arXiv:2302.05485v1 [math.AG] 10 Feb 2023



UFRJ

里约热内卢联邦大学 数学与自然科学中心 数学研究所

有理椭圆曲面的几何与算术方面

RenatoDias Costa
导师：Cecília Salgado

为部分满足数学哲学博士（PhD）学位的要求而提交的论文。

里约热内卢
2022

有理椭圆曲面的几何与算术方面

Renato Dias Costa

提交给里约热内卢联邦大学（UFRJ）数学研究生项目的博士论文，作为获得数学博士学位所需条件的一部分。

导师：Cecília Salgado

里约热内卢
2022年12月

出版物编目

D394g

Dias Costa, Renato
有理椭圆曲面的几何与算术方面
／Renato Dias Costa。-- 里约热内卢
里约热内卢，2022年。
85页。

导师：Cecília Salgado。
博士论文——里约热内卢联邦大学
数学研究所，数学研究生课程
数学，2022年。

1. 椭圆曲面。I. Salgado, Cecília,
指导。II. 标题。

由 UFRJ 自动生成系统根据作者提供的数据编制，责任人为 Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283。

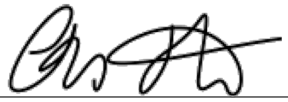
有理椭圆曲面的几何与算术方面

RenatoDias Costa 指导

教师：Cecília Salgado

提交给里约热内卢联邦大学（UFRJ）数学研究生项目的博士论文，作为获得数学博士学位所需条件的一部分。

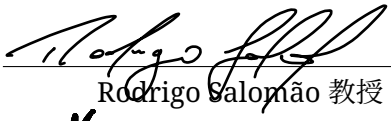
通过答辩：



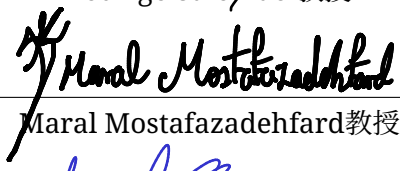
主席：Cecília Salgado 教授



Carolina Araújo 教授



Rodrigo Salomão 教授



Maral Mostafazadehfard教授



Ariel Molinuevo教授

里约热内卢

2022年12月

致谢

向过去四年里一直陪伴在我身边的人们致谢，既是我的责任，也是我的喜悦。

我很幸运能与 Cecília Salgado 共事。她让我亲眼看到一位真正的专业人士如何思考，也让我明白，一个人完全可以兼顾学术界与家庭生活。感谢她的耐心，尤其是在一开始时，她一遍又一遍地重复同样的解释，直到我终于明白 garlic 不是 bugalho。后来我发现，Cecília 还是一位很好的写作老师，这让我十分惊喜。感谢她相信我，有时甚至比我自己更相信自己：没有这份支持，这项工作会困难得多。

我很感激 Alice Garbagnati 慷慨地细读我的第一篇论文，并建议我开展后续研究。也感谢我的同事 Felipe Zingali，让我们有机会分享彼此的困惑，一起探究一个人究竟是如何发现某件事的。

我不能错过这个机会，不提一位极其杰出的教授 Rodrigo José Gondim Neves。他是我认识的第一个既有意愿又有能力理解数学的人；他理解数学，不只是为了它的应用，而且正如 Jacobi 所写，是为了人类精神的荣誉。他关于分圆多项式的课程，是我最珍贵的回忆之一：我从他那里得到的远比他所想象的更多。

我亏欠父亲和母亲太多，生命以及许多其他东西都来自他们，而这些我永远无法报答。感谢家人的支持与鼓励，尤其是在博士学业刚开始、女儿刚出生的时候。妻子 Edlaura 和女儿 Cecília 每日的陪伴，总能让我脚踏实地，也让我的生活愈发充满意义与温情。希望这项工作能成为我们共同取得的成就之一。

感谢答辩委员会成员 Rodrigo Salomão、Carolina Araújo、Maral Mostafazadehfard、Ariel Molinuevo、Luciane Quoos 和 MiriamAbdon 提出的意见和建议，我从中受益良多。

此外，我还要感谢资助机构 CAPES、CNPq 和 FAPERJ 提供的资金支持；没有这项支持，本论文将无法完成。

摘要

本论文汇集了围绕有理椭圆曲面的算术和代数方面开展的三条研究线索所形成的成果。本文的组织结构如下。

在第1 章中，我们介绍三条研究主线，并说明它们之间的联系。简而言之，它们是：

1. 在代数闭域上，对有理椭圆曲面上的圆锥丛的纤维进行分类，并描述椭圆纤维化的纤维与圆锥丛的纤维之间的相互作用。

2. 给定代数闭域上的有理椭圆曲面，研究哪些数不可能作为一对截面的交数，这些数称为间隙数。更准确地说，尝试回答间隙数何时存在、如何分布以及如何识别它们。

3. 给定数域上的有理椭圆曲面，研究其 Mordell-Weil 秩高于一般秩的纤维集合。更具体地说，给出一些条件，以确保秩至少跃升 3 的纤维集合不是薄集。

第2 章致力于确立记号、定义及公知结果，本文将在此基础上
t他的研究以此为基础。与上述三个主题分别相关的结果各自构成一章
c章，分别是第 3、4 和第5章。第6章的附录收录了与第4章相关的数据。第3、4 和第5 章的结果也分别见于以下预印本：

- [Cosa]R.D. Costa。任意特征下有理椭圆曲面上圆锥丛的分类。 arXiv:2206.03549。
- [Cosb] R.D. Costa。 有理椭圆曲面上截面交数的间隙。arXiv:2301.03137。
- [CS] R.D. Costa、C. Salgado。 椭圆曲面上的大幅秩跃升与希尔伯特性质。arXiv:2205.07801。

Key词语：椭圆曲面、椭圆纤维化、圆锥丛、Mordell-Weil 格 .

目录

1 引言 **8**

1.1 圆锥丛纤维的分类.91.2 交数间隙.111.3 大幅秩跃升与希尔伯特性质.13

2 预备知识 **14**

2.1 椭圆曲面.14 2.1.1 截面、曲线与一般纤维上的点之间的对应关系 . . . 15 2.1.2 奇异纤维.15 2.1.3 欧拉数.19 2.1.4 基变换.19 2.2 有理椭圆曲面.21 2.2.1 有理曲面与几何有理曲面.21 2.2.2 由三次曲线铅笔构造.22 2.2.3 有理椭圆曲面的性质.22 2.3 圆锥丛.23 2.4 薄集与希尔伯特性质.24 2.5 曲面几何的一般事实.25 2.6 格.26 2.7 Mordell-Weil 格.27 2.8 贡献项的界 $c_{\max}, c_{\min}$ .31 2.9 差值 $\Delta = c_{\max} - c_{\min}$ .32 2.10 二次型 Q_X .33

3 有理椭圆曲面上的圆锥丛 **35**

3.1 圆锥丛的数值刻画.363.2 圆锥丛纤维的分类.383.3 圆锥丛的纤维与椭圆纤维化的纤维.413.4 圆锥丛的例子.433.4.1 构造与记号.433.4.2 例子.44

4 间隙在 截面的交数 **50**

4.1 间隙数.514.2 与挠截面的交.51

4.3 必要条件.52 4.4 当 $\Delta \leq 2$ 时的充分条件.52 4.4.1 $\Delta < 2$ 情形.53 4.4.2 $\Delta = 2$ 情形.54 4.5 当 $\Delta \leq 2$ 时的充要条件.55 4.6 充分条件总结.55 4.7 应用.56 4.7.1 $r \geq 5$ 中无间隙数.56 4.7.2 $r \leq 2$ 中以概率 1 出现的间隙.58 4.7.3 当 $E(K)$ 为秩为 $r = 1$ 的无挠时，间隙的确定 . . . . . 59 4.7.4 具有 1- 间隙的曲面 .60

5 更大的秩 ju mps 和希尔伯特性质6 **3**

5.1 非约化纤维.655.2 在非约化纤维处分歧的圆锥丛（RNRF）.685.3 RNRF 与多重基变换. 715.4 秩跃升三次.715.5 例子.73

6 附录 **77**

第1章

引言

本文的核心研究对象是有理椭圆曲面（见定义2.1.1 和2.2.3）。我们的研究源于三个关于这些曲面的算术和几何方面的动机问题。我们将在各自的具体背景下逐一介绍这些问题，说明解决问题的策略，并陈述我们的研究结果。

从历史角度来看，椭圆曲面源于数论问题，随着时间推移，其研究逐渐转向更具几何性的处理。从函数域上的椭圆曲线这一视角出发，Artin 最初在常数为有限域的情形下研究了它们 [艺术24] ，旨在寻找黎曼猜想的类比；后来 Weil [魏尔48]证明了这一猜想的一般形式。在复数域上的代数曲面框架中，Enriques 早已知道椭圆纤维化 [恩里克斯49], ，但它们当时仅是众多例子中的一类。

Kodaira 对此进行了更为深入专门的研究 [Kod63a，Kod63b]并采用复几何的语言，为椭圆曲面的深入研究奠定了基础。Néron [内龙64]和 Shafarevich [SAV+65]很快推动了代数理论的发展，而 Tate [泰特75] 则通过提出一种用于识别奇异纤维的简化算法作出了重要贡献。

椭圆曲面的一个关键方面是，椭圆纤维化的截面与一般纤维上的点之间存在双射对应（小节2.1.1），Shioda 首先在 [Shi72] 中对此作了明确强调。这种对应关系是构造 Mordell-Weil 格的基本要素（第 2.7 节），Shioda [Shi89] 和 Elkies [Elk90] 分别独立地建立了这一构造。事实证明，这一工具在几何和算术方面都具有重要价值，并应用于伽罗瓦表示、K3 曲面模空间和晶体学等多个领域。

我们关注有理椭圆曲面，是因为它们具有便于研究的几何性质（定理 2.2.6）、例子的构造相对简单（第 3.4 节），而且其可能的纤维构型和可能的 Mordell-Weil 格已分别在 [Per90] 和 [OS91] 中得到完整分类。

下文中， X 是一个几何有理椭圆曲面，其椭圆纤维化为 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$，定义在域 k 上，其中该域或者是数域，或者是代数闭域。令 $K := k(\mathbb{P}^1)$ 为基曲线 $\mathbb{P}^1$ 的函数域，并将 π 的 Mordell-Weil 群定义为一般纤维 E 上的 K-点群，记作 $E(K)$。注意，每个几何有理椭圆曲面都恰好有一个椭圆纤维化（命题 2.2.6），因此我们可以将$E(K)$称为曲面 X 的 Mordell-Weil 群。我们用 r 表示 $E(K)$ 的秩，称为 Mordell-Weil 秩或一般秩。

我们提出了三个感兴趣的问题。

1.1 圆锥丛纤维的分类

广义而言，圆锥丛可理解为簇上的零亏格纤维化（关于曲面的定义，见2.3.1 ）。圆锥丛在许多重要背景下以不同形式出现，从分类 k-极小有理曲面到极小模型纲领（更精确的论述见第2.3节和第3 章）。本文更具体地关注有理椭圆曲面 π 上的圆锥丛： $X \to \mathbb{P}^1$这一研究受以下结果启发：[Sal12], [LS22], ，其中圆锥丛的存在被用作保证秩跃升发生的条件（见第1.3节和第5章）；以及 [GS17、GS20], ，其中圆锥丛被用于分类某些 K3 曲面上的椭圆纤维化；此外还有 [AGL16], ，其中圆锥丛出现在对 X的 Cox 环生成元的研究中。

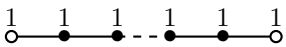
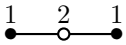
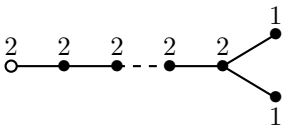
这些应用似乎足以说明进一步研究有理椭圆曲面上的圆锥丛是有必要的。更具体地说，我们提出两个问题：首先，可以通过哪些方式构造除子 D 在X 上，使得线性系 $|D|$ 在 X上诱导出一个圆锥丛？其次，椭圆纤维化的纤维构型在多大程度上会阻碍这一构造?

我们的出发点是一个观察，这一点已隐含于 [AGL16], [GS17、GS20], 之中：在 X 上存在圆锥丛与某些Néron-Severi类 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$之间的一一对应，我们称这些类为圆锥类(定义3.1.1)。这表明，我们所需的全部信息都可以从代表圆锥类的除子 D 的数值性质中推导出来。

我们注意到，这项研究本质上是几何的，因此在基域的代数闭包上进行研究是合理的。此外，除了少许困难外，我们没有理由将自身局限于特征零的情形；在数域上， [Sal12、LS22] 研究的正是这种情形；而在[AGL16、GS17] 中是在 $\mathbb{C}$ 上研究的，或是在 [GS20]中在特征零的域上研究的。

我们的第一个结果是对 X 上圆锥丛的纤维进行完全分类，并回答了关于 D 的可能性这一首个问题，其中 $|D|$ 诱导出圆锥丛 $\varphi_{|D|}$： $X \to \mathbb{P}^1$。

定理 3.2.2. 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是代数闭域上的有理椭圆曲面，且 φ： $X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛。若 D 是 φ 的一个纤维，则 D（计入重数）的交图符合以下某一种类型。反之，若某个除子的交图 D 符合以下任一种类型，则 $|D|$ 诱导一个圆锥丛 $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$。

Type	交图 （含重数）
0	
A_2	
A_n $(n \geq 3)$	
D_3	
D_m $(m \geq 4)$	

⋆ 亏格 0 的光滑不可约曲线
○(-1)-曲线（ π的截面）
●(-2)-曲线（ π的可约纤维的分支）

第二个结果回答了第二个问题，并精确描述了 X 上的圆锥丛纤维与椭圆纤维化的纤维构型之间的相互作用。我们使用 Kodaira 对 π 的奇异纤维所采用的记号（见定理 2.1.8）。

定理 3.3.2. 设 X 是一个有理椭圆曲面，其椭圆纤维化为 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$。则以下结论成立：

a) X 存在一个圆锥丛，其含有 A_2 纤维，且 $\Leftrightarrow \pi$ 具有正的一般秩，并且没有 III^* 纤维。b) X 存在一个圆锥丛，其含有 $A_{n\geq 3}$ 纤维，且 $\Leftrightarrow \pi$ 有一个不同于 II^* 的可约纤维。c) X 存在一个圆锥丛，其含有 D_3 纤维，且 $\Leftrightarrow \pi$ 至少有两个可约纤维。d) X 存在一个圆锥丛，其含有 $D_{m\geq 4}$ 纤维，且 $\Leftrightarrow \pi$ 有一个非约化纤维或一个 $\mathrm{I}_{n\geq 4}$ 纤维。

定理 3.2.2和3.3.2在第3 章中得到证明，而且在很大程度上也是 [Cosa]的主要结果。

1.2 交数间隙

我们注意到，若不详细研究 $\pi:\ X\to\mathbb{P}^1$ 的截面如何彼此相交，就无法对定理3.3.2 中 a) 项给出完整证明。事实上，要准确回答 X 何时具有带有一个 A_2 纤维的圆锥丛，必须准确知道哪些有理椭圆曲面具有截面 $P_1,\ P_2\in E(K)$，使得交数 $P_1\cdot P_2$ 等于1。在 [Cosa], 写作时，这个问题尚无答案，因此在当时的背景下只能证明 a) 项的部分结论，而完整结论仍是一个猜想。下面介绍我们的下一项研究，它提供了证明 a) 项及其他若干结果所需的工具。

我们提出如下问题：当 P_1,P_2 遍历 $E(K)$ 时，$P_1\cdot P_2$ 可以取哪些值？一般而言，在曲面上计算曲线的交数可能是一个非常困难的问题。不过，在我们的情形中，我们只关注椭圆曲面的截面，而这类曲面还有一个优点，即它是有理的。Mordell-Weil 格为我们提供了攻克这一问题的工具；这一概念最早由 Elkies [Elk90] 和 Shioda [Shi89, Shi90]引入。它涉及在 $E(K)$ 上定义一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的配对，称为高度配对；该配对在商空间 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}$上诱导出一个正定格，即 Mordell-Weil 格（第 2.7 节）。其构造的一个关键方面是它与 Néron-Severi 格的联系，因此高度配对与截面的交配对紧密交织在一起。幸运的是，[OS91], 已经对有理椭圆曲面上的 Mordell-Weil 格的可能形式进行了分类，为我们提供了一个方便的起点。

这项研究的另一个方面，是它与数论中的一个经典主题之间的联系，即用正定二次型表示整数。事实上，由于 $E(K)$ 的秩为 r，其自由部分由 r项生成，因此高度 $h(P):=\langle P,\ P\rangle$ 在 r 个变量上诱导出一个系数属于 $\mathbb{Q}$的正定二次型。如果 $O\in E(K)$ 是中性截面，且 R 是 π的可约纤维集合，那么根据高度公式（2.3）

$$h(P)=2+2(P\cdot O)-\sum_{v\in R}\mathrm{contr}_v(P),$$

其中，对 v 的求和是一个可以轻易估计的有理数。通过消去分母可知，$P\cdot O$ 的可能取值取决于某个由系数属于 $\mathbb{Z}$的正定二次型所表示的整数范围。这一观点在第4章的若干部分中得到了探讨；在那里，我们应用了诸如经典的拉格朗日四平方定理 [HW79，§20、5], 二元二次型所表示整数的计数结果 [Ber12，第 91] 页，以及较新的关于万有二次型的 Bhargava-Hanke 的 290 定理 [BH，定理 1]。

我们称 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 X 的间隙数，或者称 X 有一个 k-间隙，如果不存在满足 $P_1\cdot P_2=k$ 的截面 $P_1\cdot P_2\in E(K)$。我们尝试回答间隙数在什么条件下存在、如何分布，并尝试在某些情况下识别它们。我们的首个结果表明，当 Mordell-Weil 秩足够大时，不存在间隙数。

定理4.7.2。若 $r\geq 5$，则 X 没有间隙数。

另一方面，如果秩足够低，那么间隙数出现的概率为 1。

定理 4.7.4。 若 $r \leq 2$，则间隙数集合 $G := \{k \in \mathbb{N} \mid k$ 是 X 的间隙数具有密度1 于 $\mathbb{N}$，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#G \cap \{1, \cdots, n\}}{n} = 1.$$

关于间隙数的明确判定，我们指出若干可以完全判定的情形。

定理 4.7.7。 若 $E(K)$ 是秩为 $r = 1$的无挠 X ，则其所有间隙数均可根据格 T 加以描述，该格与 π 的可约纤维相关联（见定义 *2.7.3*）。

T	k 是一个间隙数 $\Leftrightarrow$没有一个以下数为完全平方数
E_7	$k+1, \quad 4k+1$
A_7	$\frac{k+1}{4}$, $16k$, ..., $16k+9$
D_7	$\frac{k+1}{2}$, $8k+1$, ..., $8k+4$
$A_6 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{7}$, $28k-3$, ..., $28k+21$
$E_6 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{3}$, $12k+1$, ..., $12k+9$
$D_5 \oplus A_2$	$\frac{k+1}{6}$, $24k+1$, ..., $24k+16$
$A_4 \oplus A_3$	$\frac{k+1}{10}$, $40k-4$, ..., $40k+25$
$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{15}$, $60k-11$, ..., $60k+45$

表 1.1：当 $E(K)$ 为无挠且满足 $r = 1$ 时间隙数的描述 .

