arXiv:2302.05474v1 [math.DG] 10 Feb 2023

关于RCD 空间上的拉普拉斯界及其应用

NICOLA GIGLI、ANDREA MONDINO 和 DANIELE SEMOLA

摘要。我们证明，在 RCD(K,N) 空间的框架下，不等式 $\Delta f \leq \eta$ 的若干种不同解释彼此等价。相较于此前关于这一问题的结果，我们不仅拓宽了底层空间的适用范围，也放宽了对函数 f 正则性的要求。文中还给出了若干应用。

1. 引言

现代分析中一个反复出现的主题，是为微分（不）等式寻找恰当的弱解释，使其即便在被微分的函数不具备经典意义下的导数时，仍能获得某种有用的意义。这里提及[8, 12]和 [33]，它们是几何分析中在里奇曲率下界条件下这一思想的经典实例，与本文主题密切相关。当底层几何本身不光滑时，这一点尤为重要，因为在这种框架下，“经典导数”的概念通常根本不存在。本文研究有限维RCD空间框架下的不等式 $\Delta f \leq \eta$，并证明，只需假设 f 有界且下半连续，以下对该不等式的各种解释便彼此等价：

1）在分布意义下，参见定义 3.1 和定义 3.2；2）通过与相应泊松方程解进行比较的意义下，参见定义 3.7；3）在粘性意义下，参见定义 3.11；4）在热流渐近意义下，参见定义 3.13。

我们简要回顾一下背景。RCD(K,N)空间由度量测度空间构成；在适当的弱意义下，这些空间具有里奇曲率 $\geq K$ 和维数 $\leq N$。这一概念在 [4, 15] 中被引入，作为原始曲率维数条件 CD(K,N)的一种“黎曼”对应形式；该条件见 [23], [30, 31]（另见 [2, 13, 6, 9]）。关于这一主题的概述及更详尽的参考文献，请参见[1, 32]。

在 RCD(K,N)空间上，关于拉普拉斯算子的分布界这一概念最早在 [15], 中得到研究，并被用于陈述和证明距离函数的拉普拉斯比较估计（另见[10]）。随后， [17] 证明了开集 Ω 上的分布不等式$\Delta f \leq 0$ 等价于“在紧支撑非负扰动下使能量最小化”这一性质。最近的 [26],在 RCD 空间的框架中引入了粘性意义下的拉普拉斯界，并对这类拉普拉斯界各种可能定义之间的关系进行了系统研究。 [26], 的一个主要关注点，也是研究粘性界的动机，是考察较窄类别——非塌缩RCD空间——中极小边界的正则性性质（[16]；与一般 RCD 空间相比，这类空间具有更高的正则性，尤其是在与几何测度论相关的性质方面）。也正因如此，[26] 主要在非塌缩空间上证明了上述四种概念之间的等价性。

然而，近期的 [25, 14] 强烈表明，上述等价关系实际上应当在一般的 RCD$(K,\ N)$空间上成立：这篇短文旨在证明

这一点确实成立。虽然我们没有提出全新的想法，但所需的证明并非易事，并借鉴了近期大量发展的相关成果。此外，我们特别注意尽可能降低对函数 f的正则性假设，从而将上述某些概念扩展到以往已知范围之外。

作为应用，我们：

a) 给出 RCD(K,N) 空间上近似极大值原理的一种替代证明（见 定理 5.1）；b) 证明一般 RCD(K,N) 空间中，局部周长极小化者边界距离函数的尖锐拉普拉斯比较估计。在 [26] 中，这一结果是在非塌缩空间上得到的：一旦有了上述等价性，其推广便相当直接（见 定理 5.2）。

我们强调，在合成意义下截面曲率有下界的亚历山德罗夫空间理论中，旨在理解（次）调和函数及其应用的一条研究路线已在 [28, 29] 中提出，并在[34, 36]中得到进一步发展。这些工作启发了本文以及更早的[26, 25, 14]。

最后，我们以一个在撰写本文过程中自然产生的问题作为引言的结尾。

开放问题： 在一般的 RCD(K,∞) 度量测度空间上，分布意义下的拉普拉斯界与热流意义下的拉普拉斯界是否等价?

为使本文简洁，我们假定读者熟悉 RCD理论的基本定义和概念。

致谢 本研究大部分是在 Fields研究所开展的，期间正值非光滑黎曼几何与洛伦兹几何专题项目。作者谨此感谢研究所的热情接待和富有启发性的学术氛围。

A. M. 获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助，资助协议编号为 802689“CURVATURE”；为实现开放获取，他已将知识共享署名公共版权许可应用于本次投稿所产生的任何作者接受稿（AAM）版本。

2. 一些预备知识与记号

在整篇文章中，$(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K,N) 度量测度空间，其中 $K\in\mathbb{R}$和 $N\in[1,\infty)$。特别地，(X,d) 是一个真度量空间，并且 $\mathfrak{m}$ 在有界集上是有限的。给定一个开子集 $\Omega\subset X$，我们将 $\mathrm{C_b}(\Omega)$（分别为 $\mathrm{Lip_c}(\Omega)$）记作 Ω 上有界连续函数的空间（分别为支集紧且包含于 Ω 中的 Lipschitz函数空间）。

3. 拉普拉斯界与等价性结果的概念

定义 3.1（分布意义下的拉普拉斯算子界 1）。 设 $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K,N) 度量测度空间，且 $\Omega\subset X$ 是一个开区域。设 $f\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $\eta\in\mathrm{C_b}(\Omega)$。如果 $\mathbf{\Delta} f\le\eta$ 在分布意义下满足以下条件，我们称其具有拉普拉斯界：对于任意非负函数 $\varphi\in\mathrm{Lip_c}(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \nabla f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le\int_\Omega\varphi\,\eta\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\,.$$

