arXiv:2302.05389v1 [math.FA] 10 Feb 2023

论抽象谱常数

Felix L. Schwenninger 和 Jens de Vries

摘要。我们通过引入极值函数和向量，证明了对一类在谱集研究中出现的含幺同态的界。这些结果以统一的方式重现了 Crouzeix–Palencia、Okubo–Ando 和冯·诺依曼关于谱常数的三个著名结果，并改进了 Crouzeix–Greenbaum 最近的一个结果。

1. 引言

设 M 是复希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，且 W 是 $\mathbb{C}$ 的有界子集。形如

$$\|p(M)\| \leq \kappa \sup_{z\in W} |p(z)|, \tag{1}$$

对某个正数常数 κ 及所有复多项式 p，这类估计是经典结果，例如冯·诺依曼不等式或 Crouzeix 猜想中便出现了此类估计。这样的 W 称为关于 M 的 κ-谱集[1]，而 κ 则称为关于 M 的谱常数。本文提出一种抽象框架，以相当直接的方式推导谱常数。特别是，这种方法能够统一证明这一领域的若干著名结果。

更确切地说，我们研究含幺有界同态的范数

$$\gamma\colon A \to \mathscr{L}(H),$$

其中 A 是某个紧豪斯多夫空间 K 上的含幺一致代数——也就是说，它是连续复值函数 $C(K)$ 的一个闭含幺子代数；而 $\mathscr{L}(H)$ 表示 H 上有界线性算子的空间。我们研究这类映射的范数，源于全纯函数泛函演算中出现的谱常数。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个边界光滑的有界开子集。若用 $A(\Omega)$ 表示所有连续函数组成的空间

第二位署名作者获得了荷兰研究理事会（NWO）项目 OCENW.M20.292 的资助。[1]在文献中，κ-谱集通常定义为：要求对所有极点位于 W^- 之外且满足 M 的谱包含于 W的有理函数 p，条件 (1) 均成立。不过，对于我们所考虑的应用，研究多项式就足够了。

这些函数从闭包 Ω^- 映到 $\mathbb{C}$，并且在 Ω 上全纯；那么，根据最大模原理，$A(\Omega)$ 可以视为一个在边界 Ω^∂ 上作用的含幺一致代数。假设 M 是 H 上的有界线性算子，且其谱包含于 Ω 中。后一个条件保证，对于每个 $f \in A(\Omega)$，积分

$$\gamma(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega^\partial} f(\sigma)(\sigma - M)^{-1} \, \mathrm{d}\sigma$$

是良定义的。在本文余下部分，我们将线性映射$\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$称为 M 在 Ω 上的（Dunford–Riesz）泛函演算。众所周知，γ 是一个含幺有界同态，并且对于多项式 p，有 $\gamma(p) = p(M)$，例如参见 [DS58]，，其中 p 按显然的方式视为 Ω 上的函数。显然，γ 的范数上界给出了 M的谱常数。顺便指出，上述同态实际上可延拓至 Ω 上全纯函数构成的代数，该代数赋有紧集上一致收敛拓扑，例如参见 [Haa18]。

现在回到一般情形。注意，我们总有下界 $\|\gamma\| \geq 1$，因为 $\gamma(1) = 1$。为求得 γ 范数的上界，我们首先假设 γ 的范数能够取到。更确切地说，若一对$(f_0, x_0) \in A \times H$ 满足 $\|f_0\|_K = 1$ 和$\|x_0\| = 1$，则称其为 γ 的极值对，当且仅当 $\|\gamma\| = \|\gamma(f_0)x_0\|$。极值对的存在似乎可能是一项限制，但例如，对于 Ω 为凸集时有限维空间 H 上的泛函演算 γ，其存在性有定理保证，见 [Cro04，定理 2。1] 这通常足以为一般的 H找到谱常数。极值对(f_0, x_0)的主要优点在于，它们可将算子范数 $\|\gamma\|$ 转化为希尔伯特空间范数 $\|\gamma(f_0)x_0\|$；这是一个很有用的工具，我们将充分加以利用。此外，我们还使用近期引入的、与极值对相关联的极值测度，见 [BGG+20]。需要强调的是，我们只要求极值对存在，并不假设明确知道(f_0, x_0)，因为那样便可直接得到 γ 的范数。

我们的研究基于利用函数演算的围道积分表示推导谱常数的技术。这些技术是在过去几十年间发展起来的，其中包括 Delyon–Delyon 的重要论文 [DD99]，，以及 Crouzeix 的著名成果：任意有界线性算子的数值域都是一个 11.08- 谱集，参见 [Cro04] 和 [Cro07]。与此同时，Putinar–Sandberg [PS05] 也研究了算子值双层位势的性质；在上述文献中，这一性质对于推导相关“对称化函数演算”的范数界至关重要[2]

$$f \mapsto \gamma(f) + \gamma(\Phi(f))^*, \tag{2}$$

其中 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$ 指一种适当的反线性变换。另见关于有限维扩张的近期工作 [HL21，定理 1.6]。Crouzeix–Palencia 对 Crouzeix 定理作出的较新改进

[2]然而，这种映射一般不具乘法性。

[CP17], 另见 [RS18], 利用了双层位势以及特定 Φ 的更多性质，从而得到数值域甚至是一个 $(1+\sqrt{2})$-谱集。正如 [RS18], 所示，他们的证明技巧无法得到更好的常数，这意味着要想证明 Crouzeix 猜想（即数值域是一个 2-谱集），就必须利用该问题更多的结构。