最后，我们固定 $k = 1$ ，并确定所有具有 1-间隙的有理椭圆曲面。这等价于描述 X 何时具有一个带有 A_2 纤维的圆锥丛，从而我们解决了证明定理3.3.2 中 a) 项这一动机问题。

定理 4.7.8。 X 具有 1-间隙，当且仅当 $r = 0$ 或 $r = 1$ 且 π 具有 III* 纤维。

四个 t 上面的定理在第4 章中得到证明，也是 [Cosb中的主要结果。].

1.3 大幅秩跃升与希尔伯特性质

设 k 是一个数域。我们探讨丢番图几何中的一个重要主题，即纤维 $\pi^{-1}(t)$ 的 Mordell-Weil 秩如何随 t 在 $\mathbb{P}^1_k$ 中变化。在寻找高秩椭圆曲线时，这一现象一直是构造例子的主要来源，Mestre[Mes92], Fermigier [Fer92, Fer97], Nagao [Nag92, Nag93, NK94], Martin-McMillen [MM98, MM00] 都曾利用这一现象；最终，Elkies [Elk06], 创下的秩 ≥ 28 记录在 $\mathbb{Q}$ 上至今仍未被打破。

我们首先考虑两个重要结果；第一个是 Néron [Né52，定理 6], 指出，对于所有 r_t （在 k 上）的纤维 $\pi^{-1}(t)$，其 Mordell-Weil 秩 大于或等于一般秩 r；但 $t \in \mathbb{P}^1_k$ 不属于 $\mathbb{P}^1_k$ 的某个薄子集（见定义 2.4.1）。另一个结果由 Silverman 提出 [Sil83，定理 C], ，以第一个结果为基础，指出 $r_t \geq r$ 除了有界高度的点集之外。在本文中，我们研究秩是否可能出现 $r_t > r$；若出现这种情况，我们称之为 秩跳跃，并研究 $\mathbb{P}^1_k$ 发生秩跳跃的子集的性质。

这一问题不仅在有理椭圆曲面 [Bil98、Sal12、LS22] 的情形中受到关注，也在 K3 曲面 [Sal15] 和阿贝尔簇 [HS19]中受到关注。值得注意的是，在 [LS22]中，作者证明，在某些条件下，秩至少跃升2的纤维集合，即 $\{t \in \mathbb{P}^1_k \mid r_t \geq r+2\}$ 并非薄集（定义 2.4.1）。这使人关注秩跃升集合的性质，并重新引入了 Néron 专化定理中的薄集概念。

我们的策略是运用 Néron 几何方法，这些方法已应用于 [Shi91、Sal12、Sal15、HS19、CT20] 来产生秩跃升，并运用 [LS22]中的思想研究秩跃升集合的性质。更准确地说，我们寻找能够保证秩至少跃升 3 的情形在一个非薄集合上发生的条件。事实上，我们证明，只需要求 X上存在某种零亏格纤维化，我们称之为 *RNRF* 圆锥曲线丛 （见定义 2.3.1 和 5.2.2）。据我们所知，以下定理是在如此一般的层面上观测到的最大秩跃升。

定理 5.0.1。若 X 具有 *RNRF* 圆锥曲线丛，则 $\{t \in \mathbb{P}^1_k \mid r_t \geq r+3\}$ 不是薄集。

定理5.0.1 在第5 章中证明，同时也是 [CS]中的主要结果。

第2章

预备知识

全文中，所有曲面均定义在域 k上，且为射影光滑曲面；该域可以是数域，也可以是任意特征的代数闭域。仅在必要时才 k 注明基域。我们用字母 X 表示带有椭圆纤维化 $\pi:\ X \to \mathbb{P}^1$（定义 2.1.1、2.2.1）。字母 S 表示一般曲面，它可能是有理椭圆曲面，也可能不是。

关于椭圆曲面的般理论，我们推荐读者参阅 Miranda 的经典著作[Mir89], Cossec 和 Dolgachev [CD89，第 V 章], Silverman [Sil94，第 III 章],Schuett 和 Shioda 的综述论文 [SS10] 以及同一作者的较新著作 [SS19，第 5]章。

2.1 椭圆曲面

定义 2.1.1。若存在光滑射影曲线 C 以及一个满射态射 $f: S \to C$，则称 S 为椭圆曲面，该态射称为椭圆纤维化，且满足

i) 对除有限多个 $t \in C$之外的所有 $t \in C$，纤维 $f^{-1}(t)$ 都是光滑的亏格为 1 的曲线 .

ii)（存在截面）存在一个态射 $\sigma:\ C \to S$，使得 $f \circ \sigma = \mathrm{id}_C$，称为截面。

iii)（相对极小性） f 的任何纤维的支集中都不含例外曲线（即自交数为 -1 的光滑有理曲线）。

备注 2.1.2. 条件 iii) 可以理解为对 f 的一个额外假设。对于我们的目的而言，这是一个自然的条件，因为它保证纤维符合 Kodaira 分类（定理2.1.8），并且对于有理椭圆曲面，纤维化由反典范系唯一确定（定理 2.2.6）。

定义 2.1.3. 设 $f: S \to C$ 是一个椭圆纤维化。若 $\eta \in C$ 是 C 的一般点，我们称 $E := f^{-1}(\eta)$ 为 π 的一般纤维。特别地， E 是函数域 $K := k(C)$ 上的椭圆曲线，而集合 $E(K)$ 中的 K-点具有群结构，我们称之为 S 的*Mordell-Weil* 群。

由于一般纤维是 $K := k(C)$ 上的椭圆曲线，椭圆曲面 S 可以局部表示为魏尔斯特拉斯形式，即

$$y^2 + a_1xy + a_3 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \text{ where } a_i \in K \text{ for all } i, \tag{2.1}$$

它是 $\mathbb{A}^2_K$ 中一般纤维的一个仿射模型。

我们还引入了一个与截面相关的概念。

定义 2.1.4. 曲线 $D \subset S$ 称为次数为 d 的多截面，当 $f|_D : D \to C$ 是次数为 d的平坦有限态射时。特别地， $f : S \to C$ 的截面是次数为 1 的多截面。

注 2.1.5. 在第 5 章中，我们讨论次数为 2的多截面，称为双截面。

2.1.1 一般纤维上的截面、曲线与点之间的对应

设 $f : S \to C$ 是一个椭圆纤维化， f的一般纤维 E 是函数域 $= k(C)$ 上的一条椭圆曲线。我们描述 f的截面、 S 上的某些曲线与 E中的 K-点之间的自然对应。

给定一个截面 $\sigma : C \to S$， S 上的曲线 $\sigma(C)$ 通过 σ与 C 同构。此外， $\sigma(C)$ 与一般纤维 E 恰好交于一个 K-点，记作 $P \in E(K)$。

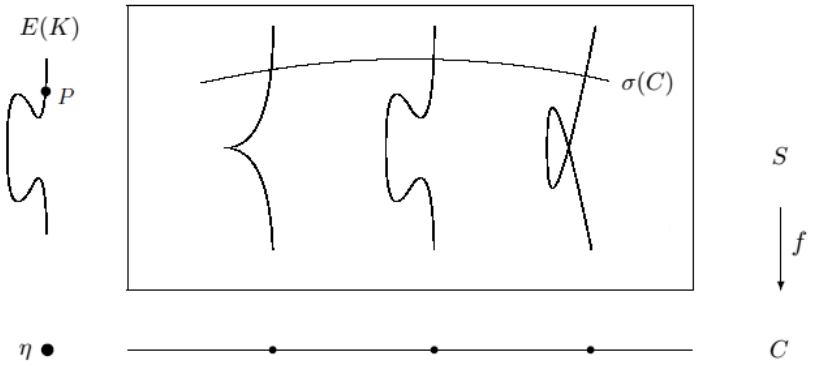


图2.1：截面 $\sigma : C \to S$ 与点 $P \in E(K)$ 之间的对应关系。

反之，点 $P \in E(K)$ 可以按如下方式产生一个截面。由于 E 是一般纤维， $P \in E(K)$ 对于几乎所有 $v \in C$ 都对应于点 $P_v \in f^{-1}(v)$。我们在 S 中取 $\{P_v\}_v$ 的概形论闭包，并得到一条曲线 $\Gamma \subset S$。由于 C 光滑，限制 $f|_\Gamma : \Gamma \to C$ 是一个同构，从而诱导出一个截面 $\sigma : C \to S$，使得 $\mathrm{Im}(\sigma) = \Gamma$。一般纤维中的截面与 K-点之间的这种对应关系实际上是双射。

命题 2.1.6。 *[SS19，命题 5。4]* $f : S \to C$ 的截面与 $E(K)$ 中的点之间存在自然的双射对应关系，通过 $\sigma \mapsto \sigma(C) \cap E(K)$实现，其中 $\sigma : C \to S$ 是一个截面。

注2.1.7. 我们也将截面 $\sigma : C \to S$ 与其像 $\sigma(C)$视为 S上的一条曲线，因此也称其为截面。我们注意到，当 S 为有理曲面时，截面对应于 S 的例外曲线（定理2.2.6）。

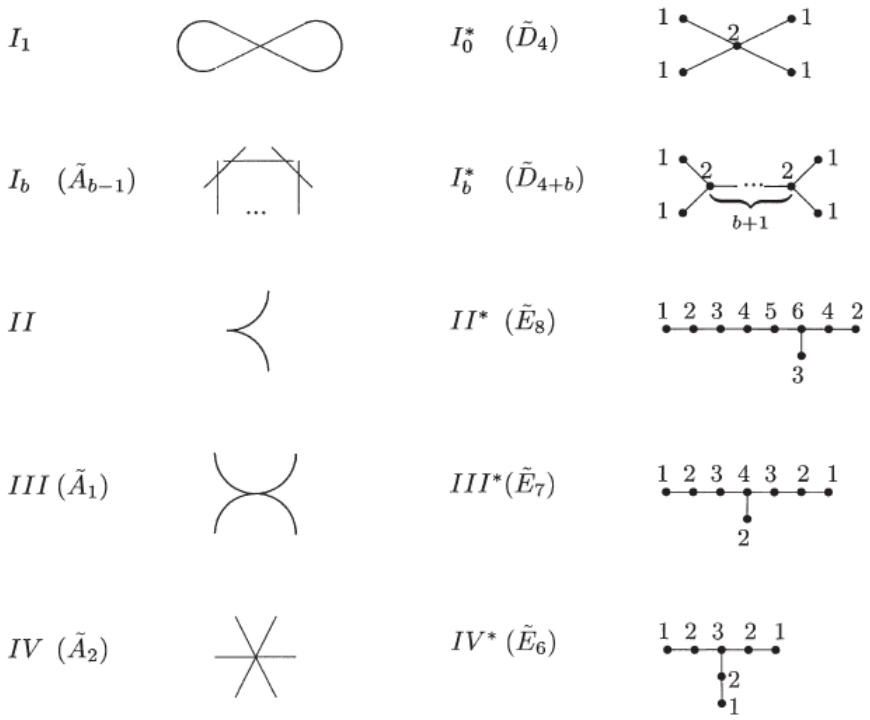
2.1.2 奇异纤维

椭圆纤维化的奇异纤维在研究椭圆曲面时起着重要作用。Kodaira 首次对奇异纤维进行了分类 [Kod63a]，其分类适用于基域 $\mathbb{C}$；随后 Tate [Tat75], 提出了一种简化的分类算法，同样适用于完美域。尽管使用 Tate 算法得到的纤维类型与 Kodaira 的分类相同，但在非完美域上可能会出现新的纤维类型

[Szy04]。由于我们的基底 k 要么是数域，要么是代数闭域，因此是完美域，我们可以采用通常的分类（定理 2.1.8）。

记号。我们遵循 Kodaira 的记号 [Kod63a] 来表示纤维类型。光滑纤维标记为 I_0，而奇异纤维则使用以下标签之一：I_n、I_n^*（其中 $n \geq 1$），II、II*、III、III*、IV、IV*，其中 $*$ 表示非约化纤维。根据定理 2.1.8，每个可约纤维（即除 I_1, II 之外的所有类型）都对应一个 ADE 格（图 2.2）。更确切地说，可约纤维的交图构成一个扩展 Dynkin 图 [Hum90, I.4.7]，其类型为 A_n $(n \geq 2)$、D_k $(k \geq 4)$~或 $E_\ell (\ell = 6, 7, 8)$，其中 $\sim$表示将 A_n、D_k或 E_ℓ的 Dynkin 图扩展一个额外的节点。在表 2.2 中，该额外节点对应于中性分支 Θ_0。

定理 2.1.8. [Tat75, §6] 设 $f\colon S \to C$ 是一个椭圆纤维化。若 F 是 f的一个奇异纤维，则 F 所有可能的情况列于下文。



此外，当 F 不可约时（即类型为 I_1 或 II），它是一条奇异的整曲线，其算术亏格为 1。当 F 可约时，其支集中的所有成员都是光滑有理曲线，自交数为 -2。

注 2.1.9. Tate 算法通过分析局部魏尔斯特拉斯形式来识别奇异纤维。在特$(k) = 2,3$下，这种局部分析可能会出现病态情形，但即便如此，奇异纤维的可能类型仍是定理 2.1.8 [Tat75，第 6] 节所列出的类型。在第 3 章对圆锥丛进行分类时，我们不处理局部魏尔斯特拉斯形式，而只考虑纤维作为除子的数值性质，因此可以在任意特征下使用定理2.1.8。

检测奇异纤维的一种方法是考虑局部魏尔斯特拉斯形式（2.1），并确定判别式的零点，即 [Tat75]

$$\Delta = -b_2^2 b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2 b_4 b_6,$$

其中：

$$\begin{aligned} b_2 &:= a_1^2 + 4a_2, \\ b_4 &:= a_1 a_3 + 2a_4, \\ b_6 &:= a_3^2 + 4a_6, \\ b_8 &:= a_1^2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + 4a_2 a_6 + a_2 a_3^2 - a_4^2. \end{aligned}$$

注记 2.1.10. 在 char(k) $\neq 2$ 下，3 经过适当的坐标变换，可得到更简单的魏尔斯特拉斯形式，即对于某个 $A(t)$ $B(t) \in k(C)$，有 $y^2 = x^3 + A(t)x + B(t)$，其判别式为$\Delta(t) = -16 \cdot (4A(t)^3 + 27B(t)^2)$ [Sil94, III.1]。

后来，Dokchitser 兄弟改进了用于识别纤维类型的 Tate 算法 [DD13]，，将识别简化为对系数的简单检查 a_i （魏尔斯特拉斯形式的系数 2.1）。更确切地说，给定一点 $v \in C$ 及其对应的离散赋值 v： $k(C)^\times \to \mathbb{Z}$， $f^{-1}(v)$ 处的纤维类型由表 2.1 [DD13，定理 1]给出。

	II	III	IV	I_0^*	$\mathrm{I}_{n>0}^*$	IV*	III*	II*
$\min_i \frac{v(a_i)}{i}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
附加条件			$v(b_6) = 2$	$v(d) = 6$	$\begin{matrix} v(d) > 6 \\ v(a_2^2 - 3a_4) = 2 \end{matrix}$	$v(b_6) = 4$		

表 2.1：Dokchitsers的改进：Tate 算法。

$$(\text{where } b_6 := a_3^2 + 4a_6 = \mathrm{Disc}(y^2 + a_3 y - a_6) \text{ and } d := \mathrm{Disc}(x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6))$$

我们为可约纤维的分支引入一些记号。如果 $F_v := f^{-1}(v)$ 是椭圆纤维化 $f : S \to C$ 的一个可约纤维，我们将其记为：

$$F_v = \sum_{i=0}^{m_v - 1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i} \text{ for each } v \in R,$$

其中

m_v： F_v.Θ_v的不可约分支数，i： 带有 $0 \le i \le m_v - 1$.μ_v的不可约分支，i: Θ_v的重数，i 在 F_v.$m_v^{(1)}$: F_v的单分量数，即满足 μ_v的分量，$i = 1$.R: f.的可约纤维集合

对于固定的 v，我们按照 [Kod63a] 中的方式排列 i-分支指标 $\Theta_{v,\,i}$ 如表 2.2 所示（为简便起见，我们保留重数，但省略指标 v）。提醒读者，I 中的 i-指标$^*_n$ 并未遵循格 D_{n+4} 中相应 Dynkin 图的通常顺序（图 2.2）。

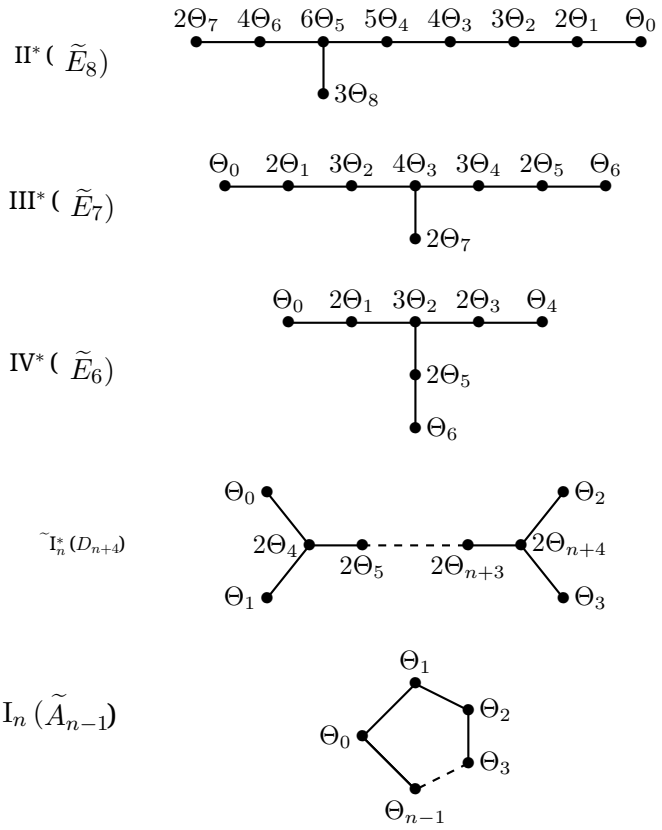


表 2.2：按 Kodaira 型分类的可约纤维及其相应的扩展 Dynkin 图。

2.1.3 欧拉数

我们介绍欧拉数（或欧拉-庞加莱示性数） S的公式，记作 e（S）。在复数域上讨论时，这对应于拓扑欧拉数。然而，在一般域上，欧拉数定义为贝蒂数的交错和，即 ℓ-adic étale上同调 [SS19，§5。12]。

对于纤维 F_v of $f : S \to C$，其有 m_v 个分支，我们有

$$e(F_v) = \begin{cases} 0, & \text{if } F_v \text{ is smooth;} \\ m_v, & \text{if } F_v \text{ is singular of type } \mathrm{I}_n; \\ m_v + 1, & \text{if } F_v \text{ is singular and not of type } \mathrm{I}_n. \end{cases}$$

值得注意的是，在没有野分歧的情况下，数 e（F_v）与魏尔斯特拉斯形式 v（Δ（t））的判别式赋值 [SS19，§5。9]。特别地，假设 char（k）$\neq 2$，3 即可避免野分歧 [SS19，§5。12] 由此得到以下公式。

