arXiv:2302.05423v1 [math.FA] 10 Feb 2023

约化坐标超值域的双等距算子

Sameer Chavan 和 Md. Ramiz Reza

摘要。设 (S_1, S_2) 是一个双等距算子，即复希尔伯特空间 $\mathscr{H}$. 上的一对交换等距算子 S_1 和 S_2 。根据冯·诺伊曼–沃尔德分解， S_1 的超值域 $\mathscr{H}_\infty(S_1) := \cap_{n=0}^\infty S_1^n \mathscr{H}$ 约化 S_1 为一个酉算子。尽管 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 是 S_2 的不变子空间，但一般而言， $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 并不是 S_2. 的约化子空间。我们证明，当且仅当 $\mathscr{H}$ 的子空间 S_2(核 S_1^*) 与 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 正交时， $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 S_2 约化为一个等距算子。此外，我们描述满足上述正交条件的所有双等距算子 (S_1, S_2)。

1. 动机与主定理

对于复希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$，令 $\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ 表示从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$. 的有界线性变换所构成的巴拿赫空间。我们将 $\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ 简记为 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$，即 C^* 上有界线性算子的 $\mathscr{H}$. -代数。若 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭子空间，则称其对 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 不变，如果 $T(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{M}$ 。若 $\mathscr{M}$ 使得 T 被约化，则称 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}$ 对 T. 不变。若 $\mathscr{M}$ 本质约化 T，则称 $P_{\mathscr{M}} T|_{\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}} \in \mathscr{B}(\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}, \mathscr{M})$ 和 $P_{\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}} T|_{\mathscr{M}} \in \mathscr{B}(\mathscr{M}, \mathscr{H} \ominus \mathscr{M})$ 是紧线性变换，其中 $P_{\mathscr{K}}$ 表示从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$（ $\mathscr{H}$. 的闭子空间）的正交投影。 $\mathscr{H}_\infty(T)$ 的超值域定义为空间 $\cap_{n=0}^\infty T^n \mathscr{H}$ 。若算子 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足 $T^*T \leqslant I$（分别为 $T^*T = I$），则称其为压缩算子（分别为等距算子）。若不存在 $\mathscr{H}$ 的非零闭子空间 L 将 T 约化为酉算子，则称算子 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 为完全非酉。

若算子 $S_1, S_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的算子对 (S_1, S_2) 满足可交换，则称其为.....若 $S_1 S_2 = S_2 S_1$. 可交换算子对 (S_1, S_2) 满足双重可交换，则称其为.....若空间 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 上的算子 S_1 和 S_2 的可交换算子对 (S_1, S_2) 满足.....，则称其为上的双压缩算子 $\mathscr{H}$ .....若 S_1 和 S_2 均为压缩算子。空间 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 上的算子 S_1 和 S_2 的可交换算子对 (S_1, S_2) 若.....，则称其为上的双等距算子 $\mathscr{H}$.....若 S_1 和S_2 均为等距算子。若此外 S_1 和 S_2 为酉算子，则称 (S_1, S_2) 为上的双酉算子 $\mathscr{H}$. 。毋庸置疑，关于双压缩算子及相关类别已有大量文献（例如参见 [**2**, **3**, **4**, **7**, **8**, **10**,**11**, **14**]）。

2010 数学主题分类。 主要分类 47A13；次要分类 30H10，30J05。关键词和短语。可交换等距算子，内函数，Hardy空间，Wold 型分解。

令 $\mathbb{D}$表示 $\mathbb{C}$. 中以原点为中心的开单位圆盘。对于复希尔伯特空间 $\mathscr{E}$，令 $\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D})$ 表示由 $\mathscr{E}$ 值全纯函数构成的 Hardy 空间，这些函数定义在 $\mathbb{D}$. 上。对于复巴拿赫空间 X，令 $\mathscr{H}^\infty_X(\mathbb{D})$ 表示由 X 值有界全纯函数构成的巴拿赫空间，这些函数定义在 $\mathbb{D}$. 上。对于 $\phi \in \mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$，令 $M_{\phi,\mathscr{E}}$ 表示在 $\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D})$ 上由 ϕ 给出的乘法算子。若 $\mathscr{E}=\mathbb{C}$，则将 $\mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$（分别为 $M_{\phi,\mathscr{E}}$）简记为 $\mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$（分别为 M_ϕ）。$\mathbb{D}$ 的 $\mathscr{B}(\mathscr{E})$ 值施尔类是 $\mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$ 的闭单位球。若 $\phi \in \mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$ 满足 $\phi \in \mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$，且对于单位圆 $\mathbb{T}$ 上几乎处处的 ζ， ϕ 都是等距算子，则称其为内函数（算子值施尔类的基础理论参见 [**2, 15**] ）。

本研究的出发点是以下定理，它推广了冯·诺伊曼–沃尔德分解（见 [**5**, 定理 I.3.6] 和 [**15**,定理 I.3.2]）。

定理 1.1. 设 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 为一个压缩算子，且 $\mathscr{E}:=$核 T^*.考虑由下式给出的子空间 $\mathscr{H}_u(T)$ 和 $\mathscr{H}_s(T)$，它们属于 $\mathscr{H}$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_u(T) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{h\in\mathscr{H}:\|T^nh\|=\|h\|=\|T^{*n}h\|\right\},\\ \mathscr{H}_s(T) &= \mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_u(T).\end{aligned}$$