在附加假设下，界 $1+\sqrt{2}$确实可以降低。事实上，如果 Ω 是一个包含数值域的圆盘，那么通过稍微偏离 Crouzeix–Palencia证明，转而利用极值对的性质，可以证明最优谱常数为 2，参见 [CGL18]。不过，这一结果要古老得多，其根源可追溯至 Okubo–Ando 和膨胀理论，参见 [OA75]。然而，能够使用这类围道积分方法证明紧谱常数，似乎相当引人注目。另一个例子是 Delyon–Delyon 对冯·诺依曼不等式的论证 [DD99], 另见[CG19，第 4]节。

我们当前工作的一个发现是，所有上述结果确实都可以直接由一个抽象定理推出。借此，我们希望清晰地梳理围绕该猜想的现有结果之间的联系。当然，这并非首次尝试以抽象的方式研究 Crouzeix 猜想的相关方法。在 [RS18] 和 [COR20] 中，研究者运用抽象框架讨论了 Crouzeix–Palencia 所用证明要素的局限性，以及可能克服这些局限的方法。另一方面，冯·诺依曼不等式与数值域相关命题之间的联系也早已得到研究，参见 [OA75] 和 [PPW20]。

最后，我们指出，谱常数自然会出现在数值线性代数中，因为它们可用于界定克雷洛夫子空间近似方法（如 GMRES算法）中出现的残差，参见例如[CG19，第 7 节1]。

2. 主要结果

首先，我们讨论极值对的一些性质。在 [CGL18，定理 51]中，针对与泛函演算相关的 γ，证明了以下命题。我们对他们的论证稍作调整，从而证明该结果对一般的 γ也成立。

命题 1. 设 A 是作用于紧豪斯多夫空间 K上的含幺一致代数， H 是希尔伯特空间，且 $\gamma\colon\ A \to \mathscr{L}(H)$是一个有界含幺同态。若（$f_0$， x_0）是关于 γ的极值对，则（$\|\gamma\|^2-1$）$\langle\gamma(f_0)x_0,\ x_0\rangle = 0$。特别地，若 $\|\gamma\|>1$，则 $\langle\gamma(f_0)x_0,\ x_0\rangle = 0$。

证明。固定 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $|\lambda|=1$ $\lambda^*\langle\gamma(f_0)x_0,x_0\rangle = |\langle\gamma(f_0)x_0,x_0\rangle|$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们定义

$$a_n := \frac{\lambda}{2n}, \qquad g_n := \frac{f_0 - a_n}{1 - a_n^* f_0}.$$

由于 $\|g_n\|_K \leq 1$，可得

$$\begin{aligned}\|(\gamma(f_0) - a_n)x_0\| &= \|(\gamma(f_0) - a_n)(1 - a_n^*\gamma(f_0))^{-1}(1 - a_n^*\gamma(f_0))x_0\| \\ &= \|\gamma(g_n)(1 - a_n^*\gamma(f_0))x_0\| \\ &\leq \|\gamma\|\|(1 - a_n^*\gamma(f_0))x_0\|.\end{aligned}$$

将两边平方，并利用 (f_0, x_0) 是 γ 的极值情形，可得

$$\|\gamma\|^2 - \frac{|\langle\gamma(f_0)x_0, x_0\rangle|}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq \|\gamma\|^2\left(1 - \frac{|\langle\gamma(f_0)x_0, x_0\rangle|}{n} + \frac{\|\gamma\|^2}{4n^2}\right)$$

因此，整理后可得

$$(\|\gamma\|^2 - 1)|\langle\gamma(f_0)x_0, x_0\rangle| \leq \frac{\|\gamma\|^4 - 1}{4n}.$$

由于最后一个不等式对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，所需结果随即得出。 ■

在证明下面的命题时，我们将用到以下初等事实。

引理 2. 设 M 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子。若 x_0 是 H 中的单位向量，且 M 在该向量处达到其范数，即 $\|M\| = \|Mx_0\|$，则 $M^*Mx_0 = \|M\|^2x_0$。

证明。容易验证

$$\|M^*Mx_0 - \|M\|^2x_0\|^2 = \|M^*Mx_0\|^2 - \|M\|^4 \leq 0$$

由此完成证明。 ■

下一个命题见于 [BGG+20，定理 4.5]，适用于函数演算 γ。借助 [Pau02]，一书中的初等算子理论，我们给出一个新的证明，该证明也适用于一般情形 γ。

