arXiv:2302.05395v2 [math.GT] 1 Mar 2023

光滑函数代数与穿越流的全息

GABRIEL KATZ

ABSTRACT. 设 X 为一个光滑紧流形， v 是 X 上的一个向量场，并存在一个光滑函数 $f: X \to \mathbb{R}$，使得 $df(v) > 0$。设 ∂X 为 X的边界。我们用 $C^\infty(X)$表示 X 上的光滑函数代数，用 $C^\infty(\partial X)$表示 ∂X上的光滑函数代数。借助 (v, f)，我们引入 $C^\infty(\partial X)$的两个子代数 $\mathcal{A}(v)$ 和 $\mathcal{B}(f)$，并证明（在适度的假设下） $C^\infty(X) \approx \mathcal{A}(v)\hat{\otimes}\mathcal{B}(f)$，即拓扑张量积。因此，拓扑代数 $\mathcal{A}(v)$ 和 $\mathcal{B}(f)$， *viewed asboundary data*，可用于重构 $C^\infty(X)$。由此，$\mathcal{A}(v)$ 和 $\mathcal{B}(f)$ 可用于恢复体 X的光滑拓扑类型。

1. INTRODUCTION

经典结果表明，紧空间 X 上连续实值函数的赋范代数 $C^0(X)$ 决定了该空间的拓扑类型 [GRS], [Ga], [Br]。在此背景下，X 可解释为代数 $C^0(X)$ 的极大理想空间。类似地，紧光滑流形 X 上的光滑函数代数 $C^\infty(X)$（该代数$C^\infty(X)$ 取 Whitney拓扑 [W3]）决定了 X [KMS], [Na]的光滑拓扑类型。同样， X 可视为代数 $C^\infty(X)$ 的极大理想空间。

回想一下，在紧连通黎曼流形 X 上，调和函数 h 由其在 X的光滑边界 ∂X 上的限制唯一确定。换言之，狄利克雷边值问题在调和函数空间中有唯一解。因此， X 上的调和函数向量空间 $\mathcal{H}(X)$ 完全由其在边界 ∂X上的限制（迹） $\mathcal{H}^\partial(X) := \mathcal{H}(X)|_{\partial X}$ 确定。启程之际，这一事实将为我们指引方向。

本文围绕以下问题展开：

边界 ∂X 上的哪些光滑函数代数可用于重构代数 $C^\infty(X)$，进而确定 X的光滑拓扑类型?

想到光滑函数（与僵硬的调和函数相反）具有灵活的性质，乍一看，我们理应预料到显而易见的答案：“没有！”然而，当X 具有额外的几何结构时，这个问题出人意料地可能有肯定的答案。 X 上能够起作用的几何结构是一个向量场（即一个常微分方程），它属于一大类向量场；我们将在下文介绍这类向量场。

设 X是一个带边界的紧致连通光滑（$n+1$）维流形，v 是一个光滑向量场，并存在李雅普诺夫函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$，使得 $df(v)>0$。我们称这类向量场为横截向量场。我们假设 v 与边界 ∂X 处于一般位置，并称这类向量场为边界一般位置向量场（关于边界一般向量场的概念，见 [K1]或 [K3], 定义 5.1）。暂且可以认为，边界一般位置向量场 v 只有与边界 ∂X 相切的 v-轨迹，且其相切阶数不超过 $\dim(X)$。第 3 节将给出更准确的定义。

非正式地说，当边界∂X 上的某些剩余结构足以重构体 X上的类似结构时，我们就使用“全息”一词。

给定这样一个三元组（X，v，f），在第 3 节中，我们将引入两个子代数，$\mathcal{A}(v)=C^\infty(\partial X,\ v)$ 和 $\mathcal{B}(f)=(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$，它们属于代数 $C^\infty(\partial X)$，并分别仅依赖于 v和 f。根据定理 3.1，$\mathcal{A}(v)$ 和 $\mathcal{B}(f)$ 将允许重构代数 $C^\infty(X)$。事实上，由这些子代数生成的边界数据会导出两个代数的拓扑张量积的唯一（刚性）“解”。

$$C^\infty(X)\approx C^\infty(\partial X,v)\hat{\otimes}(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R})),$$

因此，这一对 $\mathcal{A}(v)$、$\mathcal{B}(f)$“位于边界上”，决定了体 X 以及由 v-流生成的一维叶状结构 $\mathcal{F}(v)$的光滑拓扑类型。

2. Holography on manifolds with boundary and the causality maps

设 X 是一个紧致连通的光滑（$n+1$）维带边界流形 $\partial_1X=_{\mathsf{def}}\partial X$（我们用此记号表示边界 ∂X，以便与下文类似的记号保持一致），且 v 是一个光滑的可贯穿向量场，并具有光滑李雅普诺夫函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$。我们假设 v 处于边界一般位置。

我们用 $\partial_1^+X(v)$ 表示 ∂_1X 中满足以下条件的子集：v 指向 X 的内部，或与 ∂_1X 相切。类似地，$\partial_1^-X(v)$ 表示 ∂_1X 中满足以下条件的子集：v 指向 X 的外部，或与 ∂_1X 相切。

设 $\mathcal{F}(v)$ 为由横截 v-流生成的一维定向叶状结构。

我们用 γ_x 表示经过 $x\in X$ 的 v-轨迹。由于 v 是横截的且处于边界一般位置，每个 γ_x 都同胚于一个闭线段，或同胚于单点集 [K1]。

ˆ 接下来，我们将紧流形 X 嵌入同维数的开流形 X 中，使得 v 可延拓为 X上的光滑向量场 ˆ v，f可延拓为 X上的光滑函数 ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆf，并且 $df(\hat{v})>0$于 X中。我们将 $(X,\ \hat{v},\ f)$ 视为 $(X,\ v,\ f)$ 邻域内的一个芽。

定义 2.1。如果边界一般位置且可贯穿的向量场 v 具有性质 A，则对每条 v-轨迹 γ，它要么在集合$\gamma\cap\partial_1X$ 中的某个 点与 ∂_1X 横截，要么 $\gamma\cap\partial_1X$ 是单点集 x，且 γ 在 x 处与 ∂_1X 二次相切。♢

可贯穿向量场 v 在 X 上诱导出边界 ∂_1X上的偏序集（$\partial_1X,\ \succ_v$）结构：对于 $x,\ y\in\partial_1X$，如果这两点位于同一条v轨迹 γ 上，并且沿 v方向移动可从 x 到达 y，我们就记作 $y\succ x$ 。

我们用 $\mathcal{T}(v)$ 表示 v 的轨迹空间，并用 $\Gamma: X \to \mathcal{T}(v)$ 表示显然的投影。对于横截且边界一般位置的 v， $\mathcal{T}(v)$ 在由 Γ诱导的拓扑下是一个紧空间。由于任意横截 v 的轨迹都与边界 $\partial_1 X$相交，因此我们得到 $\mathcal{T}(v)$ 是 $\partial_1 X$ 关于偏序关系 $\succ_v$的商空间。

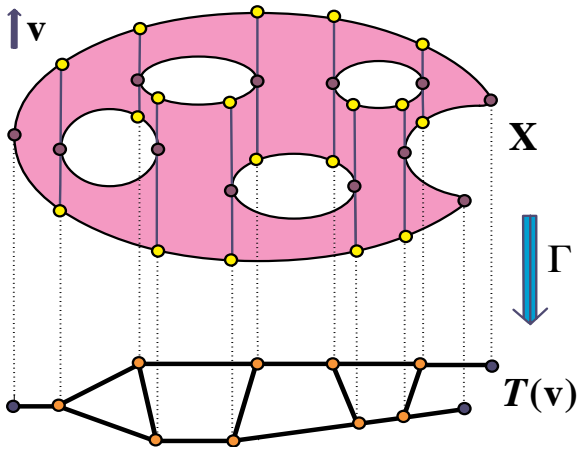

FIGURE 1. 映射 $\Gamma: X \to \mathcal{T}(v)$ 对应于圆盘上一个具有 4 个孔的穿越一般位置（垂直）向量场v 。轨迹空间是一个图，其顶点的度为 1 或 3。 Γ 到 $\partial_1 X$ 的限制是一个满射映射 Γ^∂ ，其纤维均为有限集，基数至多为 3；一般纤维的基数为 2。

