n}\prod_{k\in[N]} \mathrm{Gr}_{\hat{n}^{(i,k)}}\left(\mathbb{C}^{\hat{m}^{(i,k)}}\right).$$

定义 X_k为 $\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M)$ 在簇 $\mathbf{Gr}_{\hat{\mathbf{n}}}(\,\hat{}\mathbf{m})^{(k)}$中的像。该簇的定义与 $\mathbf{Gr}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbb{C}^{\hat{\mathbf{m}}})$类似，唯一的区别是第二个乘积遍历 $\{k, k+1, \ldots, N\}$，而非 $[N]$。因此，$\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M) = X_1$由构造可得。

我们从 $k = N$开始进行递减归纳。子空间格拉斯曼簇的乘积 $\mathbf{Gr}_{\hat{\mathbf{n}}}(\,\hat{}\mathbf{m})^{(N)}$ 中的每个点都可以扩展为 $\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M)$ 中的一个元素，因为箭图格拉斯曼簇中元素的上部向量空间彼此无关。这意味着 $X_N = \mathbf{Gr}_{\hat{\mathbf{n}}}(\,\hat{}\mathbf{m})^{(N)}$，如所需。

现在假设向量空间 $U^{(i,k')}$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$ 和 $k' > k$ 均固定。由于 U 必须包含于箭图格拉斯曼簇中，因此它必须满足这些关系

$$\hat{M}_{\alpha_{i+1,k}} \circ \hat{M}_{\beta_{i,k+1}} U^{(i,k+1)} \subseteq U^{(i+1,k+1)} \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}_n.$$

因此，下一层向量空间 $U^{(i,k)}$ 必须满足

$$\hat{M}_{\beta_{i-1,k+1}} U^{(i-1,k+1)} \subseteq U^{(i,k)} \quad \text{and} \quad \hat{M}_{\alpha_{i,k}} U^{(i,k)} \subseteq U^{(i,k+1)} \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}_n.$$

这等价于在 Grassmann 流形中选取一个点

$$\mathrm{Gr}_{\hat{n}^{(i,k)} - \hat{n}^{(i-1,k+1)}}\left(U^{(i,k)} / \hat{M}_{\beta_{i-1,k+1}} U^{(i-1,k+1)}\right)$$

因为每个映射 $\hat{}M_{\alpha_{i,k}}$ 都是一个投影，会将最后的 $\hat{}m^{(i,k)} - \hat{}m^{(i,k+1)}$ 个坐标 ˆ 映为零，而每个 $M_{\beta_{i,k}}$ 都是一个包含。□

注记 3.22。定理 3.21 中解奇异化的显式描述允许构造 $\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M)$ 的胞腔分解（参见定理 5.5）。特别地，这意味着 $\mathbf{Gr_{dim}}\,\hat{}_N(\,\hat{}M)$ 是光滑的。

4. 环面等变上同调与等变欧拉类

本节简要回顾有关环面对箭图格拉斯曼簇的作用、环面等变上同调及环面等变欧拉类的定义与构造。关于一般理论的更多细节，见 [A98, Br97, GKM98, Go14]。将其应用于箭图格拉斯曼簇的内容见 [LP20, LP23]。在

第 5 节中，我们给出若干例子，并将我们的解奇异化应用于计算等向环的箭图格拉斯曼簇的等变上同调。

4.1. **动量图与环面等变上同调**。 设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的射影代数簇。代数环面 $T \cong (\mathbb{C}^*)^r$ 在 X 上的作用称为**骨架式**的，若 T-不动点的数量以及 X 中一维 T-轨道的数量均有限。若余特征 $\chi \in \mathfrak{X}_*(T)$ 满足 $X^T = X^{\chi(\mathbb{C}^*)}$，则称其对 X 上的 T-作用是**一般的**。用 $\mathfrak{X}^*(T)$ 表示 T 的特征格。 X 的 T-等变有理上同调记为 $H_T^\bullet(X)$。

定义 4.1. 若 T 在 X 上的作用是骨架式的，且 X 的有理上同调在奇数次上消失，则称对 (X,T) 为**GKM 簇**。

注记 4.2。 根据 [Br00，引理 2]，这等价于 [LP20，定义 1.4]。

每个一维 T-轨道 E 的闭包 $\overline{E}$ 都与 $\mathbb{CP}^1$存在 T-等变同构。因此，每个一维 T-轨道都连接 X的两个不同的 T-不动点。