更一般地，类比欧几里得情形，可以在对 f 较弱的正则性假设下，通过以下方式在分布意义下定义拉普拉斯界

“再做一次分部积分”。借用 [18], 中对于任意 RCD(K,N) 度量测度空间 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的记号，我们引入

$$\mathrm{Test}^{\infty}(X):=\{\varphi\in D(\Delta)\cap L^{\infty}\ :\ |\nabla\varphi|\in L^{\infty}\,,\Delta\varphi\in L^{\infty}\cap W^{1,2}\} \tag{3.1}$$

并且，对于一个开区域 $\Omega\subset X$,

$$\mathrm{Test}_{c}^{\infty}(\Omega):=\{\varphi\in\mathrm{Test}^{\infty}(X)\ :\ \mathrm{supp}\,\varphi\Subset\Omega\}\,. \tag{3.2}$$

定义 3.2 （分布意义下的拉普拉斯算子界 2）。 设 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 RCD$(K,\ N)$ 度量测度空间，且 $\Omega\subset X$ 是一个开区域。设 $f\in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $\eta\in\mathrm{C_b}(\Omega)$。如果 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$ 在分布意义下成立，则称其满足以下条件：对于任意非负函数 $\varphi\in\mathrm{Test}_{c}^{\infty}(\Omega)$，均有

$$\int_{\Omega}f\Delta\varphi\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\leq\int_{\Omega}\varphi\,\eta\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\,. \tag{3.3}$$

注 3.3。 如果 $f\in W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$ 根据 定义 3.2，那么 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$ 也根据 定义 3.1。通过对（3.3）分部积分，并回忆 $\mathrm{Test}_{c}^{\infty}(\Omega)$ 在 $\mathrm{Lip_c}(\Omega)$ 中的稠密性，即可验证这一蕴含关系。

注 3.4。 在最近发表的 [27] 中，针对 RCD(K,N) 度量测度空间，得到了欧几里得空间上经典韦伊引理的一种变体。其推论之一指出，若 $f\in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$，且根据 $\mathbf{\Delta}f\geq\eta$，按照 定义 3.2对于某个 $\eta\in\mathrm{C_b}(\Omega)$（实际上只需 $\eta\in L^{2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 即可），则 $f\in W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$。特别参见 [27,推论 1。5]。

注 3.5。 由于 RCD$(\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ 度量测度空间中存在 Test$K,N)$ 截断函数（可直接照搬 [24, 引理 3。1] 的证明并选取 $f:\ [0,1]\to[0,1]$ 属于 C^{3} 类即可构造出这些函数），可以证明，若 $f\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 根据 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$ 定义 3.2 满足条件，则，$W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$。证明与欧几里得空间情形下的经典证明类似，主要分为两个步骤：能量估计和正则化过程。能量估计基于恒等式

$$\int_{\Omega}|\nabla(\varphi f)|^{2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}=\int_{\Omega}f^{2}\,|\nabla\varphi|^{2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}+\int_{\Omega}\nabla(\varphi^{2}f)\cdot\nabla f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\,, \tag{3.4}$$

对任意 $\varphi\in\mathrm{Lip_c}(\Omega)$ 以及 $f\in W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 均成立。特别地，取一个截断函数$\varphi\in\mathrm{Test}_{c}^{\infty}(\Omega)$，则根据分布拉普拉斯算子界，可以估计 (3.4) 右端的第二项。正则化通过热流进行，例如参见[27,引理 3.6]。

命题3.6. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个RCD(K,N) 度量测度空间，其中某些 $K\in\mathbb{R},N\in[1,\infty)$ 满足条件，并设$\Omega\subset X$ 是一个开区域。设 $f\in W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$，且 $\eta\in\mathrm{C_b}(\Omega)$。假设 $\mathbf{\Delta}f\leq\eta$ 在分布意义下成立，则：

i) f 在局部有下界，并且除去一个 $\mathfrak{m}$-零测集外，等于其下半连续本质包络 f_{*}，该包络定义如下：

$$f_{*}(x):=\sup_{r>0}\operatorname*{ess\,inf}_{B_r(x)}f\,,\quad for\ \mathfrak{m}\text{-}a.e.\ x\in\Omega\,; \tag{3.5}$$

ii) 任意点 $x\in\Omega$ 都是 f_{*} 的勒贝格点，即

$$\lim_{r\to0}\fint_{B_r(x)\cap\Omega}|f(y)-f_{*}(x)|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)=0\,,\quad if\quad f_{*}(x)<+\infty\,, \tag{3.6}$$

and

$$\lim_{r\to0}\fint_{B_r(x)\cap\Omega}f(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)=+\infty\,,\quad if\quad f_{*}(x)=+\infty\,; \tag{3.7}$$

iii) 对任意 $x \in \Omega$，均有

$$\lim_{t\to 0} P_t \tilde{f}(x) = f_*(x)\,, \tag{3.8}$$

~对于任意 $x \in \Omega$ 以及任意满足~的多项式增长函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，在 x的某个邻域内都有 $f = f$。

证明。 i) 和 ii) 两项众所周知：基于莫泽迭代的 [19, 第 8] 章中的技巧几乎无需修改即可应用（另见 [22, 命题 10]的证明）。

要在 $f_*(x) < \infty$ 时得到 iii)，只需将勒贝格点条件 (3.6) 与引理 2.54]结合起来。若 $f_*(x) = +\infty$，则由下半连续性可知，对任意 $M \in \mathbb{R}$，存在一个邻域 $U_M \ni x$，使得在 U_M 上几乎处处有 $f > M$。容易推出 $\liminf_{t\to 0} P_t f(x) \geq M$。令 $M \to +\infty$ 取极限，即得 (3.8) 在 $f_*(x) = +\infty$的情形下也成立。□