一个横截且边界一般位置的 v 产生因果（散射）映射

$$C_v : \partial_1^+ X(v) \to \partial_1^- X(v) \tag{2.1}$$

该映射将每个点 $x \in \partial_1^+ X(v)$ 映至唯一的后继点 $y \in \gamma_x \cap \partial_1^- X(v)$，后者可沿 v方向从 x 到达。若不存在这样的 $y \neq x$ ，则令 $C_v(x) = x$。需要强调的是，通常 C_v 是一个不连续映射（见图 2）。

我们注意到，对于任意光滑正函数 $\lambda: X \to \mathbb{R}_+$，都有 $C_{\lambda \cdot v} = C_v$；因此，因果映射仅取决于横截向量场 v 的共形类。事实上， C_v 仅取决于由 v-流生成的定向叶状结构 $\mathcal{F}(v)$。

在本文中，我们将讨论两类密切相关的全息问题。第一类问题归结为：给定的边界数据在多大程度上足以重构未知的体以及其上的横截 v-流，或者更确切地说，叶状结构 $\mathcal{F}(v)$? 这一问题可以用以下两个图示表示:

•全息重建问题

$$(\partial_1 X, \succ_v,) \xrightarrow{??} (X, \mathcal{F}(v)), \tag{2.2}$$

$$(\partial_1 X, \succ_v, f^\partial) \xrightarrow{??} (X, \mathcal{F}(v), f), \tag{2.3}$$

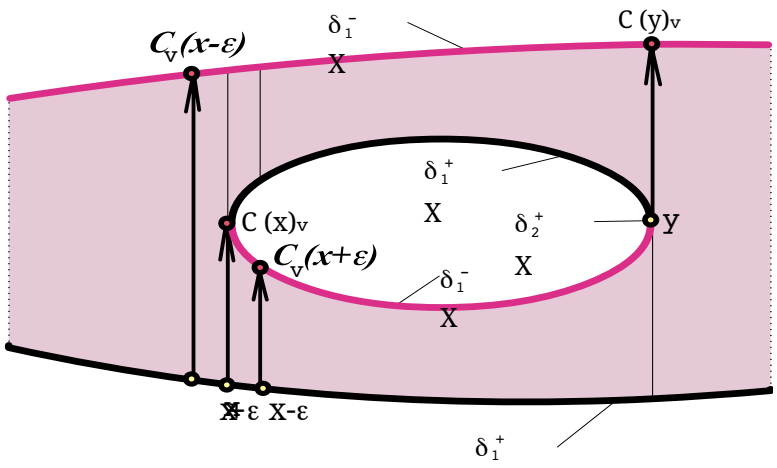

FIGURE 2. 因果映射 C_v 的一个例子： $\partial_1^+ X(v) \to \partial_1^- X(v)$。注意 C_v 在 x 附近的本质不连续性。

其中， $\succ_v$ 表示边界上的偏序，该偏序由因果映射 C_v定义；符号“ $\overset{??}{\longrightarrow}$”指向图示中未知的组成部分。

第二类问题是：给定两个流形 X_1 和 X_2，它们都配备了穿越流，且其边界之间存在一个微分同胚 Φ^∂ ，并且该微分同胚保留相关的边界数据，是否可以将 Φ^∂ 延拓为一个微分同胚/同胚 $\Phi : X_1 \to X_2$ ，使其保留这两个流形内部相应的流生成结构？这个问题可以用以下交换图表示：

•Holographic Extension Problem

$$\begin{array}{ccc} (\partial_1 X_1,\ \succ_{v_1}) & \xrightarrow{\text{inc}} & (X_1,\ \mathcal{F}(v_1)) \\ \downarrow\ \Phi^\partial & & \downarrow ??\ \ \Phi \\ (\partial_1 X_2,\ \succ_{v_2}) & \xrightarrow{\text{inc}} & (X_2,\ \mathcal{F}(v_2)) \end{array} \tag{2.4}$$

$$\begin{array}{ccc} (\partial_1 X_1,\ \succ_{v_1},\ f_1^\partial) & \xrightarrow{\text{inc}} & (X_1,\ \mathcal{F}(v_1), f_1) \\ \downarrow\ \Phi^\partial & & \downarrow ??\ \ \Phi \\ (\partial_1 X_2,\ \succ_{v_2},\ f_2^\partial) & \xrightarrow{\text{inc}} & (X_2,\ \mathcal{F}(v_2),\ f_2), \end{array} \tag{2.5}$$

其中，inc 表示空间的包含，并伴有函数和叶状结构显而易见的限制。符号“↓?? ”表示图中的未知映射。

这两类问题有多种不同形式，具体取决于边界数据的丰富程度，以及对变换 Φ（同胚、PD-同胚、对 H¨older 指数有一定控制的 H¨older 同胚，以及具有不同光滑度的微分同胚）预期达到的质量。

让我们表述定理 4.1 的主要结果，它体现了本文的思想，并将我们的主要结果定理 3.1 置于恰当的背景中。定理 2.1 反映了式 (2.4) 所示的方案。

定理 2.1.（共轭全息延拓）设 X_1, X_2 是带边界的紧致连通定向光滑 $(n+1)$ 维流形。分别考虑定义在 X_1 和 X_2 上的两个穿越型边界一般位置向量场 v_1, v_2 。此外，假设 v_1, v_2 具有定义 *2.1* 中的性质 A 。

设光滑保定向微分同胚 $\Phi^\partial : \partial_1 X_1 \to \partial_1 X_2$ 与两个因果映射可交换:

$$C_{v_2} \circ \Phi^\partial = \Phi^\partial \circ C_{v_1}$$

那么 Φ^∂ 可延拓为光滑保定向微分同胚 Φ: $X_1 \to X_2$ ，使得 Φ 将定向叶状结构 $\mathcal{F}(v_1)$ 映射到定向叶状结构 $\mathcal{F}(v_2)$。

我们来概述一下定理 2.1 证明的思路，因为这有助于阐明第 3 节的主要思想。对技术细节感兴趣的读者可参阅 [K4]。

证明。首先，利用 v_2 是横截的这一点，我们为 v_2构造一个李雅普诺夫函数 $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$。然后，通过微分同胚 Φ^∂，将限制 $f_2^\partial := f_2|_{\partial_1 X_2}$ 拉回到边界 $\partial_1 X_2$上。由于 Φ^∂ 与两个因果映射相交换，拉回 $f_1^\partial =_{\text{def}} (\Phi^\partial)^*(f_2^\partial)$具有如下性质：对于同一条 v_1-轨迹上的任意一对 $y \succ x$，都有 $f_1^\partial(y) > f_1^\partial(x)$；点的次序由 v_1-流定义。等价地，对于任意满足 $C_{v_1}(x) \neq x$的 $x \in \partial_1^+ X(v_1)$，有 $f_1^\partial(C_{v_1}(x)) > f_1^\partial(x)$。作为关键步骤，我们在 [K4] 中证明，这样的$f_1^\partial$可以延拓为一个光滑函数 $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ ，且满足性质 $df_1(v_1) > 0$。因此，f_1 是 v_1的李雅普诺夫函数。

回想一下，每个因果映射 $C_{v_i}, i = 1,2$ 都允许我们将 v_i-轨迹空间 $\mathcal{T}(v_i)$ 视为商空间 $(\partial_1 X_i)/\{C_{v_i}(x) \sim x\}$，其中 $x \in \partial_1^+ X_i(v_i)$，且 $\mathcal{T}(v_i)$ 上的拓扑定义为商拓扑。利用 Φ^∂ 与因果映射C_{v_1} 和 C_{v_2}相交换这一点，我们得出结论： Φ^∂ 诱导出轨迹空间之间的同胚 $\Phi^\mathcal{T}$: $\mathcal{T}(v_1) \to \mathcal{T}(v_2)$，并且保持它们的自然分层。