命题 3。设 A 是一个作用于紧豪斯多夫空间 K 上的含幺一致代数，H 是一个希尔伯特空间，且 $\gamma\colon A \to \mathscr{L}(H)$ 是一个含幺有界同态。若 (f_0, x_0) 对于 γ 是极端的，则存在一个拉东测度 μ，定义在 K 上，使得

$$\langle\gamma(f)x_0, x_0\rangle = \int_K f(z)\ \mathrm{d}_\mu z \tag{3}$$

对所有 $f \in A$ 均成立。此外，μ 是一个概率测度。

证明。考虑泛函 $\omega\colon A \to \mathbb{C}$，定义为 $\omega(f) := \langle\gamma(f)x_0, x_0\rangle$ 对于 $f \in A$。注意到 $\omega(1) = 1$。我们断言 ω 是压缩的。取 $f \in A$ 满足 $\|f\|_K \leq 1$。由于 $\|f_0 f\|_K \leq 1$ 且 (f_0, x_0) 是 γ 的极值对，根据引理 2，

$$\begin{aligned}\|\gamma(f_0)\|^2|\omega(f)| &= |\langle\gamma(f)x_0, \|\gamma(f_0)\|^2x_0\rangle| \\ &= |\langle\gamma(f)x_0, \gamma(f_0)^*\gamma(f_0)x_0\rangle| \\ &= |\langle\gamma(f_0 f)x_0, \gamma(f_0)x_0\rangle| \\ &\leq \|\gamma(f_0)\|^2\end{aligned}$$

因此 $|\omega(f)| \leq 1$，如所求。根据 [Pau02，命题 2.12]，泛函 $\hat{}\omega$: $A + A^* \to \mathbb{C}$ 定义为 $\hat{}\omega(f + g^*) := \omega(f) + \omega(g)^*$ 对所有 $f, g \in A$ 均有定义，且是 ω 到 C*-代数 $C(K)$ 的算子子系统 $A + A^*$ 上的唯一正扩张。根据哈恩–巴拿赫论证（另见[Pau02，习题 2.10]，），我们可以将 $\hat{}\omega$ 扩张为 $C(K)$ 上的正泛函，仍记为 $\hat{}\omega$。因此存在唯一的拉东测度 μ，定义在 K上，使得

$$\hat{\omega}(h) = \int_K h(z) \, \mathrm{d}_\mu z$$

对所有 $h \in C(K)$。特别是，

$$\mu(K) = \int_K 1 \, \mathrm{d}_\mu z = \hat{\omega}(1) = \omega(1) = 1,$$

这表明 μ 是一个概率测度。 ■

满足 (3) 的 K 上的拉东测度 μ 称为极值对 (f_0, x_0) 的极值测度。任何这样的 μ 都通过以下关系与 f_0 相联系：

$$(\|\gamma\|^2 - 1) \int_K f_0(z) \, \mathrm{d}_\mu z = 0,$$

这直接由命题 1 得出。特别是，若 $\|\gamma\| > 1$，则 f_0 与 1 在希尔伯特空间 $L^2(K, \mu)$ 中相互正交。

注 4. 命题 3 的证明告诉我们，若 A 是狄利克雷的，也就是说，若 $A + A^*$ 在 $C(K)$ 中稠密，则 (f_0, x_0) 的极值测度 μ 是唯一的。 [GG71] 的作者精确确定了确保 $A(\Omega)$ 是狄利克雷的 Ω 上的拓扑条件。

对于任意有界反线性映射 $\Phi\colon\ A \to A$，我们通过以下公式定义有界线性映射 $\gamma_\Phi\colon\ A \to \mathscr{L}(H)$

$$\gamma_\Phi(f) := \gamma(f) + \gamma(\Phi(f))^*$$

对所有 $f \in A$均成立。此外，我们用 A' 表示 A的对偶空间。我们将 A' 自然嵌入从 A 到 $\mathscr{L}(H)$的有界线性映射所构成的巴拿赫空间中。

现在我们可以开始讨论主要定理。

定理 5. 设 A 是作用于紧豪斯多夫空间 K 上的含幺一致代数，H 是希尔伯特空间，$\gamma\colon\ A \to \mathscr{L}(H)$ 是含幺有界同态，且 $\Phi\colon\ A \to A$ 是有界反线性映射。若 $\|\gamma\| > 1$ 且 (f_0, x_0) 对 γ 是极值的，则

$$\|\gamma\| \leq \left(\frac{1}{2} \inf_{\omega \in A'} \|\gamma_\Phi - \omega\|\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \inf_{\omega \in A'} \|\gamma_\Phi - \omega\|\right)^2 + |\langle \gamma(\Phi(f_0) f_0) x_0, x_0 \rangle|}.$$

证明. 由命题 1 可知 $\langle \gamma(f_0)x_0, x_0\rangle = 0$，因此

$$\begin{aligned}\|\gamma\|^2 &= \|\gamma(f_0)x_0\|^2\\ &= |\langle \gamma(f_0)x_0, \gamma(f_0)x_0\rangle|\\ &\le |\langle \gamma(f_0)x_0, (\gamma_\Phi(f_0) - \omega(f_0))x_0\rangle| + |\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle|\\ &\qquad + |\omega(f_0)||\langle \gamma(f_0)x_0, x_0\rangle|\\ &\le \|\gamma\|\|\gamma_\Phi - \omega\| + |\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle|\end{aligned}$$

对所有 $\omega \in A'$ 均成立。由此得证所需的不等式。 ■

注 6。根据定义，定理 5 中出现的下确界是从 γ_Φ 到 A' 的最短距离，其中这两个对象位于从 A 到 $\mathscr{L}(H)$ 的有界线性映射所构成的巴拿赫空间中。此外，对于每个 $\omega \in A'$，映射 $\gamma_\Phi - \omega$ 是 γ_Φ 的秩一扰动。

以下例子取自 [RS18]，其中该例用于证明：$\kappa := 1 + \sqrt{2}$ 是泛函演算 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 的算子范数的精确的绝对上界；这里存在一个压缩反线性映射 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$，使得 $\|\gamma_\Phi\| \le 2$。