定理 2.1.11。 *[CD89，命题 5。16]* 设 f： $S \to C$ 在 k 上，且 *char*（k）$\neq 2$，3。则

$$e(S) = \sum_{v \in C} e(F_v).$$

2.1.4 基变换

我们解释椭圆曲面上的基变换与 Mordell-Weil 秩变化之间的关系。我们说明这与第 5 章中对秩跃升的研究有何关联，尤其是在次数为 2 的基变换情形下。

基变换与 Mordell-Weil 秩

在研究域 L 上的椭圆曲线 E 时，扩张基域是一种常见操作，即考虑域扩张 L'/L，并分析域 L' 上的椭圆曲线 E。在这种情况下， E 上的 L'-点集合至少与 L-点集合一样大，这意味着其在 L' 上的 Mordell-Weil 秩可能高于在 L 上的秩。

对于椭圆纤维化 $f : S \to C$，其一般纤维 E 是函数域 $= k(C)$ K 上的椭圆曲线，这一构造具有几何对应物。事实上，次数为 d 的有限域扩张 K'/K 对应于次数为 d 的曲线有限态射 φ: $C' \to C$，由基变换可得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\varphi'} & S \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C' & \xrightarrow[\varphi]{} & C \end{array}$$

其中 $S' := S \times_C C'$ 是一个新的椭圆曲面，其纤维化为 $f' : S' \to C'$。特别需要注意的是， f' 的 Mordell-Weil 秩大于或等于 f 的 Mordell-Weil 秩，因为 f 的每个截面 $\sigma : C \to S$ 都有一个自然对应的截面（σ，id）： $C' = C \times_C C' \to S \times_C C' = S'$，属于 f'。

基变换与秩跳跃

如果我们能够找到 f' 的一个截面，它不同于形如（σ，id）： $C' \to S'$ 的截面，那么，探讨 f' 是否具有严格高于 f 的 Mordell-Weil 秩便是合理的。事实证明，当 C' 是 f 的一个多截面时，这个新截面确实存在；也就是说， $C' \subset S$ 是一条满足 $f|_{C'}: C' \to C$ 为有限态射的曲线。事实上，包含关系 $\iota: C'$, $\to S$ 诱导出一个截面（ι，id）： $C' = C \times_C C' \to S'$，它不同于形如（$\sigma$，id）的截面。

正如我们现在要解释的那样，上一段中的观察对于我们研究秩跳跃（第5章）至关重要，也就是说，对于研究 f 的秩大于一般秩的纤维出现这一现象至关重要。

事实上，假设新截面（ι，id）与 f' 的 Mordell-Weil 群中的形如（σ，id）的截面线性无关: $S' \to C'$。特别地， $r' > r$，其中 r、r' 分别是 f、f' 的一般秩。此外，假设 C' 有无穷多个 k-点，那么西尔弗曼专门化定理 [Sil83, Thm. C] 保证，对于无穷多个 $t \in C'(k)$，秩 $f'^{-1}(t) \geq r'$ 。根据构造，纤维 $f'^{-1}(t)$ 对应于 $f^{-1}(\varphi(t))$，因此对于无穷多个 $t \in C'(k)$，秩 $f^{-1}(\varphi(t)) \geq r' > r$。特别地， f的无穷多个纤维上都会发生秩跳跃。

结论： 如果 C' 是 $f: S \to C$ 的一个多截面，其中包含无穷多个 k-点，并且诱导出 f' : $S' \to C'$ 的一个新的独立截面，那么 f 有无穷多个纤维会发生秩跃升。

二次基变换

在第 5 章中，我们讨论数域 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 上有理椭圆曲面 k 的秩跃升问题。以下结果出自 [Sal09] , 说明存在无穷多条曲线 $D \subset X$ 可以诱导出基变换后的纤维化 π' 的一个新的独立截面： $X' \to D$。

定理 2.1.12。 *[Sal09]* 设 $\mathscr{L}$ 是 X 上的一条曲线铅笔，它们并非全都包含在 π 的某个纤维中。则在 φ : $= \pi|_D$: $D \to \mathbb{P}^1$ 下进行基变换后，椭圆纤维化 π' : $X' = X \times_{\mathbb{P}^1} D \to D$ 的 *Mordell-Weil* 秩严格大于 π , 对除有限多个 $D \in \mathscr{L}$ 均成立。

如前所述，为了得出秩跃升发生在无穷多个纤维上的结论，我们仍需 $\mathscr{L}$ 中存在一条含有无穷多个 k-点的曲线。获得此类 $\mathscr{L}$的一种方法，是在0 亏格曲线中 k 寻找一支铅笔（圆锥丛，如第2.3节所述）。根据引理2.3.5，这等价于在 k上寻找一个双截面，即一条曲线 $D \subset X$ 满足 φ : $D \to \mathbb{P}^1$ 是次数为2的有限态射；此时我们进行一次二次基变换。

二次基变换后的奇异纤维

在第5章中，更具体地说，在引理5.2.5中，我们需要说明在二次基变换下，π' : $X' \to D$ 的奇异纤维与 π : $X \to \mathbb{P}^1$ 的奇异纤维之间有何关系。这些信息取决于次数为2 的态射 $\varphi = \pi|_D$: $D \to \mathbb{P}^1$ 如何分歧，以下将对此作出说明。

若 $t \in \mathbb{P}^1$ 不是 φ : $D \to \mathbb{P}^1$ 的分歧点，则 $\varphi^{-1}(t) = \{t_1, t_2\}$，且纤维$\pi'^{-1}(t_1)$ $\pi'^{-1}(t_2)$ 同构于 $\pi^{-1}(t)$。另一方面，若 t 是φ的分歧点，则 $\varphi^{-1}(t) = \{t_1\}$，而 $\pi'^{-1}(t_1)$ 的纤维类型由 $\pi^{-1}(t)$ 的纤维类型根据下文表 2.3 确定。

π的纤维	π'的纤维
I_n, $n \geq 0$	I_{2n}
I_n^*, $n \geq 0$	I_{2n}
II	IV
II*	IV*
III	I_0^*
III*	I_0^*
IV	IV*
IV*	IV

表 2.3: 二次基变换中分歧点上方的奇异纤维 [Mir89, VI.4.1].

例子。考虑有理椭圆曲面 $X: y^2 = x^3 + t$。根据 Dokchitser 算法（表 2.1），我们分别确定出 $t = 0$ 和 $t = \infty$ 处的纤维类型 II 、 II* 。设 $\varphi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 由 $(s : t) \mapsto (s^2 : t^2)$ 给出，其分支点为 $t = 0$ 和 $t = \infty$。基变换曲面的魏尔斯特拉斯形式由在 φ下拉回得到，即 $X': y^2 = x^3 + t^2$。再次根据 Dokchitser 算法，我们分别确定出 $t = 0$ 和 $t = \infty$ 处的纤维类型 IV、IV* ，这与表 2.3 一致。

2.2 有理椭圆曲面

在众多非平凡椭圆曲面的例子中，最容易构造、描述和处理的是有理椭圆曲面，这也是本文的核心研究对象。在本节中，我们将区分有理与几何有理，解释如何由 $\mathbb{P}^2$ 上的三次曲线铅笔构造有理椭圆曲面，并列出它们的一些性质。

定义 2.2.1。若 S 与 $\mathbb{P}^2_k$ 双有理，且存在椭圆纤维化 $f: S \to C$，则称 S 为有理椭圆曲面。

注 2.2.2。由于 S 是有理的，根据吕罗特定理， C 与 $\mathbb{P}^1_k$ 同构。

2.2.1 有理曲面与几何有理曲面

研究非代数闭域上的曲面时（本例中，第5章中的数域），我们必须区分有理曲面与几何有理曲面。

定义 2.2.3。 若曲面 S 上的 k 几何有理，即 $S \times_k k$ 与 $\mathbb{P}$双有理，则称其为几何有理曲面 $\frac{2}{k}$.

在第 5 章中，我们讨论 k 为数域时的椭圆曲面。在这种情况下，可以使用以下判据来确定一个曲面是否为几何有理。

引理 2.2.4. 设 $f : S \to C$ 是数域 k 上的相对极小椭圆曲面，且 $e(S)$ 是其欧拉数。那么，当且仅当 $e(S) = 12$ 时， S 是几何有理的。

证明。无论 S 是否为几何有理的， $K_S^2 = 0$ 根据相对极小性， [Bea96，命题 IX.3], 因此由诺特公式， $e(S) = 12\chi(S)$。若 $e(S) = 12$ 成立，则 $\chi(S) = 1$，这意味着 S 是几何有理的 [Mir89，引理 III.4.6]反之，设 S 是几何有理的，即 $S := S \times_k k$ 与 $\mathbb{P}^2_k$ 双有理等价。由于 χ 是一个双有理不变量， $\chi(S) = 1$。由包含关系 $H^i(S, \mathcal{O}_S) \subset H^i(S, \mathcal{O}_S)$ 对于 $i = 1, 2$，我们得出 $\chi(S) = 1$，因此 $e(S) = 12$。 □

2.2.2 从三次曲线铅笔构造

我们介绍一种在任意域上构造有理椭圆曲面的标准方法。我们在第 3 章中应用该方法来给出有理椭圆曲面的例子。

令 L 为一个域， F， G 是 $\mathbb{P}^2_L$ 上的三次曲线，且至少有一条光滑。此外，假设 F， G 只在 L-有理点处相交。交集 $F \cap G$ 按重数计算恰有 9 个点，三次曲线铅笔 $\mathcal{P} := \{sF + tG = 0 \mid (s : t) \in \mathbb{P}^1_L\}$ 的基点集为 $F \cap G$。令 $\phi : \mathbb{P}^2_L \dashrightarrow \mathbb{P}^1_L$ 为与 $\mathcal{P}$ 相关的有理映射。对基点集中的 9 个点进行吹起得到的 $p : X \to \mathbb{P}^2_L$ 消除了 ϕ 的不定点，从而得到椭圆纤维化 $\pi : X \to \mathbb{P}^1_L$。

$$X \xrightarrow{p} \mathbb{P}^2_L \xdashrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1_L, \qquad \pi : X \to \mathbb{P}^1_L$$

根据构造， X 与 $\mathbb{P}^2_L$ 双有理。此外，吹起每个基点会在 X 上产生一条 (-1) 曲线，它是 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 的截面。进一步假设 L 代数闭，可以证明每个有理椭圆曲面都能通过这一过程得到。

定理 2.2.5. [CD89，定理 5.6。1] 设 X 是一个有理椭圆曲面，其椭圆纤维化为$\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 且定义在代数闭域上。那么 X 同构于将 $\mathbb{P}^2$ 在三次曲线铅笔的基点集处吹起所得的曲面。

2.2.3 有理椭圆曲面的性质

除了定理 2.2.5中的性质外，我们还提及有理椭圆曲面的一些其他特殊性质。由于这些性质本质上是几何的，我们在本节余下部分中假设 k 是代数闭的。

定理 2.2.6. [SS10，第 8 节。2] 假设 k 代数闭，并设 X 是一个有理椭圆曲面，其椭圆纤维化为 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$。那么

i) $\chi(X) = 1$, *where* $\chi(X) := h^0(X, \mathcal{O}_X) - h^1(X, \mathcal{O}_X) + h^2(X, \mathcal{O}_X)$.

ii) $-K_X$ 与 π的任意纤维线性等价。特别地， $-K_X$ 数值有效，且 X 恰好容许一种椭圆纤维化（即由反典范系 $|-K_X|$定义的椭圆纤维化）。

iii) 每个截面 π 都是一条例外曲线（光滑有理曲线，自交数为 -1).

以下性质与有理椭圆曲面的挠截面有关，并在第4章研究交数时发挥重要作用。

定理 2.2.7。 [MP89，引理 1。1] 在有理椭圆曲面上， $Q_1 \cdot Q_2 = 0$ 对任意不同的Q_1， $Q_2 \in E(K)_{tor}$。特别地，若 O 是中性截面，则 $Q \cdot O = 0$ 对所有 $Q \in E(K)_{tor} \backslash \{O\}$。

注记 2.2.8. 定理 2.2.7适用于 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲面，即使不假设曲面是有理的也成立。然而，在任意代数闭域上，有理性假设是必要的[SS19，推论 8。30]。

我们再给出两个结果。引理 2.2.9 提供了一种简单的方法来判定椭圆纤维化的纤维，而引理2.2.10描述了有理椭圆曲面上的负曲线。

引理 2.2.9. 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个有理椭圆曲面， E 是 X中的一条整曲线。若$E \cdot K_X = 0$，则 E 是 π的一个纤维分支。此外，若 $E^2 = 0$，则 E 是一个纤维。

证明。若 $P \in E$，则纤维 $F := \pi^{-1}(\pi(P))$ 与 E 在 P处相交，即 $E \cap F \neq \emptyset$。另一方面，根据定理 2.2.6， $-K_X$ 与 F 线性等价，因此 $E \cdot F = -E \cdot K_X = 0$。于是 E 必定是 F的一个分支。进一步假设 $E^2 = 0$，我们证明 $E = F$。若 F光滑，则结论显然。因此，假设 F 奇异，并根据定理 2.1.8 分析其 Kodaira 类型。注意， F 不可约，否则 E 将是一条（-2）曲线，这与 $E^2 = 0$ 矛盾。因此， F 的类型为 I_1 或 II。在这两种情况下， F 都是一条整曲线，因此 $E = F$。 □

引理 2.2.10. 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个有理椭圆曲面。 X 上的每条负曲线要么是一个(-1)曲线（ π 的截面），要么是一个(-2)曲线（ π 的某个可约纤维的分支）。

证明。设 X 中任意一条满足 $E^2 < 0$ 的整曲线为 E 。由定理 2.2.6， $-K_X$ 是数值有效的，且与 π 的任意一个纤维线性等价。因此 $E \cdot (-K_X) \geq 0$ ，根据伴随公式 [Bea96, I.15] $2p_a(E) - 2 = E^2 + E \cdot K_X < 0$，这只有在 $p_a(E) = 0$ 时才成立。因此， $E^2 = -1$ 或 -2。若 $E^2 = -2$ ，则 $E \cdot K_X = 0$，因此根据引理 2.2.9， E 是纤维的一个分支；由定理 2.1.8，该纤维是可约的。若 $E^2 = -1$，根据伴随公式 [Bea96, I.15] $E \cdot (-K_X) = 1$。但 $-K_X$ 与任意一个纤维线性等价，因此 E 与一般纤维相交于一点，于是由命题 2.1.6， E 是一个截面。 □

注记 2.2.11。 中的伴随公式 [Bea96，I。15]是在复数域上证明的。由于证明仅依赖于层上同调和黎曼-赫有限性 [Har77，V.1。6], 因此可以将其推广到代数闭域（事实上，也可以推广到任意域）。

2.3 圆锥丛

我们定义圆锥丛，并解释它们在代数曲面的一般理论中以及更具体地在本文中出现的背景。

定义 2.3.1。 曲面上的一个圆锥丛 S 是一个满射态射，其像为一条光滑曲线φ： $S \to C$ 其一般纤维是一条亏格为零的光滑不可约曲线。

注记 2.3.2。 当 S 为有理时，根据吕罗特定理， C 与 $\mathbb{P}^1$ 同构。

注 2.3.3。 定义 2.3.1与 [LS22，定义 2。5], [GS17，定义 3。1]中的定义本质上相同。这里唯一的区别在于，我们允许基域 k 在任意特征下为代数闭域。

圆锥丛出现的一个重要情形，是对 L-有理曲面的极小模型进行分类，其中 L 是任意域。正如 Iskovskikh [Isk79，定理 1], 所示，若 S 是一个 L-极小有理曲面，则 S 必为以下情形之一：(a) $\mathbb{P}^2_L$；(b) 在 $\mathbb{P}^3_L$ 上的二次曲面，且 Pic(S) ' $\mathbb{Z}$；(c) Pic(S) $= \mathbb{Z}\mathrm{h}-K_S\mathrm{i}$ 的德尔佩佐曲面；或 (d) Pic(S) ' $\mathbb{Z}^2$ 的曲面，并且该曲面带有一个圆锥丛，其奇异纤维同构于在一点相交的一对直线。后者被 Manin 和 Tsfasman 命名为标准圆锥丛 [MT86，第 2.2]小节。我们指出，标准圆锥丛的概念通常会推广到更高维，并且在极小模型纲领中对 $\mathbb{C}$ 上的三维簇进行分类时发挥作用（例如参见 [Sar80], [Isk87]以及综述 [Pro18]）。

注记 2.3.4. 定义 2.3.1 比 标准圆锥丛 中的 [MT86，第 2 小节。2], 更一般；其中每个奇异纤维都同构于一对在一点相交的直线。根据我们的定义，这种奇异纤维属于四种可能类型之一，即定理 A_2 3.2.2 中的类型。

如第 2.1.4 小节所述，在几何有理椭圆曲面 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 上存在亏格为 0 曲线的铅笔（即圆锥丛），与第 5 章中对秩跳跃的研究有关。以下由 [LS22] 给出的结果告诉我们，在数域 k上， k 上存在圆锥丛，实际上等价于其上存在双截面 k （注记 2.1.5）。

引理 2.3.5. *[LS22，引理 2。6]* 设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是数域 k上的几何有理椭圆曲面。则 X 在 k 上存在圆锥丛，当且仅当 π 在 0 上存在算术亏格为 k的双截面。

2.4 薄集与希尔伯特性质

我们遵循 Serre 的做法定义薄集和希尔伯特性质 [Ser08，§3。1]我们简要解释这些概念为何具有相关性，以及它们如何出现在本论文中。

定义 2.4.1。设 V 是域 k 上的一个簇。若子集 $T \subseteq V(k)$ 是若干子集的有限并，且这些子集或者包含于 V 的某个真闭子簇中，或者包含于像 $f(W(k))$ 中，其中 $f\colon W \to V$ 是一个次数至少为 2 的泛有限主导态射，而 W 是域 k 上的一个整簇，则称其为薄。

定义 2.4.2。若域 k 上的簇 V 满足：集合 $V(k)$ 不是薄集，则称其满足希尔伯特性质。

满足希尔伯特性质的一个经典簇例子是 $\mathbb{P}^n_k$ 当 k 为数域时，由希尔伯特不可约性定理可知 [Ser08，定理 3.4。1]Colliot-Thélène 提出的一个尚未证明的猜想进一步断言，每个数域上的单有理簇都满足希尔伯特性质 [Ser08，定理 3.5.7 和猜想 3.5。8]如果该猜想得到证明，就足以对逆伽罗瓦问题给出肯定回答 [Ser08，定理 3.5。9]。

在第 5 章中，我们特别关注 $\mathbb{P}^1$ 的非薄子集，其中它是有理椭圆纤维化 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 的基底。注意， $\mathbb{P}^1$的任意真扎里斯基闭子集都是有限的；要证明一个无限子集 $T \subset \mathbb{P}^1(k)$ 不是薄子集，只需证明：对于任意有限个有限覆盖 $\varphi_i\colon Y_i \to \mathbb{P}^1$ 存在一点 $P \in T$ 使得$P \notin \varphi_i(Y_i)(k) \subset \mathbb{P}^1(k)$ 对每个 i 均成立。