对于横截的 v_i，流形 X_i 具有两个彼此横截的叶状结构：由 v_i-流生成的定向一维 $\mathcal{F}$（v_i），以及由李雅普诺夫函数 f_i的常值水平超曲面生成的叶状结构 $\mathcal{G}$（f_i）。为了避免处理 $\mathcal{F}$（v_i）和 $\mathcal{G}$（f_i）的奇点，我们将 f_i 扩展为 $\hat{} f_i$ ：在 $\hat{} X_i$ 上令 $\hat{} X_i \to \mathbb{R}$ 和 v_i 扩展为 $\hat{} v_i$ ，使得 $\hat{}\hat{}\hat{} df_i(\hat{} v_i) > 0$。由此在 X_i上生成无奇点叶状结构 $\mathcal{F}(\hat{} v_i)$ 和 $\mathcal{G}(f_i)$。通过这一构造， $\mathcal{F}(\hat{} v_i)|_{\hat{} X_i} = \mathcal{F}(v_i)$，且 $\mathcal{G}(f_i)|_{X_i} = \mathcal{G}(f_i)$。请注意， $\mathcal{G}$（f_i）的“叶”可能不连通，而 $\mathcal{F}$（v_i）的叶，即 v_i-轨迹，则是连通的。这两个光滑叶状结构 $\mathcal{F}(\hat{} v_i)$ 和 $\mathcal{G}(f_i)$ 将作为 X_i 上的“坐标网格”：每个点$x \in X_i$都属于一对唯一的叶 $\gamma_x \in \mathcal{F}(v_i)$ 和 $L_x := \hat{} f_i^{-1}(f_i(x)) \in \mathcal{G}(\hat{} f_i)$。

反过来，利用 v_i的穿越性质，任意一对 $(y,\ t)$，其中 $y \in \gamma_x \cap \partial_1 X_i$ 和$t \in [f_i^\partial($ $\gamma_x \cap \partial_1 X_i)] \subset \mathbb{R}$，其中 $[f_i^\partial(\gamma_x \cap \partial_1 X_i)]$ 表示包含有限集合 $f_i^\partial(\gamma_x \cap \partial_1 X_i)$的最小闭区间，确定一个唯一的点 $x \in X_i$。请注意，某些叶 L 和 γ 的交集可能为空，并且某些叶 L的分支与边界 $\partial_1 X_i$的交集也可能为空。

事实上，利用 f_i 是一个李雅普诺夫函数这一点，超曲面 $L = f_i^{-1}(c)$ 与一条 v_i-轨迹 γ 相交，当且仅当 $c \in [f_i^\partial(\gamma \cap \partial_1 X_i)]$。由于两片光滑叶 $\hat{}\gamma_y$ 和 $\hat{}f_i^{-1}(f_i(z))$ 随点 y、$z \in \partial_1 X_i$ 光滑变化，且彼此横截，它们的交点 $\hat{}\gamma_y \cap \hat{}f_i^{-1}(f_i(z)) \in \hat{}X_i$ 随 $(y,z) \in (\partial_1 X_i) \times (\partial_1 X_i)$ 光滑变化，只要 $f_i^\partial(z) \in [f_i^\partial(\gamma_y \cap \partial_1 X_i)]$。注意，满足性质 $f_i^\partial(z) \in f_i^\partial(\gamma_y \cap \partial_1 X_i)$ 的点对 (y,z)（其中 $y,z \in \partial_1 X_i$）会产生属于 $\partial_1 X_i$ 的交点 $\hat{}\gamma_y \cap \hat{}f_i^{-1}(f_i(z))$。

现在，我们已准备好将微分同胚 Φ^∂ 扩展为同胚 $\Phi:\ X_1 \to X_2$。在此过程中，按照 (2.4) 中的方案，我们假设叶状结构 $\mathcal{F}(v_i)$ 以及定义在 X_i $(i = 1,2)$ 上的李雅普诺夫函数 f_i 确实存在且“可知”，尽管我们只能获取它们在边界上的迹。

任取 $x \in X_1$。它属于唯一一对叶 $L_x \in \mathcal{G}(f_1)$ 和 $\gamma_x \in \mathcal{F}(v_1)$。我们定义 $\Phi(x) = x' \in X_2$，其中 x' 是唯一属于 $f_2^{-1}(f_1(x)) \in \mathcal{G}(f_2)$ 与 v_2-轨迹 $\gamma' = \Gamma_2^{-1}(\Phi^{\mathcal{T}}(\gamma_x))$ 交集的点。根据其构造，$\Phi|_{\partial_1 X_1} = \Phi^\partial$。因此，$\Phi$ 诱导的同胚 $\Phi^{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}(v_1) \to \mathcal{T}(v_2)$ 与 Φ^∂ 诱导的相同。

叶超曲面 $\hat{}f_2^{-1}(f_1(x))$ 关于 x 光滑地变化，但叶轨迹 $\hat{}\gamma' = \Gamma_2^{-1}(\Phi^{\mathcal{T}}(\hat{}\gamma_x))$ 未必如此！尽管同胚 Φ 沿着 v_1-轨迹是微分同胚，但尚不清楚它在 X_1 上是否为微分同胚（先验地，Φ 只是一个 H¨older 映射，其 H¨older 指数为 $\alpha = 1/m$，其中 m 是 γ 与 $\partial_1 X$ 的最大相切阶）。目前，为了证明 Φ 是微分同胚，我们需要定义 2.1 中的性质 A。假设该性质成立，我们利用 γ_x 某处 与 $\partial_1 X$ 的横截性，断定 $\Gamma_2^{-1}(\Phi^{\mathcal{T}}(\hat{}\gamma_x))$ 关于 x 光滑地变化。现在，由于光滑叶状结构 $\mathcal{F}(\hat{}v_i)$ 和 $\mathcal{G}(\hat{}f_i)$ 横截，因此 $x' = \Phi(x)$ 关于 x 光滑地变化。猜想地，证明 Φ 是微分同胚并不需要性质 A。□

请注意，这种延拓 Φ 的构造相当明确，但并非典范。例如，它取决于将 $f_1^\partial := (\Phi^\partial)^*(f_2^\partial)$ 延拓为光滑函数 $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ 的选择，而该函数沿 v_1-轨迹严格单调。若假定 完全了解 配备了叶状网格 $\mathcal{F}(v_i)$ $\mathcal{G}(f_i)$ 和李雅普诺夫函数 f_i 的流形 X_i，则可以实现延拓 Φ 的唯一性（拓扑刚性）。在定理 3.1 中，我们将讨论这一问题。

下一个定理（见 [K4], 推论 4.3）符合 (2.2) 中的框架。它指出，只要性质 A 成立，便可根据适当的边界约束数据重构三元组 $\{X, \mathcal{F}(v)\ \mathcal{G}(f)\}$ 的光滑拓扑类型 。

推论 2.1.（穿越流的全息）设 X 是一个带边界的紧致连通光滑$(n+1)$维流形，并设 v 是一个具有性质 A 的贯穿边界泛型向量场。

那么，以下边界约束数据：

- 因果映射 $C_v:\ \partial_1^+X(v)\to\partial_1^-X(v)$,
- 李雅普诺夫函数 f的限制 $f^\partial\colon \partial_1X\to\mathbb{R}$,

足以重构三元组 $(X,\mathcal{F}(v)\ f)$，其中微分同胚 $\Phi\colon X\to X$在边界 ∂_1X上为恒等映射。

证明。 我们声称，在性质 A 成立的条件下，边界上的数据 $\{C_v,\ f^\partial\}$ 允许重构三元组 $(X,\ \mathcal{F}(v)\ f)$，其中微分同胚在 ∂_1X 上为恒等映射。