除了 [RS18]，中给出的极值函数 f_0 外，我们还给出了一个极值向量 x_0，以及与之对应的极值测度 μ 的表达式。该例还表明，定理 5 中的估计无法改进。

例 7。对于 $j = 0, 1$，令 Ω_j 为 $\mathbb{C}$ 中以 j 为中心、半径为 $1/4$ 的开圆盘。考虑集合 $\Omega := \Omega_0 \cup \Omega_1$ 和矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ 是 M 在 Ω 上的函数演算，则很容易验证

$$\gamma(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(1) - f(0) \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

对于所有 $f \in A(\Omega)$ 都成立。不难看出，由下式定义的数对 (f_0, x_0)

$$f_0(z) := \begin{cases} -1 & z \in \Omega_0^- \\ +1 & z \in \Omega_1^- \end{cases}, \qquad x_0 := \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})^{1/2}/2 \\ (2+\sqrt{2})^{1/2}/2 \end{pmatrix}$$

是 γ 的极值，并且

$$\|\gamma\| = \|\gamma(f_0)x_0\| = 1 + \sqrt{2}.$$

若 μ 是 (f_0, x_0) 的极值测度，则通过直接计算可得

$$\int_{\Omega^\partial} f(z)\ \mathrm{d}_\mu z = \langle \gamma(f)x_0, x_0\rangle = \frac{f(0) + f(1)}{2} \tag{4}$$

对所有 $f \in A(\Omega)$。由下式给出的反线性映射 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$

$$\Phi(f)(z) := \begin{cases} -f(0)^* & z \in \Omega_0^- \\ -f(1)^* & z \in \Omega_1^- \end{cases}$$

对于 $f \in A(\Omega)$ 是压缩映射。此外，它满足 $\|\gamma_\Phi(f)\| = |f(1) - f(0)|$ 对所有 $f \in A(\Omega)$ 成立，因此 $\|\gamma_\Phi\| = 2$。由于 $\Phi(f_0)f_0 = -1$，我们进一步有 $\langle\gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle = -1$ 根据公式 (4)。因此定理 5 给出

$$\|\gamma\| \leq \left(\frac{1}{2}\inf_{\omega\in A(\Omega)'}\|\gamma_\Phi - \omega\|\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\inf_{\omega\in A(\Omega)'}\|\gamma_\Phi - \omega\|\right)^2 + 1} \leq 1 + \sqrt{2},$$

这意味着下确界在 $\omega = 0$处取得，且等于 $\|\gamma_\Phi\| = 2$。

3. 泛函演算的应用

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个有界开子集，且边界光滑。边界 Ω^∂ 微分同胚于有限个互不相交的圆的并，参见例如 [MW97，附录]。固定一个希尔伯特空间 H，以及其上的一个有界线性算子 M，其谱位于 Ω 内。回顾一下，M 在 Ω 上的函数演算 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 定义为

$$\gamma(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^\partial} f(\sigma)(\sigma - M)^{-1}\,\mathrm{d}\sigma$$

对于 $f \in A(\Omega)$。正数 κ 称为 M 在 Ω 上的谱常数，如果 $\|\gamma\| \leq \kappa$。

设 $v\colon \Omega^\partial \to \mathbb{C}$ 是一个映射，它将 Ω^∂ 中的任意边界点映射为 Ω 在该点处的外单位法向量。我们将 M 在 Ω 上的双层位势 $P\colon \Omega^\partial \to \mathscr{L}(H)$ 定义为

$$P(\sigma) := \left(\frac{v(\sigma)}{2\pi}(\sigma - M)^{-1}\right) + \left(\frac{v(\sigma)}{2\pi}(\sigma - M)^{-1}\right)^*$$

对于 $\sigma \in \Omega^\partial$。注意，双层位势的取值是厄米的。

设 c 是 Ω^∂ 的一个连通分支。记 ℓ_c 为 c 的总弧长，并设 $\sigma_c\colon [0, \ell_c] \to \mathbb{C}$ 是 c 的弧长参数化，其方向由 Ω 的正向诱导。因此，根据方向的选取，我们有

$$v(\sigma_c(s)) = \frac{\sigma_c'(s)}{i}.$$

对所有 $s \in [0, \ell_c]$ 均成立。

对于任意给定的 $f \in A(\Omega)$，函数 $\Phi(f)\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\Phi(f)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^\partial}\frac{f(\sigma)^*}{\sigma - z}\,\mathrm{d}\sigma$$

对于 $z \in \Omega$，该函数有唯一的连续延拓 $\Phi(f)\colon \Omega^- \to \mathbb{C}$。事实上，$\Phi(f) \in A(\Omega)$。由此诱导的映射 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$ 称为 Ω 上的共轭柯西变换。注意，Φ 是一个有界反线性映射。事实上，若 Ω 是凸的，则 Φ 甚至是压缩映射。关于 Φ 这些性质的证明，参见 [CP17，引理 2.1]。

在 Ω 为圆盘这一特殊情形下，很容易看出 Φ 的值域由常值函数构成，例如参见 [Rem91，第 205]页。

由柯西积分公式可得

$$\gamma_\Phi(f) = \sum_{\substack{c\subset\Omega^\partial \\ \text{connected} \\ \text{component}}} \int_0^{\ell_c} f(\sigma_c(s))P(\sigma_c(s))\,\mathrm{d}s$$