2.5 曲面几何的一般事实

我们列出一些关于除子、态射的纤维 $S \to \mathbb{P}^1$ 和线性系的初等结果，这些结果是第 3 章中圆锥丛纤维分类所需的。需要指出的是，这些结果对一般的光滑曲面均成立，因此并不依赖于椭圆曲面的理论。

引理 2.5.1. 设 D 是曲面 S 上的有效除子，且对所有 $C \in \operatorname{Supp} D$，都有 $D \cdot C = 0$。那么 D 是数值有效的，且 $D^2 = 0$。

证明. 要证明 D 是数值有效的，只需注意，对每个 $C' \notin \operatorname{Supp} D$，都有 $D \cdot C' \geq 0$。为了证明 $D^2 = 0$，令 $D = \sum_i n_i C_i$，其中每个 C_i 都属于 $\operatorname{Supp} D$。于是 $D^2 = D \cdot (\sum_i n_i C_i) = \sum_i n_i D \cdot C_i = 0$。 □

引理 2.5.1 最自然的应用情形是 D 是满射态射$S \to \mathbb{P}^1$的一个纤维。在下一个引理中，我们将探讨这类态射的一些性质，这些性质将在第 3 章中用到。

引理 2.5.2. 设 F 是满射态射 $f : S \to \mathbb{P}^1$的一个纤维。则有以下结论：

a) 对所有 $C \in$，$F \cdot C = 0$ 满足 F。

b) 若 F 连通，且 E 是一个满足 支集 $E \subset$ 支集 F 的除子，则 $E^2 \leq 0$。此外，当且仅当存在某个 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $E = rF$ 时，$E^2 = 0$ $E^2 = 0$。

c) 若 F_1，...，F_n 是 F 的连通分支，则每个 F_i 都是数值有效的，且 $F_i^2 = 0$ 和 $F_i \cdot K_S \in 2\mathbb{Z}$。

证明。 a) 取任意一个 $C \in$ 支集 F 以及另一条纤维 $F' \neq F$，我们有 $F \cdot C = F' \cdot C = 0$。

b) This is Zariski's lemma [Pet95, Ch. 6, Lemma 6].

c) 固定 i。为证明 F_i 是数值有效的且 $F_i^2 = 0$，我们证明对任意 $C_i \in$ 支集 F_i，都有 $F_i \cdot C_i = 0$，然后应用引理 2.5.1。事实上，若 $j \neq i$，则 F_i 的分支 F_j 两两不交，因此 $F_j \cdot C_i = 0$。由于 F 是一条纤维，且 $C_i \in$ 支集 $F_i \subset$ 支集 F，由 a) 可得 $F \cdot C_i = 0$。因此 $F_i \cdot C_i = (F_1 + ... + F_n) \cdot C_i = F \cdot C_i = 0$，证毕。对于最后一部分，由黎曼-罗赫，$F_i \cdot K_S = 2(\chi(S) - \chi(S, F_i)) \in 2\mathbb{Z}$。 □

我们以 关于无固定分量线性系的一个简单观察来结束本节。

引理 2.5.3. 设 E, E' 是有效除子，满足 $E' \leq E$，且线性系 $|E|, |E'|$ 具有相同的维数。若 $|E|$ 没有固定分量，则 $E' = E$。

证明。 由于 $E' \leq E$，我们有向量空间的包含关系 $H^0(S, E') \subset H^0(S, E)$。根据假设，它们的维数相同，因此 $H^0(S, E') = H^0(S, E)$。因此

$$\begin{aligned} |E| &= \{E + \operatorname{div}(f) \mid f \in H^0(S, E)\} \\ &= \{E' + \operatorname{div}(f) + (E - E') \mid f \in H^0(S, E')\} \\ &= |E'| + (E - E'). \end{aligned}$$

假设 $|E|$ 没有固定分量，则必有 $E - E' = 0$。 □

2.6 格

我们介绍一些关于格的基本术语，这些术语将在全文中采用，并在第2.7节介绍 ADE 格；在讨论 Mordell-Weil 格时，它们对我们而言最为重要。

定义 2.6.1. A 格 是一个偶对 $(L, \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$，其中 L 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle:\ L\times L\to\mathbb{R}$ 是一个非退化对称双线性配对。我们称该格为

i) 正定 （分别地，负定）当对所有 $x\in L\setminus\{0\}$，均有$\langle x,\ x\rangle>0$ （分别地，$\langle x,\ x\rangle<0$）。

ii) 当对所有 $x,\ y\in L$，均有$\langle x,\ y\rangle\in\mathbb{Z}$时，称为整数格。

iii) 当对所有 $x\in L$，均有$\langle x,\ x\rangle\in 2\mathbb{Z}$ 时，称为偶格。

定义 2.6.2. 整数格 $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的对偶格是 $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 的子格，由下式给出

$$L^*:=\{x\otimes r\in L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\mid r\cdot\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\text{ for all }y\in L\},$$

其上自然定义了一个对称非退化双线性配对：

$$\langle x\otimes r,x'\otimes r'\rangle:=r\cdot r'\cdot\langle x,x'\rangle\text{ for all }x,x'\in L,\ r,r'\in\mathbb{Q}.$$

特别地，存在一个自然嵌入 $L\hookrightarrow L^*$，由 $x\mapsto x\otimes 1$ 给出。

定义 2.6.3。 我们用 L^- 表示 $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的相反格，即由相同的 $\mathbb{Z}$-模 L 和相反的配对 $-\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义的格。

定义 2.6.4。 设 $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是由 $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in L$ 生成的格。我们将 L 的行列式定义为格拉姆矩阵的行列式

$$\det L:=\det(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_{i,j}$$

注 2.6.5。 行列式不依赖于生成元的选择。事实上，如果 $\beta_1,\dots,\beta_r$ 生成 L，那么基变换矩阵 U 是一个具有整数系数的可逆矩阵。特别地，$\det U=\pm1$，因此 $\det(\langle\beta_i,\beta_j\rangle)_{i,j}=(\det U)^2\det(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_{i,j}=\det(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_{i,j}$。

我们引入根格这一概念。它是数学中许多看似无关领域的核心概念，例如组合学、奇点理论、李代数，以及我们所讨论的 Mordell-Weil 格。

定义 2.6.6. 正定（分别地，负定）整数格 L 若由满足$\langle x,x\rangle=2$ （分别地，$\langle x,x\rangle=-2$）的元素生成，则称为根格 。这样的生成元称为 L的根 。

我们定义基本根格，即 ADE 格。

定义 2.6.7. 秩为 r 的正定根格 L，若由某组根 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$生成，且对每个 $i<j$ 都有 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0$，则称其为类型 A_r $(r\geq1)$、 $D_r(r\geq4)$ 或 $E_r(r=6,7,8)$，但以下情况除外：

$$\begin{aligned}&(A_r)\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=-1\Leftrightarrow i+1=j.\\&(D_r)\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=-1\Leftrightarrow i+1=j<r,\ \text{ or }i=r-2,\ j=r.\\&(E_r)\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=-1\Leftrightarrow i+1=j<r,\ \text{ or }i=3,\ j=r.\end{aligned}$$

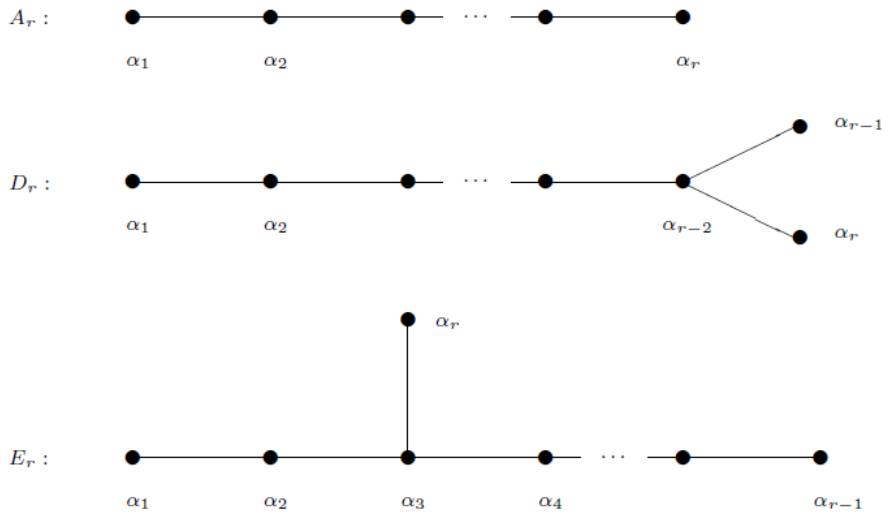


图 2.2：与每个 ADE 格相关的 Dynkin 图。

注 2.6.8. ADE 格也可以定义为负定格，在这种情况下，定义2.6.7中的所有符号都应反转。

以下结果说明了 ADE 格的重要性。

定理 2.6.9. *[Ebe13，定理 1。2]* 设 L 为正定（或负定）整数格。那么， L 是根格，当且仅当它等距于若干 *ADE* 格的直和。

2.7 Mordell-Weil 格

我们将介绍 Mordell-Weil 格，它是第 4 章的核心工具。Elkies 和 Shioda 最初分别在 [Elk 90], [Shi90], [Shi89]中提出了这一概念，其内容是在 Mordell-Weil 群 $E(K)$ 上赋予格结构，并与 Néron-Severi 格有明确联系，具体含义将在本节中说明。

从历史上看，人们曾在不同背景下多次尝试在 $E(K)$上定义双线性配对。这可以追溯到 [Man64], [BSD65] 和 [Tat66], ，他们关注的对象分别是阿贝尔簇上的高度、Birch–Swinnerton-Dyer 猜想和 Tate 猜想。后来， $E(K)$ 上的格结构与 Néron-Severi 格之间的联系由 [CZ79], 提出，其最初目标是确定给定的一组截面是否能够生成 $E(K)$。Mordell-Weil 格的思想在后者中已隐约可见，但直到几年后才在 [Elk90], [Shi90], [Shi89]中出现精确定义。

此后，人们发现 Mordell-Weil 格在算术和几何方面都有许多应用（例如，参见 [SS19，第 10] 章）。在本文中，我们将具体运用这一结果，即利用 Mordell-Weil 格已针对有理椭圆曲面得到明确分类这一事实 [OS91] ，以便在第4章中获取有关截面交数的信息。

本节旨在介绍 Mordell-Weil 格，内容安排如下。首先，我们对 Néron-Severi 格 NS(S) 作一些观察，并定义两个子格，即格 T (定义2.7.3)和平凡格（定义2.7.5）。接着，我们构造高度配对，由此引出 Mordell-Weil 格的定义。我们还给出计算高度配对的显式公式，并介绍窄 Mordell-Weil 格。

我们先从椭圆曲面 f 的一项特殊性质 $S \to C$ 谈起：一般而言， S上的数值等价与代数等价相同。凭借这一性质，我们可以在带有交形式的 Néron-Severi 群 NS(S) 上进行考察，这个群称为 *Néron-Severi* 格。

定理 2.7.1. [Shi90, 定理 3.1] 对于椭圆曲面 S，代数等价与数值等价相同，即 D_1， $D_2 \in \mathrm{Div}(S)$ 在 $\mathrm{NS}(S)$ 中等价，当且仅当 $D_1 \cdot D = D_2 \cdot D$ 对每个$D \in \mathrm{Div}(S)$都成立。等价地说，$\mathrm{NS}(S)$ 是无挠的。

注 2.7.2. NS(S) 无挠这一事实使我们能够将标量扩张到 $\mathbb{Q}$，也就是说，定义 NS$(S)_{\mathbb{Q}} :=$ NS(S) $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，且不会消去任何元素。

我们定义 NS(S)的两个重要子格，它们都包含关于 f 的可约纤维的信息： $S \to C$。我们采用小节2.1.2中的记号。

定义2.7.3。 对每个 $v \in R$，我们定义格 T_v 和 T 如下：

$$T_v := \mathbb{Z}\langle \Theta_{v,i} \mid i > 0 \rangle,$$

$$T := \bigoplus_{v \in R} T_v.$$

注记2.7.4。 根据 Kodaira 分类（定理2.1.8），每个 T_v 都可以用 Dynkin 图表示。更准确地说，相反格 T_v^-同构于一个 ADE 格（图2.2）。

我们接下来定义的格在构造 Mordell-Weil 格时起着重要作用。与格 T一样，它包含关于可约纤维的信息，只是在生成元集合中还加入了中性截面 O 和中性分支$\Theta_{v,\,0}$ （对 $v \in R$ 而言）。

Defi义2.7.5。 若 $O \in E(K)$为中性截面，我们定义平凡格a s

$$\mathrm{Triv}(S) := \mathbb{Z}\langle O, \Theta_{v,i} \mid v \in R,\, i \geq 0 \rangle.$$

在此，我们提醒读者注意 Mordell-Weil 群与 Néron-Severi 群中的群运算之间的区别。正如第 2.1.1 小节所述，截面P_1， $P_2 \in E(K)$ 也可以视为曲线，从而定义类 P_1， $P_2 \in \mathrm{NS}(S)$。然而，

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 \neq \overline{P_1 + P_2}.$$

以下定理指出，模去平凡格 Triv(S) 后，这些不同的运算实际上诱导出一个群同构。

定理 2.7.6。 [Shi90，定理 1。3] 以下映射是一个群同构 :

$$\begin{aligned} E(K) &\to \mathrm{NS}(S)/\mathrm{Triv}(S) \\ P &\mapsto \overline{P} \bmod \mathrm{Triv}(S) \end{aligned}$$

我们继续在 $E(K)$ 上定义一个双线性配对。我们注意到，为了完成这一定义，不能直接使用交配对，因为它只在 NS(S) 上定义了一个格，而不是在 $E(K)$ 上定义格。这个困难通过一个几何构造得以克服，该构造涉及相对于 Triv(S) 的正交投影，作用于 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathrm{NS}(S)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。

引理 2.7.7。 [Shi90，引理 8。1] 存在唯一的函数 $\varphi : E(K) \to \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}}$ 满足以下性质：

(i) $\varphi(P) \equiv P$ 模 $\mathrm{Triv}(S)_{\mathbb{Q}}$ 对所有 $P \in E(K)$均成立。

(ii) $\varphi(P) \perp \mathrm{Triv}(S)$ 对所有 $P \in E(K)$均成立。

此外，类 $\varphi(P) \in \mathrm{NS}(S)_{\mathbb{Q}}$ 由下列 $\mathbb{Q}$-除子表示：

$$D_P := \overline{P} - \overline{O} - (P \cdot O + \chi(S))F + \sum_{v \in R} (\Theta_{v,1}, ..., \Theta_{v,m_v-1})(-A_v^{-1}) \begin{pmatrix} P \cdot \Theta_{v,1} \\ \vdots \\ P \cdot \Theta_{v,m_v-1} \end{pmatrix},$$

其中，F 是 π 的一个纤维，而 A_v 是矩阵 $(\Theta_{v,i} \cdot \Theta_{v,j})_{1 \le i,j \le m_v - 1}$。

事实上，映射 φ 是一个群态射，并诱导出一个嵌入 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow \mathrm{NS}(S)_{\mathbb{Q}}$。引理 2.7.8。 [Shi90，引理 8。2] 映射 $\varphi : E(K) \to \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}}$ 是一个群同态。此外，$\ker \varphi = E(K)_{\mathrm{tor}}$，因此 φ 诱导出一个单射态射 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow \mathrm{NS}(S)$。

我们现在可以在 $E(K)$ 上定义一个双线性配对，称之为高度配对。

定理 2.7.9. [Shi90，定理 6。20] 我们将高度配对定义为

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E(K) \times E(K) &\to \mathbb{Q} \\ P, Q &\mapsto -\varphi(P) \cdot \varphi(Q), \end{aligned}$$

它在 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}$ 上诱导出一个正定配对。格$(E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为 *Mordell-Weil* 格。

构造好高度配对后，我们还定义截面的高度 以及 Mordell-Weil 格的最小范数 。

定义 n 2.7.10. 截面的高度 以及 $E(K)$ 的最小范数 定义为 s

$$h(P) := \langle P, P \rangle \text{ for each } P \in E(K),$$
$$\mu := \min\{h(P) > 0 \mid P \in E(K)\}.$$

高度配对的一个便利之处在于，它可以显式计算。在介绍显式公式之前，我们先定义其中涉及的一个术语，即局部贡献。

定义 2.7.11. 设 $v \in R$和 P， $Q \in E(K)$。若 P， Q 分别在 $\Theta_{v,\ i}$， $\Theta_{v,\ j}$处与纤维 F_v 相交，则我们将局部贡献 定义为

$$\mathrm{contr}_v(P, Q) := \begin{cases} (-A_v^{-1})_{i,j} & \text{if } i, j \ge 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$
$$\mathrm{contr}_v(P) := \mathrm{contr}_v(P, P).$$

其中 $(-A_v^{-1})_{i,\ j}$ 是矩阵 $-A_v^{-1}$在引理 2.7.7中的$(i,\ j)$-项。

局部贡献的具体值见表2。4 [SS19，表 6。1]。

F_v的类型	III	III*	IV	IV*	I_n	I_n^*
T_v	A_1	E_7	A_2	E_6	A_{n-1}	D_{n+4}
$\mathrm{contr}_v(P)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{i(n-i)}{n}$	$\begin{cases} 1 & (i=1) \\ 1+\frac{n}{4} & (i>1) \end{cases}$
$\mathrm{contr}_v(P,Q)$	-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{i(n-j)}{n}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} & (i=1) \\ \frac{1}{2}+\frac{n}{4} & (i>1) \end{cases}$

表 2　.4：假设 F_v 与 P 在$\Theta_{v,i}$ 处相交，且 Q 与$\Theta_{v,j}$ 处相交时的局部贡献，其中 $i<j$。

现在我们可以给出高度配对的显式公式，称为高度公式。**定理 2.7.12**。 [Shi90，定理 8。6] 设 P， $Q \in E(K)$ 和 $O \in E(K)$ 为中性截面。则

$$\langle P,Q\rangle = \chi(S) + P\cdot O + Q\cdot O - P\cdot Q - \sum_{v\in R}\mathrm{contr}_v(P,Q), \tag{2.2}$$

$$h(P) = 2\chi(S) + 2(P\cdot O) - \sum_{v\in R}\mathrm{contr}_v(P). \tag{2.3}$$

注记 2.7.13. 本文聚焦于有理椭圆曲面，在这种情况下 $\chi(S)=1$ 在方程 2.2 和 2.3由定理2.2.6。

$\mathrm{A_n}$ imp　ortant 子格 $E(K)$ 是窄 *Mordell-Weil* 格 $E(K)^0$,定义为　　s

$$\begin{aligned} E(K)^0 &:= \{P\in E(K) \mid P \text{ intersects } \Theta_{v,0} \text{ for all } v\in R\} \\ &= \{P\in E(K) \mid \mathrm{contr}_v(P)=0 \text{ for all } v\in R\}. \end{aligned}$$

作为子群， $E(K)^0$ 是无挠的；作为子格，它是一个正定偶整格，且在 $E(K)$ [SS19，定理 6。44]中具有有限指数。窄格的重要性在于，它作为子格相当大，而且其上的高度配对易于计算，因为所有贡献项都消失。有理椭圆曲面上格 $E(K)$ 和 $E(K)^0$ 的完全分类见 [OS91，主要定理]。