假设存在两个穿越流 $(X_1,\ \mathcal{F}(v_1)\ f_1)$ 和 $(X_2,\ \mathcal{F}(v_2)\ f_2)$，使得 $\partial_1X_1=\partial_1X_2=\partial_1X$,

$$\{C_{v_1},\ f_1^\partial\}=\{C_{v_2},\ f_2^\partial\}=\{C_v,f^\partial\}.$$

将定理 2.1 应用于恒等映射微分同胚 $\Phi^\partial=\mathrm{id}_{\partial_1X}$，我们得出它可延拓为一个微分同胚 $\Phi\colon X_1\to X_2$，该微分同胚将 $\{\mathcal{F}(v_1)\cap\partial_1X_1,\ \ f_1^\partial\}$ 映射到 $\{\mathcal{F}(v_2)\cap\partial_1X_2,\ \ f_2^\partial\}$。□

注 2.1。 遗憾的是，推论 2.1 及其证明并不太具有构造性。它们只是存在性断言：目前尚不清楚如何仅根据边界数据 $(\partial_1X,\ C_v,\ f^\partial)$ 构造三元组 $(X,\ \mathcal{F}(v)\ f)$。♢

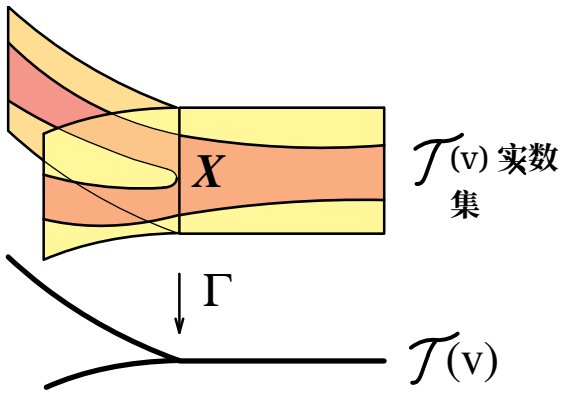

FIGURE 3. 嵌入 $\alpha:\ X\to\mathcal{T}(v)\times\mathbb{R}$，由 Γ 生成: $X\to\mathcal{T}(v)$以及$f:X\to\mathbb{R}$。

幸运的是，以下简单构造（[K4], 引理 3.4）如图 3 所示，给出了从三元组（$X,\ \mathcal{F}(v)\ f$）恢复三元组（$\partial_1X,\ C_v,\ f^\partial$）的明确方法，但只能恢复到一个同胚。

正如我们在定理 2.1 的证明中所看到的，因果映射 C_v 典范地确定了商轨迹空间 $\mathcal{T}(v)$。令 $f:\ X\to\mathbb{R}$ 为 v的李雅普诺夫函数。

这一对（$\mathcal{F}$（v） f）产生一个嵌入 $\alpha\colon X\hookrightarrow\mathcal{T}$（$v$）$\times\mathbb{R}$，其定义公式为$\alpha$（$x$）$=$（$[\gamma_x]$, f（x））， 其中 $x\in X$ 和 $[\gamma_x]\in\mathcal{T}$（v）表示经过 x 的点轨迹。

根据 $\mathcal{T}(v)$ 上的商拓扑定义，依赖关系 $x \rightsquigarrow [\gamma_x]$ 是连续的。注意， α 将每条 v-轨迹 γ 映射到直线 $[\gamma]\times\mathbb{R}$；并且对于任意 $c\in\mathbb{R}$，将每个（可能不连通的）叶 $\mathcal{G}_c := f^{-1}(c)$ 映射到 $\mathcal{T}(v)\times\mathbb{R}$ 的切片 $\mathcal{T}(v)\times c$。借助嵌入 α，每条轨迹 $\gamma\in\mathcal{F}(v)$ 都可视为闭区间$[f^{\partial}(\gamma\cap\partial_1 X)]\subset\mathbb{R}$，而向量场 $v|_\gamma$ 则可视为 $\mathbb{R}$ 上的常向量场 ∂_u。

现在考虑嵌入 α 在边界 $\partial_1 X$上的限制 α^{∂}。显然， α^{∂}的像： $\partial_1 X\hookrightarrow\mathcal{T}(v)\times\mathbb{R}$ 界定了像 $\alpha(X)=\coprod_{[\gamma]\in\mathcal{T}(v)}[f^{\partial}(\gamma\cap\partial_1 X)]$。因此，利用 $\mathcal{T}(v)\times\mathbb{R}$中的乘积结构， $\alpha^{\partial}(\partial_1 X)$ 可以典范地确定 $\alpha(X)$。由此， $\alpha(X)$仅依赖于 C_v 和 f_1^{∂}！注意， α 是紧空间上的连续单射，因此是到其像上的同胚。此外， X 的拓扑类型仅取决于 C_v： $\alpha(X)$对 f^{∂} 的表面依赖并不重要，因为对于给定的 v， v 的李雅普诺夫函数空间 Lyap(v)是凸的。

悬而未决的问题是：如何理解“α 是一个微分同胚”这一说法？第 3 节介绍了我们为解决这一问题所做的尝试（见引理 3.3 和定理 3.1）。

3. Recovering the algebra $C^\infty(X)$ in terms of subalgebras of $C^\infty(\partial_1 X)$

接下来，我们将借鉴函数代数的一项经典性质：对于任意紧致光滑流形 X， Y，都有代数同构 $C^\infty(X\times Y)\approx C^\infty(X)\hat{\otimes}C^\infty(Y)$，其中 $\hat{\otimes}$ 表示代数张量积 $C^\infty(X)\otimes C^\infty(Y)$ [Grot] 的某种适当完备化。

轨迹空间 $\mathcal{T}(v)$ 虽然是一个奇异空间，却具有一种替代性的光滑结构 [K3]。根据定义，函数 $h:\mathcal{T}(v)\to\mathbb{R}$ 是光滑的，当且仅当其拉回 $\Gamma^*(h):X\to\mathbb{R}$ 是 X 上的光滑函数。作为 $C^\infty(X)$ 的子空间， $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 恰由光滑函数 $g:X\to\mathbb{R}$ 构成，这些函数的方向导数 $\mathcal{L}_v g$ 在 X 中为零。若 $\mathcal{L}_v(g)=0$ 且 $\mathcal{L}_v(h)=0$，则 $\mathcal{L}_v(g\cdot h)=\mathcal{L}_v(g)\cdot h+g\cdot\mathcal{L}_v(h)=0$。因此， $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 确实是 $C^\infty(X)$ 的子代数。

注意，如果我们用一个处处非零的共形因子 λ 改变 v，那么 $\mathcal{L}_v g=0$ 当且仅当 $\mathcal{L}_{\lambda\cdot v}\,g=0$。因此，代数 $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 仅取决于 v 的共形类；换言之，仅取决于叶状结构 $\mathcal{F}(v)$。

同理，我们可以讨论轨迹空间之间的微分同胚 $\Phi^{\mathcal{T}}:\mathcal{T}(v)\to\mathcal{T}(v)$，即那些诱导代数 $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 同构的映射。

如果两个来自 $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 的（v-不变）函数在某点 $[\gamma]\in\mathcal{T}(v)$ 处取值不同，那么它们在有限集 $\gamma\cap\partial_1 X\subset\partial_1 X$ 上的取值也必然不同。因此，由包含关系 $\partial_1 X\subset X$ 诱导的显然的限制同态 $res^{\partial}_{\mathcal{T}}:C^\infty(\mathcal{T}(v))\to C^\infty(\partial_1 X)$ 是一个单同态。我们将其像记作 $C^\infty(\partial_1 X,\ v)$。由此得到一个同构$res^{\partial}_{\mathcal{T}}:C^\infty(\mathcal{T}(v))\to C^\infty(\partial_1 X,\ v)$。我们认为，子代数 $C^\infty(\partial_1 X,\ v)\subset C^\infty(\partial_1 X)$ 是我们所研究的全息问题的边界数据不可或缺的一部分。

