arXiv:2302.05470v1 [math.NT] 10 Feb 2023

# k-下降树的性质

AGNIV SARKAR 和 ERIC SEVERSON

摘要。本文介绍的研究成果曾于2022年在保加利亚举行的世界国家数学竞赛联合会上发表。

对于任意实值 k，我们考虑以 0 为根节点的树，其中每个正整数 n 的父节点为$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$。每个节点的平均子节点数为 k，因此这一定义为将 k 叉树自然地推广到无理数 k 提供了一种方法。我们重点研究序列 $r_d$：深度为 d 的节点数。

我们首先证明存在某个常数 $\rho(k)$，使得 $r_d \sim \rho(k) \cdot k^d$。然后研究一族取值 $k = a+\sqrt{a+4b}2$，并证明该序列满足精确递推关系 $r_d = a \cdot r_{d-1} + b \cdot r_{d-2}$。这推广了 k 为黄金比例且 $r_d$ 为斐波那契数列的特殊情形。

目录

1. 引言 2. 预备知识 2.1. 记号 1
2.2. 定义 3. $r_d$的渐近分析 4. 闭式 2
$k$-树 $\rho(k)$ 5. 结论 参考文献 附录 2
A. 树生成代码 2
5
8
13
14
i
附录 B. $\rho$ 代码 iv
附录 C. $\rho$ 原始数据 vi
附录D. 祖父节点指示变量图 vii

## 1. 引言

本文介绍了一项原创研究，聚焦于图论和数论，并与约瑟夫问题有着令人惊讶的联系。这项研究由我（AGNIV SARKAR）和我的导师（ERIC SEVERSON）在 2021-2022 学年期间完成。

这项研究旨在观察根据定义 4 生成的 $\phi$-树中的模式。由此产生了一个非常有趣的数论问题；当我们开始研究这些树的渐近分析时，发现它与约瑟夫问题以及计算该问题的解有关。

这些树本身与定义 1 中的$k$叉树最为相似。

**定义 1.** $k$叉树是一种有根树，其中每个节点最多有$k$ 个子节点。完全$k$叉树是一种有根树，其中每个节点恰好有$k$ 个子节点。

日期：2021-2022。

这类树常用作计算机科学中的数据结构，例如二叉搜索树或二叉树。然而，定义中的$k$无法很好地推广到非整数$k$，因此 [2] 定义了“节奏树”，即定义 3。

**定义 2.** 设 $p$，$q \in \mathbb{Z}$ 使得 $p > q \geq 1$. 那么，

- 控制参数（$q$，$p$）的节奏是一个由$r$ 个非负整数组成的$q$元组，其和为$p$。

$$r = (r_0, r_1, \ldots, r_{q-1}), \text{ and, } \sum_{i=0}^{q-1} r_i = p.$$

- 若节奏$r$ 还满足以下条件，则称其为有效节奏:

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}, \sum_{i=0}^{j} r_i > j+1$$

- 节奏$r$ 的增长率是有理数$_{p\ q}$ 或$_{p'\ q'}$，其中$p'$ 和$q'$ 是$p$ 和$q$ 分别除以其最大公约数所得的商，且二者互质。

**定义 3.** 设$r$ =（$r0, \ldots, rq-1$）是定义 2 给出的有效节奏。则由$r$ 生成的节奏树$\mathscr{I}_r$ 定义如下:

- 根节点 0 有 $\mathscr{I}_r$ 个子节点，分别是音符 1、2、.....、和 $(r_0 - 1)$。
- 对于 $n > 0$，节点 $n$ 有 $r_n \bmod q$ 个子节点，分别是节点 $(m+1)$、$(m+2)$、.....、以及 $(m + r_n \bmod q)$，其中 $m$ 是 $(n-1)$ 的最大子节点。

在 [2], 中，他们证明，若 $r$ 的增长率是有理数但不是整数，则节奏树 $\mathscr{I}_r$ 中通往所有顶点的路径都无法用有限自动机验证。若 $r$ 是增长率为整数的节奏，则树 $\mathscr{I}_r$ 中的路径可以用有限自动机描述。

节奏树之所以相关，且其结构有上述性质，是因为当$k$ 是有理数时，我们的新定义是所有节奏树的一个子集。

此外， [3] 还描述了约瑟夫问题：给定两个数，$n$，$q$。有 $n$ 个位置围成一圈，每第$q$个人就从圈中退出，直到只剩下 1 人。问题是求出最后留下的人所处的编号；当$q = 2$时，这很简单；当$q = 3$时，则更难；对于一般的$n$，$q$，则存在一个递归解。本文定义了函数 $c(k)$。

对于某个 $k > 1$，将递归数列 $f_n$ 设为 $f_0 = 1$，$f_{n+1} = \lceil kf_n \rceil$. 。于是，函数 $c(k)$ 定义为满足以下条件的常数 $c$：$f_n \sim c(k)k^n$，当 $n$ 趋于无穷时成立。我们将在第 3 节进一步阐述并证明关于该函数的更多结果。

## 2. 预备知识

**2.1. 记号。** $\mathbb{N}$ 表示非负整数集，$\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集。$\lfloor \cdot \rfloor$ 和 $\lceil \cdot \rceil$ 分别表示向下取整函数和向上取整函数。对于 $x \in \mathbb{R}$，$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$表示 $x$ 的小数部分。注意，这意味着 $\{x\} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1)$。$\sim$ 表示渐近等价，其中$f(n) \sim g(n)$ 表示 $\lim^{n\to\infty}{}_{f(n)\ g(n)} = 1$。

**2.2. 定义。** 我们首先正式定义$k$下降树:

**定义 4。** 对于任意$k \in (1, \infty) \subset \mathbb{R}$，$k$ 下降树（简称$k$-树 ）是一个节点位于 $\mathbb{N}$ 中的有根树，其中每个$n \in \mathbb{N}$的父节点为$\lfloor {}^{n}{}_{k} \rfloor$，而 0 是根节点。

图 1、图 2、图 3 是根据附录 A 生成的。对于整数 $k$ 情形，它生成一个完整的$k$叉树，如图 1 所示。

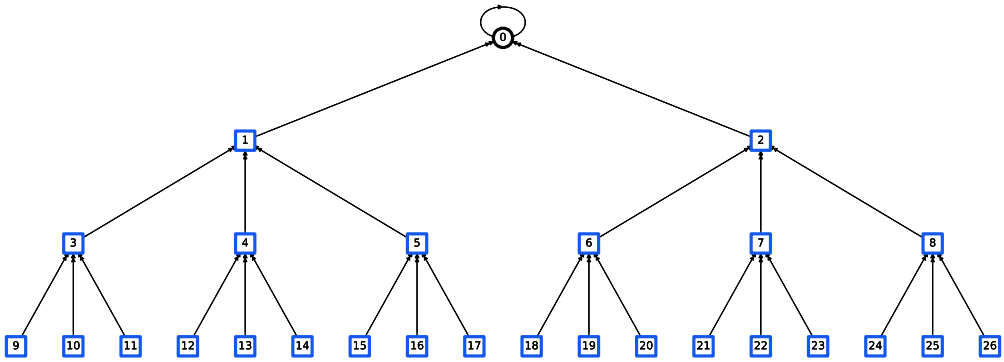


图1. 3-下降树——用于生成这棵树的代码。

请注意，图 1 与节奏为 (3). 的节奏树相同。所有整数情形均如此。对于有理数 $k$，它会生成另一种节奏树，如 [2] 中所述。图 2 中的子节点数按 2、1、..... 的模式周期性变化，这意味着它是一棵节奏为 (2、1). 的节奏树。