2.8 贡献项的上界与下界 $c_{\max}$， $c_{\min}$

我们定义贡献项 $\sum_v \mathrm{contr}_v(P)$ 的界 $c_{\max}$， $c_{\min}$，并陈述了有理椭圆曲面情形下关于这些界的一些简单事实。我们还提供了一个示例，以说明如何计算它们。

在第4章研究交数时，我们自然会需要这些界。事实上，假设给定一个截面 $P \in E(K)$，其高度 $h(P)$ 已知，而我们想确定 $P \cdot O$。若 $P \in E(K)^0$，则可直接得出答案，即根据高度公式（2.3）， $P \cdot O = h(P)/2 - 1$。然而，若 $P \notin E(K)^0$，则计算 $P \cdot O$ 取决于贡献项 $c_P := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$；根据表 2.4，该项取决于 P 与 π 的可约纤维相交的方式。通常我们手头并没有这些交数数据，因此有必要估计c_P 。

定义2.8.1. 假设 $R \neq \emptyset$，我们定义

$$c_{\max} := \sum_{v \in R} \max\{\mathrm{contr}_v(P) \mid P \in E(K)\},$$
$$c_{\min} := \min\{\mathrm{contr}_v(P) > 0 \mid P \in E(K), v \in R\}.$$

注记2.8.2. 在有理椭圆曲面中， $R = \emptyset$ 仅当 Mordell-Weil 秩为$r = 8$（表 6.1中的第1项 E（K）$^0 = E$（K）时才会出现，且 $\sum_v$ 贡献项$_v$（P） $= 0\ \forall P \in E$（K），因此我们采用约定 $c_{\max} = c_{\min} = 0$。

注记2.8.3. 我们将 $c_{\max}$， $c_{\min}$ 用作 $c_P := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$ 的界。就我们的目的而言，无须知道 c_P 是否会在某个 P 下实际达到其中一个界，因此 $c_{\max}$， $c_{\min}$应理解为假设值。

我们陈述一些关于 $c_{\max}$， $c_{\min}$ 的事实。

引理 2.8.4. 设 X 是秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面。那么

i) $c_{min} > 0$ *if* $R \neq \emptyset$.

ii) $c_{max} < 4$。

iii) $c_{\min} \leq \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P) \leq c_{\max}\ \forall P \notin E(K)^0$。对于 $P \in E(K)^0$, , 只有第二个不等式成立 .

iv) 若 $\sum_{v \in R}$ 矛盾$_v(P) = c_{\min}$，则对于某个 v'， 矛盾$_{v'}(P) = c_{\min}$， 且对于 $v \neq v'$， 矛盾$_v(P) = 0$。

证明。i) 根据 $c_{\min}$的定义，结论显然成立。对于 ii)，只需直接检查表 6.1 中$c_{\max}$ 的取值。对于 iii)，第二个不等式由 $c_{\max}$ 的定义得出，并且显然对任意 $P \in E(K)$ 都成立。若 $P \notin E(K)^0$, ，则 $c_P := \sum_v$矛盾$_v(P) > 0$，因此对于某个 v_0，矛盾$_{v_0}(P) > 0$。于是 $c_P \geq$ 矛盾$_{v_0}(P) \geq c_{\min}$。

最后，我们证明 iv)。若 $R = \emptyset$，则 $c_{\min} = 0$， 结论显然成立。因此，设 $R \neq \emptyset$ 且$\sum_v$ 矛盾$_v(P)$ $= c_{\min}$。反设存在 $v_1 \neq v_2$， 使得对于$i = 1, 2$，矛盾$_{v_i}(P) > 0$。根据 $c_{\min}$的定义，对于 $i = 1, 2$，我们有 $c_{\min} \leq$矛盾$_{v_i}(P)$，因此

$$c_{\min} = \sum_v \mathrm{contr}_v(P) \geq \mathrm{contr}_{v_1}(P) + \mathrm{contr}_{v_2}(P) \geq 2c_{\min},$$

根据 i)，这显然矛盾，因为 $c_{\min} > 0$ 。因此，只有一个 v' 满足 $\mathrm{contr}_{v'}(P) > 0$，而对所有 $v \neq v'$， $\mathrm{contr}_v(P) = 0$ 。特别地， $\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min}$。 □

显式计算。一旦我们知道与 T 的可约纤维相关联的格 π， $c_{\max}$的计算 $c_{\min}$ 就很简单。对于固定的 $v \in R$，局部贡献 contr 的极值$v(P)$ 列于表2.5，该表由表2.4推导而来。下面举例说明这一计算。

T_v	$\max\{\mathrm{contr}_v(P) \mid P \in E(K)\}$	$\min\{\mathrm{contr}_v(P) > 0 \mid P \in E(K)\}$
A_{n-1}	$\frac{\ell(n-\ell)n}{}$，其中 $\ell := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\frac{n-1}{n}$
D_{n+4}	$1 + \frac{n}{4}$	1
E_6	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
E_7	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

表 2.5：局部贡献 $\mathrm{contr}_v(P)$ 的极值。

例： 假设 π的纤维构型为 $(\mathrm{I}_4, \mathrm{IV}, \mathrm{III}, \mathrm{I}_1)$。可约纤维为 $\mathrm{I}_4, \mathrm{IV}, \mathrm{III}$，因此 $T = A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$。根据表 2.5，$A_3, A_2, A_1$的最大贡献分别为 $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{}$ $= 1$、23、12。最小正贡献分别为 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{}$ $= \frac{3}{4}$、23、12。因此

$$c_{\max} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6},$$
$$c_{\min} = \min\left\{\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

2.9 差值 $\Delta = c_{\max} - c_{\min}$

我们解释了 $\Delta := c_{\max} - c_{\min}$ 的取值为何与第4章的研究相关，尤其是第4.4节。对于有理椭圆曲面，我们验证了在大多数情况下 $\Delta < 2$，并在表2.6和表2.7中指出了例外情况。

如第2.8节所述，若已知 $P \notin E(K)^0$ 和 $h(P)$，确定$P \cdot O$ 的难点在于贡献项 $c_P := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$。特别是，$c_P$ 可能取值的范围决定了 $P \cdot O$的可能性。这个范围由差值

$$\Delta := c_{\max} - c_{\min}.$$

因此，Δ 越小，$P \cdot O$的交数就越容易控制，这也是 Δ在确定可能的交数方面发挥重要作用的原因。在第4.5 节中，我们假设$\Delta \leq 2$ 并陈述存在一对 P_1，P_2 使得 $P_1 \cdot P_2 = k$的充要条件，其中 $k \geq 0$给定。不过，如果 $\Delta > 2$，则无法先验保证这样一对的存在，因此需要逐一处理。幸运的是，根据引理2.9.1，$\Delta > 2$ 这种情形很少见。

引理 2.9.1. 设 X 是 *Mordell-Weil* 秩为 $r \geq 1$的有理椭圆曲面。满足 $\Delta = 2$ 且 $\Delta > 2$ 的情况仅见于表 2.6 和 2.7 。特别地，当 $\Delta < 2$ 时，我们有$E(K)$无挠。

No.	T	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$
24	$A_1^{\oplus 5}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
38	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1^* \oplus \langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
57	$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1^* \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

表 2.6：满足 $\Delta = 2$ 的情况

No.	T	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$	Δ
41	$A_2 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
42	$A_1^{\oplus 6}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/12 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
60	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\langle 1/4 \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

表 2.7： $\Delta > 2$的情形

证明。通过检索表6.1 中所有满足 $\Delta = 2$且 $\Delta > 2$的情形，我们分别得到表2.6 和表2.7。特别要注意的是，这两张表中， $E(K)$ 的挠子部分总是非平凡的。因此，若 $E(K)$ 无挠，则 $\Delta < 2$。 □

2.10 二次型 Q_X

我们定义由高度配对导出的、系数为整数的正定二次型 Q_X 。之所以关注 Q_X ，是因为关于何时存在 $P_1 \cdot P_2 = k$，使得对于某个 P_1， $P_2 \in E(K)$ 的一些条件，可以用 Q_X 所能表示的整数来表述（见推论 4.3.2 和命题4.6.1）。

我们通过消去高度配对所诱导的有理二次型的分母来定义 Q_X；唯一的问题是如何找到一个在所有情况下都适用的比例因子。更确切地说，若 $E(K)$的秩为 $r \geq 1$，且 P_1，……，P_r是其自由部分的生成元，则 $q(x_1$，……，$x_r) := h(x_1P_1 + ... + x_rP_r)$是一个系数属于 $\mathbb{Q}$的二次型；我们将 q 乘以某个整数 $d > 0$ 来定义 Q_X，从而使其系数属于 $\mathbb{Z}$。我们证明，d 总可以取为窄格 $E(K)^0$的行列式。

定义 2.10.1 。设 X满足 $r \geq 1$。设 $P_1, ..., P_r$是 $E(K)$ 自由部分的生成元。定义 e

$$Q_X(x_1, ..., x_r) := (\det E(K)^0) \cdot h(x_1P_1 + ... + x_rP_r).$$

我们验证 表示 Q_X 的矩阵的元素属于 $\mathbb{Z}$，因此 Q_X 的系数属于 $\mathbb{Z}$.

引理 2.10.2。设 A 是表示二次型 Q_X 的矩阵，即 $Q(x_1, ..., x_r) = x^tAx$，其中 $x := (x_1, ..., x_r)^t$。则 A 的元素均为整数。特别地，Q_X 的系数均为整数。

证明。设 $P_1, ..., P_r$ 是 $E(K)$ 自由部分的生成元，并设 $L := E(K)^0$。$E(K)$ 的自由部分同构于对偶格 L^* [OS91，主定理]，，因此我们可以找到 L 的生成元 $P_1^0, ..., P_r^0$，使得 L 的格拉姆矩阵 $B^0 := (\langle P_i^0, P_j^0 \rangle)_{i,j}$ 是 L^* 的格拉姆矩阵 $B := (\langle P_i, P_j \rangle)_{i,j}$ 的逆矩阵。

我们声称，Q_X 由 B^0的伴随矩阵表示，即矩阵 $\mathrm{adj}(B^0)$，满足 $B^0 \cdot \mathrm{adj}(B^0) = (\det B^0) \cdot I_r$，其中 I_r 是 $r \times r$ 单位矩阵。事实上，根据构造，B表示二次型 $h(x_1P_1 + ... + x_rP_r)$，因此

$$\begin{aligned} Q_X(x_1, ..., x_r) &= (\det E(K)^0) \cdot h(x_1P_1 + ... + x_rP_r) \\ &= (\det B^0) \cdot x^tBx \\ &= (\det B^0) \cdot x^t(B^0)^{-1}x \\ &= x^t\mathrm{adj}(B^0)x, \end{aligned}$$

正如所声称的。为证明 $A := \mathrm{adj}(B^0)$具有整数系数，注意到 $L = E(K)^0$ 的格拉姆矩阵B^0 具有整数系数（因为 $E(K)^0$ 是偶格），因此 A也具有整数系数。 □

我们以 Q_X定义的一个简单推论结束本节。

引理 2.10.3。I 若 $h(P) = m$ 对于某个 $P \in E(K)$ 成立，则 Q_X 表示 $d \cdot m$，其中 $d := \det E(K)^0$.

证明。设 $P_1, ..., P_r$ 是 $E(K)$ 自由部分的生成元。设 $P = a_1P_1 + ... + a_rP_r + Q$，其中$a_i \in \mathbb{Z}$，且 Q 是一个挠元（可能为零）。由于挠截面不会对高度配对产生贡献，因此 $h(P - Q) = h(P) = m$。于是

$$\begin{aligned} Q_X(a_1, ..., a_r) &= d \cdot h(a_1P_1 + ... + a_rP_r) \\ &= d \cdot h(P - Q) \\ &= d \cdot m. \end{aligned}$$

□

第3章

有理椭圆曲面上的圆锥丛

在第 2.3 节中，我们将说明圆锥丛如何出现在代数曲面的一般理论中。本章聚焦于有理椭圆曲面上的圆锥丛，这一研究受到 [Sal12], [LS22], [GS17], [GS20] 以及 [AGL16]的结果和方法的启发。在 [Sal12], [LS22] 中，有理椭圆曲面 X 上圆锥丛的存在被用作出现秩跃升的核心条件，其含义将在第 2.1.4 小节，尤其是第 5章中加以精确定义。在 [GS17], [GS20]和 [AGL16]中，圆锥丛之所以重要则另有原因，下面我们将简要说明。

在特征为零的代数闭域上， X 上圆锥丛的存在性被 [GS17], [GS20] 用于分类作为 X二次覆盖的 K3 曲面上的椭圆纤维化。更确切地说，给定一个二次态射 $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ ，其分歧点避开 π的非约化纤维，则诱导出的 K3 曲面为 $X' := X \times_f \mathbb{P}^1$。基变换还给出一个椭圆纤维化 $\pi'\colon X' \to \mathbb{P}^1$ 以及一个二次映射 $f'\colon X' \to X$。通过与 f'复合， X 上的每个圆锥丛都会在1 上诱导一个亏格为 1 的纤维化 X'；在这种情况下，我们可能得到不同于 π的椭圆纤维化。

在 [AGL16] 中，圆锥丛也很有用，不过应用背景截然不同。在此情形下，基域为 $\mathbb{C}$，目标是求 Cox 环 $\mathrm{R}(X) := \bigoplus_{[D]} H^0(X, D)$ 的生成元，其中 $[D]$ 遍历 $\mathrm{Pic}(X)$。给定一个有理椭圆纤维化 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$，环 $\mathrm{R}(X)$ 是有限生成的，当且仅当 X 是一个 Mori 梦空间 [HK00，命题 2.9]，这又等价于 π 的一般秩为零 [AL09，推论 5.4]。假设此情形成立，作者证明，在许多构型中， π 的每个极小生成元集都必须包含一个元素 $g \in H^0(X, D)$，其中 D 是 X上一个圆锥丛的纤维，而其可能情形已被明确描述。

我们以这些例子为切入点，详细研究圆锥丛，这正是本章的主题。本章考虑定义在任意代数闭域 π 上的有理椭圆曲面 $X \to \mathbb{P}^1$ ，并按以下安排展开。在第3.1节中，我们从某些 Néron-Severi类的角度刻画圆锥丛，并据此推导出一些几何性质。在第3.2节中，我们应用这些结果，完整描述圆锥丛纤维可能具有的类型。第3.3 节专门研究 π 的纤维构型如何影响 X上的圆锥丛可能具有的纤维构型。最后，在第3.4 节中，我们介绍一种构造圆锥丛的方法，并给出一些例子来说明我们的结果。

3.1 圆锥丛的数值刻画

我们从数值角度刻画有理椭圆曲面 X 上的圆锥丛。采用这一方法的动机如下。设 $\varphi: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛，令 C 为 φ的一般纤维，因此它是一条亏格为零的光滑不可约曲线。显然，C是一个数值有效除子，且满足 $C^2 = 0$；由伴随公式，$C \cdot (-K_X) = 2$。这三个数值性质足以证明 $|C|$是一个无基点铅笔，因此诱导态射$\varphi_{|C|}: X \to \mathbb{P}^1$ 给出 φ 本身。

反过来，设 D 是一个丰沛除子，满足 $D^2 = 0$ 且 $D \cdot (-K_X) = 2$。由定理 2.7.1可知，数值等价与代数等价一致，因此考虑类 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$是有意义的。自然的问题是，$[D]$ 是否在 X 上诱导出一个圆锥丛。答案是肯定的；此外，这类等价类与圆锥丛之间存在自然对应（定理 3.1.9），这是本节的核心结果。

为了证明这种对应关系，我们需要对给定的类 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$进行数值分析，以便推导出诱导态射 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$的几何性质，例如纤维的连通性（命题 3.1.6）以及其支集的组成（命题 3.1.4）。这些性质对于第 3.2 节中的纤维分类也至关重要。

定义 3.1.1. 一个类 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 称为圆锥类，当

i) D 是数值有效的。 ii) $D^2 = 0$.
iii) $D \cdot (-K_X) = 2$.

引理 3.1.2. 设 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类。那么 $|D|$ 是无基点铅笔，因此诱导出一个满射态射 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$。

证明. 根据 [Har95，定理 III.1(a)]，$|D|$ 无基点且 $h^1(X, D) = 0$。由定理 2.2.6，$\chi(X) = 1$，而黎曼-罗赫定理给出 $h^0(X, D) + h^2(X, D) = 2$，因此我们只需证明$h^2(X, D) = 0$。反设 $h^2(X, D) \geq 1$。由 Serre 对偶，$h^0(K_X - D) \geq 1$，因此 $K_X - D$ 线性等价于一个有效除子。由于 D 数值有效，$(K_X - D) \cdot D \geq 0$，这与 $D^2 = 0$ 及 $D \cdot (-K_X) = 2$矛盾。 □

注记 3.1.3。 由引理 3.1.2可知，圆锥类具有一个有效代表元。

注意，我们并不能先验地知道引理 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$ 中的态射 3.1.2 是一个圆锥丛。目前我们只能说，若 C 是 $\varphi_{|D|}$的光滑不可约纤维，那么$g(C) = 0$ 由伴随公式可得。然而，$\varphi_{|D|}$ 的一般纤维是否不可约且光滑仍不清楚。我们将在命题 3.1.7中证明这一点。为此，我们需要命题 D 3.1.4 中关于 D 的分支的信息，以及命题 3.1.6中的连通性。

命题 3.1.4。 设 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类。若 D 是一个有效代表元，则每条曲线 $E \in \mathrm{Supp}\ D$ 都是光滑有理曲线，且满足 $E^2 \leq 0$。

证明。任取一个 $E \in \mathrm{Supp}\ D$。由引理 3.1.2， D 是态射 $\varphi_{|D|}\colon X \to \mathbb{P}^1$ 的一个纤维，该态射由 $|D|$ 诱导，因此由引理 2.5.2， $D \cdot E = 0$。反设 $E^2 > 0$，由矛盾可知，$D^2 = 0$ 这一事实意味着根据霍奇指标定理， D 数值等价于零 [Har77, Thm. V.1.9, Rmk. 1.9.1]。这不可能，因为 $D \cdot (-K_X) = 2 \neq 0$，故确有 $E^2 \leq 0$。

要证明 E 是一条光滑有理曲线，只需证明 $p_a(E) = 0$。由定理 2.2.6，$-K_X$ 与 π 的任意一个纤维线性等价，特别地， $-K_X$ 是数值有效的，且 $E \cdot K_X \leq 0$。由伴随公式 [Bea96, I.15] $2p_a(E) - 2 = E^2 + E \cdot K_X \leq 0$，所以 $p_a(E) \leq 1$。反设 $p_a(E) = 1$。这只有在 $E^2 = E \cdot K_X = 0$ 时才可能发生，因此由引理 2.2.9， E 是 π 的一个纤维。在这种情况下， E 与 $-K_X$ 线性等价，因此 $D \cdot E = D \cdot (-K_X) = 2$，这与 $D \cdot E = 0$ 矛盾。

□

注 3.1.5。

命题 3.1.4 给出了关于 D 的支集的信息，而下一个命题说明 D 是连通的，这是关于整体而言 D 的构成的重要事实。

命题 3.1.6。 设 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类。若 D 是一个有效代表元，则 D 是连通的。