令 $\pi_k:J^k(X,\mathbb{R})\to X$ 为从 X 到$\mathbb{R}$的光滑映射的 k阶喷射丛。我们在喷射丛 π_k的纤维上选取一族连续半范数 $|\sim|_k$，并用它为 π_k的截面定义上确界范数 $\|\sim\|_k$。我们用 jet^k 表示

显然的映射 $C^\infty(X,\mathbb{R}) \to J^k(X,\mathbb{R})$，它将每个函数 h 映为其k阶喷射的集合 $\{jet^k_x(h)\}_{x\in X}$。

空间 $C^\infty(X) = \{h$ 上的 Whitney 拓扑 [W3]： $X \to \mathbb{R}\}$ 由这类截面 $jet^k(h)$ 的范数 $\{\|jet^k(h)\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 所构成的可数族来定义，其中截面属于 π_k。该拓扑保证函数及其任意阶偏导数在 X 的紧子集上一致收敛。另请注意，对于任意 h_1， $h_2 \in C^\infty(X)$，均有 $\|jet^k(h_1\cdot h_2)\|_k \le \|jet^k(h_1)\|_k \cdot \|jet^k(h_2)\|_k$。

任意子代数 $\mathcal{A} \subset C^\infty(X)$ 都继承自 $C^\infty(X)$ 上的 Whitney 拓扑。特别地，子代数 $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \approx C^\infty(X,\ v)$ 也如此。

作为局部凸向量空间， $C^\infty(\mathcal{T}(v))$ 和 $C^\infty(\mathbb{R})$ 都是核的（[DS], [Ga]），因此拓扑张量积 $C^\infty(\mathcal{T}(v))\ \hat{\otimes}\ C^\infty(\mathbb{R})$（在 $\mathbb{R}$ 上）可唯一地定义为代数张量积 $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes C^\infty(\mathbb{R})$ [Grot] 的完备化。

我们将 $C^\infty(\mathcal{T}(v))\ \hat{\otimes}\ C^\infty(\mathbb{R})$ 视为乘积$\mathcal{T}(v)\times\mathbb{R}$ 上的“光滑”函数代数，并将其记为 $C^\infty(\mathcal{T}(v)\ \times\mathbb{R})$。

引理 3.1. </style}交集 ($\mathcal{T}(v)) \cap (f)^*(C^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$，即 X上的常值函数空间。

证明。 若光滑函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$ 在每条 v-轨迹 γ 上为常数，且属于 $(f)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$，那么它在 $\mathcal{G}(f)$ 的每个与 γ 相交的连通叶上必为常数。因此，这样的 h 在包含 γ 的最大闭 连通 子集 $A_\gamma \subseteq f^{-1}(f(\gamma))$ 上为常数。每条轨迹 γ都同胚于一个闭区间，并有一个开邻域，使得对于该邻域中的任意轨迹 γ'，都有 $A_\gamma \cap A_{\gamma'} \neq \emptyset$。由于 X连通，任意一对轨迹 γ, γ' 都可以通过一条路径 $\delta \subset X$连接起来。利用 δ 的紧致性，我们得出函数 h 沿 δ 必为常数。因此，h 在全局上为常数。□

我们考虑两个子代数， $f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \subset C^\infty(X)$ 和 $(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R})) \subset C^\infty(\partial_1 X)$；第二个被假定为边界数据中“已知”的部分。

引理 3.2. 限制算子 $H^\partial_f\colon f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \to (f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 到边界$\partial_1 X$ 是代数满同态。若 f^∂ 的值域 $f^\partial(\partial_1 X)$ 是实数集中的连通闭区间（连通 $\partial_1 X$ 时即如此），则 H^∂_f 是同构。

证明。 限制算子 H^∂_f是代数满同态，因为任意复合函数$\phi\circ f^\partial$（其中 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$）都是函数 $\phi\circ f$ 在 $\partial_1 X$ 上的限制。

另一方面，当 $f^\partial(\partial_1 X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集时，我们断言 H^∂_f 是单同态。事实上，取一个函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\phi\circ f^\partial \equiv 0$，但 $\phi\circ f$ 在 X 上不恒为零。那么存在 $x \in X$，使得 $\phi\circ f(x) \neq 0$。另一方面，根据假设，对于某个 $y \in \partial_1 X$，有 $f(x) = f^\partial(y)$。根据假设， $f^\partial\circ\phi \equiv 0$，这意味着 $\phi(f^\partial(y)) = 0$。这一矛盾证实了关于 H^∂_f 是单同态的断言。因此，当 $f^\partial(\partial_1 X)$ 是一个连通区间时， H^∂_f 是代数同构。□

考虑代数同态

$$\mathsf{P} : C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \to C^\infty(X)$$

它将每个有限和 $\sum_i h_i \otimes (f \circ g_i)$（其中 $h_i \in C^\infty(\mathcal{T}(v)) \subset C^\infty(X)$ 且 $g_i \in C^\infty(\mathbb{R})$）映射为有限和 $\sum_i h_i \cdot (g_i \circ f) \in C^\infty(X)$。

回顾一下，根据引理 3.1，$C^\infty(\mathcal{T}(v)) \cap (f)^*(C^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$，这些常数。对于任意线性无关的 $\{h_i\}_i$，该引理表明，如果 $\sum_i h_i \cdot (g_i \circ f) \equiv 0$，那么 $\{g_i \circ f \equiv 0\}_i$；因此，P 是一个单同态。

让我们比较元素的所谓射影交叉范数 $\{\| \sim \|_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$（见 (3.1)）

$$\phi = \sum h_i \otimes (f \circ g_i)$$

以及元素 $\mathsf{P}(\phi) = \sum_i h_i \cdot (f \circ g_i)$ 的范数。通过比较两个光滑函数乘积的泰勒多项式与它们各自泰勒多项式的乘积，我们得到，对于所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，

$$\|\phi\|_k =_{\mathsf{def}} \inf\Big\{ \sum_i \|h_i\|_k \cdot \|(f \circ g_i)\|_k \Big\} \geq \|\mathsf{P}(\phi)\|_k, \tag{3.1}$$

其中，inf 是对元素 $\phi \in C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 的所有表示形式 $\sum_i h_i \otimes (f \circ g_i)$ 取下确界。这里我们可以假设所有 $\{h_i\}_i$ 都是线性无关的元素，所有 $\{f \circ g_i\}_i$ 也如此；否则，ϕ 存在更简单的表示形式。

由 (3.1) 中的不等式可知，P 是一个有界（连续）算子。因此，由连续性可知，P 可延拓为一个代数同态

$$\hat{\mathsf{P}} : C^\infty(\mathcal{T}(v)) \hat{\otimes} f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \to C^\infty(X)$$

其源 是代数张量积 $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 的完备化).