对所有 $f \in A(\Omega)$。早在 Delyon-Delyon 的论文 [DD99] 以及 Putinar-Sandberg 的论文 [PS05] 和 Crouzeix 的论文 [Cro07], 中，就已经用到了 P 的取值非负这一事实。由于

$$\sum_{\substack{c\subset\Omega^\partial \\ \text{connected} \\ \text{component}}} \int_0^{\ell_c} P(\sigma_c(s))\,\mathrm{d}s = 2,$$

这立即推出 $\|\gamma_\Phi\| \le 2$，因此

$$\inf_{\omega\in A(\Omega)'} \|\gamma_\Phi - \omega\| \le 2, \tag{5}$$

我们将利用这一点重新证明 Crouzeix–Palencia 的结果（定理 11）以及 Okubo–Ando 的结果（定理 14），作为定理 5 的一个应用。

事实证明，冯·诺依曼不等式（见下文定理 16）也可由定理 5 推出。为此，我们需要以下由 Caldwell–Greenbaum–Li [CGL18 提出的命题，引理 2。1]为方便读者，我们略述其证明。对于任意厄米 R，我们用 $\lambda_{\min}(R)$ 表示 R的（实）谱中的最小元素。

命题 8. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个光滑有界开子集，其共轭柯西变换为 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$。若 M 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，且其谱位于 Ω 内，则存在一个 $\omega \in A(\Omega)'$，使得 M 在 Ω 上的函数演算 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 满足

$$\|\gamma_\Phi - \omega\| \le 2 - \sum_{\substack{c\subset\Omega^\partial \\ \text{connected} \\ \text{component}}} \int_0^{\ell_c} \lambda_{\min}(P(\sigma_c(s)))\,\mathrm{d}s.$$

证明. 我们仅给出证明梗概。详细证明请参阅原始文献 [CGL18，引理 2.1]。容易验证，泛函$\omega\colon A(\Omega) \to \mathbb{C}$ 由下式给出

$$\omega(f) := \sum_{\substack{c\subset\Omega^\partial \\ \text{connected} \\ \text{component}}} \int_0^{\ell_c} f(\sigma_c(s))\lambda_{\min}(P(\sigma_c(s)))\,\mathrm{d}s \tag{6}$$

对 $f \in A(\Omega)$ 有界。利用对所有 $z \in \Omega^\partial$，$P(z) - \lambda_{\min}(P(z)) \ge 0$，可以证明 $\omega \in A(\Omega)'$ 满足所需估计。■

请注意，定理 5 依赖于极值对的存在。对于有限维希尔伯特空间，泛函演算存在极值对，这一点众所周知，参见 [Cro04，定理 2.1]。幸运的是，对于一般的希尔伯特空间，通常可以通过以下命题将问题归约到有限维情形，

该命题是 [Cro07，定理 2]的推广。 M的有限维压缩是形如 $M^{\downarrow} := \Pi M \Pi^*$ 的线性算子，其中 $\Pi\colon H \to V$是到某个有限维子空间 V 上的正交投影。

命题 9. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个光滑有界开子集，且多项式在 $A(\Omega)$ 中稠密。令 κ 为一个正数， M 为希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，其谱包含于 Ω 内。若对于 M 的每个多项式 p 和有限维压缩 $M^{\downarrow}$，都有 $\|p(M^{\downarrow})\| \leq \kappa \|p\|_{\Omega^\partial}$ ，则 κ 是 M 在 Ω 上的一个谱常数。

证明. 令 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 表示 M 在 Ω 上的函数演算。设 p 是一个次数为 d 的多项式。取 $x \in H$ ，并考虑正交投影 $\Pi\colon H \to V$，其中 $V \subset H$ 是由向量 $x, Mx, \dots, M^d x \in H$ 张成的克雷洛夫子空间。定义有限维压缩 $M^{\downarrow} := \Pi M \Pi^*$。根据构造，我们有 $\gamma(p)x = p(M^{\downarrow})x$，因此

$$\|\gamma(p)x\| = \|p(M^{\downarrow})x\| \leq \|p(M^{\downarrow})\|\|x\| \leq \kappa \|p\|_{\Omega^\partial} \|x\|.$$

由于 $x \in H$ 是任意选取的，我们得到 $\|\gamma(p)\| \leq \kappa \|p\|_{\Omega^\partial}$。由于我们假设多项式在 $A(\Omega)$ 中稠密，因此得到 $\|\gamma\| \leq \kappa$。 ■