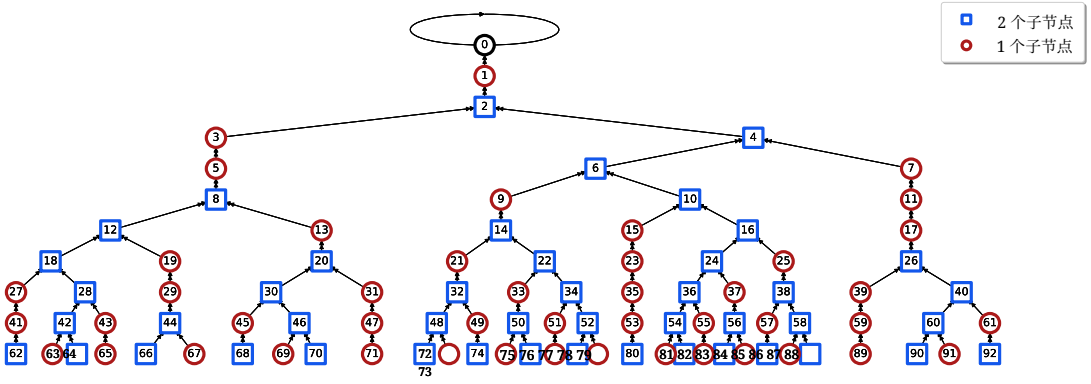


图2. 3 2-下降树——生成这棵树的代码。

然后，当$k$ 是无理数时，行为会变得稍微更加混沌。图 3 中的这个具体示例展示了一些特别好的性质，这要归功于我们对$k = \phi$的选择。

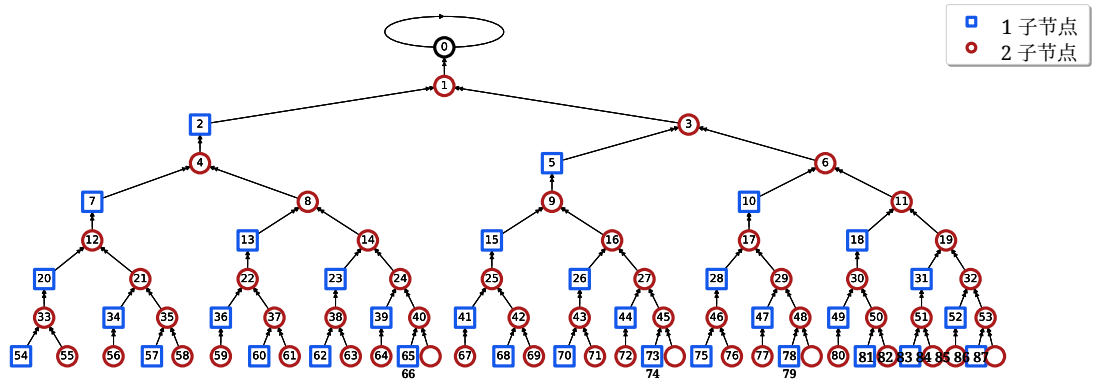


图3. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$-下降树 — 使用十进制近似值（最多 1000 位）生成此树。

请注意，这并没有明显的节奏，子节点数看起来也不是周期性的。

其余函数是基于特定的 $k$-树定义的，因此严格来说也是 $k$ 的函数，但为简洁起见，我们通常不会明确写出对$k$ 的依赖。

**定义5**。 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $\text{children}(n) = \{c \in \mathbb{N} : \lfloor \frac{c}{k} \rfloor = n\}$ 表示$n$ 在$k$-树[1]中的子节点集合。于是，$h(n) = |\text{children}(n)|$ 给出了$n$的子节点数 。

**注1**。 对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$，$\min(\text{children}(n)) = \lceil n \cdot k \rceil$。

证明。 这直接由以下事实得到：$\lfloor \frac{\lceil nk \rceil}{k} \rfloor = n$，而 $\lfloor \frac{\lceil nk \rceil - 1}{k} \rfloor < n$。 □

现在我们可以正式证明平均子节点数为$k$这一结论：

**注2**。 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) = k$。

证明。 注意，求和 $\sum_{n=0}^{N-1} h(n)$ 会计算从0到节点$N-1$的最大子节点之间的每个节点。因此，

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) = 1 + \max(\text{children}(N-1)) = \min(\text{children}(N)) = \lceil N \cdot k \rceil,$$

由注1可知。因此 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \lceil N \cdot k \rceil = k$。 □

子节点数量$h(n) \in \{\lfloor k \rfloor, \lceil k \rceil\}$，结果表明它仅取决于量 $\{n \cdot k\}$：

**定义 6**。 对于$n \in \mathbb{N}_+$，我们称小数部分 $\{n \cdot k\} \in [0,1)$ 为计数指标。区间 $(0, 1 - \{k\}] \subset [0,1)$ 称为下取整范围 ，其补集 $\{0\} \cup (1 - \{k\}, 1)$ 称为上取整范围。

这些定义的依据是以下基础引理：

**引理 1**。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$h(n) = \begin{cases} \lfloor k \rfloor & \text{if } \{n \cdot k\} \in (0, 1 - \{k\}] \\ \lceil k \rceil & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[1]请注意，从技术上讲， $0 \in$ 子节点(0)。因此，$h(0) = \lceil k \rceil$，这与引理 1 以及定义 3 一致。

证明。 </style>如果 $k \in \mathbb{Z}$，则该陈述显然成立，因此现在假设 $k \notin \mathbb{Z}$ 且 $\lfloor k \rfloor + 1 = \lceil k \rceil$。

注意，$\lfloor c\ k \rfloor = n$ 当且仅当 $c \in [nk, (n+1)k)$，因此 $h(n)$ 计算的是该区间内的整数点数量，其宽度为 $k = \lfloor k \rfloor + \{k\}$。直观地说，区间的第一部分 $[nk, nk + \lfloor k \rfloor)$（宽度为 $\lfloor k \rfloor$）将始终包含 $\lfloor k \rfloor$ 个整数点。然后，当 $\{nk\} > 1 - \{k\}$ 时，剩余区间 $[nk + \lfloor k \rfloor, nk + k)$ 将“绕回”并多包含一个整数点。另一方面，当 $\{nk\} < 1 - \{k\}$ 时，小数部分严格增加，不会绕回并多包含一个整数点。

在边界情形 $\{nk\} = 0$、$nk \in \mathbb{Z}$ 中，该区间包含 $\lceil k \rceil$ 个整数点：$nk, nk+1, \ldots, nk + \lfloor k \rfloor$。

在另一个边界情形 $\{nk\} = 1 - \{k\}$ 中，我们有 $nk + k \in \mathbb{Z}$，但该区间不包含这个最右侧边界，因此区间内有 $\lfloor k \rfloor$ 个整数点：$nk + k - 1, nk + k - 2, \ldots, nk + k - \lfloor k \rfloor$。□

注意到，引理 1 表明，对于有理数 $k \in \mathbb{Q}$，子节点计数函数 $h(n)$ 是周期性的。例如，参见图 2。由此周期性可知，这是一个节奏树（定义 3）。

最后，我们正式定义行长序列：

**定义 7**。 $(r_d)_{d=0}^{\infty}$ 是行长序列，其中 $r_d$ 给出了 $k$-树中深度为 $d$ 的节点数。更正式地，对于节点 $n \in \mathbb{N}$，迭代函数序列 $g_0 = n$ 和 $g^{i+1} = \lfloor \frac{g_i}{k} \rfloor$ 给出了通往根节点的路径。于是，$\text{depth}(n) = \max(i : g_i = 0)$，且 $r_d = |\{n \in \mathbb{N} : \text{depth}(n) = d\}|$。

序列 $r_d$ 随后直观地以 $k$ 的指数速率增长，因为 $r_d \approx r_{d-1} \cdot k$。然而，由于向下取整函数所进行的舍入，这并不完全准确。因此，我们可以针对行长度定义一个渐近函数。

**定义 8**。 $\rho(k) = \lim_{d \to \infty} r_d k^d$。

注意，我们仍需证明该极限存在。

### 3. $r_d$的渐近分析

**定理 1**。 对于任意 $k \in (1, \infty) \subset \mathbb{R}$，常数 $\rho(k) = \lim_{d \to \infty} r_d k^d$ 存在。因此 $r_d \sim \rho(k) \cdot k^d$。

证明。 这本质上是 [3] 中命题 1 的推论。为使论述自成一体，我们在此给出完整证明。

注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$，$\min(\text{children}(n)) = \lceil n \cdot k \rceil$。接下来我们考虑序列 $f_0 = 1$ 和 $f_{i+1} = \lceil f_i \cdot k \rceil$。请注意，经过索引调整后，这给出了每一行中最左侧的元素。例如，参见

| $f_i$ | 值 |
|---|---|
| $f_0$ | 1 |
| $f_1$ | 2 |
| $f_2$ | 4 |
| $f_3$ | 7 |
| $f_4$ | 12 |
| $f_5$ | 20 |

表 1. $f_i$ 值：$\phi$-树，见图 3。

因此，对于所有 $d > 0$，我们有 $r_d = f_d - f_{d-1}$。命题 1 [3] 表明，存在一个常数[2] $c(k)$，使得 $f_i \sim c(k) \cdot k^i$。由此可推出

$$r_d \sim c(k) \cdot k^d - c(k) \cdot k^{d-1} = \frac{k-1}{k} c(k) \cdot k^d,$$

因此我们有 $\rho(k) = k-1\,k_\ \cdot c(k)$。

为了从 [3], 证明命题 1，或者证明$c(k)$ 存在，我们考虑序列 $(f_i k^i)_{i=0}^{\infty}$。首先我们证明该序列单调不减，因为

$$\frac{f_{i+1}}{k^{i+1}} = \frac{\lceil f_i \cdot k \rceil}{k^{i+1}} \geq \frac{f_i}{k^i}.$$