引理 3.3。嵌入 $\alpha\colon X \to \mathcal{T}(v) \times \mathbb{R}$（在第 *2* 节末尾引入，并在图 *3* 中展示）诱导出一个代数满同态

$$\alpha^* : C^\infty(\mathcal{T}(v)) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathsf{id} \hat{\otimes} f^*} C^\infty(\mathcal{T}(v)) \hat{\otimes} f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{\hat{\mathsf{P}}} C^\infty(X). \tag{3.2}$$

ˆ此外，映射 P 是一个同构。

证明。首先，我们断言子代数 $\mathsf{P}\big(C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))\big) \subset C^\infty(X)$ 满足 Nachbin 定理 [Na]的三个假设。因此，根据 [Na], , $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 的 P-像在 $C^\infty(X)$ 中稠密。下面验证这三个假设。

(1) 对于每个 $x \in X$，存在一个函数 $q \in C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$，使得 $q(x) \neq 0$。只需取 $q = f \circ (t + c)$，其中 $c > \min_X f$ 且 $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是恒等映射。(2) 对于每个 x、$y \in X$，存在一个函数 $q \in C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$，使得 $q(x) \neq q(y)$（即，代数 $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$）能够区分 X 中的点）若 $f(x) \neq f(y)$，则 $q = f$ 即可。若 $f(x) = f(y)$，但 $[\gamma_x] \neq [\gamma_y]$，那么存在一个 v-不变函数 $h \in C^\infty(\mathcal{T}(v))$，使得 $h(x) = 1$ 且 $h(y) = 0$。为构造这个 ˆ h，我们在 x 附近取 ˆv-流的一个横截截面 $S_x \subset X$，使得

所有经过 S_x 的 $\hat{}v$-轨迹都不同于轨迹 γ_y。我们选取一个光滑函数 $h\colon\ S_x \to \mathbb{R}$，使得 h 支持于 $\mathrm{int}(S_x)$ 中，在边界 ∂S_x 上与其所有导数均为零，并且 $h(x) = 1$。令 $\mathcal{S}$ 表示经过 S_x 的 $\hat{}v$-轨迹的集合。当然，$\tilde{h}$ 可以延拓为一个光滑函数 $h^\dagger\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$，使得 $h^\dagger$ 沿着来自 $\mathcal{S}$ 的每条轨迹均为常数。我们用 $h^\ddagger$ 表示将 $h^\dagger$ 通过零函数进行的显然延拓。最后，$h^\ddagger$ 在 X 上的限制 h 能够区分 x 和 y。

(3) 对于每个 $x \in X$ 和 $w \in T_xX$，都存在一个函数 $q \in C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R}))$使得 $dq_x(w) \neq 0$。

将 $w = av + bw^\dagger$ 分解，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，且向量 $w^\dagger$ 与超曲面 $S_x = \hat{}f^{-1}(f(x))$ 相切。那么，如果 $a \neq 0$，则 $df(w) \neq 0$。如果 $a = 0$,~，那么存在一个函数 h:$S_x \to \mathbb{R}$，该函数及其所有导数都紧支撑在 S_x 中 x 附近，并且满足 $d\tilde{h}_x(w^\dagger) \neq 0$。与情形 (2) 一样，该函数可延拓为所需的函数 $h \in C^\infty(\mathcal{T}(v))$。现在令 $q = h \otimes 1$。

因此，$\mathrm{P}\colon\ C^\infty(\mathcal{T}(v)) \otimes f^*(C^\infty(\mathbb{R})) \longrightarrow C^\infty(X)$ 的像是稠密的。因此，$\hat{}\mathrm{P}$ 以及 $(\alpha)^*\colon C^\infty(\mathcal{T}(v)) \hat{}\otimes C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X)$ 都是满同态。

$\hat{}$ 下面证明 P 也是单同态。取一个典型元素

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \otimes (f \circ g_i) \in C^\infty(X, v) \hat{\otimes} f^*(C^\infty(\mathbb{R})),$$

视为一个在所有范数 $\| \sim \|_k$ 上收敛的和，这些范数见 (3.1)。我们要证明，若 $\hat{}\mathrm{P}(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cdot (f \circ g_i)$ 在 X 上为零，则 $\theta = 0$。

对于每个点 $x \in \mathrm{int}(X)$，存在一个小的闭圆柱体 $H_x \subset \mathrm{int}(X)$，它包含 x，并由经过一个小的 n-球 $D^n \subset f^{-1}(f(x))$ 的轨迹线段组成，该球与流横截。因此，圆柱体 H_x 的乘积结构 $D^1 \times D^n$ 由 v-流和李雅普诺夫函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 给出。

我们将问题局部化到圆柱体 H_x。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X, v) \hat{\otimes} f^*(C^\infty(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\hat{\mathrm{P}}} & C^\infty(X). \\ \downarrow \mathrm{res}' \hat{\otimes} \mathrm{res}'' & & \downarrow \mathrm{res} \\ C^\infty(D^n) \hat{\otimes} C^\infty(D^1) & \xrightarrow{\approx\, \hat{\mathrm{Q}}} & C^\infty(H_x), \end{array} \tag{3.3}$$

其中 $\mathrm{res}\colon C^\infty(X) \to C^\infty(H_x)$ 是自然同态，

$$(\mathrm{res}' \hat{\otimes} \mathrm{res}'')\Big(\sum_{i=1}^{\infty} h_i \otimes (f \circ g_i)\Big) =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^{\infty} h_i|_{D^n} \otimes (f \circ g_i)|_{D^1},$$

以及对于 $\tilde{h}_i \in C^\infty(D^n)$ $\tilde{g}_i \in C^\infty(D^1)$ 的 $\hat{}\mathrm{Q}\big(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{h}_i \otimes \tilde{g}_i\big) =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{h}_i \cdot \tilde{g}_i$。

由于 $\hat{}\mathrm{Q}$ 是 [Grot] 的同构且 $\hat{}\mathrm{P}(\theta) = 0$，由 (3.5) 可知，对于任意圆柱体 H_x，都有 $\theta \in \ker(\mathrm{res}''\hat{}\otimes\mathrm{res}'')$。重新整理求和中的各项后，不妨设所有函数 $\{h_i|_{D^n}\}_i$ 都是线性无关的。利用函数 $h_i|_{D^n}$ 和 $(f \circ g_i)|_{D^1}$

依赖于 H_x 中的互补坐标组，我们得出这些函数对于任意 $H_x \subset \mathrm{int}(X)$ 都必须为零。因此， $\theta = 0$ 在 $\mathrm{int}(X)$ 中处处成立，并且根据连续性， θ 在 X 上为零。□

现在考虑利用边界数据定义的"已知"代数同态

$$(\alpha^{\partial})^* : C^{\infty}(\mathcal{T}(v)) \hat{\otimes} C^{\infty}(\mathbb{R}) \overset{\approx \mathrm{res}^{\partial}_{\mathcal{T}} \hat{\otimes} (f^{\partial})^*}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow C^{\infty}(\partial_1 X, v) \hat{\otimes} (f^{\partial})^*(C^{\infty}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\hat{\mathsf{R}}^{\partial}} C^{\infty}(\partial_1 X), \tag{3.4}$$

利用边界数据。根据 $C^{\infty}(\partial_1 X, v)$ 的定义，$\mathrm{res}^{\partial}_{\mathcal{T}}: C^{\infty}(\mathcal{T}(v)) \to C^{\infty}(\partial_1 X, v)$ 是一个同构，而 $\hat{}\mathsf{R}^{\partial}$ 表示有界同态 R^{∂} 的完备化。该同态将每个元素 $\sum_i h_i \otimes (f^{\partial} \circ g_i)$（其中 $h_i \in C^{\infty}(\partial_1 X, v)$ 且 $g_i \in C^{\infty}(\mathbb{R})$）映射为总和 $\sum_i h_i \cdot (g_i \circ f^{\partial})$。

下一个引理表明，即使 $\partial_1 X$ 有许多连通分支，定理 3.1 的假设也并不苛刻。

引理 3.4。 连通紧流形 X 上的任一可贯穿向量场 v 都存在一个李雅普诺夫函数 f： $X \to \mathbb{R}$，使得 $f(X) = f(\partial_1 X)$。

证明。注意，对于任意李雅普诺夫函数 f，像 $f(\partial_1 X)$ 是有限多个互不相交的闭区间 $\{I_k = [a_k, b_k]\}_k$ 的并，其中指标 k 反映了这些区间在 $\mathbb{R}$ 中的自然顺序。我们将逐步说明如何通过变形原函数 f 来减少这些区间的数量。注意，任意李雅普诺夫函数在 X 上的局部极值都出现在其边界 $\partial_1 X$ 上，且远离轨迹 $\partial_2 X(v)$，在该轨迹上 v 与 $\partial_1 X$ 相切。考虑一对点 $A_{k+1}, B_k \in \partial_1 X \setminus \partial_2 X(v)$，使得 $f(A_{k+1}) = a_{k+1}$ 且 $f(B_k) = b_k$，其中 $a_{k+1} > b_k$。于是，我们可以在局部最大值 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}B_k$ 附近增大 f，使得其 B_k 局部化变形 f（作用于 f）满足性质 $f(B_k) > f(A_{k+1})$，并且 f 是 $\tilde{}$ v 的李雅普诺夫函数。与 $f(\partial_1 X)$ 相比，这一构造至少使 $f(\partial_1 X)$ 中的区间数量减少一个。□