下述定义是 [7, 定义 14。8] （在前一篇论文中 [26]这些函数被称为“经典上解”）。

定义 3.7 （比较意义下的超解）。 设 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 为一个 RCD(K, N) 度量测度空间，且 $\Omega \subset X$ 是一个开区域。设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个下半连续函数，且 $\eta \in \mathsf{C}_\mathrm{b}(\Omega)$。若满足以下条件，我们称 f 是 $\Delta f = \eta$ 的比较意义下的超解：对于任意开区域 $\Omega' \Subset \Omega$ 以及任意函数$g \in C(\Omega')$，只要 $\Delta g = \eta$ 在 Ω' 中且 $g \leq f$ 在 $\partial\Omega'$ 上成立，就有 $g \leq f$ 在 Ω 上成立。

注 3.8。 由狄利克雷问题解的标准存在性与正则性以及拉普拉斯算子的线性性，可轻易推出如下结论：给定一个连续函数 η 和一个下半连续函数 u，若 v_η 是 $\Delta v_\eta = \eta$ 的一个局部解（可能定义在更小的区域 $\Omega' \subset \Omega$ 上），则 u 是 $\Delta f = \eta$ 的比较意义下的超解，当且仅当 $u - v_\eta$ 是 $\Delta f = 0$ 的比较意义下的超解（可能定义在更小的区域 $\Omega' \subset\Omega$ 上）。

注 3.9。 正如 [7, 注 9.56], 中所讨论的，在 $\Delta f = \eta$的比较意义下的超解并不一定属于 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$。在赋予欧几里得空间典范度量测度结构的情况下，可以构造反例。

注 3.10。 在 RCD(K, N) 空间上，$N \in [1, \infty)$，很容易证明存在连续函数 g，它们是 $\Delta g = \eta$ 的局部解，其中 η 连续且有界。例如，在给定边界条件下，能量 $g \mapsto \int_U \frac{1}{2}|\nabla g|^2 + g\eta \mathrm{d}\mathfrak{m}$在 $W^{1,2}(U$中的任意极小化子都满足 $\Delta g = \eta$ 在 U 中成立，并且根据命题 3.6，它是连续的。

定义 3.11 （拉普拉斯算子的黏性界）。 设 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K, N) 度量测度空间，并设 $\Omega \subset X$ 是一个开有界区域。设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是下半连续的，并且 $\eta \in\mathsf{C}_\mathrm{b}(\Omega)$。如果对任意 $\Omega' \Subset \Omega$ 以及任意测试函数 $\varphi\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，我们称 $\Delta f \leq \eta$ 在 Ω 中具有黏性意义下的性质。

(i) $\varphi \in D(\Delta,\Omega')$，且 $\Delta\varphi$ 在 Ω'上连续；

(ii) 对某个 $x \in \Omega'$，成立 $\varphi(x) = f(x)$，且对任意 $y \in \Omega', y \neq x$，有 $\varphi(y) \leq f(y)$；成立

$$\Delta\varphi(x) \leq \eta(x)\,.$$

注 3.12。 狄利克雷问题解的标准存在性与正则性，以及拉普拉斯算子的线性性，直接推出以下结论：给定一个连续函数 η 和一个下半连续函数 u，当且仅当将 v_η 记为 $\Delta v_\eta = \eta$ 的一个局部解（可能是在更小的区域 $\Omega' \subset \Omega$ 上）时，$\Delta u \leq \eta$在黏性意义下成立，当且仅当 $\Delta(u - v_\eta) \leq 0$ 在黏性意义下成立（可能是在更小的区域 $\Omega' \subset\Omega$ 上）。

定义 3.13（热流意义下的上解）。设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K, N) 度量测度空间，且 $\Omega \subset X$ 是一个开有界区域。设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个有界下半连续函数，且 $\eta \in \mathrm{C_b}(\Omega)$。若满足以下条件，我们称 $\Delta f \leq \eta$ 在 Ω 上满足热流意义下的~热流意义。记 $f : X \to \mathbb{R}$ 为 f 的全局延拓~，满足对任意 $x \in X \setminus \Omega$， $f(x) := 0$，则有

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{P_t \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)}{t} \leq \eta(x), \quad \text{for every } x \in \Omega.$$

注 3.14. 我们注意到，只要全局延拓具有多项式增长，在 定义 3.13 中选择何种全局延拓都不影响定义。这是 [26, 引理 2.53], 应用于任意两个具有多项式增长的f 全局延拓之差所得到的结论。

4. 等价性的证明

我们引用两个重要结果，它们将方程 $\Delta f = \eta$ 的上解（在比较意义下）与超极小者联系起来。在我们的假设下，它们是 [7, 推论 9.6、定理 9.24 和定理 14.10] 的直接推论（另见 [21]），其中讨论了上解与能量的超极小者之间的等价性；而 [17], 则证明了狄利克雷能量的超极小者这一性质与分布意义下的拉普拉斯界之间的等价性。正如我们已经指出的，将 [7] 中的结果从调和函数 $\Delta f \leq 0$ 推广到更一般的上拉普拉斯界情形并无困难。这是因为拉普拉斯算子的线性性，以及 RCD(K, N) 空间上泊松方程解的局部可解性与正则性（注 3.10）。

定理 4.1。设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个RCD(K, N) 度量测度空间，其中 $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$，并设 $\Omega \subset X$ 是一个开有界区域。设 $f \in W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $\eta \in \mathrm{C_b}(\Omega)$。假设 $\mathbf{\Delta} f \leq \eta$ 在分布意义下成立。那么 f_* 是关于 $\Delta f_* \leq \eta$的比较意义下的超解。