定义 4.3. 设 (X,T) 是一个 GKM 簇，且 $\chi \in \mathfrak{X}_*(T)$ 是一个一般余特征。GKM 簇对应的 **动量图** $\Gamma = \Gamma(X,T,\chi)$ 由以下数据给出：

(MG0) 以 T-不动点为顶点，即：$\Gamma_0 = X^T$；(MG1) 一维 T-轨道 $\overline{E} = E \cup \{x,y\}$ 的闭包作为 Γ_1 中的边，当 $\lim_{\lambda\to 0} \chi(\lambda).p = x$ 时，边的方向从 x 指向 y，其中 $p \in E$；(MG2) 每条 $\overline{E}$ 都标记为 $\alpha_E \in \mathfrak{X}^*(T)$，用于描述 E 上的 T- 作用。

定理 4.4. *(*[GKM98, 定理 1.2。2]*)* 设(X,T) 是一个 *GKM* 簇，其动量图为$\mathcal{G} = \mathcal{G}(X,T,\chi)$，并令 $R := H_T^\bullet(pt)$。那么

$$H_T^\bullet(X) \cong \left\{ (f_x) \in \bigoplus_{x\in\mathcal{G}_0} R \;\middle|\; \begin{array}{c} f_{x_E} - f_{y_E} \in \alpha_E R \\ \text{for any } \overline{E} = E \cup \{x_E, y_E\} \in \mathcal{G}_1 \end{array} \right\}.$$

注记 4.5。 (MG2) 中的特征仅在相差一个符号的意义下唯一。这个符号在定理 4.4 中无关紧要。因此，我们可以固定自己偏好的约定。

4.2. **BB 可滤簇**。 本小节将介绍一类簇，它们的等变上同调可以用显式公式计算。设 X 是一个 $\mathbb{C}^*$-簇。用 $X^{\mathbb{C}^*}$ 表示其不动点集，并以 $X_1, \dots, X_m$ 表示 $X^{\mathbb{C}^*}$ 的连通分支。这诱导出一个分解

$$X = \bigcup_{i\in[m]} W_i, \quad \text{with} \quad W_i := \left\{ x \in X \mid \lim_{z\to 0} z.x \in X_i \right\}, \tag{4.6}$$

其中 W_i 称为 X_i 的吸引集。由于这类分解最早由 Bialynicki-Birula 在 [BB73], 中研究，我们称之为**BB-分解**。

定义 4.7。 若对于所有 $w \in W_i$， W_i 都是有理光滑的，则称 W_i （见 (4.6)）为一个**有理胞腔** 。这又在以下条件成立时成立：

$$H^{2\dim_{\mathbb{C}}(W_i)}(W_i, W_i \setminus \{w\}) \simeq \mathbb{Q} \quad \text{and} \quad H^m(W_i, W_i \setminus \{w\}) = 0$$

对任意 $m \neq 2\dim_{\mathbb{C}}(W_i)$（参见 [Go14，第 292 页，定义 3.4]）。

定义 4.8。射影 T-簇 X 若满足以下条件，则称为 **BB可滤**：
(BB1) 不动点集 X^T 是有限集；(BB2) 存在一般余特征 $\chi\colon \mathbb{C}^* \to T$，即 $X^{\chi(\mathbb{C}^*)} = X^T$，使得相应的 BB-分解由有理胞腔构成。

定理 4.9. （参见 [LP20, 定理 1.15]）设 X 是一个 *BB*可滤射影T簇。则：

(1) X 存在一个由 T-稳定闭子簇组成的滤过 Z_i，使得

$$\emptyset = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{m-1} \subset Z_m = X.$$

(2) 对于所有 $i \in [m]$，每个 $W_i = Z_i \setminus Z_{i-1}$ 都是一个有理胞腔。(3) 当 $i \in [m]$ 时，Z_i 的奇异有理上同调在奇数次上消失。(4) 此外，若 T 对 X 的作用是骨架作用，则每个 Z_i 都是一个 *GKM* 簇。

4.3. 欧拉类与上同调模基。 关于欧拉类的精确定义，请参阅 [A98，第 2.2 节1]。这里我们给出三个性质，它们足以确定本问题中的等变欧拉类。

引理 4.10。（参见 [Br97，推论 15、引理 16、定理 18]）设 Y 是一个T-簇，且 $y \in Y^T$。

(1) 若 Y 在 y 处光滑，则 $\mathrm{Eu}_T(y, Y) = (-1)^{\dim(Y)}\det T_y Y$，其中 $\det T_y Y$ 是 T 在切空间 $T_y Y$ 上作用所对应特征的乘积。(2) 若 Y 在 y 处有理光滑，则 $\mathrm{Eu}_T(y, Y) = z \cdot \det T_y Y$，其中某个 $z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$。(3) 若 $\pi\colon Y \to X$ 是一个 T-等变的奇点消解，且 $|Y^T| < \infty$，则 $\mathrm{Eu}_T(x, X)^{-1} = \sum \mathrm{Eu}_T(y, Y)^{-1}{}_{y \in Y^T, \pi(y) = x}$