现在我们可以陈述本文的主要结果了。

定理 3.1。 假设值域 $f^{\partial}(\partial_1 X)$ 是实数集 $\mathbb{R}$,[1] 中的一个连通区间，则代数 $C^{\infty}(X)$ 同构于子代数

$$C^{\infty}(\partial_1 X, v) \hat{\otimes} (f^{\partial})^*(C^{\infty}(\mathbb{R})) \subset C^{\infty}(\partial_1 X) \hat{\otimes} C^{\infty}(\partial_1 X).$$

此外，将 *(3.2)* 与 *(3.4)* 结合起来，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(\mathcal{T}(v)) \hat{\otimes} f^*(C^{\infty}(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\hat{\mathsf{R}}} & C^{\infty}(X) \\ \downarrow \mathrm{id} \hat{\otimes} H^{\partial}_f & & \downarrow \mathrm{res} \\ C^{\infty}(\partial_1 X, v) \hat{\otimes} (f^{\partial})^*(C^{\infty}(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\hat{\mathsf{R}}^{\partial}} & C^{\infty}(\partial_1 X), \end{array} \tag{3.5}$$

[1]这对于连通的 $\partial_1 X$ 情形成立

其中，竖直同态 id $\hat{\otimes} H_f^\partial$ 和水平同态 $\hat{}$实数集 都是同构，而竖直满同态 res 就是显然的限制算子。

因此，对id $\hat{\otimes} H_f^\partial$求逆，可得一个代数同构

$$\mathcal{H}(v,f) : C^\infty(\partial_1 X, v) \hat{\otimes} (f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R})) \approx C^\infty(X). \tag{3.6}$$

证明。考虑交换图 (3.5)。其右上角是“未知”的，而下排是“已知”的，表示边界数据，且 res 显然是满同态。根据引理 3.2，左侧垂直箭头 id $\hat{\otimes} H_f^\partial$ 是同构。由于根据引理 3.3，$\hat{}$R 是同构，因此 $\hat{}$R $\circ$ (id $\hat{\otimes} H_f^\partial$)$^{-1}$ 也必定是同构。特别地，$\hat{}$R$^\partial$ 是满同态，其核同构于定义在 X 上、在 $\partial_1 X$ 上的限制为零的光滑函数。若 $z \in C^\infty(X)$ 是一个光滑函数，且零是其正则值，$z^{-1}(0) = \partial_1 X$，并且 $z > 0$ 属于 int(X)，那么 res 的核就是主理想 m(z)，它由 z 生成。因此，根据 (3.5) 的交换性，同态 $\hat{}$R$^\partial$ 的核也必定是主理想 M$_\partial$，由元素 ($\hat{}$R $\circ$ (id $\hat{\otimes} H_f^\partial$))$^{-1}$($z$) 生成。□

推论 3.1. 如果值域 $f^\partial(\partial_1 X)$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 中的一个连通区间，那么这两个拓扑代数 $C^\infty(\partial_1 X, v) \subset C^\infty(\partial_1 X)$ 和 $(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R})) \subset C^\infty(\partial_1 X)$ 便可在同构意义下确定代数 $C^\infty(X)$，从而确定流形 X 的光滑拓扑类型。

证明。 我们称代数 $\mathcal{A}$ 的一个极大理想为非平凡的，如果它不同于 $\mathcal{A}$。

根据定理 3.1，代数 $C^\infty(X)$ 可由 $\partial_1 X$ 上的两个代数在同构意义下确定。反过来，代数 $C^\infty(X)$ 决定了X的光滑拓扑类型，将其视为一个环空间。这一事实基于这样一种解释：X 是代数 $C^\infty(X)$ [KMS] 的非平凡极大理想构成的空间 $\mathcal{M}(C^\infty(X))$。

设 $\mathfrak{m}_v^\partial \lhd C^\infty(\partial_1 X, v)$ 和 $\mathfrak{m}_f^\partial \lhd (f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 是一对非平凡极大理想。注意，$\mathfrak{m}_v^\partial = \mathfrak{m}_v^\partial([\gamma])$ 由 $C^\infty(\partial_1 X, v)$ 中在轨迹$\gamma \cap \partial_1 X$上消失的函数组成，而 $\mathfrak{m}_f^\partial = \mathfrak{m}_f^\partial(c)$ 由 $(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 中在轨迹 $\partial_1 X \cap f^{-1}(c)$ 上消失的函数组成，其中 $c \in f(\partial_1 X) \subset \mathbb{R}$。我们用 $\langle \mathfrak{m}_v^\partial, \mathfrak{m}_f^\partial \rangle$ 表示 $C^\infty(\partial_1 X, v)$ $\hat{\otimes}$ $(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 的极大理想，该理想同时包含理想 $\mathfrak{m}_v^\partial \hat{\otimes} 1$ 和 $1 \hat{\otimes} \mathfrak{m}_f^\partial$。若值域$f^\partial(\partial_1 X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个连通区间，且 $\langle \mathfrak{m}_v^\partial, \mathfrak{m}_f^\partial \rangle$ 是非平凡理想，则 $\gamma \cap f^{-1}(c) \neq \emptyset$。否则，$\gamma \cap f^{-1}(c) = \emptyset$。因此，借助 (3.6) 中的同构 $\mathcal{H}(v, f)$，$C^\infty(X)$ 的非平凡极大理想（根据 [KMS]，它们对应于点$x = \gamma \cap f^{-1}(c) \in X$）具有如下形式：$\mathcal{H}(v, f)\big(\langle \mathfrak{m}_v^\partial, \mathfrak{m}_f^\partial \rangle\big)$。□

推论 *3.2.* 设值域 $f^\partial(\partial_1 X)$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个连通区间。固定同构$\mathcal{H}(v, f)$（见 *(3.6)*）后，任何保持子代数 $C^\infty(\partial_1 X, v)$ 和 $(f^\partial)^*(C^\infty(\mathbb{R}))$ 的代数同构 $\Psi^\partial : C^\infty(\partial_1 X) \to C^\infty(\partial_1 X)$，都能典范地扩展为代数同构 $\Psi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$。

因此，任何由此类同构 Ψ^∂ 构成的群 G 的作用，都可典范地扩展为代数 $C^\infty(X)$ 上的一个 G-作用，并通过它扩展为 X 上由光滑微分同胚构成的一个 G-作用。

证明。 根据 [Mr], , 任意代数同构 $\Psi : C^\infty(X_1) \to C^\infty(X_2)$ 都由唯一的光滑微分同胚 $\Phi : X_1 \to X_2$ 诱导。掌握这一事实后，根据定理 2.1 和定理 3.1，证明便是定义层面上的直接推论。□

仍需解决以下关键问题：如何内在地刻画代数 $C^\infty(\mathcal{T}(v)) \approx \ker\{\mathcal{L}_v : C^\infty(X) \to C^\infty(X)\}$ 在代数$C^\infty(\partial_1 X)$中的迹 $C^\infty(\partial_1 X,\ v)$?