证明。设 $D = D_1 + \ldots + D_n$，其中 D_1、…、D_n 是连通分支。由引理 2.5.2 c)，每个 D_i 都是数值有效的，且 $D_i^2 = 0$，而 $D_i \cdot K_X \in 2\mathbb{Z}$。由于根据定理 2.2.6， $-K_X$ 是数值有效的，且 $D \cdot (-K_X) = 2$，因此对于某个 i_0，有 $D_{i_0} \cdot (-K_X) = 2$，并且对于 $i \neq i_0$，有 $D_i \cdot (-K_X) = 0$。特别地， $[D_{i_0}] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类。由引理 2.5.3， $|D|$ 和 $|D_{i_0}|$ 都是铅笔，因此根据引理 2.5.3， $D = D_{i_0}$。 □

我们利用命题 3.1.4 和 3.1.6 得出 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$ 确实是一个圆锥丛。

命题 3.1.7. 设 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类。则 $\varphi_{|D|}$： $X \to \mathbb{P}^1$ 的所有纤维都是亏格为0 的光滑不可约曲线，除有限个纤维外；这些例外纤维是可约的，且支集在负曲线上。特别地，$\varphi_{|D|}$ 是一个圆锥丛。

证明。 设 F 是 $\varphi_{|D|}$的一个纤维。由于 F 与 D线性等价，因此 $[F] = [D] \in \mathrm{NS}(X)$，所以根据命题 F 3.1.6 是连通的。根据命题 3.1.4 ，每个 $E \in \mathrm{Supp}\ F$ 都满足 $g(E) = 0$ 且 $E^2 \leq 0$。

首先假设 $E^2 = 0$ 对于某个 $E \in \mathrm{Supp}\ F$成立。由于 F 是 $\varphi_{|D|}$的一个连通纤维，因此 $E = rF$对于某个 $r \in \mathbb{Q}$ 由引理 2.5.2可知。由于 $F \cdot (-K_X) = 2$，我们得到 $E \cdot K_X = -2r$。根据伴随公式[Bea96, I.15]， $r = 1$，因此 $F = E$ 是亏格为 0 的光滑不可约曲线。

现在假设对于每个 $E \in \mathrm{Supp}\ F$，都有 $E^2 < 0$。那么 F 必定是可约的，否则 $F^2 = E^2 < 0$，这显然不合理，因为 F 是 $\varphi_{|D|}$的一个纤维。反过来，若 F 是可约的，则对于所有 $E \in \mathrm{Supp}\ F$，都有 $E^2 < 0$；否则，对于某个 E，有 $E^2 = 0$，而根据上一段， F 是不可约的，这就产生了矛盾。

这表明，要么 F 是光滑的、不可约的且亏格为 0，要么 F 是可约的，在这种情况下， F 支集于负曲线上。接下来只需证明 $\varphi_{|D|}$ 只有有限个可约纤维。

反设存在一个无限集 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 由$\varphi_{|D|}$的可约纤维组成。特别地，每个 F_n 都由负曲线支承，而这些曲线要么是 (-1)-曲线（ π的截面），要么是(-2)-曲线（可约纤维的分支），由引理 2.2.10可知。

由于 π 只有有限个奇异纤维， X 中的（-2）-曲线数量有限，因此支集上含有（-2）-曲线的 F_n 也只有有限个。排除这类 F_n后，我们可以假设$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的所有元素都由（-1）-曲线支承。对每个 n，取 $P_n \in \mathrm{Supp}\ F_n$。纤维 F_n， F_m互不相交，因此当 $n \neq m$时， P_n， P_m 也互不相交。通过收缩有限条例外曲线P_1，……， P_ℓ，我们仍会得到一个无限集$\{P_m\}_{m>\ell}$例外曲线，因此无法得到 X的极小模型，这显然矛盾。 □

注记 3.1.8。 在特征零时，应用贝尔蒂尼定理可以使命题 3.1.7 的证明更为简洁 [Har77，推论 10。9], 该定理由 X 光滑这一事实保证，除有限多个纤维外，其余纤维均光滑。

现在我们证明圆锥丛的数值刻画。

定理 3.1.9。 设 X 是一个有理椭圆曲面。若 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类，则 $|D|$ 是一个无基点铅笔，其诱导态射 $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛。此外，映射$[D] \mapsto \varphi_{|D|}$ 有一个逆映射 $\varphi \mapsto [F]$，其中 F 是 φ的任意一个纤维。这给出了圆锥类与圆锥丛之间的自然对应。

证明。 给定一个圆锥类 $[D] \in \mathrm{NS}(X)$，根据命题 3.1.7 ，$\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ 的一般纤维是亏格为 0的光滑不可约曲线，因此 $\varphi_{|D|}$ 是一个圆锥丛。

反之，若 $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛，且 C 是 φ的一条光滑不可约纤维，特别是 $C^2 = 0$, $g(C) = 0$，由伴随公式 [Bea96，I.15] $C \cdot (-K_X) = 2$。显然， C 是数值有效的，因此$[C] \in \mathrm{NS}(X)$是一个圆锥类。此外， φ 的任何其他纤维 F 都与 C线性等价，因此$[F] = [C] \in \mathrm{NS}(X)$，且映射 $\varphi \mapsto [F]$ 定义良好。

我们验证这两个映射互为逆映射。给定一个类 $[D]$，我们可以假设 D 是有效的，因为 $|D|$ 是一个铅笔，所以 D 是 $\varphi_{|D|}$的一条纤维，从而 $\varphi_{|D|} \mapsto [D]$。反之，给定一个圆锥丛 φ及其一条纤维 F，那么 $\varphi_{|F|}$按定义与 φ重合，因此 $[F] \mapsto \varphi$。 □

3.2 圆锥丛纤维的分类

我们证明本章的主要结果之一，即对 X 上圆锥丛纤维的完整描述。我们先在引理3.2.1 中描述纤维分支，定义一些与交图相关的术语，然后证明定理 3.2.2。

引理 3.2.1. 设 $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛， φ的任意一个纤维为 D。则 D 连通，且

(i) D 要么是亏格为0的光滑不可约曲线，要么

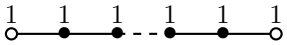
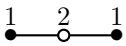
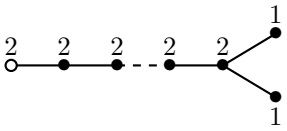
(ii) $D = P_1 + P_2 + D'$，其中 P_1、P_2 是(-1)-曲线（ π的截面），但不一定互不相同；D' 要么为零，要么支集在(-2)-曲线上（ π的可约纤维的分支）。

证明。 由命题 3.1.7可知， φ 的所有纤维都属于类别 (i)，只有有限多个例外；这些例外是可约的，且支集在负曲线上。令 D 为这有限多个纤维之一。

根据引理 2.2.10，Supp D 仅包含（-1）曲线（ π的截面）或（-2）曲线（ π的可约纤维的分量）。由伴随公式 [Bea96，若 $C \in \mathrm{Supp}\ D$ 是（-2）曲线，则$C \cdot (-K_X) = 0$；若 $P \in \mathrm{Supp}\ D$是（-1）曲线，则 $P \cdot (-K_X) = 1$。但 $D \cdot (-K_X) = 2$，因此D必须含有一项 $P_1 + P_2$，其中 P_1、P_2是可能相同的（-1）曲线；还必须含有一项可能为零的D'，其中包含（-2）曲线，如所求。 □

此时，我们已经掌握了足够多关于构成圆锥丛纤维支集的曲线的信息。接下来还需研究它们的重数以及彼此之间的交。

定理 3.2.2. 设 X 是一个配有椭圆纤维化 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 的有理椭圆曲面，且$\varphi: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛。若 D 是 φ的一个纤维，则 D 的交图属于下列某一种类型。反之，若除子 D 的交图属于这些类型中的任意一种，则 $|D|$诱导一个圆锥丛 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$。

Type	交图
0	
A_2	
A_n $(n \geq 3)$	
D_3	
D_m $(m \geq 4)$	

$\star$ 光滑不可约亏格 0 曲线
$\circ(-1)$-曲线（ π的截面）
$\bullet(-2)$-曲线（ π的可约纤维的分支）

术语。 在证明定理 3.2.2之前，我们引入一套自然的术语，用于处理 D 的交图。当 C， $C' \in$ Supp D 彼此不同，我们称 C' 为 邻点， C 当 $C \cdot C' > 0$。如果 C 恰有一个邻点，我们称 C 为一个 端点。我们用 C 的邻点数表示 $n(C)$。这些定义的一个简单推论如下。

引理 3.2.3。 若 $D = \sum_i n_i E_i$ 是态射 $X \to \mathbb{P}^1$的一个纤维，则 $n(E_i) \leq -n_i^2 E_i^2$对所有 i均成立。
证明。 根据 $n(E_i)$的定义，显然 $n(E_i) \leq \sum_{j \neq i} E_i \cdot E_j$。由于 $D \cdot E_i = 0$ 由引理 2.5.2可知，于是

$$\begin{aligned} 0 = D \cdot E_i &= \sum_j n_j E_j \cdot E_i \\ &= n_i E_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j E_j \cdot E_i \\ &\geq n_i E_i^2 + \sum_{j \neq i} E_j \cdot E_i \\ &\geq n_i E_i^2 + n(E_i). \end{aligned}$$

□

定理 3.2.2 的证明。我们先证明逆命题。若 D 符合某一种类型，则必须证明$[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类，从而由定理 3.1.9 可知 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛。逐案验证可得，对于所有 $C \in \mathrm{Supp}\ D$，均有 $D \cdot C = 0$。由于 D 是有效的，根据引理 2.5.1，它是数值有效的，且$D^2 = 0$。条件 $D\cdot(-K_X) = 2$在 0 型中由伴随公式成立。在类型 A_2、A_n 中有$D\cdot(-K_X) = 2$，因为它们包含 π的两个不同截面；在类型 D_3、D_m 中也有此结论，因为它们包含一个重数为 2 的截面。因此，$[D] \in \mathrm{NS}(X)$ 是一个圆锥类，证毕。

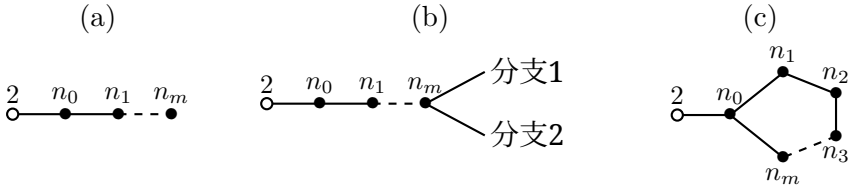
现在设 D 是 φ的一个纤维。根据引理 3.2.1，D 是连通的，并且有两种可能的形式。如果 D 是不可约的，则得到 0 型。否则，$D = P_1 + P_2 + D'$，其中 P_1、P_2 是（-1）-曲线，而 D' 要么为零，要么支集在（-2）-曲线上。如果 $D' = \sum_i n_i C_i$，那么根据引理 3.2.3，$n\left(C_i\right) \leq 2n_i$。$n\left(P_1\right)$ $n\left(P_2\right)$ 的界取决于以下哪种情况成立：i) $P_1 \neq P_2$，或 ii) $P_1 = P_2$。在下文中，我们将数次隐式使用引理 2.5.2 a)。

i) $P_1 \neq P_2$。在这种情况下，$n\left(P_1\right) \leq 1$，且 $n\left(P_2\right) \leq 1$。由于 D 是连通的，P_1，P_2 都必须有某个邻点，因此 $n\left(P_1\right) = n\left(P_2\right) = 1$，所以 P_1，P_2 是端点。如果端点 P_1，P_2 相交，则它们构成整个图，因此 $D = P_1 + P_2$。这属于 A_2 型。

若 P_1、P_2 不相交，由于连通性，交图上必有一条将它们连接起来的路径，例如 P_1、C_1、...、C_k、P_2。由于 P_1 是一个端点，它只有 C_1 这一个邻点，因此$0 = D\cdot P_1 = -1 + n_1$ 得到 $n_1 = 1$。此外，$n(C_1) \leq 2$，并且根据 C_1 在路径中的位置，我们有 $n(C_1) = 2$。我们用归纳法证明，对于所有 $i = 1$、...、k，都有 $n_i = 1$，且 $n(C_i) = 2$。假设这对 $i = 1$、...、$\ell < k$ 成立。那么 $0 = D\cdot C_\ell = 1 - 2 + n_{\ell+1}$，所以 $n_{\ell+1} = 1$。此外，$n(C_{\ell+1}) \leq 2$，并且根据 $C_{\ell+1}$ 在路径中的位置，我们有 $n(C_{\ell+1}) = 2$。因此，该图恰好是链 P_1、C_1、...、C_k、P_2。这是类型 $A_n (n \geq 3)$。

ii) $P_1 = P_2$。在这种情况下，$n(P_1) \leq 2$。我们不能有 $n(P_1) = 0$，否则 $D^2 = (2P_1)^2 = -4$，因此 $n(P_1) = 1$ 或 2。如果 P_1 有两个邻点，例如 C_1，C_2，那么 $0 = D\cdot P_1 = -2 + n_1 + n_2$，这只会在 $n_1 = n_2 = 1$ 时发生。此外，$n(C_1) \leq 2$，因此 C_1 除了 P_1之外还可能有另一个邻点C_3。但这样一来，$D \cdot P_1 = 0$ 就会推出 $n_3 = 0$，这是荒谬的，所以 C_1 只有 P_1 这一个邻点。由对称性可知，C_2 也只有 P_1 这一个邻点。这是类型 D_3。

最后，设 $n(P_1) = 1$，且 C_1 是 P_1唯一的邻点。那么当 $i > 1$时，$C_i \cdot P_1 = 0$。注意，C_1、C_i 来自 π的同一个纤维，记作 F；否则 C_i 会与 C_1、P_1位于不同的连通分支中，这与 D 连通相矛盾。F 可能的 Dynkin 图列于定理 2.1.8 中。由于 P_1 与 F 在一个单分量中相交，可能的情况为



在 (a)、(b) 和 (c) 中，$D\cdot P_1 = 0$ 推出 $n_1 = 2$。在 (c) 中，$D\cdot C_1 = 0$ 得到 $n_2 + n_m = 2$，因此 $n_2 = n_m = 1$。但是，$D\cdot C_2 = 0$ 得到 $n_3 = 0$，这显然荒谬，因此排除 (c)。对于 (a)、(b)，我们用归纳法进行证明：如果 $k < m$ 和 $n_1 = ... = n_k = 2$，那么 $D\cdot C_k = 0$ 得到 $n_{k+1} = 2$，因此$n_1 = ... = n_m = 2$。但是在 (a) 中，$D\cdot C_m = 0$ 推出 $n_m = 1$，这显然荒谬，因此也排除 (a)。

在 (b) 中，令 C_{m+1}、C_{m+2} 分别为分歧 1 和 2 中的第一个元素。于是 $D\cdot C_m = 0$得到 $n_{m+1} = n_{m+2} = 1$。因此，$n(C_{m+1}) \leq 2$ 以及 $n(C_{m+2}) \leq 2$。如果 C_{m+1} 除了 C_m之外还有另一个邻点 C_{m+3}，那么 $D\cdot C_{m+1} = 0$ 意味着 $n_{m+3} = 0$，这是荒谬的，因此 C_{m+1}是一个端点。由对称性，C_{m+2} 也是一个端点。这是类型 $D_m (m \geq 4)$。□

3.3 圆锥丛的纤维与椭圆纤维化的纤维

令 X 为一个带有椭圆纤维化 $\pi:\ X \to \mathbb{P}^1$的有理椭圆曲面。具有给定纤维类型的圆锥丛 $\varphi: X \to \mathbb{P}^1$ 的存在性很大程度上取决于 π 的纤维构型。这一关系将在定理 3.3.2 中进行探讨，该定理给出了判定某种纤维类型何时可能出现的简单标准。在证明该定理之前，我们需要以下关于不相交截面存在性的结果。

引理 3.3.1。 如果 X 是一个 *Mordell-Weil* 群非平凡的有理椭圆曲面，则存在一对不相交截面。

证明。 设 $E(K)$ 为 π的 Mordell-Weil 群，其中性截面记为 O。根据[OS91，定理 2。5]， $E(K)$ 由与 O不相交的截面生成。因此必定存在一个 $P \neq O$ 与 O不相交的生成元，否则 $E(K) =\{O\}$，这与假设矛盾。 □

现在我们陈述并证明本节的主要结果。

定理 3.3.2。 设 X 为具有椭圆纤维化 $\pi:\ X \to \mathbb{P}^1$的有理椭圆曲面。则以下陈述成立：

a) X具有 一个圆锥丛，其含有一个 A_2 纤维 $\Leftrightarrow \pi$，具有正的泛秩，且没有III^* 纤维 r.

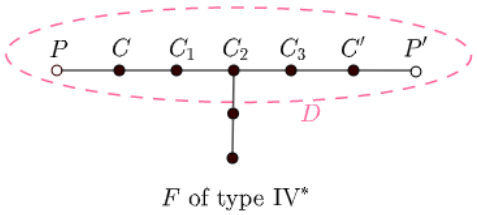
b) X 具有一个圆锥丛，其含有一个 $A_{n\geq 3}$ 纤维 $\Leftrightarrow \pi$，且有一个不同于II^*的可约纤维。

c) X 具有一个圆锥丛，其含有一个 D_3 纤维 $\Leftrightarrow \pi$，且至少有两个可约纤维。

d) X具 有一个圆锥丛，其含有一个 $D_{m\geq 4}$ 纤维 $\Leftrightarrow \pi$，且有一个非约化纤维或一个$\mathrm{I}_{n\geq 4}$纤维 .