定理 4.2。设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个RCD(K, N) 度量测度空间，其中 $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$，并设 $\Omega \subset X$ 是一个开有界区域。设 $f \in W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$，且假设 $f_* = f$ $\mathfrak{m}$-几乎处处成立，并且 f_* 是关于 $\Delta f_* \leq \eta$的比较意义下的超解，其中某个函数 $\eta \in C_b(\Omega)$。那么 $\mathbf{\Delta} f \leq \eta$ 在分布意义下成立。

根据上述定理 4.1 和定理 4.2，定义 3.1 和定义 3.7中的概念本质上等价，至少在假设 $f \in W^{1,2\,\mathrm{loc}}$ 成立时如此。

下面是对[26, 引理 3.23]的一个小扩展。关于 [26]，这里不再要求 Lipschitz 正则性，但证明基本不变。这是从粘性意义下的拉普拉斯界推出分布意义下的拉普拉斯界的关键工具。

引理 4.3（粘性超解的最小值原理）。设（X，d $\mathfrak{m}$）是某个 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in [1, \infty)$）对应的 RCD$(K,\ N)$度量测度空间。设$\Omega \subset X$ 是一个开且有界的~区域，使得 $\mathfrak{m}$（$X \setminus \Omega$） > 0。设 $f :\ \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个下半连续函数，且 $\Delta f \leq 0$ 在黏性意义下成立。那么

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

证明。反设

$$\min_{x \in \Omega} f(x) < \min_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

于是，左侧的最小值在内部点 $x_0 \in \Omega$处取得。特别地

$$\min_{x\in\partial\Omega} f(x) > f(x_0)\,. \tag{4.1}$$

考虑泊松问题 $\Delta v = 1$ on $X \supset\Omega' \supset\Omega$ 的一个解，使得 $v \geq 0$ on Ω 且

$$M := \max_{\partial\Omega} v \geq \min_{\partial\Omega} v =: m > 0\,.$$

该函数可以通过对任意一个 $\Delta u = 1$on Ω' 的解进行加性扰动得到，依据局部 Lipschitz 正则性 [20, 定理 12]。
我们声称，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，也有

$$f_\varepsilon(x) := f(x) - \varepsilon v(x)$$

在 Ω 内部某点处取得局部极小值。
反设结论不成立。那么，对任意 $\varepsilon > 0$, ¯ 的全局¯最小值在 f_ε on Ω 上于 $\partial\Omega$ 处取得。特别地，存在 $x_\varepsilon \in \partial\Omega$，使得

$$f(x_\varepsilon) - \varepsilon M \leq f(x_\varepsilon) - \varepsilon v(x_\varepsilon) = f_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq f_\varepsilon(x_0) \leq f(x_0)\,.$$

因此

$$\min_{x\in\partial\Omega} f(x) - f(x_0) \leq f(x_\varepsilon) - f(x_0) \leq M\varepsilon\,, \quad \text{for any } \varepsilon > 0\,,$$

这与（4.1）矛盾，只要 ε 足够小。

现在令 $\varepsilon > 0$ 足够小，从而 $f_\varepsilon = f - \varepsilon v$ 在$\bar{x} \in \Omega$处取得局部极小值 $c \in \mathbb{R}$ 。注意，根据假设，函数 $g := f - c$ 在黏性意义下满足 $\Delta g \leq 0$ 。在黏性意义下的界 $\Delta g \leq 0$ 的定义中，将 εv 用作测试函数，我们得到

$$\Delta(\varepsilon v)(\bar{x}) \leq 0\,.$$

这与 $\Delta v = 1$ 在 Ω 上矛盾。 □

“黏性上解蕴含比较意义下的上解”的证明。这一推论已在[26, 定理 3.24] 在对 f作出更强假设的情况下得到证明。我们在此重述证明，并指出为处理更一般情形所需的细微修改。

我们断言，若 $\Delta f \leq \eta$ 在黏性意义下成立，则 f 是 $\Delta f = \eta$的比较意义下的上解，正如定义 3.7所述。这是引理 4.3的推论。事实上，考虑任意开子域 $\Omega' \Subset \Omega$以及任意函数 $g \in C(\Omega')$，使得 $\Delta g = \eta$ 在 Ω 上′且 $g \leq f$ 在 $\partial\Omega'$上。
注意到 $h : = f - g$ 在 Ω 上是下半连续的′ 并且满足 $\overline{\Delta} h \leq 0$ 在 Ω 上的黏性意义′，因为 $\Delta f \leq \eta$ 在黏性意义下成立，并且 $\Delta g = \eta$。考虑到注 3.12 ，由引理 4.3 可知

$$\min_{x\in\Omega'} h(x) = \min_{x\in\partial\overline{\Omega'}} h(x) \geq 0\,.$$

由此可得 $f \geq g$ 在 Ω 上′，因此 f 是 $\Delta f = \eta$ 的比较意义下的上解。□

“分布意义蕴含热流意义”的证明。通过截断论证以及热流的强局部性，参见 [14, 引理 3.8] 和 [26, 引理 2.53], ，只需在以下简化情形下证明这一蕴含： $f \in W^{1,2}(X)$ 在 X 上满足$\mathbf{\Delta} f \leq \eta$ ，其中 η 是一个有界支集的连续函数： $X \to \mathbb{R}$ 。

注意，

$$P_t f(x) - P_s f(x) \leq \int_s^t P_r\eta(x)\,\mathrm{d}r\,, \tag{4.2}$$

对于任意 $x \in X$ 和任意 $0 < s < t$。
根据 命题3.6， f 存在一个下半连续代表 f_* 并且 $P_s f(x) \to f_*(x)$ 满足 $s \to 0$ 对任意 $x \in X$。由 η 的连续性以及（4.2），可得

$$\limsup_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f_*(x)}{t} \le \limsup_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t P_s \eta(x)\, \mathrm{d}s = \eta(x)\,. \tag{4.3}$$