显然， $C^\infty(\partial_1 X,\ v)$中的函数在因果映射的每条 C_v-“轨迹” $\gamma^\partial := \gamma \cap \partial_1 X$ 上都是常数。此外，任何在每个有限集 γ^∂ 上为常数的光滑函数 $\psi : \partial_1 X \to \mathbb{R}$ ，都会唯一地诱导出一个连续函数 ϕ ，它在 X 上沿每条 v-轨迹 γ均为常数。然而，这类函数 ϕ 未必会自动光滑 X （先验地说，它们只是 Hölder 连续函数，且 Hölder 指数仅受维数 X 控制）！这种潜在的复杂性引出了以下问题。

问题 3.1. 对于 X 上的横截且边界一般位置（或者说，穿越一般位置）的向量场 v ，能否用因果映射 C_v ，以及可能存在于 $\partial_1 X$ 中的某些额外的由 v 生成的数据，来刻画子代数 $C^\infty(\partial_1 X, v) \subset C^\infty(\partial_1 X)$? ♢

为对可能的答案有所了解，我们需要考察向量场 v 在边界 $\partial_1 X$ 上生成的 Morse 分层的概念 [Mo]。

设 $\dim(X) = n+1$ ，且 v 是 X 上一个边界一般位置的可贯穿向量场。

让我们回顾 Morse 分层 $\{\partial_j^\pm X(v)\}_{j\in[1,n+1]}$ 的定义。我们将集合 $\partial_2 X(v)$ 定义为 v 与 $\partial_1 X$ 相切的轨迹。它将 $\partial_1 X$ 分成 $\partial_1^+ X(v)$ 和 $\partial_1^+ X(v)$。设 $\partial_3 X(v)$ 为 v 与 $\partial_2 X(v)$ 相切的轨迹。对于边界一般位置的 v， $\partial_2 X(v)$ 是 $\partial_1 X(v)$ 的一个光滑子流形，而 $\partial_3 X(v)$ 是一个将 $\partial_2 X(v)$ 分成两个区域 $\partial_2^+ X(v)$ 和 $\partial_2^- X(v)$ 的子流形。沿着 $\partial_2^+ X(v)$， v 指向 $\partial_1^+ X(v)$ 的内部；沿着 $\partial_2^- X(v)$， v 指向 $\partial_1^- X(v)$ 的内部。如此反复构造，直至得到有限集 $\partial_{n+1}^\pm X(v)$。

根据定义，边界一般位置向量场 [K1] 满足关于边界 $\partial_1 X$ 的 v 某种嵌套横截性；这种横截性保证所有莫尔斯分层 $\partial_j X(v)$ 都是正则闭子流形，且所有分层 $\partial_j^\pm X(v)$ 都是紧子流形。

对于一个贯穿边界泛型 v，映射 $C_v : \partial_1^+ X(v) \to \partial_1^- X(v)$ 使得我们能够恢复 Morse 分层 $\{\partial_j^\pm X(v)\}_{j>0}$ ([K4])。

现在让我们来描述代数$C^\infty(\partial X)$ 中子代数 $C^\infty(\partial_1 X,\ v)$ 的一个理想候选。

我们用 $\mathcal{L}_v^{(k)}$ 表示李导数 $\mathcal{L}_v$ 的第 k 次迭代。令 $\mathbf{M}(v)$ 为光滑函数 ψ 的子代数：$\partial_1 X \to \mathbb{R}$ ，使得 $(\mathcal{L}_v^{(k)}\psi)\big|_{\partial_{k+1}X(v)} = 0$ 对所有 $k \le n$ 均成立（根据莱布尼茨法则，$\mathbf{M}(v)$ 确实是一个子代数）。记 $\mathbf{M}(v)^{C_v}$ 为 $\mathbf{M}(v)$ 中在每条（有限）横截轨迹 C_v 上为常数的函数所构成的子代数 $\gamma^\partial := \gamma \cap \partial_1 X \subset \partial_1 X$。

猜想 3.1。 设 v 是光滑紧致$(n+1)$流形 X 上的一个横截且边界一般位置向量场。那么代数 $C^\infty(\partial_1 X, v)$ 与子代数$\mathsf{M}(v)^{C_v} \subset C^\infty(\partial_1 X)$相同。

特别是， C^∞（$\partial_1 X, v$）可由因果映射 C_v 以及 v 在 $\partial_2 X$（v）上的限制确定。♢

容易验证， C^∞($\partial_1 X$， v) $\subset \mathsf{M}(v)^{C_v}$; 挑战在于证明这两个代数相同。

全息定理（推论 2.1）是在假设满足定义 2.1 中的性质 A 的前提下建立的。若假设猜想 3.1 成立，那么根据推论 3.1，我们可以从全息定理的假设中去掉性质 A。事实上，子代数 C^∞($\partial_1 X$， v)和(f^∂)*($C^\infty(\mathbb{R})$)将可以用 C_v 和f^∂来描述。这样便能独立证明推论 2.1 的一个自然推广。

致谢：作者感谢 Vladimir Goldshtein 在分析光滑函数空间方面给予的宝贵帮助。

References

[Br] Louis de Branges, L., *The Stone-Weierstrass theorem*, 《美国数学杂志》, (1959) 10 (5), 822-824. [ChMa] Chen, L., Mann, K., *Structure Theorems for Actions of Homeomorphism Groups*, arXiv:1902.05117v3 [math.GT] 9 2020年8月. [D] Dieudonn´e, J., *Treatise on Analysis*, 第3卷, (1972) 纽约-伦敦：Academic Press, Inc., MR 0350769.[DS] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators, Part 1: General Theory*, I nterscience, 纽约、伦敦, (1958). [Ga] Gamelin, T. W., *Uniform Algebras*, 现代分析丛书，Prentice-Hall, Inc., 新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1969年. [GRS] Gelfand, I., Raikov, D., Shilov, G., *Commutative Normed Rings*（俄文），莫斯科国家物理数学文献出版社，1960年. [Grot] Grothendieck, A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*（法文），普罗维登斯：《美国数学会》，(1966)，ISBN 0-8218-1216-5. [K1] Katz, G., *Traversally Generic & Versal Flows: Semi-algebraic Models of Tangency to the Boundary*, 《亚洲数学杂志》, 第21卷，第1期 (2017)，127-168 (arXiv:1407.1345v1 [mathGT] 4 2014年7月)). [K2] Katz, G., *Causal Holography in Application to the Inverse Scattering Problem*, 《反问题与成像杂志》，2019年6月，13(3)，597-633 (arXiv: 1703.08874v1 [Math.GT], 27 2017年3月). [K3] Katz, G., *Morse Theory of Gradient Flows, Concavity, and Complexity on Manifolds with Boundary*, World Scientific, (2019). [K4] Katz, G., *Causal Holography of Traversing Flows*, 《动力系统与微分方程杂志》 (2020) https://doi.org/10.1007/s10884-020-09910-y [K5] Katz, G., *Holography of geodesic flows, harmonizing metrics, and billiards' dynamics*, (已提交) arXiv:2003.10501v2 [math.DS] 1 2020年4月. [KMS] Kriegl, A., Michhor, P., Schachermayer, W., *Characters of Algebras of Smooth Functions*, 《全球分析与几何年刊》第7卷，第2期 (1989)，85-92. [LP] Lax, P., Phillips, R., *Scattering Theory*, Academic Press, 阿姆斯特丹，1967年. [Me] Melrose, R. *Geometric Scattering Theory*, 剑桥大学出版社，剑桥，1995年. [Mr] Mrcun, J., *On isomorphisms of algebras of smooth functions* 133, 10, , AMS论 3109 3113, 2005 文集，第-卷，第-期.

[Mo] Morse, M. *Singular points of vector fields under general boundary conditions*,《美国数学杂志》51 (1929), 165-178. [Na] Nachbin, L., *Sur les algèbres denses de fonctions diffèrentiables sur une variètè*,《巴黎科学院院报》228 (1949) 1549-1551. [W3] Whitney, H., *Geometric Integration Theory*, 普林斯顿，新泽西州，普林斯顿大学出版社，1957年.MIT, Department of Mathematics, 77 Massachusetts Ave., Cambridge, MA 02139, U.S.A.*Email address*: gabkatz@gmail.com