那么 $\mathscr{H}_u(T)$ 将 T约化为酉算子 $U=T|_{\mathscr{H}_u(T)}$ $S=T|_{\mathscr{H}_s(T)}$ 是完全非酉的，并且分解

$$T=U\oplus S \text{ on } \mathscr{H}=\mathscr{H}_u(T)\oplus\mathscr{H}_s(T)$$

是唯一确定的。

特别地，若 T 是等距算子，则 S 与乘以 z 的算子 $M_{z,\mathscr{E}}$ 在 $\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D})$ $\mathscr{H}_u(T)=\mathscr{H}_\infty(T)$ 上酉等价，并且

$$\mathscr{H}_s(T)=\bigvee_{w\in\mathbb{D}}\ker(S^*-w),\quad \mathscr{H}_s(T)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S^n(\ker S^*).$$

注 1.2。注意，$\mathscr{H}_u(T)\subseteq\mathscr{H}_\infty(T)$。一般而言，这个包含关系是严格的（例如，考虑具有非酉可逆正交直和项的压缩算子）。

设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个压缩算子。部分 $U=T|_{\mathscr{H}_u(T)}$ 和 $S=T|_{\mathscr{H}_s(T)}$ 分别称为 T 的酉部分 和完全非酉部分，而 $T=U\oplus S$ 称为 T. 的典范分解 。我们称 T 具有*Wold* 型分解，如果

$$\mathscr{H}_u(T)=\mathscr{H}_\infty(T) \text{ and } \mathscr{H}_s(T)=\bigvee_{n=0}^{\infty}S^n(\ker S^*) \tag{1.1}$$

（参见 [**12**,定义 **1.1**]）。

注 1.3。设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个左可逆算子。若 T 满足 $TT^*+(T^*T)^{-1}\leqslant 2I$，则 T 具有 Wold 型分解。这可由 [**12**, 定理 3.6] 推得。

本短文的研究动机源于以下关于双等距算子结构的问题。

问题 1.4. 设 (S_1, S_2) 是$\mathscr{H}$. 上的双等距算子（分别为双压缩算子）。当 $\mathscr{H}_\infty$（S_1）约化 S_2 时，它何时是等距算子（分别为压缩算子）？

若 S_2 的余核有限维，则已在 [4, 定理 2.3] 中证明，$\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 S_2 约化为一个等距算子。一般而言，$\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 并非 S_2.的约化子空间

例 1.5. 设 $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 属于开单位圆盘 $\mathbb{D}$. 上的施尔类。令 μ 表示权函数为 $w = 1 - |\varphi|^2$. 的加权弧长测度 $w\frac{d\theta}{2\pi}$。设 $\mathscr{G} := L^2(\mathbb{T}, \mu)$，并令 V: $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$为 $\mathscr{B}(\mathscr{G})$ 中由坐标函数 ζ 诱导的乘法算子。对于整数 $n \geqslant 0$，令 $e_n \in \mathscr{G}$ 由 $e_n(\zeta) = \zeta^n, \zeta \in \mathbb{T}$. 给出。定义 $B: \mathscr{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(\mathbb{D})$ 为

$$B(z^n) = e_n, \quad n \geqslant 0,$$

它通过线性连续延拓，成为定义在整个 $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$（事实上，$\|B\| \leqslant \mu(\mathbb{T})$）上的有界线性算子。注意

$$M_V B(z^n) = V(e_n) = e_{n+1} = B(z^{n+1}) = BM_z(z^n), \quad n \geqslant 0,$$

因此我们得到

$$M_V B = BM_z. \tag{1.2}$$

定义有界线性算子 S_1, S_2 于 $\mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(\mathbb{D}) \oplus \mathscr{H}^2(\mathbb{D})$ 上，使得

$$S_1 = \begin{bmatrix} M_V & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} M_{z,\mathscr{G}} & B \\ 0 & M_\varphi \end{bmatrix} \text{ on } \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(\mathbb{D}) \oplus \mathscr{H}^2(\mathbb{D}).$$

显然，S_1 是一个等距算子。我们来验证 S_2 也是一个等距算子。由于$M^*_{z,\ \mathscr{G}}B(z^n) = M^*_{z,\ \mathscr{G}}(e_n) = 0$（因为 $e_n \in \mathscr{G}$），我们有$M^*_{z,\ \mathscr{G}}B = 0$，因此

$$S_2^* S_2 = \begin{bmatrix} I & M^*_{z,\mathscr{G}}B \\ B^*M_{z,\mathscr{G}} & B^*B + M^*_\varphi M_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^*B + M^*_\varphi M_\varphi \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

此外，对于任意 $f, g \in \mathscr{H}^2(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned} \langle (B^*B + M^*_\varphi M_\varphi) f,\, g \rangle &= \langle Bf,\, Bg \rangle + \langle \varphi f,\, \varphi g \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\mu(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\zeta, \end{aligned}$$

这等于 $\langle f, g \rangle$，因为 $d\mu(\zeta) = (1 - |\varphi(\zeta)|^2) d\zeta$. 由此可知，根据（1.3），$S_2$ 是一个等距算子。此外,

$$S_1 S_2 = \begin{bmatrix} M_V M_{z,\mathscr{G}} & M_V B \\ 0 & M_z M_\varphi \end{bmatrix}, \quad S_2 S_1 = \begin{bmatrix} M_{z,\mathscr{G}} M_V & BM_z \\ 0 & M_\varphi M_z \end{bmatrix}.$$