□

“热流意义蕴含粘性意义”的证明。 设 $x \in$ 是 Ω 上的 φ 在x 处的一个测试函数，如粘性意义下拉普拉斯界的定义所述。根据 [26, 引理2。56], 对于任意延拓 $\tilde{\varphi}$： $X \to \mathbb{R}$ 属于 φ： $\Omega' \to \mathbb{R}$ 且具有多项式增长，都有

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)}{t} = \Delta\varphi(x)\,. \tag{4.4}$$

根据热流意义下拉普拉斯界的定义，有

$$\limsup_{t\to 0} \frac{P_t \tilde{f}(x) - f(x)}{t} \le \eta(x)\,, \tag{4.5}$$

˜ ˜其中 $f = f$ 在 Ω 上，且 $f = 0$ 在 $X \setminus \Omega$ 上。

As $\varphi \le f$ 在 Ω 上′，由（4.4）和（4.5），以及 [26, 引理2。53] 立即可推出

$$\Delta\varphi(x) \le \eta(x)\,. \tag{4.6}$$

□

在温和的正则性假设下，上述蕴含关系显然足以确立分布意义、热流意义和粘性意义下拉普拉斯界这些概念之间的等价性。下面我们在假设 f 有界的条件下，直接证明热流意义下的拉普拉斯界蕴含分布意义下的拉普拉斯界；这一结果本身也具有独立的研究价值。

证明中的关键工具是上拉普拉斯界在霍普夫–拉克斯半群作用下的稳定性，该性质对一般的 RCD(K， ∞) 空间均成立；关于本文所采用的表述，参见 [26, 第 4] 节及 [14, 引理 4.8]。

引理 4.4. 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ 度量测度空间，其中 $K \in \mathbb{R}$。设f： $X \to \mathbb{R}$ 为博雷尔可测且有界。设 $t > 0$， 并假设存在某些 $x, y \in X$， 使得

$$\mathcal{Q}_t f(x) = f(y) + \frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{2t}\,. \tag{4.7}$$

Then

$$\limsup_{s\to 0} \frac{P_s \mathcal{Q}_t f(x) - \mathcal{Q}_t f(x)}{s} \le \limsup_{s\to 0} \frac{P_s f(y) - f(y)}{s} - K\frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{t}\,. \tag{4.8}$$

“热流意义蕴含分布意义”的证明。证明思路如下。经过时长为 $t > 0$ 的霍普夫–拉克斯半群作用后，$\mathsf{Q}_t f$ 在热流意义下具有与 f 相同的拉普拉斯上界，至多相差一些在 $t \downarrow 0$ 时趋于 0 的修正项。此外，根据拉普拉斯比较，$\mathsf{Q}_t f$ 在分布意义下的拉普拉斯算子有上界。因此，热流意义下更精确的拉普拉斯界可以改进为分布意义下的拉普拉斯界。最后，令 $t \downarrow 0$，利用分布意义下拉普拉斯界的稳定性即可得出结论。

暂且假设 $\Omega = X$，即 $f : X \to \mathbb{R}$ 下半连续且有界， $\eta : X \to \mathbb{R}$ 连续，并且 $\Delta f \le \eta$ 在热流意义下。借用 [14, 第 4], 节中的记号，对于任意 $x \in X$ 和 $t > 0$， 令 F_t (x) 为 $\mathsf{Q}_t f(x)$ 的变分定义中的一个极小化子，即

$$\mathcal{Q}_t f(x) = f(F_t(x)) + \frac{\mathsf{d}^2(x, F_t(x))}{2t}\,. \tag{4.9}$$

注意，由于 $x \in X$ 的局部紧性、有界性和下半连续性，这样的极小化子对每个 f都存在。此外， $F_t(x$由 $\mathfrak{m}$-几乎处处 $x \in X$唯一确定，这是由[14,定理 49]得出的。

根据 引理 4.4，对每个 $x \in X$ 均有

$$\limsup_{s\to 0} \frac{P_s\mathcal{Q}_t f(x) - \mathcal{Q}_t f(x)}{s} \le \limsup_{s\to 0} \frac{P_s f(F_t(x)) - f(F_t(x))}{s} - K\frac{\mathsf{d}^2(x, F_t(x))}{t}. \quad (4.10)$$

由于 f 在热流意义下的拉普拉斯算子有上界 η，我们推得

$$\limsup_{s\to 0} \frac{P_s\mathcal{Q}_t f(x) - \mathcal{Q}_t f(x)}{s} \le \eta(F_t(x)) - K\frac{\mathsf{d}^2(x, F_t(x))}{t}, \quad (4.11)$$

对每个 $x \in X$均成立。

根据 RCD(K, N) 空间的拉普拉斯比较，$\mathcal{Q}_t f$在分布意义下的拉普拉斯算子局部有上界。因此，根据 [14, 引理 3.2] 有

$$\mathbf{\Delta}\mathcal{Q}_t f \le \eta_t \mathfrak{m}, \quad (4.12)$$

其中我们定义

$$\eta_t(x) := \eta(F_t(x)) - K\frac{\mathsf{d}^2(x, F_t(x))}{t}, \quad (4.13)$$

对于任意 $x \in X$ 以及任意 $t > 0$。

根据标准论证（例如参见 [3, 第 3] 节），函数 $|\eta_t|$ 在局部一致有界，且其界与 $t \in (0, 1)$ 无关。

类似地，函数 $\mathsf{Q}_t f$ 在局部一致有界，且其界与 $t \in (0,1)$ 无关；并且 $\mathsf{Q}_t f \to f$ 在 $\mathfrak{m}$-几乎处处的意义下，当 $t \downarrow 0$ 时成立。此外，函数 $\mathsf{Q}_t f$的 $W^{1,2}$ 范数在局部有界，且关于 t 一致（由注记 3.5）。因此，根据 $W^{1,2}$ 能量的下半连续性， $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$。根据 [14, 公式 (3.30)] 附近的讨论，我们可以对序列 $t_n \downarrow 0$ 取极限，得到估计 (4.12)，从而 f 在分布意义下的拉普拉斯算子在局部有上界（该上界可能并非最优）。