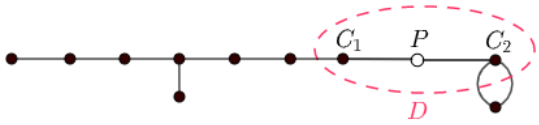
证明。 a) 此项的证明留待第4章，因为该断言等价于第4.7.8节中的定理 4.7.4。

b) 假设 X 具有一个带有 $A_{n\geq 3}$ 纤维的圆锥丛。由于类型 A_n 包含一条（-2）曲线，根据引理 2.2.10， π 有一个可约纤维 F。我们断言 $F \neq \mathrm{II}^*$，这等价于格 T （见定义2.7.3）不是 E_8。事实上，若情况如此，则 Mordell-Weil 群E（K）将是平凡的 [OS91，主定理]，，这不可能，因为圆锥丛的 A_n 纤维包含两个不同的截面。反过来，假设 π 有一个可约纤维 $F \neq \mathrm{II}^*$。那么E（K）不是平凡的 [OS91，主定理] ，并且根据引理 3.3.1，我们可以找到两个不相交截面P、 P'。令 C、 $C' \in$ Supp F为 P、 P' 所交的分支。由于 F是连通的，在 F的交图中存在一条路径C、 C_1、...、 C_ℓ、 C'。令 D: $= P + C + C_1 + ... + C_\ell + C' + P'$。根据定理 3.2.2， $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛，而 D 是其一个 A_n 纤维。



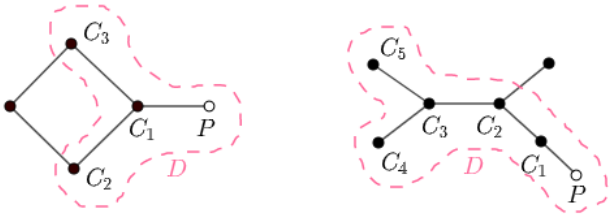
F of type IV^*

c) 假设 X 具有一个带有 D_3 纤维 $D = C_1 + 2P + C_2$的圆锥丛，其中 C_1、C_2 是（-2）曲线，而 P 是一个截面，满足 $C_1 \cdot P = C_2 \cdot P = 1$。由于 P 与 π 的每个纤维恰好交于一点，因此 C_1、C_2 必定来自 π的两个不同可约纤维。反过来，设 F_1、F_2 是 π的两个可约纤维。若 P 是一个截面，则 P 会与某条（-2）曲线 $C_i \in$Supp F_i相交。令$D := C_1 + 2P + C_2$。根据定理 3.2.2，$\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛，而 D 是其一个 D_3 纤维。



F_1 of type III* F_2 of type I_2

d) 假设 X 具有一个圆锥丛，其纤维 $D = 2P + 2C_1 + \ldots + 2C_\ell + (C_{\ell+1} + C_{\ell+2})$ 是 D_m，其中所有的 C_i 都来自 π 的一个可约纤维 F。注意，若 $\ell > 1$，则 C_ℓ 与三条（-2）曲线相交，分别为 $C_{\ell-1}$、$C_{\ell+1}$、$C_{\ell+2}$（见下图）。查阅定理 2.1.8 中的列表可知，这种相交行为只会在 F 为 I_n^*、II*、III* 或 IV* 时出现，而这些类型全都是非约化的。若 $\ell = 1$，则 C_1 与截面 P 以及两条互不相交的（-2）曲线相交，分别为 C_2、C_3。再次查阅定理 2.1.8 中的列表可知，F 必须是 I_n，且 $n \geq 4$。反过来，设 F 是非约化的，或为类型 I_n 且 $n \geq 4$。取一个在 C_1 处与 F 相交的截面 P。再取一条链 C_2、.....、C_ℓ，使得 C_ℓ 与 F 的另外两个分支相交。将这两个分支分别记为 $C_{\ell+1}$、$C_{\ell+2}$，并定义 $D : = 2P + 2C_1 + \ldots + 2C_\ell + (C_{\ell+1} + C_{\ell+2})$。由定理 3.2.2，$\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个圆锥丛，而 D 是它的一个类型 D_m 纤维。 □



$\ell = 1$
F of type I_4

$\ell = 3$
F of type I_1^*

3.4 圆锥丛的例子

我们给出有理椭圆曲面上的圆锥丛例子，以说明定理 3.2.2 中的纤维类型可能以何种方式出现。为简单起见，本节中我们在 $k=\mathbb{C}$上工作，尽管也可以在不同的域上进行类似的构造。在小节 3.4.1 中，我们将描述这些例子的构造并介绍一些记号，然后在小节 3.4.2中给出这些例子。

3.4.1 构造与记号

如第 2.2节所述， π 由三次曲线铅笔 $\mathcal{P}$ 通过吹起 p： $X\to\mathbb{P}^2$的基点集而诱导，其中 $\mathcal{P}$。我们描述一种构造圆锥丛 φ： $X\to\mathbb{P}^1$ 的方法，该圆锥丛来自 $\mathbb{P}^2$上的零亏格曲线铅笔。

构造。 设$\mathcal{Q}$是由主有理映射$\psi:\mathbb{P}^2\dashrightarrow\mathbb{P}^1$ 给出的圆锥曲线铅笔（或直线铅笔），并具有以下性质：

(a) $\psi^{-1}(t)$ 除有限多个 $t\in\mathbb{P}^1$ 外均光滑，即 有理数域 的一般成员是光滑的。

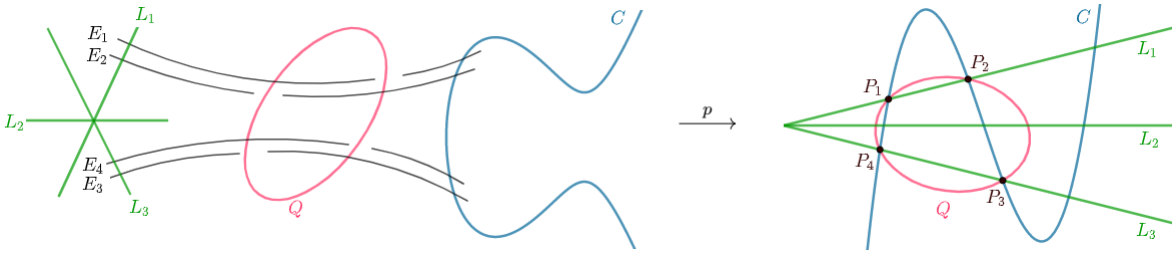
(b) ψ 的不定点集（等价地，有理数域的基点集）包含于$\mathcal{P}$ 的基点集内（包括无穷近点）。

现在通过复合定义满射态射 φ: $X\to\mathbb{P}^1$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^2 & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow^{\varphi} & & & \nearrow \end{array}$$

注意， φ 是一个定义良好的圆锥丛。事实上，根据性质 (b)， ψ 的不定点在 p 下被吹起，因此 φ 是一个态射。根据性质 (a)， φ 的一般纤维是光滑不可约曲线。由于有理数域 由圆锥曲线（或直线）组成， φ 的一般纤维亏格为零。

例。设 C 是一条光滑三次曲线， L_1， L_2， L_3 是共点直线。定义 $\mathcal{P}$ 为由 C 和 $L_1+L_2+L_3$ 生成的铅笔。令 P_1， $P_2\in L_1\cap C$ 和 P_3， $P_4\in L_3\cap C$，并令 $\mathcal{Q}$ 为经过 P_1， P_2， P_3， P_4 的圆锥曲线铅笔。在下图中， $Q\in\mathcal{Q}$ 是一条一般圆锥曲线，因此 Q 在 p 下的严格变换是圆锥丛 $\varphi:X\to\mathbb{P}^1$ 的一般纤维。



注释 3.4.1。 由于 P_1、 P_2、 P_3、 P_4 这些有理数域 的基点在 p 下被吹起，因此拉回铅笔 p^*有理数域 有四个固定分量，即例外除子 E_1、 E_2、 E_3、 E_4。消去这些分量后，我们得到无基点铅笔 p^*有理数域 $-E_1-E_2-E_3-E_4$，它恰好由 φ: $X\to\mathbb{P}^1$ 给出。

记号。

$\mathcal{P}$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上的三次曲线铅笔，在基点集处吹起 p：$X \to \mathbb{P}^2$，从而诱导出 $\pi.p$。$\mathcal{P}.\mathcal{Q}$ 在 $\mathbb{P}^2.Q$ 上的圆锥曲线（或直线）铅笔；$\mathcal{Q}$, 不一定光滑.L 在$\mathcal{Q}$中的直线.φ 由$\mathcal{Q}$诱导的圆锥丛 $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ .D φ 的奇异纤维，使得 $\varphi(D) = Q$ （或 $\varphi(D) = L$）.D' φ.的另一个奇异纤维

注 3.4.2. 为简便起见，曲线 $E \subset \mathbb{P}^2$ 在 p 下的严格变换也记作 $_\sim E$，而不采用通常的记号 E。

3.4.2 例子

我们给出两类例子：极端情形，即圆锥丛仅允许一种类型的单纤维；以及具有多种纤维类型的情形。

极端情形

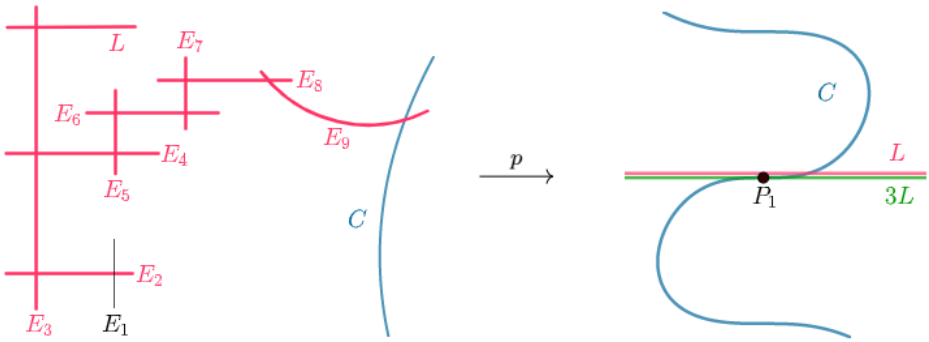
根据定理 3.3.2，有两种情形下 X 只能容许恰好具有一种奇异纤维类型的圆锥丛。

(1) 当 π 具有 II^* 纤维时： X 仅允许具有 $D_{m\geq 4}$ 类型奇异纤维的圆锥丛。

(2) 当 π 没有可约纤维时： X 仅允许具有 A_2 类型奇异纤维的圆锥丛。

在 Persson 分类表中， [Per90], 情形 (1) 对应表中的前两项（Mordell-Weil 群平凡的情形），情形 (2) 对应最后六项（Mordell-Weil 秩最大的情形）。例子3.4.2.1 和3.4.2.2 分别展示了情形 (1) 和情形 (2)。

例 3.4.2.1. 设 P 由如下定义的一条光滑三次曲线 C 和一条三重直线 $3L$ 诱导。我们吹起基点集 $\{9P_1\}$，得到一个有理椭圆曲面，其奇异纤维的构型为 $(\mathrm{II}^*, \mathrm{II})$。根据定理 3.3.2，$X$ 只能容许具有 $D_{m\geq 4}$类型奇异纤维的圆锥丛。我们从经过 P_1的直线铅笔 Q 构造一个圆锥丛。曲线 $D := p^*L - E_1$ 属于无基点铅笔 $p^*\mathrm{Q} - E_1$，该铅笔诱导圆锥丛 $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^1$。曲线$D$ 是 $\varphi_{|D|}$的一条 D_9 纤维。



C: $x^3 + y^3 - yz^2 = 0$.

L: $y = 0$.

$\mathcal{P}$:由 C 和 $3L$.

$\mathcal{Q}$: 经过 P_1. 的直线铅笔

$D = 2E_9 + 2E_8 + 2E_7 + 2E_6 + 2E_5 + 2E_4 + 2E_3 + (E_2 + L)$，类型 D_9.

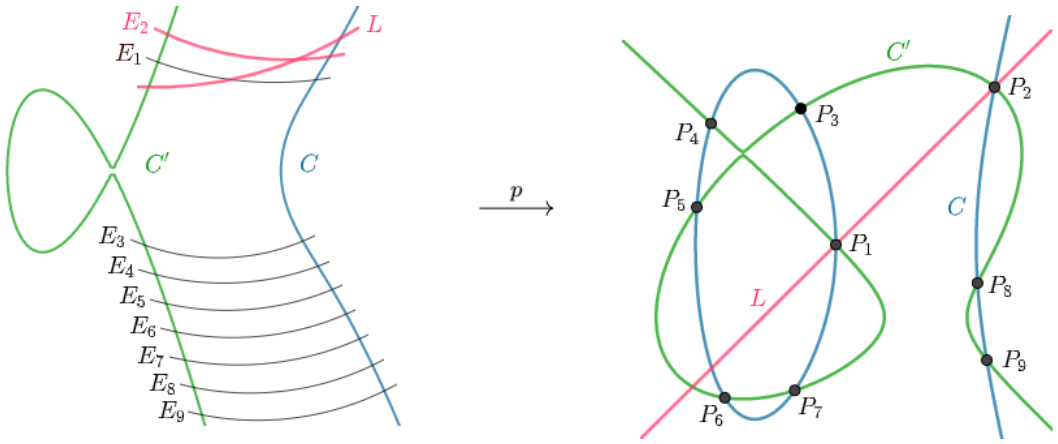
收缩序列: E_9， E_8， E_7， E_6， E_5， E_4， E_3， E_2， E_1.

注 3.4.3. 例 3.4.2.1 中的圆锥丛实际上是 X上唯一的圆锥丛。这是因为 II^* 是 π 的唯一可约纤维，而且 E_9 是X的唯一截面，因为 Mordell-Weil 群是平凡的 [Per90]。通过考察 II^*的交图，我们得出 D 是构成一个 $D_{m\geq 4}$ 纤维的唯一除子。

注 3.4.4. 可以用类似的构造得到 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 其构型为$(\mathrm{II}^*, 2\mathrm{I}_1)$，在这种情况下，注 3.4.3 同样适用。

例 3.4.2.2. 设 P 由一条光滑三次曲线 C 和一条有节点的三次曲线 C' 诱导，如下所示。通过吹起基点集 $\{P_1, ..., P_9\}$，我们得到 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$，其构型为 (II, $10\mathrm{I}_1$)。根据定理 3.3.2，X 只能容许奇异纤维类型为 A_2的圆锥丛。设 Q 为经过 P_1的直线铅笔。曲线 $D := p^*L - E_1$属于无基点铅笔 $p^*\mathrm{Q} - E_1$，它诱导圆锥丛 $\varphi_{|D|}\colon X \to \mathbb{P}^1$。曲线 D 是 $\varphi_{|D|}$的一条 A_2 纤维。

此外请注意，D 并非圆锥丛中唯一的奇异纤维。事实上，每条经过 P_1 和 P_i 且满足 $i = 2$，……，9的直线 L_{1i}，都对应于$\varphi_{|D|}$的一个 A_2 纤维，即 $L_{1i} + E_i$。



C： $y^2z - 4x^3 + 4xz^2 = 0.$

C'： $y^2z - 4x^3 + 4xz^2 + (127/100)(xz^2 - 4y^3 + 4yz^2) = 0.$

L：经过 P_1，P_2.的直线

$\mathcal{P}$：由 C 和 C'.诱导的三次曲线铅笔

有理数域：经过 P_1.的直线铅笔

$D = p^*L - E_1 = L + E_2$，类型 A_2.

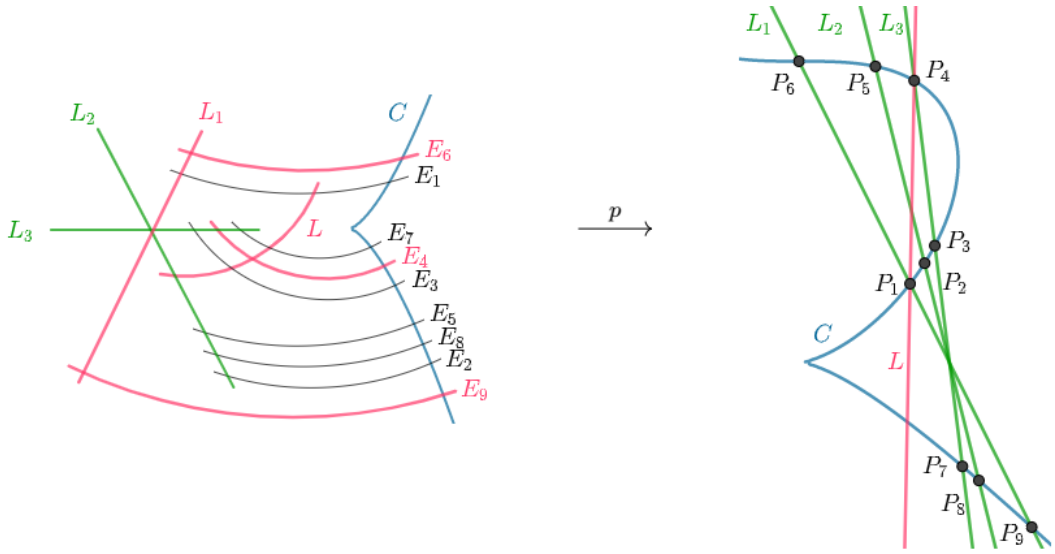
收缩序列：E_9，E_8，E_7，E_6，E_5，E_4，E_3，E_2，E_1.

注记 3.4.5。由于例 3.4.2.2 中的圆锥丛仅具有 A_2 类型的奇异纤维，而这些纤维同构于在一点相交的一对直线，因此我们有一个标准圆锥丛，其含义见 Manin 和 Tsfasman [MT86，第 2 小节。2]。

混合纤维类型

例 3.4.2.3. 设 P 由下图所示的带尖点三次曲线 C 与三条直线 $L_1+L_2+L_3$诱导。通过吹起基点集{P_1, ..., P_9}，我们得到 $\pi\colon\ X\to\mathbb{P}^1$，其构型为 (IV, II, 6I$_1$)。根据定理 3.3.2，$X$ 仅容许具有 A_2 或$A_{n\geq 3}$类型奇异纤维的圆锥丛。我们构造一个具有 A_2 和 A_3类型奇异纤维的圆锥丛。设 Q 为经过 P_1的直线铅笔。我们将 L 定义为经过 P_1、P_4 和 L' 的直线：$=L_1$。

那么，$D:=p^*L-E_1$ 和 $D':=p^*L'-E_1$ 是有理数域 p^*Q $-E_1$上的无基点铅笔中的曲线，它诱导出圆锥丛 $\varphi_{|D|}\colon X\to\mathbb{P}^1$。曲线 D、D' 分别是$\varphi_{|D|}$ 中类型为 A_2、A_3的纤维。除了 D 和 D'之外，该圆锥丛还有五个其他奇异纤维，每个的类型均为A_2。事实上，每条经过 P_1、P_i 且满足 $i\in${2, 3, 5, 7, 8}的直线 L_{1i}都会诱导出 A_2 纤维 $L_{1i}+E_i$。

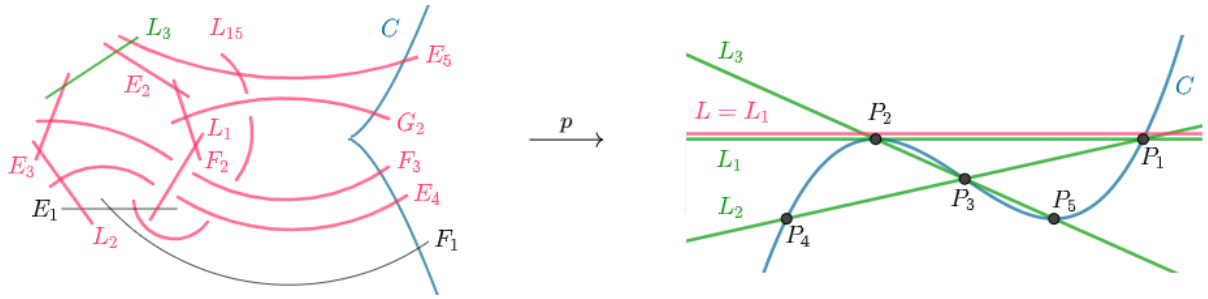


$C\colon\ x^3+y^3-y^2z=0$.$L_1\colon\ y+2x-z=0$.$L_2\colon$ $y+4x-2z=0$.$L_3\colon\ y+8x-4z=0$.$L\colon$经过 P_1的直线，P_4.$L'=L_1$.P：由 C 和 $L_1+L_2+L_3$.诱导的三次曲线铅笔 Q：经过 P_1.的直线铅笔$D=L+E_4$，类型 A_2.

$D'=E_6+L'+E_9$，类型 A_3.收缩序列：$E_9, E_8, E_7, E_6, E_5, E_4, E_3, E_2, E_1$.