结合 (1.2)，这表明 S_1 和 S_2 可交换。因此，(S_1, S_2) 是一个双等距算子。注意,

$$\varphi \text{ is an inner function} \iff \mu = 0 \iff \mu(\mathbb{T}) = 0 \iff \mathscr{G} = \{0\}.$$

由于 $B(1) = \mu(\mathbb{T})$ 且 $\mathscr{H}_\infty(S_1) = \mathscr{H}^2_{\mathscr{G}}(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\infty(S_1) \text{ is a reducing subspace for } S_2 &\iff B = 0 \\ &\iff \varphi \text{ is an inner function.} \end{aligned}$$

假设 φ 不是内函数。因此 $\mathscr{H}^2(\mathbb{D}) \subseteq \mathscr{G}$，从而 $\mathscr{G}$ 是无限维的。此外，由于 $B(1) \neq 0$,

$$S_2(\ker S_1^*) = \{\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha\varphi \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

特别地， $S_2(\ker S_1^*)$ 与 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 不正交。 ∎

如果 S_1 有 Wold 型分解，那么事实证明， $S_2(\ker S_1^*)$ 与 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 的正交性是回答问题 1.4 的唯一决定性因素（见注 1.7）。

定理 1.6. 设 (S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}$ 上的一个双等距算子，并设 $\mathscr{E} := \ker S_1^*$。以下命题等价：

(i) $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 S_2 约化为一个等距算子；*(ii)* $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 (S_1, S_2) 约化为一个双重交换双等距算子；*(iii)* $S_2(\mathscr{E})$ 与 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 是 $\mathscr{H}$ 的正交子空间；*(iv)* 对每个 $x \in \mathscr{E}$，$P_\infty \bigvee\{S_1^{*k} S_2 x : k \geqslant 1\}$ 都是有限维的，其中 P_∞ 表示 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 的正交投影；*(v)* $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 S_2 本质约化为一个等距算子。

若(i) 成立，则存在一个内函数 $\phi : \mathbb{D} \to \mathscr{B}(\mathscr{E})$，一个希尔伯特空间 $\mathscr{F}$，一个常值酉算子值函数 $\psi : \mathbb{D} \to \mathscr{B}(\mathscr{F})$，$\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 中的一个闭子空间 $\mathscr{H}_{uu}$，以及 $\mathscr{H}_{uu}$ 上的一个双酉算子 (V_1, V_2)，使得(S_1, S_2) 酉等价于

$$(V_1, V_2) \oplus (M_{\psi,\mathscr{F}}, M_{z,\mathscr{F}}) \oplus (M_{z,\mathscr{E}}, M_{\phi,\mathscr{E}}) \; on \; \mathscr{H}_{uu} \oplus \mathscr{H}^2_{\mathscr{F}}(\mathbb{D}) \oplus \mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}). \tag{1.4}$$

注 1.7. 考察第 2 节中给出的定理 1.6 的证明可知，若 (S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}$ 上的一个双压缩算子，且 S_1 具有 Wold 型分解，则 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 S_2 约化为压缩算子，当且仅当 $S_2(\mathscr{E})$ 和 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 是 $\mathscr{H}$ 的正交子空间

2. 定理 1.6 的证明

设 (S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}$ 上的一个双压缩算子。本节中，我们使用以下记号：

- $\mathscr{E} = \ker S_1^*$
- P_∞ 从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 的正交投影。下文给出的定理 1.6 的证明需要若干引理 .

引理 2.1. 设 (S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}$ 上的一个双压缩算子。考虑 $\mathscr{H}$ 的闭子空间 $\mathscr{M} = \bigvee_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker(S_1 - \lambda)$。那么以下结论成立：

(i) 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(S_1 - \lambda)$ 均约化 (S_1, S_2)，且

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{T}} \ker(S_1 - \lambda). \tag{2.1}$$

(ii) $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}_u(S_1)$ 的一个子空间，使得

$$\mathscr{H}_u(S_1) = \mathscr{M} \oplus \mathscr{H}_u(S_1|_{\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}}).$$

证明。(i) 由于 $S_1|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$ 是酉算子（见定理 1.1），且 $\ker(S_1 - \mu), \mu \in \mathbb{T}$ 是 $\mathscr{H}_u(S_1)$ 的子空间，因此只要 $\lambda \neq \mu$，对于任意 $\lambda \in \mathbb{T}$，空间 $\ker(S_1 - \lambda)$ 与 $\ker(S_1 - \mu)$ 就正交。希尔伯特空间上任意等距算子的特征值都位于单位圆上，由此得到 (2.1)。令 $\lambda \in \mathbb{T}$. 显然，$\ker(S_1 - \lambda)$ 是 S_1. 的不变子空间。此外，对于任意