该序列也有上界。我们从

$$\frac{f_{i+1}}{k^{i+1}} = \frac{\lceil f_i \cdot k \rceil}{k^{i+1}} < \frac{f_i \cdot k + 1}{k^{i+1}} = \frac{f_i}{k^i} + \frac{1}{k^{i+1}},$$

然后结合初始情形 $f\ {}^{0}_{0} = 1$-，我们得出

$$\frac{f_n}{k_n} < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k^i} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^i} = \frac{1}{1 - 1/k} = \frac{k}{k-1}.$$

由于序列 $(f_i k^i)_{i=0}^{\infty}$ 单调不减且有上界，极限 $c(k) = \lim_{i \to \infty} (f_i k^i)$ 存在。此外，我们有以下界 –

$$1 \leq c(k) \leq \frac{k}{k-1}.$$

这就证明了命题 1；进而证明了渐近分析中 $\rho(k)$ 的存在性，其中 [3], 。□

**推论 1**。$k-1\ k \leq \rho(k) \leq 1$。

证明。 根据定理 1 的证明中对 $c(k)$ 的界，以及关系 $\rho(k) = k-1\ k\ \cdot c(k)$，可得 $\rho$ 的以下界。□

因此，我们现在可以考察这些数据的近似值。生成这些近似值的代码附在附录 B 中。部分原始数据包含在附录 C 中。

在 [3], 命题 3.中，他们证明了在“约瑟夫斯点”处存在跳跃间断，即形如$q\ q-1$ 的有理数，其中$q \in \mathbb{Z}_+$. 这一点在图 4 中有所展示。由于这与本文的重点无关，故不再完整复现其证明。

[2][3] 使用 $\alpha$ 作为参数，而不是$k$。

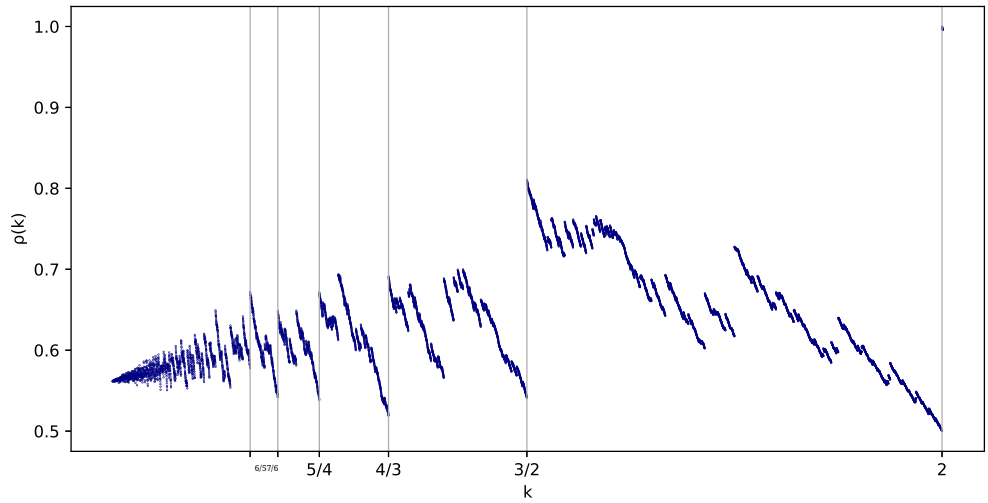


图4。 [3] 的跳跃间断——在 [3]，的命题 3 中，存在形式极为优美的跳跃间断，其中 $c(a+\varepsilon) = ac(a)$。

结合图 5 拉远视角后，我们可以看到一个看似更具整体性的模式。

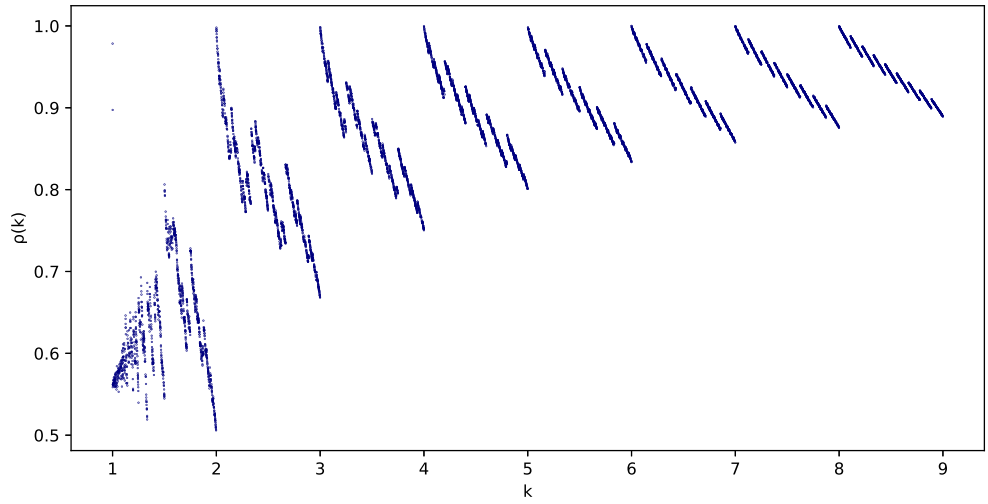


图5。 $\rho(k)$ 对于 $1 < k \leq 9$ —— $10^4$ 个点的近似 $\rho(k)$。

这些模式中有一种似乎是函数内的周期性分裂。如图 6 所示。在$n$和（$n+1$）之间，对于某个整数$n \geq 1$，有（$n+1$）个周期性的“可见分裂”。仔细观察后，似乎还有（$n+1$）$^2$个周期性的“可见分裂”，其中最佳的分裂发生在最接近（$n+1$）.从视觉上看，这种模式成立，而且分裂逐渐变小。但经数值测试，尚不清楚它们是否与 [3] 中描述的形式相同。

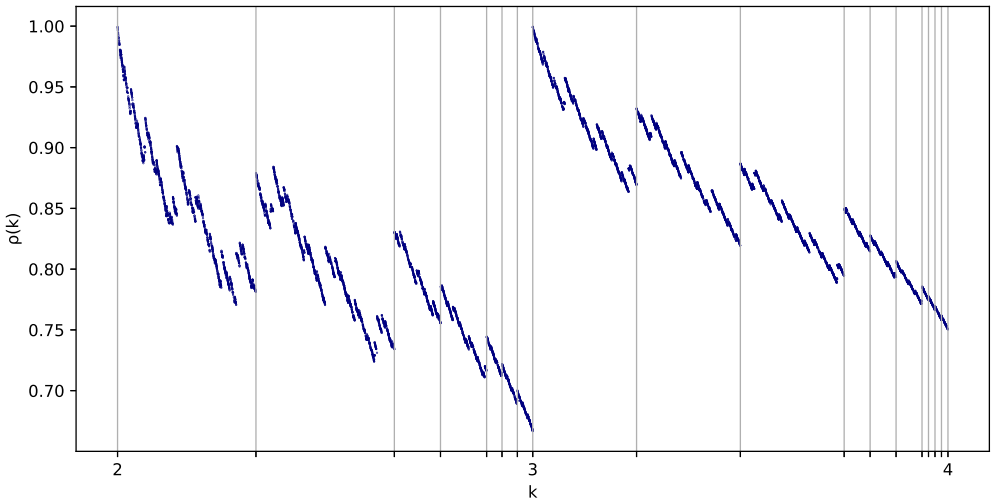


图6. $\rho(k)$，对于 $1 < k \leq 4$，其中包含明显的分裂——对 $10^4$ 个点的 $\rho(k)$ 进行近似，同时还绘制了可能可见的分裂点；这些点似乎在 $n$ 与 $n+1$ 之间具有自相似性。

## 4. $k$-树的闭式 $\rho(k)$

那么，让我们定义一个概念，以便更清楚地描述指标。

定义9. 对于某个 $k > 1$，子节点计数指标图是函数 $\{f_i | i = 1, 2, \ldots, \lceil k \rceil\}$ 的集合，其中 $f_i(x)$ 定义为某个 $n$ 的第 $i$ 个子节点的小数部分，且 $x = \{nk\}$，因此 $f_i : [0,1) \longrightarrow [0,1)$。若 $\lceil k \rceil \neq \lfloor k \rfloor$，那么对于节点 $n$ 的 ceil$k$ 个子节点（若存在），我们定义 $f^{\lceil k \rceil} : (1 - \{k\}, 1] \longrightarrow [0,1)$。