注记 4.11。引理 4.10 与 [Br97] 的区别在于，它使用欧拉类，而非等变重数；两者互为倒数，仅相差一个符号。

定义 4.12。（参见 [Go14, 引理 6.7]）设 $X^T = \{x_1, \ldots\ldots, x_m\}$。对于 $i \in [m]$，$f \in H_T^\bullet(X)$ 在 $x_i \in X^T$ 处的局部指标为

$$I_i(f) = \sum_{\substack{j \in [m]\ :\\ x_j \in Z_i}} \frac{f_{x_j}}{\mathrm{Eu}_T(x_j, Z_i)}.$$

下一个定理给出了一个显式公式，用于计算 $H_T^\bullet(X)$ 作为 $H_T^\bullet(pt)$ 上自由模的基。请注意，一切都取决于不动点的次序，而这种次序通常并不唯一。

定理 4.13。（参见 [LP20, 定理 2.12]）设 (X, T) 是一个 *BB*可滤 *GKM* 簇，其滤过为

$$\emptyset = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_m = X$$

如定理 *4.9* 所示。设 $X^T = \{x_1, \ldots\ldots, x_m\}$，其中 $x_i \in W_i = Z_i \setminus Z_{i-1}$。存在一个唯一的基 $\{\theta^{(i)}\}_{i \in [m]}$，使得 $H_T^\bullet(X)$ 作为 $H_T^\bullet(pt)$ 上的自由模时，对任意$i \in [m]$，以下性质均成立：

(1) $\theta^{(i)}_{x_j} = 0$ 对所有 $j < i$,
(2) $\theta^{(i)}_{x_i} = \mathrm{Eu}_T(x_i, Z_i)$, (3)
$I_j(\theta^{(i)}) = 0$ 对所有 $j \neq i$。

注记 4.14。注意，由定义 4.12 可知，(1) 和 (2) 推出 $I_i(\theta^{(i)}) = 1$。

4.4. 循环箭图格拉斯曼簇上的环面作用。 我们简要回顾等向环的箭图格拉斯曼簇上的环面作用（参见 [LP20，第 5] 节）。

注记 4.15。从现在起，我们假设选取了 B 的一组基 M，使得 $Q(M, B)$的连通分支与 M 的不可分解直和项之间存在双射。根据 [Ki16，第1.11]定理，这样的选取总是可能的。

相对于固定基， $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$的一个**分次** 是一个映射 $\mathrm{wt}: B \to \mathbb{Z}^B$。这诱导出 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 的作用:

$$\lambda.b := \lambda^{\mathrm{wt}(b)} \cdot b.$$

注记 4.16。 结合多个权函数 wt_1，……，$\mathrm{wt}_D: B \to \mathbb{Z}^B$，我们可以将 $\lambda = (\lambda_j)_{j\in[D]} \in (\mathbb{C}^*)^D$ 的作用定义为

$$\lambda.b := \prod_{j\in[D]} \lambda_j^{\mathrm{wt}_j(b)} \cdot b = \lambda_1^{\mathrm{wt}_1(b)} \cdot \ldots \cdot \lambda_D^{\mathrm{wt}_D(b)} \cdot b.$$

请注意，只有在分次满足某些附加假设时，这个作用才能扩展到箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr_e}(M)$（参见 [LP20，引理 5.12]）。

定理 4.17. （参见 [LP20，定理 6.6]）设 M 是Δ_n 的一个幂零表示，具有 d 个不可分解直和项，并设 $\mathbf{e} \leq$ **维数** M 满足$\mathrm{Gre}(M)$ 非空。令 $T:=(\mathbb{C}^*)^{d+1}$ 按照 [LP20，引理 5.12] 中的方式作用于 $\mathrm{Gre}(M)$。那么 $(\mathrm{Gre}(M)\ T)$ 是一个射影 *BB* 可过滤 *GKM* 簇。

注记 4.18。 如果定理 3.17 中构造的解奇异化是 T-等变的，那么该定理意味着我们可以利用定理 4.13 计算 Δ_n 的幂零表示的所有箭图格拉斯曼簇的 T-等变上同调。