$x \in \ker(S_1 - \lambda)$ $S_1(S_2x) = \lambda S_2x$ （因为 $S_1S_2 = S_2S_1$），因此 $S_2x \in \ker(S_1 - \lambda)$。故 $\ker(S_1 - \lambda)$ 对 S_2. 不变。为证明 $\ker(S_1 - \lambda)$ 将算子对 (S_1, S_2) 约化，令 $x \in \ker(S_1 - \lambda)$。根据 [**15**, 命题 1.3.1],$S_1^*x = \overline{\lambda}x$，因此 $S_1^*x \in \ker(S_1 - \lambda)$，这表明 $\ker(S_1 - \lambda)$ 将S_1.约化。这也表明 $S_2^*(S_1^*x - \overline{\lambda}x) = 0$，或者等价地， $S_1^*(S_2^*x) = \overline{\lambda}S_2^*x$。再次应用 [**15**, 命题 1.3.1] 可得 $S_1(S_2^*x) = \lambda S_2^*x$，即 $S_2^*x \in \ker(S_1 - \lambda)$，从而完成 (i) 的验证。

（ii）显然， $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}_u(S_1)$的一个子空间，使得 $S_1\mathscr{M} = \mathscr{M}$. 因此，$\mathscr{H}_u(S_1|_{\mathscr{M}}) = \mathscr{M}$，故由（i）可得， $\mathscr{H}_u(S_1) = \mathscr{M} \oplus \mathscr{H}_u(S_1|_{\mathscr{H}\ominus\mathscr{M}})$. □

下文第（i）部分的一个特例（当(S_1, S_2)是双等距算子时）已在 [**14**, 引理 1] 中通过一种完全不同的方法得到。此外，下文第（ii）部分中定义的空间 $\mathscr{N}_x$也出现在 [**4**, 定理 2.3]的证明中。

引理 2.2. 设(S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}$. 上的一个双压缩算子。假设 S_1 是一个左可逆算子，且具有如下 *Wold* 型分解 $S_1 = U \oplus S$： 在$\mathscr{H} = \mathscr{H}_u(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1)$。 则以下结论成立：

(i) $\mathscr{H}_u(S_1)$ 是 S_2 的不变子空间，(ii) 若 $\mathscr{N}_x := P_\infty \bigvee\{S_1^{*k}S_2(x) : k \geqslant 1\}$ 对每个 $x \in \mathscr{E}$ 都是有限维的，则 $\mathscr{H}_u(S_1)$ 是 S_2 的约化子空间，(iii) 若 $\mathscr{H}_u(S_1)$ 约化 S_2，则 $(S_1|_{\mathscr{H}_u(S_1)}\ S_2|_{\mathscr{H}_u(S_1)})$ 是一个双重交换的双压缩算子。

证明。相对于正交分解$\mathscr{H} = \mathscr{H}_u(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1)$，将 $S_2 = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 写出。由于 S_2 与 $S_1 = \left[\begin{smallmatrix} U & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right]$交换，经过常规计算可得

$$UA = AU,\ CU = SC,\ UB = BS,\ SD = DS. \tag{2.2}$$

(i) 我们将定理 2.1] 中的论证应用于当前情形。由 (2.2) 可知，对于任意 $f \in$ 核$(S^* - w)$ $w \in \mathbb{D}$,

$$wC^*f = C^*S^*f = U^*C^*f,$$

因此 $(U^* - wI)C^*f = 0$.由于 $\sigma(U^*)$ 是单位圆的子集，$C^*f = 0$ 对于任意 $f \in \ker(S^* - w)$ 以及每个 $w \in \mathbb{D}$. 因此，只需验证

$$\mathscr{H}_s(S_1) = \bigvee_{w\in\mathbb{D}} \ker(S^* - w). \tag{2.3}$$

由于 $S = S_1|_{\mathscr{H}_s(S_1)}$ 是一个解析左可逆算子，根据 Shimorin 的解析模型（见 [**12**, 第 154] 页）， S 与在再生核希尔伯特空间 $\mathscr{H}_\kappa$ 上乘以 z 的算子M_z 酉等价，其中某个再生核 κ 满足： $\mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_r \to \mathscr{B}(\mathscr{E})$，这里 $\mathbb{D}_r$ 表示以原点为圆心、半径为 $r > 0$. 的圆盘。鉴于

$$\mathscr{H}_\kappa = \bigvee\{\kappa(\cdot, w) : w \in \mathbb{D}_r\} = \bigvee_{w\in\mathbb{D}_r} \ker(M_z^* - w),$$

我们得到 (2.3)。

(ii) 由引理 2.1，必要时将 $\mathscr{H}$ 替换为 $\mathscr{H} \ominus \mathscr{M}$ 后，我们不失一般性地假设

$$S_1 \text{ has no eigenvalues.} \tag{2.4}$$

假设对每个 $x \in \mathscr{E}.$，均有 $\dim \mathscr{N}_x < \infty$。我们断言 $B = 0.$。由于 S_1具有 Wold 型分解（见 (1.1)），$\mathscr{H}_s(S_1) = \bigvee_{n=0}^{\infty} S^n(\ker S^*)$。因此，只需验证对每个整数 $n \geqslant 0.$，都有 $BS^n|_{\ker S^*} = 0$。然而，由 (2.2)，$BS^n = U^n B$，所以只需验证 $B|_{\ker S^*} = 0.$。令$x \in \ker S^*.$。由于 $\mathscr{H}_u(S_1) = \mathscr{H}_\infty(S_1)$ $U = S_1|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$ 与 P_∞ 可交换，因此$U^{*k} = P_\infty S_1^{*k}|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$ $k \geqslant 1.$。由于 $S_2 = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right]$，可得

$$\mathscr{N}_x = \bigvee \{U^{*k} B x : k \geqslant 1\}.$$

由于 $\mathscr{N}_x$ 是有限维的，$U^* \mathscr{N}_x \subseteq \mathscr{N}_x$ 和 U 是酉算子，因此算子U^* 和（等价地）U 有一个特征值，只要 $\mathscr{N}_x \neq \{0\}.$。根据 (2.4)，这是不可能的，因此 $\mathscr{N}_x = \{0\}.$。由此可得 $Bx = 0$，完成了对(ii)的验证。