此外，使用上取整范围和下取整范围分别表示（$1 - \{k\}$，$1]$ 以及（$0$，$1 - \{k\}]$，这有助于以更一般的方式描述子节点计数指标图。

定义9使我们能够直观地了解节点$n$的“孙节点”的行为。如果我们知道它的小数部分为 $\{nk\}$，那么就能看到其子节点的小数部分，从而了解其子节点的子节点，这也就形成了“孙节点”这一术语。

**引理 2.** 设$k$满足方程$k = a + bk$，其中$a, b \in \mathbb{Z}$。那么，对于任意节点$n \in \mathbb{N}_+$，令$x = \{n \cdot k\} \in [0,1)$为$n$的计数指标。令$c_1, \ldots, c_{h(n)}$为节点$n$的子节点。那么第$i$小的子节点$c_i$的计数指标为

$$\{c_i \cdot k\} = \{(i - \{nk\}) \cdot \frac{b}{k}\}.$$

证明。 根据注1，我们有$c_1 = \lceil n \cdot k \rceil$，更一般地，$c_i = \lceil n \cdot k \rceil + i - 1$。于是计数指标为

$$\begin{aligned}\{c_i \cdot k\} &= \{(\lceil n \cdot k \rceil + i - 1)(a + \frac{b}{k})\} \\ &= \{(\lceil n \cdot k \rceil + i - 1) \cdot \frac{b}{k}\} \\ &= \{(n \cdot k + 1 - \{n \cdot k\} + i - 1) \cdot \frac{b}{k})\} \\ &= \{(i - \{nk\}) \cdot \frac{b}{k}\}.\end{aligned}$$

□

定义9和引理 2 的一些示例见图10、图11、图12、图13和图14，位于附录 D 中。

**定理 2**。 （祖父定理）设 $a,b \in Z$，满足 $a \geq 1$ 且 $1 - a \leq b \leq a - 1$。当 $b \geq 0$ 时，$k = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ 的子节点计数指标图的上取整范围中始终有 $b$ 条不同的线。当 $b$ 为负数时，图的下取整范围中始终有 $|b|$ 条不同的线，其中图为 $k$。

证明。 设 $a,b \in Z$，满足 $a \geq 1$ 且 $1 - a \leq b \leq a - 1$。于是，令 $k = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$。利用引理 2，

$$\begin{aligned}\{c_{i+1} \cdot k\} - \{c_i \cdot k\} &= \{(i + 1 - x) \cdot \frac{b}{k}\} - \{(i - x) \cdot \frac{b}{k}\} \\ &= \{\frac{b}{k}\} \\ &= \{k\}, 1 - \{k\} (\text{depending on } b).\end{aligned}$$

因此，两个连续子节点计数指标之间的差为 $\{k\}$ 或 $1 - \{k\}$。引理 1 给出的上取整范围大小为 $\{k\}$，而下取整范围则为 $1 - \{k\}$.。因此，当一个子节点计数指标落在该线的上方或下方时，下一个指标会“翻转”，这意味着在整个 $x \in [0, 1)$。 中，输出上取整范围和下取整范围中的线数保持不变。因此，这简化了证明，使我们可以选择 $x$ 来证明特定输出范围中恰好有 $b$ 个指标。

最后一步是求出该表达式中 i 的解的个数，$1 - \{k\} < \{\{k\}(i - x)\} < 1$，但现在我们可以选择 x。如果 $x = 0$，那么解集为 $\{\lfloor a b \rfloor, \lfloor 2a b \rfloor, \lfloor 3a b \rfloor, \ldots, \lfloor (b-1)a b \rfloor, \lfloor a \rfloor\}$，其中包含 b 个解（当 b 为非负数时）。当 b 为负数时，这就是 $0 < \{\{k\}(i - x)\} < 1 - \{k\}$ 的解集。由此证明了该定理。□

**定理 3.** 设 $a,b \in \mathbb{Z}$ 满足 $a \geq 1$ 且 $1 - a < b < 1 + a$。对于 $k = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$，k-树的行长序列满足线性递推

$$r_d = a \cdot r_{d-1} + b \cdot r_{d-2},$$

初始情形为 $r_0 = 1$、$r_1 = \lceil k \rceil - 1$。

证明。 设 $a$，$b \in \mathbb{Z}$ 满足 $a \geq 1$ 且 $1 - a < b < 1 + a$。当 $b \geq 0$，我们可以看到 $\lfloor k \rfloor = a$。 因此，$r_d \geq a r_{d-1}$，因为根据引理 1，我们知道上一行中的每个元素至少贡献 $\lfloor k \rfloor$ 个子节点。根据定理 2，我们可以看到 $r_{d-2}$ 中的每个元素都有 $b$ 个子节点，而这些子节点有 $\lceil k \rceil$ 个子节点，

这就得到等式$r_d = ar_{d-1} + br_{d-2}$.。相反，当$b < 0$，则 $\lceil k \rceil = a$，所以$r_d \leq ar_{d-1}$。此时$br_{d-2}$ 实际上会抵消，以补偿具有 $\lfloor k \rfloor$个子节点的值。因此，

$$r_d = ar_{d-1} + br_{d-2}.$$

□

**推论 2.** 令 $a,b \in \mathbb{Z}$满足 $a \geq 1$且 $1-a < b < 1+a$。对于 $k = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$，

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{a^2+4b}} & b > 0 \\ \dfrac{k-1}{\sqrt{a^2+4b}} & b < 0 \\ \dfrac{a-1}{a} & b = 0 \end{cases}$$

证明。 根据定理 3，我们可以找到$r_d$的闭合公式。

如定理所述，令 $a,b \in \mathbb{Z}$满足 $a \geq 1, 1-a < b < 1+a$，并令 $k_1 = \frac{a+\sqrt{a^4+4b}}{2}$ 和$k_2 = \frac{a-\sqrt{a^4+4b}}{2}$。

那么，对于$k_1$ 树，

$$r_d = ar_{d-1} + br_{d-2}.$$

与任何递推问题一样，令 $r_d = c^d$，其中常数$c$。那么，

$$\begin{aligned} c^d &= ac^{d-1} + bc^{d-2} \\ c^2 &= ac + b \\ c^2 - ac - b &= 0 \\ c &= k_1, k_2. \end{aligned}$$

因此，我们可以将$c$ 代入$r_d$。

$$r_d = Ak_1^d + Bk_2^d,$$

对于某些常数$A$ 和$B$。

现在，我们必须利用初始条件$r_0 = 1, r_1 = \lfloor k \rfloor$ 来求出$A$ 和$B$。只需代入$d = 0,1$ 即可。不过，请注意，当$b \geq 0$时， $\lfloor k \rfloor = a$；而当$b < 0$时，则 $\lfloor k \rfloor = a-1$.

因此，当$b \geq 0$时，我们可以求解两个线性方程组。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} = \dfrac{k_1}{\sqrt{a^2+4b}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} = \dfrac{-k_2}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}$$

因此，如果$b \geq 0$,

$$r_d = \frac{k_1^{d+1} - k_2^{d+1}}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

通过对同一个原始矩阵求解，并将$a-1$与$a$互换，我们可以得出，当$b<0$时，

$$r_d = \frac{(k_1-1)^{d+1} - (k_2-1)^{d+1}}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

现在，我们可以将这些闭合公式代入 $\rho(k)$。当 $b \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\rho(k) &= \lim_{d\to\infty} \frac{r_d}{k_1^d} \\
&= \lim_{d\to\infty} \frac{k_1^{d+1} - k_2^{d+1}}{k_1^d\sqrt{a^2+4b}} \\
&= \lim_{d\to\infty} \frac{k_1^{d+1}}{k_1^d\sqrt{a^2+4b}} \\
&= \frac{k_1}{\sqrt{a^2+4b}}.
\end{aligned}$$

类似地，当 $b<0$,

$$\rho(k) = \frac{k_1-1}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

请注意，当 $b=0$ 时，则 $k=a\in\mathbb{Z}$，因此我们也可以写作 $\rho(k)=a-\underline{1\,a}$，这是由于 $r_d = k^{d-1}(k-1)$. □