从现在起，我们假设 $T := (\mathbb{C}^*)^{d+1}$ 按照 [LP20，引理 5.12] 中的方式作用在 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 上。这里， d 是 $Q(M,\ B)$ 的连通分支数，附加参数则来自循环对称性。该作用的权函数由 [LP20，第 5 节.2] 中所使用的公式隐式定义。

5. 环面等变解奇异化及其应用

本节利用上一节的方法，使用定理 3.17 中构造的解奇异化，计算等向环的箭图格拉斯曼簇在奇异点处的欧拉类以及环面等变上同调。剩下的问题是证明这些解奇异化是环面等变的。

5.1. **解奇异化上的环面作用**。设 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 是幂零的，且有 d 个不可分解直和项，并令 $T :=(\mathbb{C}^*)^{d+1}$ 按照 [LP20，引理 5.12] 中的方式作用于 $\mathrm{Gr_e}(M)$。

注记 5.1. 选取 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n, \mathrm{I}_N)$ 的一组基 B，会诱导出 $\hat{}\ M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(\hat{}\Delta_{n,N}, \hat{}\mathrm{I}_{n,N})$ 的一组基 $\hat{}B$，使得 $Q(\hat{}M, \hat{}B)$ 的连通分支与 M 的不可分解直和项的像一一对应。特别地，$\hat{}\Delta_{n,N}$ 在顶点 (i,k) 上的基 $\hat{}B^{(i,k)}$ 是基 $B^{(i+k-1)}$ 的一个子集，其基数为 $m_{i+k-1} - c$，其中 c 是映射 $M_{\alpha_{i+k-2}} \circ \cdots \circ M_{\alpha_i}$ 的余秩（若 $k \geq 2$ 且 $\hat{}B^{(i,k)} = B^{(i)}$ 对于 $k = 1$）。这使我们能够通过按照上述基 $\hat{}$ 的包含关系扩展权函数，将 T-作用扩展到 M 的向量空间 $\hat{}$ 上。换言之， B 中所有在 B 中具有相同像的基向量都赋予相同的权。

$\hat{}$**命题 5.2.** 如注记 *5.1* 中所定义， T 对 M 的向量空间的作用可扩展至每个箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr_k}(\hat{}M)$。

证明。 我们需要证明 T 的作用与箭图表示 M 的映射相容。根据作用和表示 M 的构造，这显然可由 T 对 M 的向量空间的作用与 M 的映射相容这一事实推出，参见 [LP20，引理 5.12]。□

引理 5.3. 定理 *3.17* 的解奇异化是 T-等变的。

证明. 结合命题 5.2，根据注记 5.1 中分次的构造以及定理 3.17 中对解奇异化的描述，该结论立即成立。□

注记 5.4。 解奇异化的 T-等变性使我们能够使用 [LP20, 引理 2.1.(3)] ，计算 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 奇异点处的等变欧拉类。这使我们能够将 [LP20, 定理 2.12] 关于构造 T-等变上同调的基的结果，应用于环的幂零表示所对应的所有箭图格拉斯曼簇。

5.2. **解奇异化的胞腔分解**。

定理 5.5。 对于 $[N] \in \mathrm{gsub_e}(M)$，$\mathrm{Gr}_{\underline{\mathbf{dim}}\,\hat{}_N}(\hat{}M)$ 的 T-不动点恰好是 π_N 下 $\mathcal{S}_{[N]} \subset \mathrm{Gr_e}(M)$ 的 T-不动点的原像。这些点的 $\mathbb{C}^*$-吸引集为 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}_N}(\hat{}M)$提供了一个胞腔分解。

证明。 引理 5.3 中的 T-等变性给出了不动点的所需描述。现在我们证明，BB-分解中这些不动点的 $\mathbb{C}^*$-吸引集是胞腔。根据 [Ca02，引理 4.12]，，它们给出了一个 α-分划，即存在不动点 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}_N}(\hat{}M)^{\mathbb{C}^*} = \{p_1, \ldots, p_r\}$的一个全序，使得对于所有 $s \in [r]$，$\bigsqcup_{j=1}^{s} W_i$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}_N}(\hat{}M)$ 中是闭的。剩下的工作是证明它们同构于仿射空间。这是由 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 的胞腔分解以及解奇异化的 T-等变性诱导出的:

设 $p \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}_N}(\hat{}M)$ 是一个 T-不动点。顶点 (i,k) 上的向量空间 $p^{(i,k)}$ 是 $\hat{}\Delta_{n,N}$ 的 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_{\hat{n}^{(i,k)}}\left(\mathbb{C}^{\hat{}m^{(i,k)}}\right)$ 中的一个点。按照 $\mathbb{C}^*$-作用的构造（如注记 5.1 中所述），$p^{(i,k)}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\hat{n}^{(i,k)}}\left(\mathbb{C}^{\hat{}m^{(i,k)}}\right)$ 中的吸引集是一个胞腔。p在整个箭图格拉斯曼簇 $\hat{}$ 中的吸引集，是沿着 M的映射对这些胞腔取交。我们对k进行归纳。对于 $k=1$，无需证明，因为向量空间之间没有映射。如果 $k=2$，则我们有表示 M 的原始向量空间以及其中额外的一层子空间。吸引集中的坐标之间的关系与 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 中的相同。因此，根据 [LP20，定理 5.7]，它们是胞腔。$\hat{}M$ 沿着 $\hat{}\Delta_{n,N}$ 的箭 $\beta_{i,k}$ 的映射是包含映射，而沿着 $\alpha_{i,k}$ 的映射是投影，其中最后 $m^{(i,k)} - m^{(i,k+1)}$ 个坐标被置零（参见 [LP20，命题 4.8]）。因此，对于每个 $k \in [N]$，相交关系均具有 [LP20，定理 5.7]中所描述的形式。这就得到了与仿射空间的所需同构。□

注记 5.6。 在

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_n} U_i(\omega n) \quad \text{and} \quad \mathbf{e} = (\omega k, \ldots, \omega k) \in \mathbb{Z}^n$$

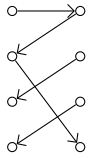
此情形下，可以加强关于解奇异化的结果（参见 [FLP23, § 2.5 & 2.6]）。具体而言，$\mathrm{Gr_e}(M)$具有$\binom{n}{k}$ 明确描述的不可约分支（见例2.12），而 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}_N}(\hat{}M)$ 的胞腔则是相应T-不动点的层。

5.3. **例子**。 现在，我们为前几节中的构造给出一个具体例子。设 $M := U_1(4) \oplus U_2(2) \oplus U_2(2)$ 是一个 Δ_2-表示，并固定维数向量 $\mathbf{e} = (2,2)$。箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 有五个层（即子表示的同构类），其代表元为:

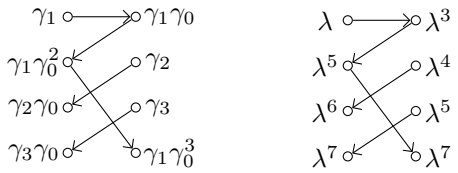
$$V_1 := U_1(4), \quad V_2 := S_2 \oplus U_1(3), \quad V_3 := U_2(2) \oplus U_2(2),$$
$$V_4 := U_1(2) \oplus U_2(2), \quad V_5 := S_1 \oplus S_2 \oplus U_2(2).$$

V_2 对应的层是三维的， V_1、 V_3 和 V_4 对应的层是二维的，而 V_5 对应的层是一维的。这是根据[Pue22，命题4.4] 以及 [CFR12，引理 2.4]计算得出的。

设 B 的基 M 是 M中每个不可分解直和项的标准基的并集。那么，其系数箭图为

$$Q(M,B) =$$ 

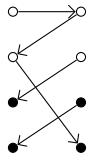
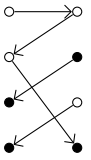
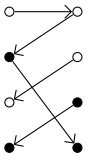
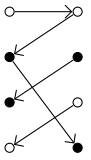
其中，从左向右的箭以 $\alpha\colon 1 \to 2$ 作为 Δ_2中的底层箭头。从右向左的箭以 $\beta : 2 \to 1$ 作为底层箭头。我们定义 $\gamma := (\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) \in T := (\mathbb{C}^*)^{3+1}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 在 B 上的作用如下：

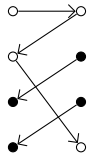
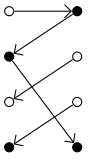
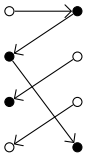
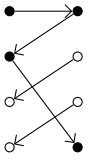