(iii) 由于$S_2|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$ 与酉算子$S_1|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$可交换，这一点显而易见。□

为了证明定理 1.6，我们还需要一个引理，它描述了所有双重可交换的双等距算子（更精细的版本见下文推论2.4）。

引理2.3。设(S_1, S_2) 是 $\mathscr{H}.$上的双等距算子。若算子对(S_1, S_2)双重可交换，则存在一个等距算子 $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\infty(S_1))$ 和一个常值内函数 $\phi : \mathbb{D} \to \mathscr{B}(\mathscr{E})$，使得

$$(S_1, S_2) \cong (U, V) \oplus (M_{z,\mathscr{E}}, M_{\phi,\mathscr{E}}) \text{ on } \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}), \tag{2.5}$$

其中 $U = S_1|_{\mathscr{H}_\infty(S_1)}$，而 $\cong$ 表示酉等价。此外，若S_2 是酉算子，则 ϕ 是常值酉算子值函数。

证明。注意到 $\mathscr{H}_u(S_1) = \mathscr{H}_\infty(S_1)$（见定理 1.1）。假设 (S_1, S_2) 是双重可交换的。因此，对每个 $x \in \mathscr{E}$，都有 $S_1^{*k} S_2(x) = 0$，故由引理 2.2(ii)，$\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 是 S_2 和 V 的约化子空间：$=S_2|_{\mathscr{H}_\infty(S_1)}$ 是等距算子。由 [15, Lemma V.3.2] 和 [15, Proposition V.2.2],，存在一个内函数 $\phi \in H^\infty_{\mathscr{B}(\mathscr{E})}(\mathbb{D})$，使得 $S_2|_{H \ominus \mathscr{H}_\infty(S_1)} \cong M_{\phi,\mathscr{E}}$.因此，只要验证 ϕ 是常值函数，(2.5) 就成立。由于 (S_1, S_2) 是双重可交换的，

$$M^*_{\phi,\mathscr{E}} M_{z,\mathscr{E}} = M_{z,\mathscr{E}} M^*_{\phi,\mathscr{E}}. \tag{2.6}$$

令 P_0 表示 $\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D})$ 在常数多项式空间 $\mathscr{E}$ 上的正交投影。注意 $M_{z,\ \mathscr{E}} M^*_{z,\ \mathscr{E}} = I - P_0$，因此

$$M^*_{\phi,\mathscr{E}}(I - P_0) \overset{(2.6)}{=} M_{z,\mathscr{E}} M^*_{\phi,\mathscr{E}} M^*_{z,\mathscr{E}}. \tag{2.7}$$

根据 [1, 练习 2.66],

$$M^*_{\phi,\mathscr{E}} \kappa(\cdot, w) f = \kappa(\cdot, w) \phi(w)^* f, \quad f \in \mathscr{E},\ w \in \mathbb{D}, \tag{2.8}$$

其中 $\kappa(z, w) = \frac{I_{\mathscr{E}}}{1 - z\overline{w}}$, $z, w \in \mathbb{D}$，其中 $I_{\mathscr{E}}$ 表示作用于 $\mathscr{E}.$ 上的恒等算子。因此，对于任意 $f, g \in \mathscr{E}$ 和 $u, v \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} &\langle M^*_{\phi,\mathscr{E}}(I - P_0)\kappa(\cdot, v) f,\ \kappa(\cdot, u) g\rangle \\ \overset{(2.8)}{=}\ &\langle \kappa(\cdot, v)\phi(v)^* f,\ \kappa(\cdot, u) g\rangle - \langle \phi(0)^* f,\ \kappa(\cdot, u) g\rangle, \end{aligned}$$

以及

$$\langle M_{z,\mathscr{E}} M^*_{\phi,\mathscr{E}} M^*_{z,\mathscr{E}} \kappa(\cdot, v) f,\ \kappa(\cdot, u) g\rangle \overset{(2.8)}{=} u\overline{v} \langle \kappa(\cdot, v)\phi(v)^* f,\ \kappa(\cdot, u) g\rangle.$$

结合再生性质

$$\langle h,\, \kappa(\cdot,u)f\rangle = \langle h(u),\, f\rangle, \quad h \in \mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}),\ f \in \mathscr{E},$$

并且 (2.7) 得出 $\phi(v) = \phi(0)$，对每个 $v \in \mathbb{D}$. 均成立。要证明剩余部分，可仿照上面的论证证明

$$M_{\phi,\mathscr{E}} M^*_{\phi,\mathscr{E}} = I \ \Rightarrow \phi(0)\phi(0)^* = I,$$

由此完成证明。 □

定理 1.6 的证明。由定理 1.1， S_1 在 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1)$ 上具有 Wold 型分解 $U \oplus S$。由引理2.2(i)， S_2在 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_u(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1)$ 上分解为 $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right]$。鉴于引理 2.2 的证明，我们可以假设 (2.2) 成立。显然，(i) 成立当且仅当 $B = 0$.