推论 2 中描述的数值如表 2 所示。

| | 一个 = -1 | 一个 = 0 | 一个 = 1 | 一个 = 2 | 一个 = 3 | 一个 = 4 | a = 5 | a = 6 | a = 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b = 8 | 2.3723 | 2.8284 | 3.3723 | 4 | 4.7016 | 5.4641 | 6.2749 | 7.1231 | 8 |
| b = 7 | 2.1926 | 2.6458 | 3.1926 | 3.8284 | 4.5414 | 5.3166 | 6.1401 | 7 | 7.8875 |
| b = 6 | 2 | 2.4495 | 3 | 3.6458 | 4.3723 | 5.1623 | 6 | 6.873 | 7.772 |
| b = 5 | 1.7913 | 2.2361 | 2.7913 | 3.4495 | 4.1926 | 5 | 5.8541 | 6.7417 | 7.6533 |
| b = 4 | 1.5616 | 2 | 2.5616 | 3.2361 | 4 | 4.8284 | 5.7016 | 6.6056 | 7.5311 |
| b = 3 | 1.3028 | 1.7321 | 2.3028 | 3 | 3.7913 | 4.6458 | 5.5414 | 6.4641 | 7.4051 |
| b = 2 | 1 | 1.4142 | 2 | 2.7321 | 3.5616 | 4.4495 | 5.3723 | 6.3166 | 7.2749 |
| b = 1 | 0.618 | 1 | 1.618 | 2.4142 | 3.3028 | 4.2361 | 5.1926 | 6.1623 | 7.1401 |
| b = 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| b = -1 | | | | 1 | 2.618 | 3.7321 | 4.7913 | 5.8284 | 6.8541 |
| b = -2 | | | | | 2 | 3.4142 | 4.5616 | 5.6458 | 6.7016 |
| b = -3 | | | | | | 3 | 4.3028 | 5.4495 | 6.5414 |
| b = -4 | | | | | | 2 | 4 | 5.2361 | 6.3723 |
| b = -5 | | | | | | | 3.618 | 5 | 6.1926 |
| b = -6 | | | | | | | 3 | 4.7321 | 6 |

表 2. 函数 $k = a+\sqrt{a^2+4b}\,2$ 在 $a,b \in \mathbb{Z}$ 时的取值。使用 $-1 \le a \le 7,$ 和 $-6 \le b \le 8$ 的十进制近似值计算公式$k = a+\sqrt{a^2+4b}\,2$。

因此，利用推论 2，我们可以考察图 7 上已知点的闭合公式。

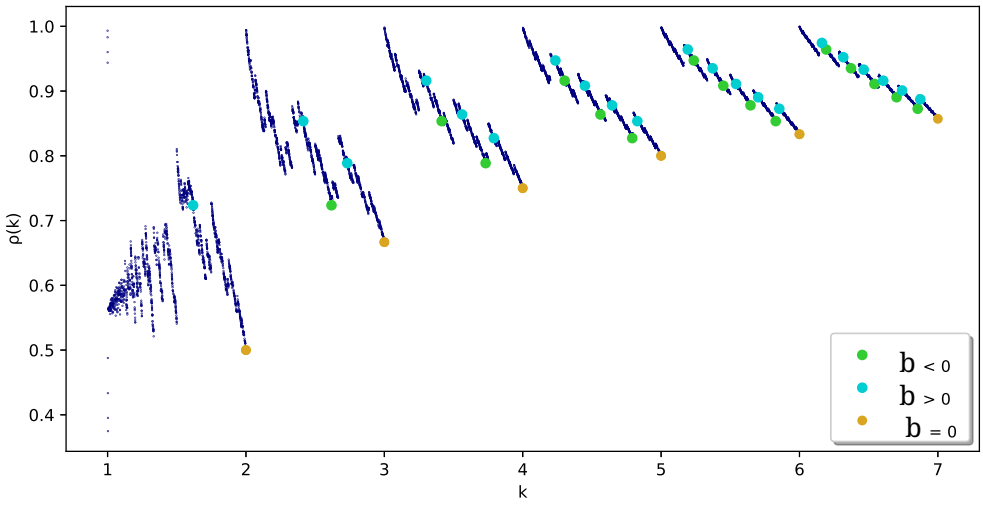


图 7. $\rho(k)$ 对于 $1<k\le 7$ 的闭式——近似的 $\rho(k)$ 对于 $10^4$ 个点，并且也绘出了包含闭合公式的点。

## 5. 结论

因此，我们为无理数情形找到了一个闭合公式，即使有理数情形并不具有相同类型的行为。这种情况十分罕见：无理数的表现似乎比其有理数对应情形更为规整。此外，我们还为这些黄金比例类树找到了闭合公式。这很有意思，也促使我们将研究从$k$叉树扩展开来。

现在，未来的工作似乎有三种不同的推进方向。首先，可以直接从$\lfloor {}^{n}{}_{k} \rfloor$改为$\lceil {}^{n}{}_{k} \rceil$。这将是一棵$k$-上升树。

**定义 10.** 对于任意$k \in (1,\infty) \subset \mathbb{R}$，$k$-上升树 是一个根节点在 $\mathbb{N}$ 中的有根树，其中每个$n \in \mathbb{N}$的父节点为$\lceil {}^{n}{}_{k} \rceil$。

请注意，定义 10 中的根节点不会是 0。

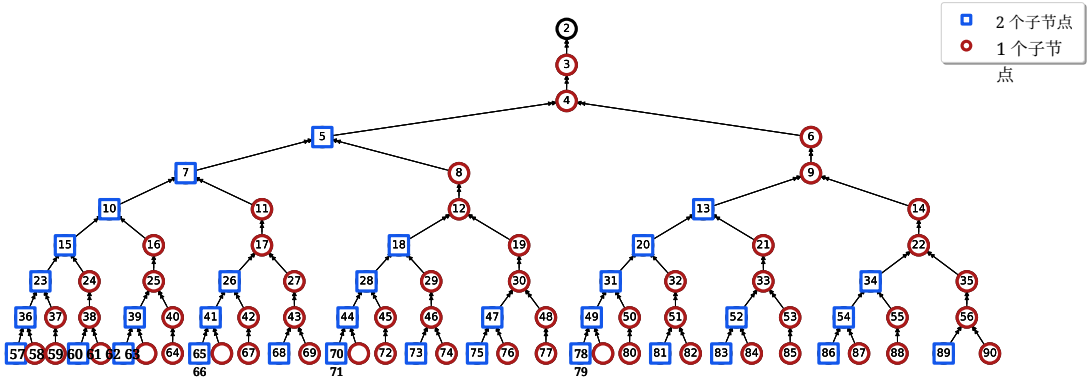


图 8. $\phi$-上升树——这会生成一棵 $\phi$-上升树。已修改原始代码，使用向上取整函数而非向下取整

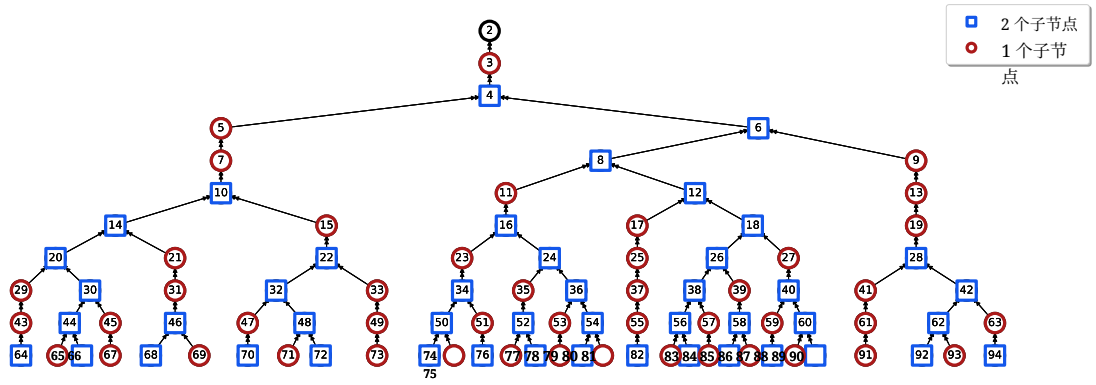


图 9. 3 2-上升树 — 这会生成一棵 3 2-上升树。请注意，这仍然是一棵节奏树，只是索引发生了偏移。

从观察来看，这两个例子似乎都发生了平移（因为根节点不是 0），而图 8 似乎也翻转了。由此看来，许多相同的思路都可以很好地沿用。

其次，研究形式为$k$'s 的更复杂情况可能会很有趣：$k = a + b\,k + c\,k^2 \cdot$。不同于定理 3 中的$r_d = a \cdot r_{d-1} + b \cdot r_{d-2}$，我们可以考虑递推关系$r_d = a \cdot r_{d-1} + b \cdot r_{d-2} + c \cdot r_{d-3}$.。如果这是真的就好了，但这似乎行不通，因为定理 3 依赖于祖父节点指示器，而它只回溯到$r_{d-2}$。

此外，请注意，$\phi$-树的路径可以用正则语言描述。在 [2], 中，他们指出，所有非整数的有理数$k$ 在$k$-树中都不具备这一性质，因此，探究其他哪些无理数具备这一性质会很有意思。其他“类似黄金数”的数并不具备这一性质，形式为$k = a + b\,k \cdot$