根据 [LP20，引理 5.12]，这些作用可线性延拓至 M 的向量空间，并延拓至整个箭图格拉斯曼簇。此外

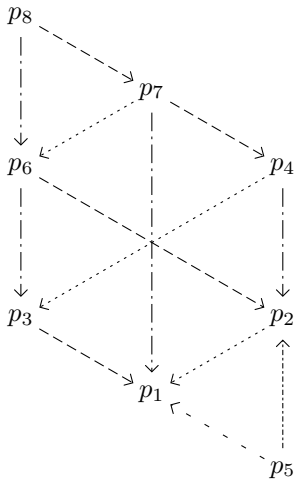
$$\chi : \mathbb{C}^* \to T; \quad \lambda \mapsto (\lambda^2, \lambda, \lambda, \lambda)$$

根据 [LP20，定理 5.14]，这是一个一般余特征。我们应用 [CI11，定理 1] 来计算这两个作用的不动点：

$p_1 =$  $p_2 =$  $p_3 =$  $p_4 =$ 

$p_5 =$  $p_6 =$  $p_7 =$  $p_8 =$ 

这里，黑色顶点表示 M 的相应子表示。 p_1 和 p_2、 p_3 和 p_4，以及 p_6 和 p_7 ，各自作为 M 的子表示彼此同构。根据 [Pue22 定理 4.13]，不动点的吸引集是胞腔。其维数等于下方动量图中向外的箭的数量，该图根据 [LP20 定理 6.15] 计算得出。



带有标签：

$\cdots\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_3-\epsilon_2$

$--\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_2-\epsilon_1-\delta$

$—\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_3-\epsilon_1-\delta$

$\cdots\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_1-\epsilon_3+3\delta$

$-\ -\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_1-\epsilon_2+3\delta$

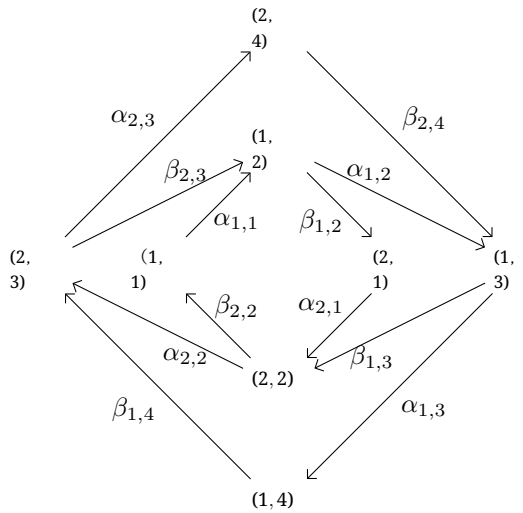
这些标签表示为特征的线性组合

$$\epsilon_i : T \to \mathbb{C}^*; \quad (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_d) \mapsto \gamma_i \quad \text{for } i \in [d],$$
$$\delta : T \to \mathbb{C}^*; \quad (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_d) \mapsto \gamma_0.$$

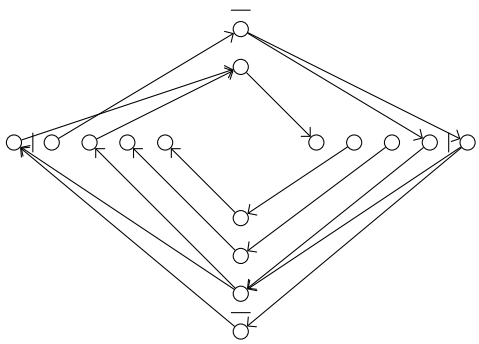
此处使用虚线突出标记的对称性，并避免在图中写出标签。

有四个点并非有理光滑。具体而言， p_1、 p_2、 p_6 和 p_7 处的切空间均为四维，而 $\mathrm{Gr_e}(M)$ 本身是三维的。我们可以从图中读出这一点：与一个点相邻的边数就是其切空间的维数，而出边数就是胞腔维数。不可约分支是取点 p_8、 p_7 和 p_5对应层的闭包得到的，因为这些层不包含在任何其他层的闭包中。它们是 M关于维数向量$\mathbf{e}=(2,2)$的一般子表示类型。因此，$\mathrm{Gr_e}(M)$的解奇异化由三个分支构成。

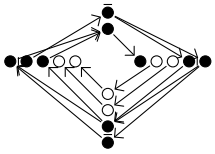
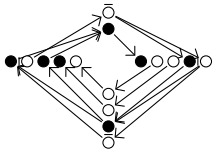
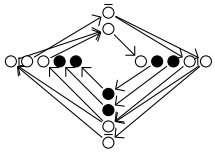
ˆ 扩展箭图 $\Delta_{2,4}$ 是