注 10. 由于使用了全纯函数演算，关于谱集的结果总是受到这一限制：集合 Ω 必须是开集、边界光滑，且包含 M 的谱。鉴于冯·诺依曼不等式和 Crouzeix 猜想，这显得不自然，因为人们希望允许谱点位于谱集的边界上。不过，如果谱常数是普适的，因而不依赖于 Ω，那么更强的陈述便会自动成立。更确切地说，给定一个固定的有界集 $W \subset \mathbb{C}$ 和常数 $\kappa \geq 1$，陈述

$$\|p(M)\| \leq \kappa \|p\|_{\Omega^\partial},$$

对所有多项式 p，以及包含 M 的谱且为开集、凸集、边界光滑的 $\Omega \supset W$ ，均成立，这意味着 W是 M 的 κ-谱集。

3.1. Crouzeix–Palencia 的结果

我们应用主要结果，重新得到如下结论：若 Ω 是凸集，且包含 M 的数值域的闭包，那么 $1+\sqrt{2}$ 就是 M 在 Ω 上的谱常数。这一结论最初由 Crouzeix–Palencia [CP17] 通过将 $\|\gamma_\Phi\| \leq 2$ 与这样一个事实相结合而证明： $\|\Phi\| \leq 1$，整个论证相当技术性。正如 [RS18]，中所指出的，最后这一步可以借助涉及下式的一个技巧加以简化

$$\|\gamma(f)^*\gamma(f)\gamma(f)^*\gamma(f)\| = \|\gamma(f)\|^4$$

再结合同态的乘法性。下面的证明不同于上述方法，而是利用希尔伯特空间结构以及通过极值测度得到的同态。

定理 11（Crouzeix–Palencia）。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个边界光滑的有界凸开子集。若 M 是希尔伯特空间 H上的有界线性算子，且 $W(M)^- \subset \Omega$，则 $1+\sqrt{2}$是 M 在 Ω 上的谱常数。

证明。若 $M^{\downarrow}$是 M的有限维压缩，则 $W(M^{\downarrow}) \subset W(M)$，因此 $W(M^{\downarrow})^{-} \subset \Omega$。于是根据命题 9，我们可以归结为 H 是有限维的情形。

设 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 是 Ω 上的函数演算。设 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$ 是 Ω 上的共轭柯西变换。Ω 的凸性以及包含关系 $W(M) \subset \Omega$ 意味着 (5) 成立。现在，若我们使用命题 3，为 γ 的极值对 (f_0, x_0) 找到一个极值测度 μ，则可以估计

$$\begin{aligned}|\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle| &= \left|\int_{\Omega^\partial} \Phi(f_0)(z)f_0(z)\,\mathrm{d}_\mu z\right| \\ &\leq \|\Phi(f_0)\|_{\Omega^\partial}\|f_0\|_{\Omega^\partial} \leq \|\Phi\| \leq 1,\end{aligned}$$

其中，最后一步用到了 Φ 是压缩映射，这是由 Ω 的凸性保证的。因此，应用定理 5 即可得到所需结果。■

注 12。实际上，[RS18] 中使用、后来又在 [COR20] 中采用的技巧，揭示了 Crouzeix–Palencia 结果的一个稍强结论。事实上，证明表明，在 Ω 上，将 Ω 的凸性假设和包含关系 $W(M) \subset \Omega$ 替换为较弱条件——存在一个压缩反线性映射 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$，使得 $\|\gamma_\Phi\| \leq 2$ 成立——之后，$1+\sqrt{2}$ 仍然是 M 在 Ω 上的谱常数。在额外假设存在极值对的情况下，也可以用类似于定理 11 的证明技巧得到这一更一般的结果。

注 13. 假设 Ω 是凸集，且包含 $W(M)^{-}$。请注意，如果以下命题成立：

$$\inf_{\omega \in A(\Omega)'} \|\gamma_\Phi - \omega\| \leq 2 - \frac{|\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle|}{2},$$

那么由定理 5 可得 $\|\gamma\| \leq 2$。这将证明 Crouzeix 猜想 [Cro04]。

3.2. Okubo–Ando 结果

以下结果由 Okubo–Ando 提出，其原始证明基于膨胀理论 [OA75], 。较新的证明策略采用了估计$\|\gamma_\Phi\| \leq 2$ 以及极值对的性质，参见 [CGL18]。沿用后一种方法，我们将说明如何由定理 5 推导出该结果。

定理 14（Okubo–Ando）。假设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个开圆盘。若 M是希尔伯特空间 H上的有界线性算子，且满足 $W(M)^{-} \subset \Omega$，那么 2 是 M 在 Ω 上的谱常数。

证明。若 $M^{\downarrow}$是 M的有限维压缩，则 $W(M^{\downarrow}) \subset W(M)$，因此 $W(M^{\downarrow})^{-} \subset \Omega$。于是，根据命题 9，我们可以将问题归结为 H 是有限维的情形。

令 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 为 M 在 Ω 上的函数演算。令 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$ 为 Ω 上的共轭柯西变换。Ω 的凸性以及包含关系 $W(M) \subset \Omega$ 表明，(5) 成立。取 γ 的一个极值对 (f_0, x_0)。由于 Ω 是一个圆盘，我们知道 $\Phi(f_0)$ 是常数。当然

我们可以假设 $\|\gamma\| > 1$。因此，根据命题 1，$\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle = 0$ 。由此即可得到结论，依据是定理 5。■