此外，[2] 研究节奏的最初原因之一，是它们与分数进制的联系。当$k$ 为有理数时，用于描述$k$树中路径的语言与以$k$为底的自然数构成双射。在$k$ 为无理数的情况下，通往$k$树中节点$n$ 的路径可以被视为$n$的某种以$k$ 为底的表示，但加法就不再那么清晰了。

在这篇论文中，还发现了与约瑟夫问题的出人意料的联系 [3], ，而文章 [1]则特别考察了关于考拉兹猜想的常数 $\rho(\frac{3}{2})$，并提到了约瑟夫问题。它与考拉兹猜想的联系较为松散，因为可以将这一过程简化为这棵树。考拉兹猜想指出，若取某个$n \in \mathbb{N}$，如果它是偶数，就将其除以2；否则取$3n+1$，并不断重复这一过程，最终总会得到1。文章讨论了将这一过程简化为仅执行 $\lfloor \frac{3}{2} n \rfloor$，以消除复杂性，并得到$c(\frac{3}{2})$常数，用于描述该过程生成的树，而这棵树与我们的$k$下降树相同。

如果能通过研究如何用树表示约瑟夫问题，找到更直接的联系，就可以进一步阐明这些与约瑟夫问题及其他问题之间的联系。一个设想是，顶点的编号可以代表约瑟夫问题中的参与者。

这项研究曾在2022年夏季于保加利亚索非亚举行的WFNMC会议上报告。作者谨此感谢当地的行政人员。

参考文献

[1] James Grime、Kevin Knudson、Pamela Pierce、Ellen Veomett 和 Glen Whitney。《超越圆周率与自然常数：常数集》。*Math Horizons*，29(1):8–12，2022。[2] Victor Marsault 和 Jacques Sakarovitch。《无限树与语言的节奏生成》。*arXiv* 预印本 *arXiv:1403.5190*，2014。

[3] Andrew M Od Lyzko 和 Herbert S Wilf . 函数迭代与约瑟夫问题 . 格拉斯哥数学杂志 , 1991年。
l, 33(2):235–240

AGNIV SARKAR 和 ERIC SEVERSON电子邮箱地址:
agnivsarkar@proofschool.org 和 eseverson@proofschool.org
旧金山米慎街973号，旧金山，加利福尼亚州

## 附录 A. 树生成代码

这是用于生成*k*-树图的代码。

```
从 decimal 导入所有内容从 re 导入 X导入 networkx 作为 nx 4 导入
ma
ran
最
14
De
(k)
25
29
=
34
大
用
44
49
```

50 fl = []51 ce = []52 53 # 连接节点 54 for x in range (1 , 最大值 ): 55 G. add_edge ( floor (x/k) , x) 56 if
De
61
0) t
() ,
00(
(k)
ed
lab
ha
<
78
plt
83 ).
5)
htt
点

```
92                根节点 = 下一个(迭代器(nx.拓扑排序_排序(图)))          # 允许回退
    兼容 nx 1.11 版
93            否则:
94                根节点 = 随机.选择(列表(图.节点))
95
96        if not nx.is_树(G):
97            引发 TypeError('不能对非树_图使用层次布局
    树')
98
99        def _层次_pos(G, 根节点, 最左侧, 宽度, 叶节点dx=0.2, 垂直_间距=0.2,
     vert_位置=0
100                       x轴中心=0.5, 根节点位置=None,
101                       叶节点位置=None, 父节点=None):
102
103           if 根节点位置 is None:
104               根节点位置={根节点:(x轴中心, vert_loc)}
105           否则:
106               根节点位置[根节点]=(x轴中心, vert_loc)
107           如果 叶节点位置 is 无:
108               叶节点位置 = {}
109           子节点 = 列表(G.邻居(根节点))
110           leaf_计数 = 0
111           如果不是类型检查(G, nx.有向图) and 父节点 不为 None:
112               子节点.remove(父节点)
113           if len(子节点)!=0:
114               rootdx = 宽度 / len(子节点)
115               nextx = x轴中心 - 宽度/2 - rootdx/2
116               对于 子节点 在 子节点:
117                   下一个x += 根节点dx
118                   根节点位置, 叶节点位置, 新叶节点 = _层级_位置(图, 子节点, 最左侧
    +叶节点_计数*叶节点dx,
119                                                宽度=根节点dx, 叶节点dx=叶节点dx,
120                                                垂直_间距 = 垂直_间距, 垂直_位置 = 垂直_位置 -
    垂直_间距,
121                                                x轴中心=下一个x, 根节点位置=根节点位置, 叶节点位置=
    叶节点位置, 父节点 = 根节点)
122                   leaf_计数 +=新叶节点
123
124               最左侧子节点 = 最小((x对于 x,y in [叶节点位置[子节点]对于 子节点 在
    子节点 ]))
125               最右侧子节点 = 最大((x对于 x,y in [叶节点位置[子节点]对于 子节点 在
    子节点 ]))
126               叶节点位置[根节点] =((最左侧子节点 + 最右侧子节点)/2, 垂直_位置)
127           否则:
128               leaf_计数 = 1
129               叶节点位置[根节点] = (最左侧, vert_loc)
130           返回 根节点位置, 叶节点位置, leaf_count
131
132       x轴中心 = 宽度/2.
133       if 类型检查(图, nx.有向图):
134           叶节点数 = 长度([节点 对于 节点 在 nx.descendants(图 , 根) 如果 图.
    out_degree(节点)==0])
```

```
135 elif isinstance (G , nx . Graph ): 136 叶节点数 =len ( [ 节点 for 节点 in nx . node_connected_
con
 =
loc
leaf
[ 节
节点
```

代码清单 1. 树生成代码

## 附录 B. $\rho$ 代码

这是用于生成 $\rho(k)$ 值的代码。

```
1导入 pandas 并命名为 pd2导入 NumPy 并命名为 np 3 从 math 导入 floor、ceil、sqrt、log4从 decimal 导入所有内容 5 导入
mat
11 c
getl
inde
info
回 d
```

```
31 定义 writeRho ( df ): 32 """写入外部 CSV 以便存储""" 33 df . to_csv ( source , index =False ) 34 35 定义
lef
(l)
ne
ne
53
参
果
las
于
72
定
rh
```

```
80 """ 81 尝试： 82 df =pd . read_csv ( 来源 ) 83 除 文件未找到错误： 84 返回 get_rho (k , min_行_size =
min
(k -
upp
==
bou
回 c
100
(k)
```

清单 2. $\rho(k)$ 近似代码

## 附录 C. $\rho$ 原始数据

这是代码生成的一些记录原始数据。请注意，将数据写入 CSV 文件时似乎发生了一些舍入。数据实际上太大，通常无法使用 csvsimple 之类的工具查看。链接位于 https://github.com/agniv-the-marker/rho-stuff。