(i)⇒(ii) 这由引理 2.2(iii) 得出。

(ii)⇒(iii) 由于 $B = P_\infty S_2|_{\mathscr{H}_s(S_1)}$ 且 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{H}_s(S_1)$，(ii) 意味着 $P_\infty S_2(\mathscr{E}) = \{0\}$，因此 (iii) 成立。

(iii)⇒(iv) 由 (iii)， $P_\infty S_2(\mathscr{E}) = \{0\}$. 。由于 P_∞ 与 S_1可交换，对于每个 $x \in \mathscr{E}$，$P_\infty \bigvee\{S_1^{*k} S_2(x)\colon\ k \geqslant 1\} = \{0\}$.

(iv)⇒(i) 这由引理 2.2(ii) 得出。

(i)⇔(v) 显然，只需验证 (v)⇒(i)。进而，只需检查：若 $B = P_\infty S_2|_{\mathscr{H}_u(S_1)}$ 是紧算子，则 $B = 0$. 。由 (2.2)， $UB = BS$，因此

$$(UB)^* UB = (BS)^* BS \ \Rightarrow\ B^*B = S^* B^* BS.$$

因此， B^*B 是 S-Toeplitz 算子，其含义见 [6]。现在，若 B 是紧算子，则 B^*B 是一个紧的 S-Toeplitz 算子；又因为 S 没有特征值，根据 [6, 定理 3.3]，或者等价地，$B = 0$.

现在假设 (i) 成立。那么

$$S_2 = A \oplus D \text{ on } \mathscr{H} = \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1), \tag{2.9}$$

其中 A 和 D 是满足下列条件的压缩算子

$$AU = UA,\ DS = SD. \tag{2.10}$$

由此得到

$$(S_1, S_2) = (U, A) \oplus (S, D) \text{ on } \mathscr{H} = \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}_s(S_1). \tag{2.11}$$

应用 [15, 引理 V.3.2] 以及 (2.10)，可知存在 $\phi \in \mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}(\mathscr{E})}(\mathbb{D})$，使得 $D = M_{\phi,\ \mathscr{E}}$. 由于 D 是等距算子，根据 [15,命题 V.2.2]， ϕ 是内函数。由 (2.11) 和定理 1.1 可得

$$(S_1, S_2) \cong (U, A) \oplus (M_z, M_\phi) \text{ on } \mathscr{H} = \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}).$$

此外，根据引理 2.2(iii)，(U, A) 是双重交换双等距算子。由于 U 是酉算子，现在可以应用引理 2.3（应用于 $S_1 = A$ 和 $S_2 = U$）得到 (1.4)。□

我们以定理 1.6 的两个推论结束本节。第一个推论重新得到了定理 [14, 2]。

推论2.4 (M. Słociński)。设 $(S_1,\ S_2)$ 是作用在 $\mathscr{H}$. 上的双重可交换双等距算子。则存在希尔伯特空间 $\mathscr{E}_j,\ \ j=1,\ \ldots,\ 3$，常值酉算子值函数 $\phi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{E}_1)$ 和 $\psi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{E}_2)$，闭子空间 $\mathscr{H}_{uu}$，它属于 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$，以及作用在 $\mathscr{H}_{uu}$ 上的双酉算子对 $(V_1,\ V_2)$，使得

$$(S_1,S_2)\cong(V_1,V_2)\oplus(M_{\phi,\mathscr{E}_1},M_{z,\mathscr{E}_1})\oplus(M_{z,\mathscr{E}_2},M_{\psi,\mathscr{E}_2})\oplus(M_{z,\mathscr{E}_3},M_{z,\mathscr{E}_3})$$
$$on\ \mathscr{H}_{uu}\oplus\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}_1}(\mathbb{D})\oplus\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}_2}(\mathbb{D})\oplus\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}_3}(\mathbb{D}).$$

证明。由于 (S_1,S_2) 是双重交换双等距算子，定理 1.6 的条件 (iv) 得以满足。因此，根据定理 1.6，存在希尔伯特空间 $\mathscr{F}$、内函数 $\phi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{E})$、常值酉算子值函数 $\psi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{F})$、$\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 的闭子空间 $\mathscr{H}_{uu}$，以及 $\mathscr{H}_{uu}$ 上的双酉算子 (V_1,V_2)，使得 (S_1,S_2) 具有分解 (1.4)。现在对双重交换双等距算子 $(M_{\phi,\ \mathscr{E}},M_{z,\ \mathscr{E}})$ 应用引理 2.3，即可得到所需的分解。□

以下结果给出了确保正交分解 (1.4) 成立的一些有限性条件。特别地，它推广了 [4, 定理 2.3]。

推论 2.5。设 (S_1,S_2) 是 $\mathscr{H}$. 上的双等距算子。假设以下任一条件成立：

(a) $\dim\ker(P_\infty S_2^*|_{\mathscr{H}_\infty(S_1)})<\infty$；(b) $\dim\ P_\infty\ker(S_2^*)<\infty$；
(c) $\operatorname{card}\sigma(S_1|_{\mathscr{H}_\infty(S_1)})<\infty$；其中 card 表示基数。

那么，存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{F}$，一个内函数 $\phi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{E})$，一个常值酉算子值函数 $\psi:\ \mathbb{D}\to\mathscr{B}(\mathscr{F})$，一个 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 的闭子空间$\mathscr{H}_u$，以及一个定义在 $\mathscr{H}_u$ 上的双酉算子(V_1,V_2)，使得(S_1,S_2) 具有分解(1.4)。