总之，分布意义下的非锐利上拉普拉斯界可以再次借助 [14, 引理 3。2], 与热流意义下的上拉普拉斯界结合，从而得到 $\Delta f \le \eta$ 在分布意义下成立。

对于 Ω 是 X 的有界开子集的情形，我们按照 [14, 引理 3.7] 中的方法进行论证。令 $s := \sup_\Omega f$，$\Omega' \Subset \Omega$，并对 $C \gg 0$考虑函数 $f_\prime := f + C\mathsf{d}^2(\cdot, \Omega')$。根据距离函数的（分布意义下的）拉普拉斯比较性质，以及我们已证明的“分布意义下 $\Rightarrow$ 热流意义下”这一蕴含关系，我们知道，对于某个 $\eta' \in \mathsf{C}_{\mathrm{b}}(\Omega)$， $\Delta f' \le \eta'$在热流意义下成立，其中 $\eta' = \eta$ 在 Ω' 中。最后一个等式由热流的局部性得出，参见 [26, 引理 3.8]。

显然，当 C 足够大时，我们有 $f > s$ 位于 $\partial\Omega$ 的邻域内，因而函数 $f'' := f_\prime \wedge s$（定义为在 Ω 外部满足 s）满足 $\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f''(x) - f''(x)}{t} = 0$，在 $\{f'' = s\}$ ~~的内部~~，并且

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{P_t f''(x) - f''(x)}{t} \le \limsup_{t\downarrow 0} \frac{P_t f'(x) - f''(x)}{t}, \quad \text{on} \quad \{f' \le s\} \subset \Omega. \quad (4.14)$$

因此，对于某个 $\eta'' \in \mathsf{C}_{\mathrm{b}}(X)$， $\Delta f'' \le \eta''$ 在热流意义下等于 η 于 Ω'。根据上文已经证明的结果，我们得出， $\mathbf{\Delta} f'' \le \eta''$ 在整个X上具有分布意义。因此， $\mathbf{\Delta} f \le \eta$ 于 Ω'，进而根据分布拉普拉斯算子的局部性以及 $\Omega' \Subset \Omega$ 的任意性，在整个 Ω 上也成立（另见 [15, 命题 4.17]）。□

5. 应用

借助本文及前文所发展的工具， [14, 26], 我们可以在偏微分方程的粘性理论中恢复经典近似最大值原理的一个版本。参见 [35, 定理 4。2] 另一种基于 Kato不等式的方法。

定理 5.1. 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 度量测度空间，其中 $K \in \mathbb{R}$和 $N \in [1, \infty)$。设 $\Omega \subset X$ 为一个有界区域，且 $f \in W^{1,2}(\Omega) \cap \mathrm{C_b}(\Omega)$。假设 $\mathbf{\Delta} f \leq C$ 在 Ω 上以分布意义成立，其中 $C \in \mathbb{R}$。若 $x \in \Omega$ 是 f的一个最小点，则存在一个序列 $\Omega \ni x_n \to x$ ，使得

(i) x_n 是 $\mathbf{\Delta} f$的绝对连续部分 $\Delta^{\mathrm{ac}} f$ 的勒贝格点；(ii) $[\Delta^{\mathrm{ac}} f(x_n)]_- \to 0$ 当 $n \to \infty$时；(iii) x_n是 $|\nabla f|$ 的勒贝格点，且当 $n \to \infty$时， $|\nabla f|(x_n) \to 0$。

证明。 只需将 f 替换为 $f + \varepsilon \mathsf{d}_x^2$ ，其中 ε 任意小，即可假设 f 在 x处有一个严格的最小点。额外的误差项可以用与下文所采用的方法类似的论证来处理。

根据勒贝格微分定理， $\mathfrak{m}$-几乎处处的点都是 $\Delta^{\mathrm{ac}} f$的勒贝格点。此外，根据 [5, 定理 5.4]（另见 [11]）， $\mathfrak{m}$-几乎处处的点 $x \in \Omega$ 按照 [5, 定义 5.2]都是 f 的调和点。特别地， x 是 $|\nabla f|$ 的勒贝格点，并且函数 f 在 x 处的任意放大极限，都是 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的某个切空间上的分裂函数，其斜率为 $|\nabla f|(x)$；若 $|\nabla f|(x) = 0$，则放大极限为常值函数 0。根据 [25, 推论 4.5] ，对于任意 $n \geq 1$ ，存在 $a_n < 1/n$ 和 $y_n \in \Omega$，使得 $\mathsf{d}(x, y_n) < 1/n$，且函数

$$f_n(z) := f(z) + a_n \mathsf{d}^2(z, y_n) \tag{5.1}$$

在点 x_n 处达到局部极小值，该点是 $\Delta^{\mathrm{ac}} f$ 的勒贝格点，也是 f 的调和点，满足 $\mathsf{d}(x, x_n) < 1/n$。我们声称，序列 (x_n) 满足陈述中的结论。