附录 D. 祖父节点指示图

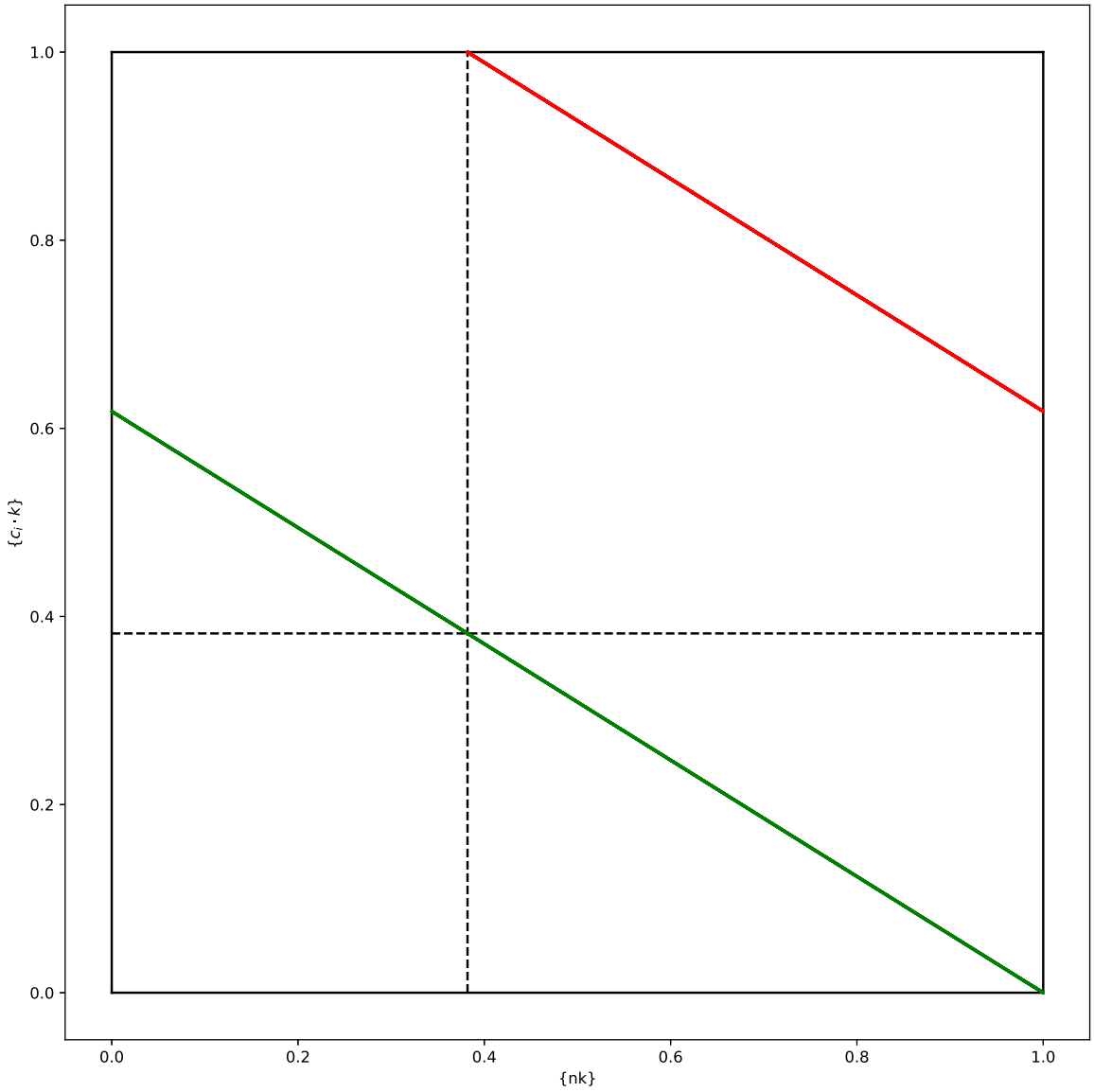


图 10. $\phi$ 祖父母指标

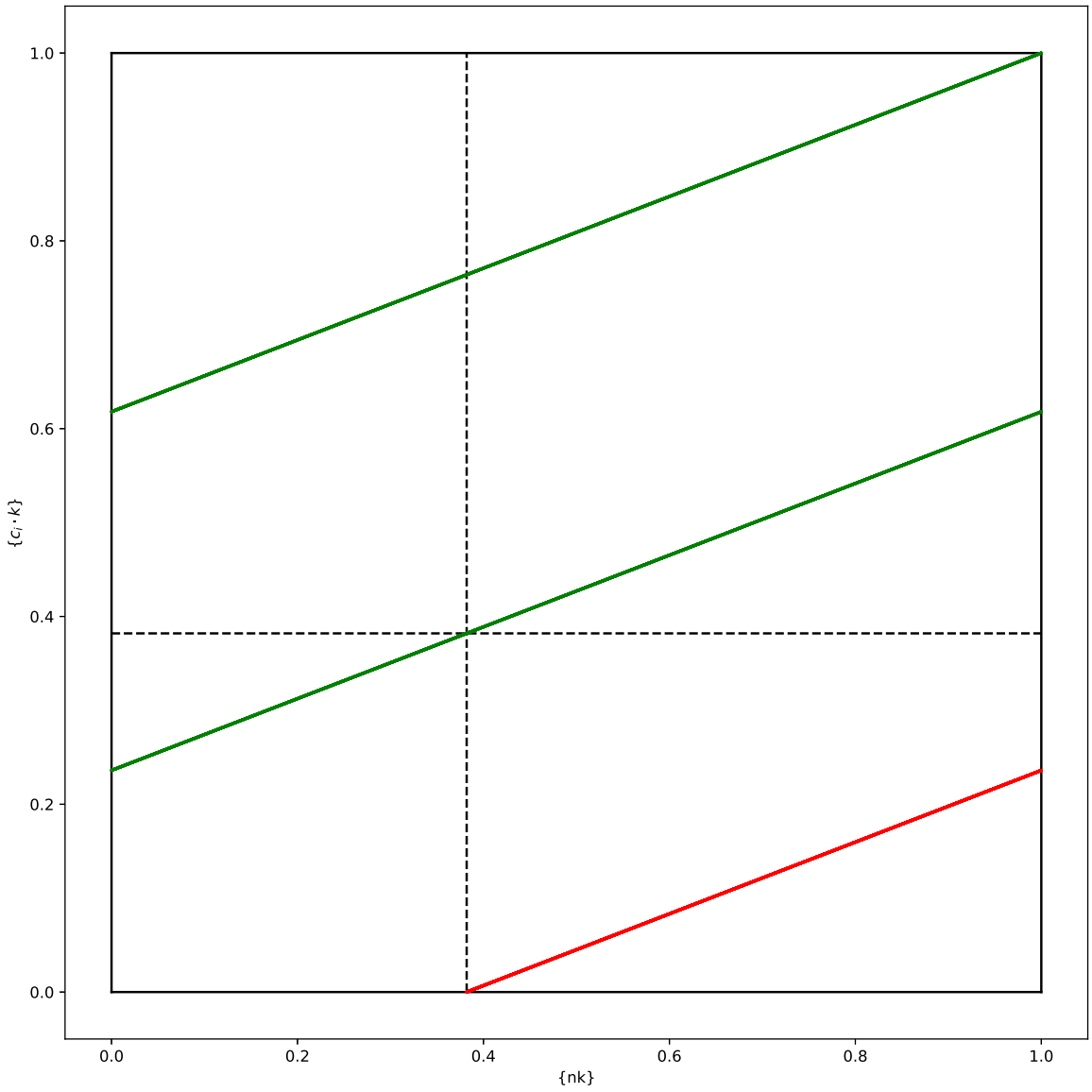


图11。$a = 3,\ b = -1$ 祖父母指标

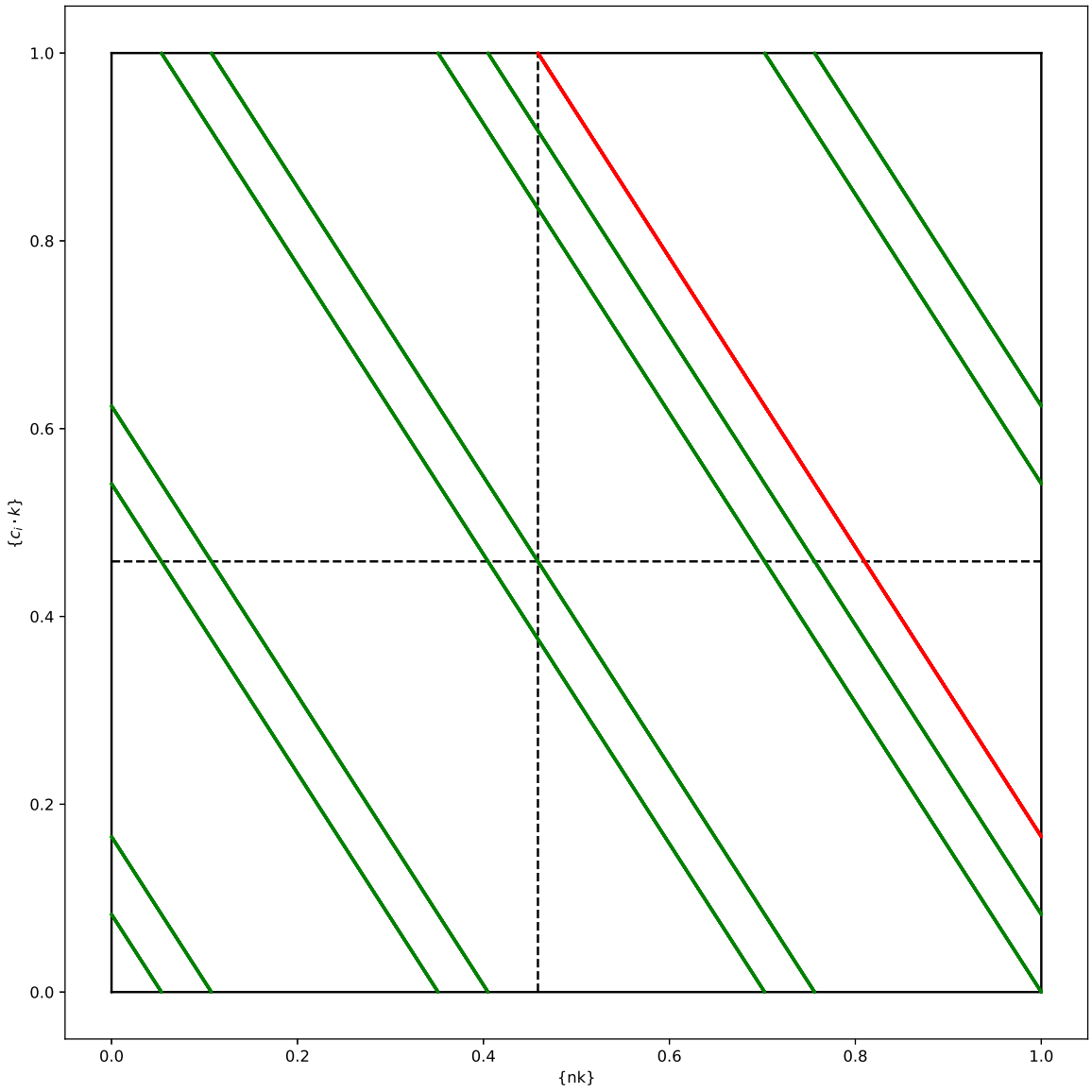