证明。由引理2.2(i)，$S_2=\left[\begin{smallmatrix}A&B\\0&D\end{smallmatrix}\right]$，其中 A、B、D 满足 (2.2)。如有必要，将 $\mathscr{H}$ 替换为 $\mathscr{H}\ominus\mathscr{M}$ 后，我们可以假设 (2.4) 成立。

假设 (a) 成立。利用 $S_2^*S_2=I$ 进行常规计算可得

$$A^*A=I,\quad A^*B=0. \tag{2.12}$$

由 (2.2)，$UA=AU.$。由于 U是酉算子，$UA^*=A^*U.$。因此，$\ker\ A^*$是 $U.$的约化子空间。若 $\ker A^*\neq\{0\}$，则 U 有一个特征值（因为由 (a)，$\ker A^*$ 是有限维的），从而 S_1 有特征值，这与 (2.4) 矛盾。因此 $\ker A^*=\{0\}$，故由 (2.12)，$B=0.$

为证明其余结论，对于 $x\in\mathscr{H}$，令

$$\mathscr{N}_x:=\bigvee\{U^{*k}P_\infty S_2(x):k\geqslant1\}. \tag{2.13}$$

鉴于引理 2.2(ii)，只需验证对于任意 $x\in\mathscr{E}$，$\mathscr{N}_x$ 是有限维的，其中 (b) 和 (c) 至少有一个成立。

首先，假设 (b) 成立。由于 $S_1S_2=S_2S_1$ 和 $S_2^*S_2=I$，对于任意正整数 k,

$$S_2^*\left(S_1^{*k}S_2\left[\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right]\right)=S_1^{*k}\left[\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}0\\S^{*k}x\end{smallmatrix}\right]=0.$$

结合这一点与

$$S_1^{*k}S_2\left[\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}U^{*k}&0\\0&S^{*k}\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}Bx\\Dx\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}U^{*k}Bx\\S^{*k}Dx\end{smallmatrix}\right]$$

可知，对于每个整数 $k \geqslant 1.$，都有$\left[\begin{smallmatrix} U^{*k}Bx \\ S^{*k}Dx \end{smallmatrix}\right] \in \ker S_2^*$。因此，由 (2.13) 可得 $\mathscr{N}_x \subseteq P_\infty(\ker S_2^*)$，故对于每个 $x \in \mathscr{E}.$，$\dim \mathscr{N}_x$ 都是有限的

接下来，假设 (c) 成立。因此，存在一个多项式 p，它在 $\sigma(U)$ 上消失，其中 $U := S_1|_{\mathscr{H}_\infty(S_1)}$ 是一个酉算子。根据谱映射性质，$\sigma(p(U)) = \{0\}.$由于 $p(U)$ 是一个正规算子，$p(U) = 0$。现在很容易看出，对每个 $x \in \mathscr{E}.$ $\square$，$\dim \mathscr{N}_x$ 都是有限的。

值得注意的是，推论 2.5 的结论自然可以推广到满足 $\ker \prod_{j=1}^n S_j^*$ 维数有限的交换 n-元组 $(S_1, \ldots, S_n)$ 等距算子。这一事实的证明可按照 [4, 定理 2.4] 的证明思路给出。细节留给读者。

3. 不约化坐标超值域的双等距算子

在本节中，我们讨论一类作用于 $\mathscr{H}$ 上的双等距算子（S_1, S_2），其中 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 不是 $S_2.$ 的约化子空间。我们从定理 1.6 的证明所得的如下推论开始（见引理2.2(i)、(2.2) 以及 (2.9) 后的讨论）。

命题 *3.1.* 若（S_1, S_2）是作用于 $\mathscr{H}$ 上的双等距算子，则存在酉算子 $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\infty(S_1))$ $\phi \in \mathscr{H}^\infty_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})(\mathbb{D})$，其中 $\|\phi\|_\infty \leqslant 1$；等距算子 $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\infty(S_1))$；以及 $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}) \mathscr{H}_\infty S_1))$，使得

$$UA = AU,\, UB = BM_{z,\mathscr{E}},\, A^*B = 0,\, B^*B + M^*_{\phi,\mathscr{E}}M_{\phi,\mathscr{E}} = I \text{ and}$$
$$(S_1, S_2) \cong \left(\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & M_{z,\mathscr{E}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & M_{\phi,\mathscr{E}} \end{bmatrix}\right) \text{ on } \mathscr{H}_\infty(S_1) \oplus \mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}),$$

其中 $\cong$ 表示酉等价。

前一个命题提出了如下问题:

问题 3.2. 采用命题 3.1 中的记号，何时存在非零 $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^2_{\mathscr{E}}(\mathbb{D}) \mathscr{H}_\infty(S_1))$，使得$UB = BM_{z,\mathscr{E}}$、$A^*B = 0$ 且 $B^*B + M^*_{\phi,\mathscr{E}}M_{\phi,\mathscr{E}} = I$?