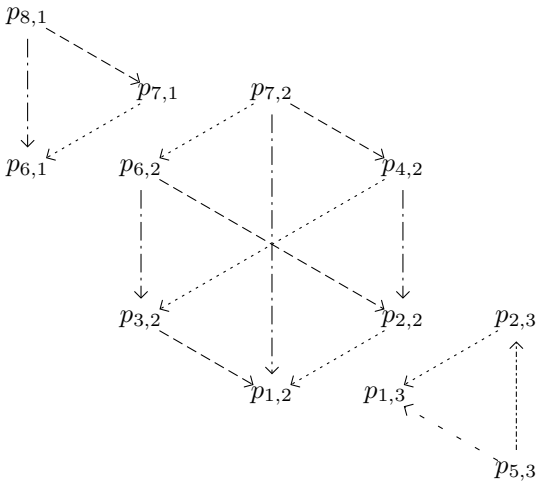
ˆ 对于由 M 的基 B 所诱导的基， M 的系数箭图为



这里，顶点之间的分隔线表示该位置上的顶点属于 $\Delta_{2,4}$ 的内部顶点还是 $\hat{}$ 外部顶点。一般子表示类型的扩展表示的代表元为

$\hat{V}_1 =$  $\hat{V}_2 =$  $\hat{V}_3 =$ 

根据定理 5.5 对箭图 Grassmannian $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}V_1}(\hat{}M)$、$\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}V_2}(\hat{}M)$ 和 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}V_3}(\hat{}M)$ 的胞腔分解的显式描述，可以直接计算出它们的动量图为



其标签为：

$\cdots\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_3 - \epsilon_2$

$-\!-\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_2 - \epsilon_1 - \delta$

$-\cdot\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_3 - \epsilon_1 - \delta$

$\cdots\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_1 - \epsilon_3 + 3\delta$

$\text{- -}\!\rightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_1 - \epsilon_2 + 3\delta$

这里，$\hat{}p_{i,j}$ 是 p_i 在 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{}V_j}(\hat{}M)$ 中的原像。此外，根据胞腔分解，我们得到以下同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{V}_1}(\hat{M}) &\cong \mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^3),\\
\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{V}_2}(\hat{M}) &\cong \mathcal{F}l(\mathrm{SL}_3),\\
\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\,\hat{V}_3}(\hat{M}) &\cong \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3).
\end{aligned}$$

利用上述解奇异化的动量图，可以根据引理 4.10 计算 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 的奇异点处的欧拉类。例如，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eu}_T(p_1, Z_5) &= \frac{1}{(\epsilon_3-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1-\delta)} + \frac{1}{(\epsilon_3-\epsilon_2)(\epsilon_1-\epsilon_2+3\delta)}\\
&= \frac{2\delta}{(\epsilon_3-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1-\delta)(\epsilon_1-\epsilon_2+3\delta)}
\end{aligned}$$

其中 $Z_5 = \cup_{i=1}^{5} W_i$。

我们计算出 $H_T^\bullet(\mathrm{Gr}_e(M))$ 的如下基，它是 $H_T^\bullet(pt)$ 上的自由模：

$$\varphi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1,1,1)$$
$$\varphi^{(2)} = (0, \epsilon_3-\epsilon_2, 0, \epsilon_3-\epsilon_2, \epsilon_1-\epsilon_2+3\delta, \epsilon_3-\epsilon_1-\delta, \epsilon_3-\epsilon_1-\delta, \epsilon_3-\epsilon_1-\delta)$$
$$\varphi^{(3)} = (0,0,\epsilon_2-\epsilon_1-\delta, \epsilon_3-\epsilon_1-\delta, 0, \epsilon_2-\epsilon_1-\delta, \epsilon_3-\epsilon_2, \epsilon_3-\epsilon_1-\delta)$$
$$\varphi^{(4)} = (\epsilon_3-\epsilon_2)(\epsilon_3-\epsilon_1-\delta)\cdot(0,0,0,1,0,0,1,0)$$
$$\varphi^{(5)} = (\epsilon_1-\epsilon_2+3\delta)(\epsilon_1-\epsilon_3+3\delta)\cdot(0,0,0,0,1,0,0,0)$$
$$\varphi^{(6)} = (\epsilon_2-\epsilon_1-\delta)(\epsilon_3-\epsilon_1-\delta)\cdot(0,0,0,0,0,1,1,0)$$
$$\varphi^{(7)} = (\epsilon_3-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1-\delta)(\epsilon_3-\epsilon_1-\delta)\cdot(0,0,0,0,0,0,1,0)$$
$$\varphi^{(8)} = (\epsilon_2-\epsilon_1-\delta)(\epsilon_3-\epsilon_1-\delta)\cdot(0,0,0,0,0,0,0,1)$$