图12. $a = 3, b = 7$ 祖父母指标

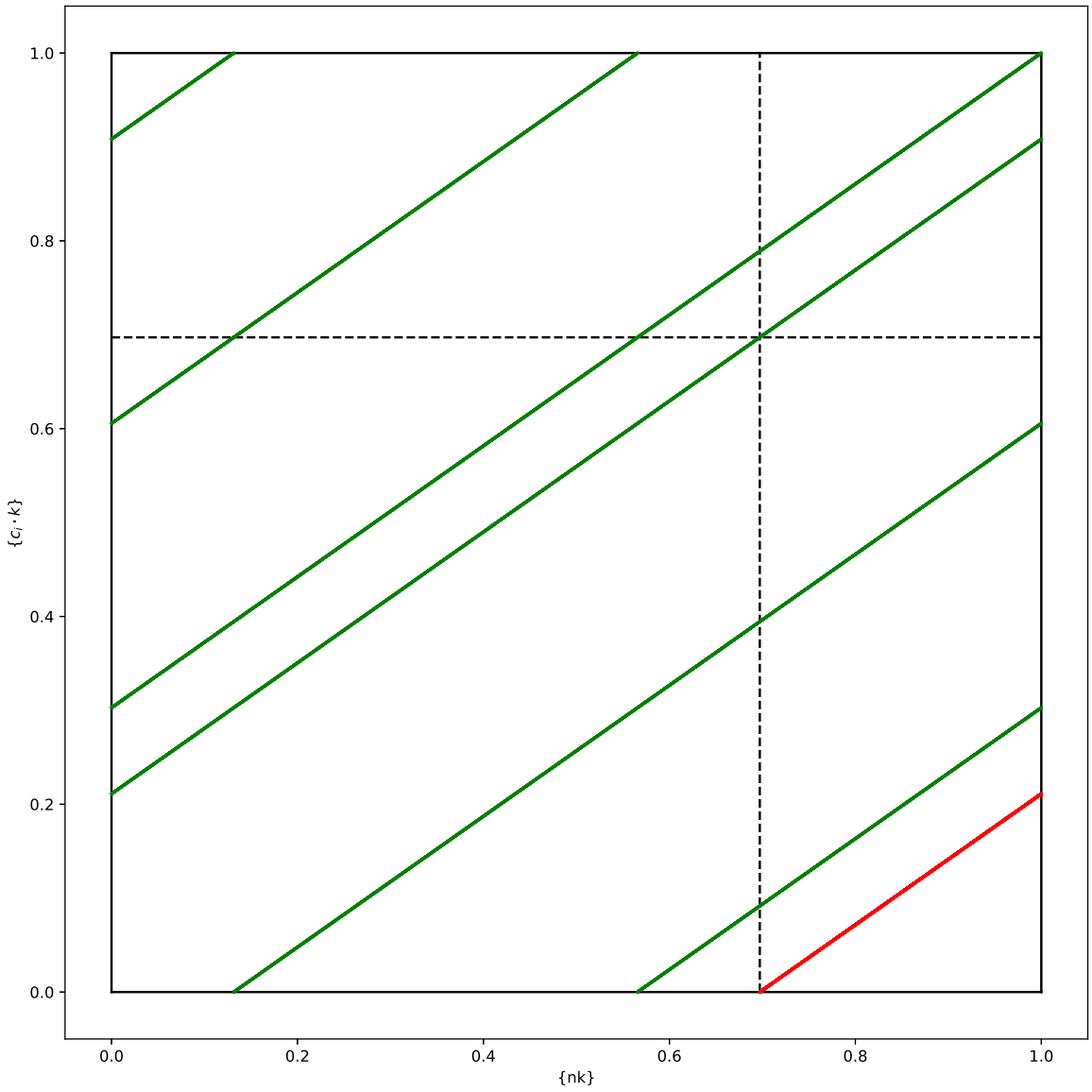


图13. $a = 5,\ b = -3$ 祖父母指标

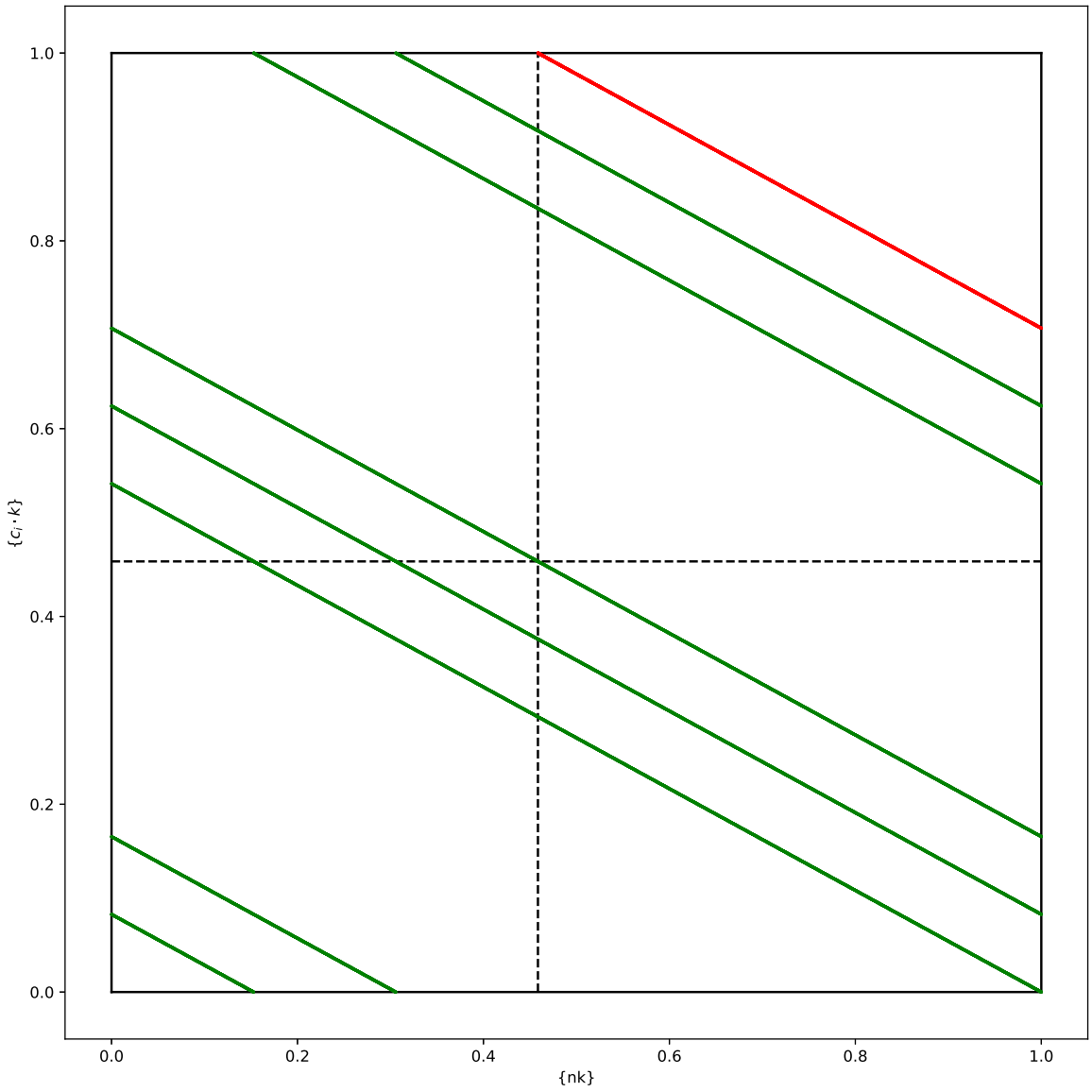


图14。$a = 5,\ b = 3$ 祖父母指标