以下是针对 $\mathscr{E} = \mathbb{C}.$ 的问题 3.2 的一个解答

命题 3.3. 沿用命题 *3.1* 中的记号，并设 $\mathscr{E} = \mathbb{C}$,

$$UB = BM_z \iff B(p) = p(U)B(1) \text{ for every polynomial } p. \tag{3.1}$$

若 $UB = BM_z$, 则以下结论成立:

(i) $A^*B = 0$ 当且仅当 $A^*B(1) = 0$,(ii) 若 μ 表示酉算子 U (平凡延拓至 $\mathbb{T}$), 则 $B^*B + M^*_\phi M_\phi = I$ 当且仅当

$$d\langle \mu(\cdot)B(1),\, B(1)\rangle = (1 - |\phi|^2)d\theta.$$

证明。由于多项式在 $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$ 中稠密，(3.1) 立即成立。为证明 (i) 和 (ii)，设 $UB = BM_z.$

(i) 假设 $A^*B(1) = 0.$ 根据 (3.1)，对于每个多项式 $p.$，都有 $A^*B(p) = A^*p(U)B(1)$。然而，由于 $AU = UA$，根据 $A^*B(p) = p(U)A^*B(1) = 0.$。由于多项式在 $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$ $A^*B = 0.$ 中稠密，反向结论显然成立。

(ii) Let p, q be polynomials in z. By (3.1),

$$\begin{aligned} & \langle B(p),\, B(q)\rangle + \langle M_\phi(p),\, M_\phi(q)\rangle \\ = \;& \langle p(U)B(1),\, q(U)B(1)\rangle + \langle \phi p,\, \phi q\rangle \\ = \;& \int_{\mathbb{T}} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\langle \mu(e^{i\theta})B(1),\, B(1)\rangle + \int_{\mathbb{T}} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}|\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta. \end{aligned}$$

因此 $\langle B(p),\ B(q)\rangle + \langle M_\phi(p),\ M_\phi(q)\rangle = \langle p,\ \ q\rangle$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\langle \mu(e^{i\theta})B(1),\, B(1)\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}(1-|\phi(e^{i\theta})|^2)d\theta.$$

(ii) 中所需的结论现在由三角矩问题的唯一性推出（见 [**13**, 定理 **1.4**]）。□

推论 3.4。 沿用命题 *3.1* 中的记号，对于 $\mathscr{E} = \mathbb{C}$，若 $\sigma(U)$ 的弧长测度为 0， 则 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$ 将 (S_1, S_2) 约化为 $\mathscr{H}_\infty(S_1)$上的双重交换双等距算子，

证明。根据命题 3.1，存在 $\phi \in \mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$，使得 $\|\phi\|_\infty \leqslant 1$从而有 $B^*B + M_\phi^* M_\phi = I.$。由命题 3.3(ii)以及 $\sigma(U)$ 的弧长测度为 0 这一假设，立即可得 ϕ 是一个内函数。因此， M_ϕ 是一个等距算子，或者等价地，$B = 0.$ 现在可以应用定理 1.6。□

如果 $\mathscr{E}$ 的维数大于 1，前一个推论的结论是否仍然成立，这将是一个有趣的问题。

参考文献

[1] J. Agler，J. E. McCarthy，《Pick 插值与希尔伯特函数空间》，《数学研究丛书》，第 44 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002 年，xx+308 页。[2] J. Agler，J. E. McCarthy，N. J. Young，《算子分析。复分析中的希尔伯特空间方法。》剑桥数学论丛，第 219 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020 年。xv+375 页。[3] H. Bercovici，R. G. Douglas，C. Foias，双等距算子的典范模型，《现代算子理论及相关主题概览》，177–205，《算子理论进展与应用》，218，Birkhäuser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012 年。[4] Z. Burdak，M. Kosiek，M. Słociński，具有有限维游荡子空间的可交换等距算子的典范 Wold 分解，《数学科学通报》**137**（2013），653-658。[5] J. B. Conway，《次正规算子理论》，《数学调查与专著》，**36**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991 年。[6] M. Didas，J. Eschmeier，内函数与球等距算子，《美国数学会会刊》**139**（2011），2877-2889。[7] D. Gaşpar，P. Gaşpar，双等距算子的 Wold 分解与酉模型，《积分方程与算子理论》**49**（2004），419-433。[8] K. Horák，V. Müller，可交换等距算子的函数模型，《捷克斯洛伐克数学杂志》**39**（1989），370-379。[9] R. B. Khani，K. Seddighi，关于自变量乘法算子直和的交换子，《算子理论杂志》**43**（2000），199-210。[10] M. Kosiek，A. Octavio，可交换压缩算子 N 元组的 Wold 型扩展，《数学研究》**137**（1999），81-91。[11] D. Popovici，可交换等距算子对的 Wold 型分解，《美国数学会会刊》**132**（2004），2303-2314。[12] S. Shimorin，接近等距算子的 Wold 型分解与游荡子空间，《纯粹与应用数学杂志》**531**（2001），147-189。

[13] J. Shohat，J. Tamarkin，《矩问题》，美国数学会数学调查丛书，第 I 卷。美国数学会，纽约，1943 年。xiv+140页[14] M. Słociński，关于一对可交换等距算子的 Wold 型分解，《波兰数学年刊》**37** （1980），255-262。[15] B. Sz.-Nagy，C. Foias，H. Bercovici，L. Kérchy，《希尔伯特空间上算子的调和分析》，第二版。修订并扩充版。Universitext。Springer，纽约，2010 年。xiv+474 页。

数学与统计学系，印度理工学院坎普尔分校，印度电子邮件地址：chavan@iitk.ac.in 印度科学教育与研究学院特里凡得琅分校，印度电子邮件地址：ramiz@iisertvm.ac.in