事实上，由局部极小性和[26, 引理 2.56]

$$\liminf_{t \to 0} \frac{P_t f_n(x_n) - f_n(x_n)}{t} \geq 0\,. \tag{5.2}$$

另一方面，对于 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间的拉普拉斯比较以及 [26, 引理 2.54] ，可得

$$\limsup_{t \to 0} \frac{P_t f_n(x_n) - f_n(x_n)}{t} \leq \Delta^{\mathrm{ac}} f(x_n) + a_n \limsup_{t \to 0} \frac{P_t \mathsf{d}^2(\cdot, y_n)(x_n) - \mathsf{d}^2(x_n, y_n)}{t} \tag{5.3}$$

$$\leq \Delta^{\mathrm{ac}} f(x_n) + C_{K,N} a_n\,, \tag{5.4}$$

其中 $C_{K,N}$ 是一个常数，仅取决于拉普拉斯比较中得到的 Ricci 曲率下界和维数上界，见 [15]。

结合（5.2）和（5.3），我们得到

$$\Delta^{\mathrm{ac}} f(x_n) \geq -C_{K,N} a_n\,, \tag{5.5}$$

对任意 $n \geq 1$，且 (ii) 得证。
此外，再次利用局部极小性，函数 f_n 在(5.1)中引入的，在x_n 处的任意放大极限，在切空间的基点处都有一个最小值。然而， f_n 在x_n处的任意放大极限，都是斜率为 $|\nabla f|(x_n)$ 的分裂函数与一个利普希茨函数之和，因为 x_n是f的调和点，并且该利普希茨函数的利普希茨常数不超过 $2a_n \mathsf{d}(x_n, y_n) \leq 4/n^2$。很容易得出 $|\nabla f_n|(x)$，从而立即得到(iii)。□

在 [26], $\mathrm{RCD}(K, N)$度量测度空间 $(X, \mathsf{d}\ \mathscr{H}^N)$上，第二和第三作者得到了从局部周长极小集出发的距离函数的尖锐拉普拉斯比较。对于参考测度为 $\mathscr{H}^N$ 的限制可以去掉

这得益于本文中得到的不同拉普拉斯界概念之间的等价性。

定义比较函数 $\mathrm{t}_{K,\,N}:I_{K,\,N}\to\mathbb{R}$ 如下

$$\mathrm{t}_{K,N}(x):=\begin{cases}-\sqrt{K(N-1)}\tan\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}}x\right) & \text{if } K>0\\ 0 & \text{if } K=0\\ \sqrt{-K(N-1)}\tanh\left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}}x\right) & \text{if } K<0\,,\end{cases}\tag{5.6}$$

$$I_{K,N}:=\begin{cases}\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N-1}{K}},\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N-1}{K}}\right) & \text{if } K>0\\ \mathbb{R} & \text{if } K\le 0\,.\end{cases}$$

定理 5.2. 设$(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$是一个$\mathrm{RCD}(K,N)$度量测度空间，其中 $K\in\mathbb{R}$和 $N\in[1,\infty)$。设 $E\subset X$ 是一个局部有限周长集合，并假设它是一个局部周长极小化者。设$\mathsf{d}_{\overline{E}}\colon X\setminus\overline{E}\to[0,\infty)$为从 $\overline{E}$出发的距离函数。那么

$$\Delta\mathsf{d}_{\overline{E}}\le\mathrm{t}_{K,N}\circ\mathsf{d}_{\overline{E}}\quad \textit{on } X\setminus\overline{E}\,,\tag{5.7}$$

其中 $\mathrm{t}_{K,\,N}$ 在 (5.6)中定义$\Omega\subset X$ 是一个开区域，且 $E\subset X$ 在Ω中局部周长极小，则令

$$\mathcal{K}:=\{x\in X\,:\,\exists\, y\in\Omega\cap\partial E\ \textit{ such that }\ \mathsf{d}_{\overline{E}}(x)=\mathsf{d}(x,y)\}\,,\tag{5.8}$$

成立

$$\Delta\mathsf{d}_{\overline{E}}\le\mathrm{t}_{K,N}\circ\mathsf{d}_{\overline{E}}\quad \textit{on any open subset } \Omega'\Subset\left(X\setminus\overline{E}\right)\cap\mathcal{K}\,.\tag{5.9}$$

证明。 与 [26,定理 5.2]中的证明相比，只需作非常小的调整。具体而言，借用其中引入的记号，在 [26]的证明步骤 3 中，我们令

$$\hat{\psi}:=\psi-\delta\mathsf{d}_x^2\,.\tag{5.10}$$

All $\hat{}\,\psi$ 的性质 (i') 至 (iv') 仍然成立，但有以下两个例外：

a) 函数 $\hat{}\,\psi$ 不属于拉普拉斯算子的定义域。不过，根据 RCD(K， N) 空间的拉普拉斯比较，它的测度值拉普拉斯算子局部有下界；b) 在 (iv') 中，只有下拉普拉斯界 $\mathbf{\Delta}\,\hat{}\,\psi>\varepsilon'$ 成立，且必须在分布意义下理解。

$\hat{}$ 关于 ψ 的全局延拓 $\overline{\psi}$ ，也有类似的说明。我们指出， $\overline{\psi}$ 上的上拉普拉斯界在 [26] 后续论证中并未发挥作用，因此这些论证无需进一步修改即可沿用于当前情形。□

参考文献

[1] L. Ambrosio，度量测度空间中的微积分、热流与曲率-维数界，载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》第一卷：大会报告，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018年，第301–340页。[2] L. Ambrosio、N. Gigli、A. Mondino 和 T. Rajala，具有 有限测度的度量测度空间中的黎曼里奇曲率下界，Trans. Amer. Math. Soc.，367 (2012)，第4661–4701页。[3] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré，度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有里奇曲率下界的空间上的应用，《数学发明》，195 (2014)，第289–391页。[4] ———，黎曼里奇曲率有下界的度量测度空间，《杜克数学杂志》，163 (2014)，第1405–1490页。[5] L. Ambrosio、S. Honda、J. W. Portegies 和 D. Tewodrose，借助特征函数将$\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空间嵌入 L^2 空间，《功能分析杂志》，280 (2021)，论文编号108968，共72页。[6] L. Ambrosio、A. Mondino 和 G. Savaré，度量测度空间中的非线性扩散方程与曲率条件，《美国数学会回忆录》，262 (2015)，第0页。[7] A. Björn 和 J. Björn，度量空间上的非线性势理论，EMS数学论丛第17卷，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2011年。