注 15. Drury [Dru08] 证明了 Okubo–Ando 的结果可以进一步改进：当 Ω 为以原点为中心的开单位圆盘时，在定理 14 的条件下，有

$$\|p(M)\| \le \nu(|p(0)|)$$

对所有满足 $\|p\|_{\Omega^\partial} \le 1$ 的多项式 p，其中 $\nu\colon [0,1] \to [1,2]$ 是一个明确给出的严格递减函数，且 $\nu(0) = 2$， $\nu(1) = 1$。我们指出，我们的方法似乎无法重新证明这一更强的结论。这或许并不令人意外，因为 Dury 的技巧很大程度上依赖于 Berger–Stampfli [BS67 的一个定理（定理 4] ）：如果 M 的数值域包含于闭单位圆盘中，那么只要满足 $\|p\|_{\Omega^\partial} \le 1$ 且 $p(0) = 0$， $p(M)$ 也具有同样的性质。后一个结果最初是通过膨胀理论证明的；另见 [PS05，定理 3] ，其中给出了一种与双层位势相关的证明。近期还有一种使用 Blaschke 乘积证明 Berger–Stampfli 结果的方法，见 [KMR16，定理 2.1]。

3.3. 冯·诺依曼不等式

以下这个著名结果归功于冯·诺依曼 [Neu50], ，其渊源可追溯至1950年。下文给出的证明结合了定理 5 与 [CG19, 引理 6], 中的一个思路，而该思路又可追溯至 [DD99]。下文中，我们用 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆。

定理 16（冯·诺依曼）。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个以原点为圆心的开圆盘。若 M 是希尔伯特空间 H上的有界线性算子，且 $\|M\|\mathbb{T} \subset \Omega$，则 1 是 M 在 Ω 上的谱常数。

证明。若 $M^{\downarrow}$是 M的有限维压缩，则 $\|M^{\downarrow}\| \le \|M\|$，因此 $\|M^{\downarrow}\|\mathbb{T} \subset \Omega$。于是，根据命题 9，我们可以将问题归结为 H 为有限维的情形。

令 $\gamma\colon A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 为 Ω 上 M 的函数演算，并反设 $\|\gamma\| > 1$。令 r 表示圆盘 Ω 的半径，并考虑弧长参数化 $\sigma\colon [0, 2\pi r] \to \mathbb{C}$，其定义为 $\sigma(s) := re^{is/r}$，其中 $s \in [0, 2\pi r]$。令 $\Phi\colon A(\Omega) \to A(\Omega)$ 为 Ω 上的共轭柯西变换。固定 γ 的一个极值对 (f_0, x_0)。由于 $\Phi(f_0)$ 为常数且 $\|\gamma\| > 1$，由命题 1 可得 $\langle \gamma(\Phi(f_0)f_0)x_0, x_0\rangle = 0$ 。此外，简单计算可得

$$2\pi r P(\sigma(s)) - 1 = (\sigma(s)^* - M^*)^{-1}(r^2 - M^*M)(\sigma(s) - M)^{-1} \ge 0$$

对所有 $s \in [0, 2\pi r]$ 均成立。由定理 5 和命题 8 可知

$$\begin{aligned}\|\gamma\| &\leq \inf_{\omega \in A(\Omega)'} \|\gamma_\Phi - \omega\| \\ &\leq 2 - \int_0^{2\pi r} \lambda_{\min}(P(\sigma(s)))\, \mathrm{d}s \\ &\leq 2 - \int_0^{2\pi r} \frac{1}{2\pi r}\, \mathrm{d}s = 1,\end{aligned}$$

这与假设 $\|\gamma\| > 1$ 相矛盾。因此，我们必有 $\|\gamma\| = 1$。 ■

3.4. Crouzeix–Greenbaum 结果

利用极值对 (f_0, x_0) 的极值测度 μ，我们得到

$$|\langle \gamma(\Phi(f_0) f_0) x_0, x_0 \rangle| \leq \|\Phi\|,$$

类似的推理见定理 11 的证明。这直接得到了定理 5 的以下较弱版本，从而重新证明了 Crouzeix– Greenbaum [CG19] 的一个结论。

推论 17. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个光滑有界开子集，且 Φ: $A(\Omega) \to A(\Omega)$ 是一个有界反线性映射。假设 M 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，其谱位于 Ω 内。令 γ: $A(\Omega) \to \mathscr{L}(H)$ 表示 M 在 Ω 上的函数演算，并假设它存在一个极值对。此外，令 ω: $A(\Omega) \to \mathbb{C}$ 为任意有界线性泛函。若 $\|\gamma\| > 1$，则

$$\|\gamma\| \leq \|\gamma_\Phi - \omega\| + \sqrt{\|\gamma_\Phi - \omega\|^2 + \|\Phi\| + \|\omega\|}.$$

除了假设 γ 存在极值对之外，推论 17 正是 [CG19 的定理 2]。我们的主要结果表明，可以去掉项 $\|\omega\|$；它似乎只是 [CG19] 中所用证明技巧造成的产物。不过，在 [CG19] 中给出的多数应用里，泛函 ω 无论如何都取为 0。