注意，在这个例子中，p_8 的特殊作用使我们能够生成更多的零项，这与定理 4.13 的一般情形相同。

参考文献

[A98] A. Arabia, 《等变欧拉类与有理光滑点》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）, 48（1998）, 第3期, 861–912。[BB73] A. Bialynicki-Birula, 《关于代数群作用的一些定理》, 《数学年刊》第二辑, 98（1973）, 第3期, 480–497。[Br97] M. Brion, 《等变上同调与等变交叉理论》, 蒙特利尔夏季学校“表示论与代数几何”讲义, 1997年。49页。[Br00] M. Brion, 《庞加莱对偶与等变（余）同调》, 《密歇根数学杂志》, 48（2000）, 77–92。[CC06] P. Caldero、F. Chapoton, 《簇代数作为箭图表示的霍尔代数》, 《赫尔维蒂数学评论》, 81：595–616, 2006。[Ca02] J. B. Carrell, 《环面作用与上同调》, 载于：《代数商。环面作用与上同调。伴随表示与伴随作用》。数学科学百科全书（不变量理论与代数变换群）, 第131卷。施普林格，柏林、海德堡，2002，83–158。[CI11] G. Cerulli Irelli, 《与弦模相关的箭图格拉斯曼簇》, 《代数组合学杂志》, 第33卷（2011）, 259–276。[CEFR21] G. Cerulli Irelli、F. Esposito、H. Franzen、M. Reineke, 《箭图格拉斯曼簇的胞腔分解与上同调的代数性》, 《数学进展》, 第379卷（2021）, 论文编号107544。[CFFFR17] G. Cerulli Irelli、X. Fang、E. Feigin、G. Fourier、M. Reineke, 《旗簇的线性退化》, 《数学杂志》, 第287卷（2017）, 第1期, 615–654。[CFR12] G. Cerulli Irelli、E. Feigin、M. Reineke, 《箭图格拉斯曼簇与退化旗簇》, 《代数与数论》, 第6卷（2012）, 第1期, 165–194。[CFR13] G. Cerulli Irelli、E. Feigin、M. Reineke, 《Dynkin 箭图的箭图格拉斯曼簇的解奇异化》, 《数学进展》, 245（2013）, 182–207。[FF13] E. Feigin、M. Finkelberg, 《A 型退化旗簇：Frobenius 分裂与 Borel–Weil 定理》, 《数学杂志》275（2013）, 第1–2期, 55–77。[FLP22] E. Feigin、M. Lanini、A. P¨utz, 《全非负格拉斯曼簇、格拉斯曼项链与箭图格拉斯曼簇》, 《加拿大数学杂志》（2022）。https://doi.org/10.4153/S0008414X22000232。[FLP23] E. Feigin、M. Lanini、A. Putz, 《广义抛接模式、箭图格拉斯曼簇与仿射旗簇》, http://arxiv.org/abs/2302.00304。[FFR17] E. Feigin、M. Finkelberg、M. Reineke, 《退化仿射格拉斯曼簇与环箭图》, 《京都数学杂志》, 第57卷（2017）, 第2期, 445–474。[Go14] R. Gonzales, 《有理光滑性、胞腔分解与 GKM 理论》, 《几何与拓扑》, 18（2014）, 291–326。[GKM98] M. Goresky、R. Kottwitz、R. MacPherson, 《等变上同调、Koszul 对偶与局部化定理》, 《发明数学》, 131（1998）, 25–83。[Ki16] A. Kirillov Jr., 《箭图表示与箭图簇》, 研究生数学丛书, 第174卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 2016。

[LP20] M. Lanini、A. P¨utz，环面作用下循环箭图格拉斯曼簇的 *GKM* 理论，http://arxiv.org/abs/2008.13138。[LP23] M. Lanini、A. P¨utz，通过 *GKM* 理论研究等向环箭图的箭图格拉斯曼簇上的置换作用，《代数组合学杂志》（2023）。https://doi.org/10.1007/s10801-022-01211-5
[22] ¨Pue A.Putz，退化仿射旗簇与箭图格拉斯曼簇，代数表示论，**25** 2022 91 119 https://doi.org/10.1007/s10468-020-10012-y ( )，–。[14] Schi R. Schiffler，箭图表示，CMS数学丛书，施普林格出版社，Cham，瑞士，2014。[Scho92] A. Schofield，箭图的一般表示，伦敦数学会会刊，第**65** 卷（1992），第1期，46–64。