[8] *E. Calabi*，《*E. Hopf*极大值原理的推广及其在黎曼几何中的应用》，《杜克数学杂志》，*25 (1958)*，第*45–56*页。[9] *F. Cavalletti* 和 *E. Milman*，曲率维数条件的整体化定理，《数学发明》，*226 (2021)*，第*1–137*页。[10] *F. Cavalletti* 和 *A. Mondino*，距离函数拉普拉斯算子的新公式及其应用，《分析与偏微分方程》，*13 (2020)*，第*2091–2147*页。[11] *J. Cheeger*，度量测度空间上利普希茨函数的可微性，《几何与泛函分析》，*9 (1999)*，第*428–517*页。[12] *J. Cheeger* 和 *D. Gromoll*，非负里奇曲率流形的分裂定理，《微分几何杂志》，*6 (1971/72)*，第*119–128*页。[13] *M. Erbar*、*K. Kuwada* 和 *K.-T. Sturm*，度量测度空间中的熵曲率维数条件与博赫纳不等式的等价性，《数学发明》，*201 (2014)*，第*1–79*页。[14] *N. Gigli*，关于从*RCD(*K*,* N*)*空间到*CAT(0)*空间的调和映射正则性及相关结果。预印本，*arXiv:2204.04317*。[15] ———, 度量测度空间的微分结构及其应用，《美国数学会回忆录》，*236 (2015)*，第*vi*+91页。[16] *N. Gigli* 和 *G. De Philippis*，里奇曲率有下界的非塌缩空间，《综合理工学院数学杂志》，*5 (2018)*，第*613–650*页。[17] *N. Gigli* 和 *A. Mondino*，度量测度空间中非线性势理论的偏微分方程方法，《纯粹与应用数学杂志》（第*9*辑），*100 (2013)*，第*505–534*页。[18] *N. Gigli* 和 *E. Pasqualetto*，《非光滑微分几何讲义》，*SISSA Springer*丛书，*Springer*，*2020*年。[19] *D. Gilbarg* 和 *N. S. Trudinger*，《二阶椭圆型偏微分方程》，数学经典丛书，*Springer-Verlag*，柏林，*2001*年。重印*1998*年版。[20] *R. Jiang*，度量测度空间中泊松方程解的利普希茨连续性，《位势分析》，*37 (2012)*，第*281–301*页。[21] *J. Kinnunen* 和 *O. Martio*，度量空间上的非线性势理论，《伊利诺伊数学杂志》，*46 (2002)*，第*857–883*页。[22] *P. Lindqvist*，上解的正则性，载于《非线性椭圆与抛物型问题的正则性估计》，数学讲义第*2045*卷，*Springer*，海德堡，*2012*年，第*73–131*页。[23] *J. Lott* 和 *C. Villani*，通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率，《数学年刊》（第*2*辑），*169 (2009)*，第*903–991*页。[24] *A. Mondino* 和 *A. Naber*，《里奇曲率有下界的度量测度空间的结构理论》，《欧洲数学会杂志》（*JEMS*），*21 (2019)*，第*1809–1854*页。[25] *A. Mondino* 和 *D. Semola*，从*RCD(*K*,* N*)*空间到*CAT(0)*空间的调和映射的利普希茨连续性与博赫纳-埃尔斯-桑普森不等式。预印本，*arXiv: 2202.01590*。[26] ———, 非光滑空间中的弱拉普拉斯界与极小边界：里奇曲率有下界。预印本，*arXiv:2107.12344*。[27] *Y. Peng*、*H.-C. Zhang* 和 *X.-P. Zhu*，*RCD(*K*,* N*)*度量测度空间上的外尔引理。预印本，*arXiv: arXiv:2212.09022*。[28] *A. Petrunin*，亚历山德罗夫空间上的次调和函数。可见 *https://anton-petrunin.github.io/papers/HarmFun.pdf*。[29] ———, 亚历山德罗夫空间上的调和函数及其应用，《美国数学会电子研究公告》，*9 (2003)*，第*135–141*页。[30] *K.-T. Sturm*，度量测度空间的几何学（一），《数学学报》，*196 (2006)*，第*65–131*页。[31] ———, 度量测度空间的几何学（二），《数学学报》，*196 (2006)*，第*133–177*页。[32] *C. Villani*，*F. Cavalletti* 与 *A. Mondino*关于度量测度空间中等周不等式的工作 *[]*。《布尔巴基研讨班》，可见：*http://www.bourbaki.ens.fr/TEXTES/1127.pdf*。[33] *H. Wu*，研究非负曲率的一种初等方法，《数学学报》，*142 (1979)*，第*57–78*页。[34] *H.-C. Zhang* 和 *X.-P. Zhu*，亚历山德罗夫空间上的丘成桐梯度估计，《微分几何杂志》，*91 (2012)*，第*445–522*页。[35] ———, *(* RCD^**,*K*,* N*)* 度量测度空间上的局部李-丘估计，《变分法与偏微分方程》，*55 (2016)*，文章*93*，共*30*页。[36] ———, 亚历山德罗夫空间之间调和映射的利普希茨连续性，《数学发明》，*211 (2018)*，第*863–934*页。

SISSA，博诺梅亚街 265 号，34136 的里雅斯特，意大
利电子邮件地址： ngigli@sissa.it

牛津大学数学研究所，伍德斯托克路，牛津 OX2 6GG，英国电子邮件地址： andrea.mondino@maths.ox.ac.uk

FIM-ETH，雷米街 101 号，8092 苏黎世，瑞士电子邮件地址：
daniele.semola@math.ethz.ch