4. 与数值半径的关系

复数集 M 上有界线性算子在 H 上的数值半径定义为

$$w(M) := \sup_{z \in W(M)} |z|$$

它在 $\mathscr{L}(H)$ 上定义了一个范数，且该范数已知与 $\mathscr{L}(H)$ 上的算子范数等价。回顾我们的通用框架： A 是作用于紧豪斯多夫空间 K 上的含幺一致代数，且 γ: $A \to \mathscr{L}(H)$ 是一个含幺有界同态。Badea–Crouzeix–Klaja [BCK18]，（另见[DPW18], ）证明了由 γ 诱导的数值半径算子范数（记作 $\|\gamma\|_w$）与 $\|\gamma\|$ 之间存在明确联系：

$$2\|\gamma\|_w = \frac{1}{\|\gamma\|} + \|\gamma\|.$$

因此，对 $\|\gamma\|_w$ 的界也给出了对 $\|\gamma\|$ 的界，反之亦然。另请注意，在此情形下可以定义类似的极值对概念及其关联测度

，参见 [BGG+20]。利用这一不同范数，可以类似地轻松证明命题3的一个变体。

参考文献

[BCK18] C. Badea、M. Crouzeix 和 H. Klaja。《谱集与算子半径》。*Bulletin of the London Mathematical Society*，50(6):986–996，2018。[BGG+20] K. Bickel、P. Gorkin、A. Greenbaum、T. Ransford、F.L. Schwenninger 和 E. Wegert。《Crouzeix 猜想及相关问题》。*Computational Methods and Function Theory* 20 3 701 728, 2020 ，( ): – 。[BS67] C.A. Berger 和 J.G. Stampfli。《数值域映射定理》。*American Journal of Mathematics*，89(4):1047–1055，1967。[CG19] M. Crouzeix 和 A. Greenbaum。《谱集：数值域及其他》。*SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*，40 3 1087 1101，2019 ( ): – 。[CGL18] T. Caldwell 、 A. Greenbaum 和 K. Li 。《Crouzeix-Palencia 结果的一些扩展》。*SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 39 2 769 780, 2018 ，( ): – 。[COR20] R. Clouˆatre 、 M. Ostermann 和 T. Ransford。《 Crouzeix 猜想的一种抽象方法》。2020年。可见 arXiv: 2011.10422，即将发表于 *Journal of Operator Theory*。[CP17] M. Crouzeix 和 C. Palencia。《数值域是一个 $(1+\sqrt{2})$-谱集》。*SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*，38 2 649 655，2017 ( ): – 。[Cro04] M. Crouzeix。《矩阵解析函数的界》。*Integral Equations and Operator Theory* 48 4 461 477, 2004 ，( ): – 。[Cro07] M. Crouzeix。《希尔伯特空间中的数值域与函数演算》。*Journal of Functional Analysis*，244(2):668–690，2007。[DD99] B. Delyon 和 F. Delyon。《冯·诺依曼谱集的推广与算子的积分表示》。*Bulletin de la Société Mathématique de France* 127 1 25 41, 1999 ，( ): – 。[DPW18] K. Davidson、V. Paulsen 和 H. Woerdeman。《完全谱集与数值域》。*Proceedings of the American Mathematical Society* 146 3 1189 1195, 2018 ，( ): – 。[Dru08] S.W. Drury。《数值域半径为单位值的算子的符号演算》。*Linear algebra and its applications*，428(8-9):2061–2069，2008。[DS58] N. Dunford 和 J.T. Schwartz。《泛函分析》。纯粹与应用数学，第7卷。Interscience Publishers, Inc.，纽约；Interscience Publishers Ltd.，伦敦，1958年。W. G. Bade 和 R. G. Bartle 协助编写。[GG71] T.W. Gamelin 和 J. Garnett。《逐点有界逼近与狄利克雷代数》。 *Journal of Functional Analysis*，8(3):360–404，1971。[Haa18]M. Haase。《函数演算讲义》，2018年。*21st International Internet Seminar*，基尔大学，www.math.uni-kiel.de/isem21/en/course/phase1/。

[HL21] M. Hartz 和 M. Lupini。《有限维膨胀理论与矩阵凸性》。 *Israel Journal of Mathematics*，245(1):39–73，2021。[KMR16] H. Klaja、J. Mashreghi 和 T. Ransford。《数值域映射定理》。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，144 7 3009 3018，2016 ( ): – 。[MW97] J. Milnor 和 D.W. Weaver。 *Topology from the Differentiable Viewpoint*，第21卷。普林斯顿大学出版社，1997年。[Neu50] J. von Neumann。《一般酉空间算子的谱理论》。 *Mathematische Nachrichten*，4(1-6):258–281，1950年。[OA75] K. Okubo 和 T. Ando。与 C_ρ类算子相关的常数。*Manuscripta Mathematica*，16(4):385–394，1975。[Pau02] V. Paulsen。《完全有界映射》。第78号。剑桥大学出版社，2002年。[PPW20] P. Pagacz、P. Pietrzycki 和 M. Wojtylak。《介于冯·诺依曼不等式与Crouzeix猜想之间》。 *Linear Algebra Appl.*，605:130–157，2020年。[PS05] M. Putinar 和 S. Sandberg。《算子数值域上的斜膨胀》。 *Mathematische Annalen*，331(2):345–357，2005年。[Rem91] R. Remmert。《复分析》。第122卷。Springer Science & Business Media，1991年。[RS18] T. Ransford 和 F.L. Schwenninger。《关于数值域为($1+\sqrt{2}$ *SIAM Jour-*)-谱集的 *nal on Matrix Analysis and Applications* 39 1 342 345, 2018 Crouzeix–Palencia证明的评注》。，( ): – 。

Felix L. Schwenninger 应用数学系 特文特大学，邮政信箱 217，7500 AE 恩斯赫德，荷兰 电子邮箱：
f.l.schwenninger@utwente.nl

Jens de Vries 应用数学系 特文特大学，
邮政信箱 217，7500 AE 恩斯赫德，
荷兰 电子邮箱：
j.devries-4@utwente.nl