例3.4.2.4. 设 P 由一条光滑三次曲线 C 和如下三条直线 $L_1+L_2+L_3$ 诱导。通过吹起基点集 $\{2P_1, 3P_2, 2P_3, P_4, P_5\}$，我们得到 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$，其构型为 $(\mathrm{I}_7, \mathrm{II}, 3\mathrm{I}_1)$。根据定理 3.3.2，$X$ 允许具有 $A_{n\geq 3}$、$D_{m\geq 4}$或 A_2类型奇异纤维的圆锥丛。我们构造一个具有 A_2、A_4、D_4类型的圆锥丛。设 Q 为过P_1的直线铅笔。我们还定义 $L := L_1$、$L' := L_2$，并令 L'' 为经过 P_1、P_5的直线。

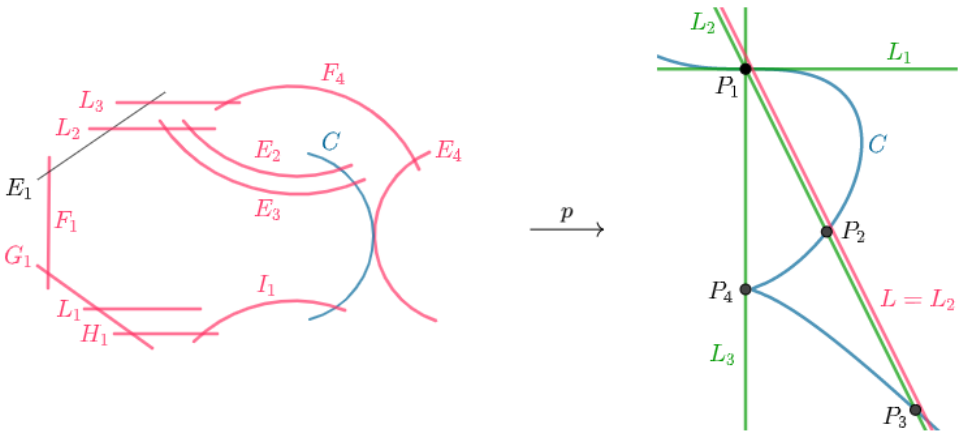
那么，$D := p^*L - E_1$, $D' := p^*L' - E_1$ 和 $D'' := p^*L'' - E_1$ 是基底无基点铅笔 p^*有理数域 $-E_1$中的曲线，它诱导出圆锥丛$\varphi_{|D|}\colon X \to \mathbb{P}^1$。曲线 D, D', D'' 分别是类型为 D_4, A_4, A_2 的$\varphi_{|D|}$ 的纤维。



$C\colon\ yz^2 - 2x^2(x-z) = 0$. $L_1\colon\ y = 0$. $L_2\colon\ 2x - 9y - 2z = 0$. $L_3\colon\ 4x + 9y = 0$. $L = L_1$. $L' = L_2$. $L''\colon$ 经过 P_1、P_5.的直线P：由 C 和 $L_1 + L_2 + L_3$.诱导的三次曲线铅笔Q：经过 P_1.的直线铅笔$D = 2G_2 + 2F_2 + (E_2 + L)$，类型 D_4. $D' = E_4 + L' + E_3 + F_3$，类型 A_4. $D'' = L'' + E_5$，类型 A_2.收缩序列：E_5、E_4、F_3、E_3、G_2、F_2、E_2、F_1、E_1.

例 3.4.2.5. 设P由一条带有尖点的三次曲线和三条直线 $L_1+L_2+L_3$诱导，如下所示。通过吹起基点集$\{P_1, ..., P_9\}$，我们得到 π：构型为$(\mathrm{I}_2^*, \mathrm{III}, \mathrm{I}_1)$的 $X \to \mathbb{P}^1$。由定理 3.3.2， X 具有奇异纤维类型为 $A_{n\geq 3}$、 D_3、$D_{m\geq 4}$ 或 A_2的圆锥丛。我们构造一个奇异纤维类型为 A_3、 D_3、 D_5的圆锥丛。设Q为经过 P_1的直线铅笔。我们还定义 $L := L_2$、 $L' := L_3$ 和 $L'' := L_1$。

那么 $D := p^*L - E_1$、 $D' := p^*L' - E_1$ 和 $D'' := p^*L'' - E_1$ 是无基点铅笔 p^*有理数域 $- E_1$中的曲线，它诱导出圆锥丛$\varphi_{|D|}$： $X \to \mathbb{P}^1$。曲线 D、 D'、 D'' 分别是$\varphi_{|D|}$ 的 A_3、 D_3、 D_5 类型的纤维。



C：$x^3 + y^3 - y^2z = 0$.L_1：$y - z = 0$.L_2：$x = 0$.L_3：$y + 2x - z = 0$.L:= L_2.L' := L_3.L'' := L_1.P：由 C 和 $L_1 + L_2 + L_3$.诱导的三次曲线铅笔 Q：过 P_1.
$D = E_2 + L + E_3$的直线铅笔，类型 A_3.
$D' = E_4 + 2F_4 + L'$，类型 D_3.$D'' = 2I_1 + 2H_1 + 2G_1 +$ $(L'' + F_1)$，类型 D_5.收缩序列：$F_4, E_4, E_3, E_2, I_1, H_1, G_1,$ F_1, E_1.

第4章

截面交数的间隙

如第 3章中一样，令 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 为任意代数闭域 k上的一个有理椭圆曲面。我们提醒读者，在定理 3.3.2 的证明中，我们将条目 a) 留待本章处理。这涉及回答如下问题：哪些有理椭圆曲面存在一对截面 P_1, $P_2 \in E(K)$，使得 $P_1 \cdot P_2 = 1$? 答案见定理 4.7.8；在我们研究圆锥丛时，这还只是一个猜想，只有在更细致地研究了截面的交数之后才得以证明。这个引发研究的问题促成了对截面交数可能取值的更广泛研究，其结果汇集于本章。

我们需要的主要工具是 Mordell-Weil 格（第 2.7节），它由 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}$ 上的格结构构成，并且与 Néron-Severi 格密切相关。我们利用这样一个事实：关于 X 的 Mordell-Weil 格的所有可能情况已在 [OS91], 中分类。因此，高度配对的已知信息使我们能够获得关于 X的截面交数的信息。

采用这一策略时，我们常会遇到数论中的一个经典问题，即整数由正定二次型表示的问题。事实上，如果 $E(K)$ 的自由部分由 r 项生成，那么高度 $h(P)$: $=\langle P, P\rangle$ 会在 r 个变量上诱导出一个系数取自 $\mathbb{Q}$的正定二次型。若 $O \in E(K)$ 是中性截面，且 R 是 π的可约纤维集合，那么根据高度公式（2.3）

$$h(P) = 2 + 2(P \cdot O) - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P),$$

其中求和 v 是一个有理数，可以进行估算（表2.4）。清除分母后，我们发现， $P \cdot O$ 的可能取值取决于某个由系数属于 $\mathbb{Z}$的正定二次型表示的整数范围。

本章安排如下。在第4.1 节中，我们定义一些术语；第4.2 节专门解释挠截面在我们研究中的作用。本章的技术核心位于第4.3、4.4 和4.5节，我们在这些章节中找出$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 成为两个截面的交数的充要条件。第4.6 节列出所得到的全部充分条件。主要结果见第4.7节，具体包括：当 $E(K)$ 在 $r = 1$ 的条件下无挠时，间隙数的描述（第4.7.3小节）； $r \geq 5$的间隙数不存在（第4.7.1小节）；当 $r \leq 2$ 时，间隙数的密度（第4.7.2小节）；以及具有1间隙的曲面分类（第4.7.4小节）。我们利用第6 章的附录，获取有关 Mordell-Weil 格的所需信息。

4.1 间隙数

我们引入一些便于使用的术语，以表述是否可能找到一对具有给定交数的截面。

定义4.1.1。 若不存在截面 $P_1, P_2 \in E(K)$ 满足 $P_1 \cdot P_2 = k$，则称 X 有一个 k-间隙，或称 k 是 X 的一个间隙数 。

定义4.1.2。 若对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，都存在截面 $P_1, P_2 \in E(K)$ 满足 $P_1 \cdot P_2 = k$，则称 X 是无间隙的。

注4.1.3。 当 Mordell-Weil 秩为 $r = 0$ 时，有 $E(K) = E(K)_{\text{tor}}$。特别地，任意两个不同的截面互不相交 [SS19, Cor. 8.30], 因此，每个 $k \geq 1$ 都是 的一个间隙数。对于正秩情形，间隙数的描述不那么简单，因此我们重点关注 $r \geq 1$。

4.2 与挠截面的交

在讨论第4.3 节和4.4节中更技术性的细节之前，我们先说明挠截面如何有助于我们的研究。

我们先指出挠截面的一些一般性质。由于高度配对在 $E(K)/E(K)_{\text{tor}}$上正定，挠截面具有惰性，即对于每个 $Q \in E(K)_{\text{tor}}$ ，我们都有$\langle Q, P\rangle = 0$对所有 $P \in E(K)$成立。此外，在有理椭圆曲面的情形下，根据定理2.2.7，挠截面也恰好两两不相交。

利用上述性质，我们使用挠截面来帮助找到 $P_1, P_2 \in E(K)$ 使得 $P_1 \cdot P_2 = k$ 对于给定的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$成立。当 $\Delta \geq 2$时，这尤其有用；此时 $E(K)_{\text{tor}}$根据引理2.9.1并非平凡。

其思路如下。给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，假设我们可以找到 $P \in E(K)^0$ ，其高度为$h(P) = 2k$。根据高度公式（2.3）， $P \cdot O = k - 1 < k$，这还不是我们所需要的结果。在下一个引理中，我们将 O 替换为一个挠截面 $Q \neq O$ ，从而得到 $P \cdot Q = k$，正如所需。

引理 4.2.1。令 $P \in E(K)^0$ 满足 $h(P) = 2k$。则对所有 $Q \in E(K)_{tor} \setminus \{O\}$，均有 $P \cdot Q = k$。

证明。假设存在某个 $Q \in E(K)_{\text{tor}} \setminus \{O\}$。根据定理 2.2.7，$Q \cdot O = 0$，再由高度公式 (2.3)，$2k = 2 + 2(P \cdot O) - 0$，因此 $P \cdot O = k - 1$。我们对 $\langle P, Q \rangle$ 使用高度公式 (2.2)，从而得到 $P \cdot Q = k$。由于 $P \in E(K)^0$，，它与每个可约纤维 $\pi^{-1}(v)$ 的中性分支 $\Theta_{v,0}$ 相交，所以对于所有 $v \in R$，有 $\text{contr}_v(P, Q) = 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P, Q \rangle \\ &= 1 + P \cdot O + Q \cdot O - P \cdot Q - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P, Q) \\ &= 1 + (k-1) + 0 - P \cdot Q - 0 \\ &= k - P \cdot Q. \end{aligned}$$

□

4.3 必要条件

如果 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们将陈述存在 $P_1 \cdot P_2 = k$（其中截面为 P_1，$P_2 \in E(K)$）的必要条件。我们注意到，Δ 的取值在本节中并不相关，但对于第4.4节中的充分条件起着决定性作用。

引理 4.3.1. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若对于某个 P_1，有 $P_1 \cdot P_2 = k$ $P_2 \in E(K)$，则以下情况之一成立：

i) 对于某个 $P \in E(K)^0$，有 $h(P) = 2 + 2k$。

ii) 对于某个 $P \notin E(K)^0$，有 $h(P) \in [2 + 2k - c_{max},\, 2 + 2k - c_{min}]$。

证明. 不失一般性，可设 P_2 是中性截面，因此 $P_1 \cdot O = k$。由高度公式 (2.3)，$h(P_1) = 2 + 2k - c$，其中 $c := \sum_v \text{contr}_v(P_1)$。若 $P_1 \in E(K)^0$，，则 $c = 0$ 且 $h(P_1) = 2 + 2k$，故 i) 成立。若 $P_1 \notin E(K)^0$，，则根据引理 2.8.4，有 $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$。但 $h(P_1) = 2 + 2k - c$，因此 $2 + 2k - c_{\max} \leq h(P_1) \leq 2 + 2k - c_{\min}$，即 ii) 成立。 □

推论 4.3.2. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若对于某个 P_1，$P_1 \cdot P_2 = k$ $P_2 \in E(K)$，则 Q_X 表示 $[d \cdot (2 + 2k - c_{max})$ $d \cdot (2 + 2k)]$, 中的某个整数，其中 $d := \det E(K)^0$。

证明。我们应用引理 4.3.1，并用 Q_X 的术语重新表述。若 i) 成立，则根据引理 2.10.3，Q_X 表示$d \cdot ($ $2 + 2k)$。若 ii) 成立，则 $h(P) \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$，并且根据引理 2.10.3，$Q_X$ 表示 $d \cdot h(P)$ $\in [d \cdot (2 + 2k - c_{\max})$ $d \cdot (2 + 2k - c_{\min})]$。在 i) 和 ii) 两种情况下，$Q_X$ 都表示 $[d \cdot (2 + 2k - c_{\max})$ $d \cdot (2 + 2k)$]中的某个整数。 □

4.4 当 $\Delta \leq 2$ 时的充分条件

本节给出满足以下条件的充分条件：$P_1 \cdot P_2 = k$ 对于某个 P_1，$P_2 \in E(K)$假设 $\Delta \leq 2$。根据引理 2.9.1，这涵盖了几乎所有情况（更准确地说，除表 6.1中的第 41、42、59、60 号外的所有情况）。我们分别讨论 $\Delta < 2$ 和 $\Delta = 2$，因为后者需要更多关注。

4.4.1 $\Delta < 2$的情形

我们首先证明引理 4.4.1，它给出了在假设 $\Delta < 2$的情况下的充分条件；接着证明推论 4.4.3，它根据由 Q_X表示的整数给出了充分条件。随后是推论 4.4.4，它是推论4.4.3的简化版本。

引理 4.4.1. 假设 $\Delta < 2$，且令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。如果 $h(P) \in [2+2k-c_{max}, 2+2k-c_{min}]$ 对于某个$P \notin E(K)^0$, 成立，那么对于某个 P_1, $P_1 \cdot P_2 = k$ $P_2 \in E(K)$。

证明。令 $O \in E(K)$ 为中性截面。由高度公式（2.3），$h(P) = 2+2(P\cdot O) - c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$。由于 $h(P) \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min}]$，于是

$$2+2k-c_{\max} \leq 2+2(P\cdot O) - c \leq 2+2k-c_{\min}$$
$$\Rightarrow \frac{c-c_{\max}}{2} \leq P\cdot O - k \leq \frac{c-c_{\min}}{2}.$$

因此，$P\cdot O - k$ 是 $I := [\frac{c-c_{\max}}{2}, \frac{c-c_{\min}}{2}]$中的~~一个整数。我们~~证明 0 是$I$中唯一的整数，从而 $P\cdot O - k = 0$，即 $P\cdot O = k$。首先注意到 $c \neq 0$，因为 $P \notin E(K)^0$。根据引理 2.8.4 iii)，$c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$，因此 $\frac{c-c_{\max}}{2} \leq 0 \leq \frac{c-c_{\min}}{2}$，即 $0 \in I$。~~此外，~~ $\Delta < 2$ 意味着 I的长度为 $\frac{c_{\max}-c_{\min}}{2} = \frac{\Delta}{2} < 1$，所以 I 中除 0 外不含其他整数，~~于~~如所需。 □

注记 4.4.2。 引理 4.4.1同样适用于 $c_{\max} = c_{\min}$，此时闭区间退化为一个点。

下面这个引理 4.4.1 的推论，以二次型 Q_X （小节 2.10）所表示的整数为条件，给出了一个充分条件。

推论 4.4.3。 假设 $\Delta < 2$，且令 $d := \det E(K)^0$。若 Q_X 在区间 $[d\cdot(2+2k-c_{max})\ d\cdot(2+2k-c_{min})]$, 内表示一个不能被 d 整除的整数，那么对于某些 P_1、$P_2 \in E(K)$，有 $P_1\cdot P_2 = k$。

证明。令 $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$，使得 $Q_X(a_1, \ldots, a_r) \in [d\cdot(2+2k-c_{\max})\ d\cdot(2+2k-c_{\min})]$，其中 $d \nmid Q_X(a_1, \ldots, a_r)$。若 $P_1, \ldots, P_r$ 是 $E(K)$的自由部分的生成元，令 $P := a_1P_1 + \ldots + a_rP_r$。于是 $d \nmid Q_X(a_1, \ldots, a_r) = d\cdot h(P)$，这意味着 $h(P) \notin \mathbb{Z}$。特别地，$P \notin E(K)^0$，因为 $E(K)^0$是一个整数格。此外，$h(P) = \frac{1}{d}Q_X(a_1, \ldots, a_r) \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min}]$，由引理 4.4.1即可得证。 □

下面的推论虽然比推论 4.4.3弱，但对于具体例子更实用，并且在小节 4.7.4中经常用到。它不需要寻找由 Q_X表示的整数，只需在依赖于最小范数的区间内寻找完全平方数 μ (定义 2.7.10)。

推论 4.4.4。 假设 $\Delta < 2$。若存在完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$ 使得$n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1\cdot P_2 = k$。

证明。取 $P \in E(K)$ 使得 $h(P) = \mu$。由于 $h(nP) = n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，必有 $nP \notin E(K)^0$，因为 $E(K)^0$ 是整数格。此外 $h(nP) = n^2\mu \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min}]$，由引理4.4.1即可得证。 □

4.4.2 Δ=2 的情形

关于 $\Delta = 2$ 的充分条件表述与 $\Delta < 2$的表述几乎完全相同，唯一的区别是引理4.4.1 中的闭区间被引理 4.4.6中的右半开区间取代。然而，这一细微变化在贡献项最小的截面情形下会带来技术上的困难，因此需要单独处理 $\Delta = 2$。

结果按以下顺序给出。首先，我们证明一个关于具有最小贡献项的截面的命题（引理 4.4.5）。接着，我们给出充分条件，使得 $\Delta = 2$ 在引理4.4.6中成立，然后证明推论 4.4.7和 4.4.8。

引理 4.4.5。 假设 $\Delta = 2$。若存在 $P \in E(K)$ 使得 $\sum_{v\in R} \mathrm{contr}_v(P) = c_{\min}$，则$P\cdot Q = P\cdot$对每个 $Q \in E(K)_{tor} \setminus \{O\}$ 都成立。

证明。 若 $Q \in E(K)_{\mathrm{tor}} \setminus \{O\}$，则 $Q \cdot O = 0$ 由定理 2.2.7可得。根据高度公式（2.2），

$$0 = \langle P, Q\rangle = 1 + P \cdot O + 0 - P \cdot Q - \sum_v \mathrm{contr}_v(P, Q). \ (*)$$

因此，只需证明 $\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0 \ \forall v \in R$。根据引理 2.8.4 iv)，对某个 v'，有 $\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min}$；并且对所有 $v \neq v'$，有 $\mathrm{contr}_v(P) = 0$。特别地， P与 $\Theta_{v,0}$ 相交，因此对所有 $v \neq v'$，有 $\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0$。由（$*$）可知，$\mathrm{contr}_{v'}(P, Q)$ 是一个整数；我们将证明它为 0。

我们断言 $T_{v'} = A_1$，因此 $\mathrm{contr}_{v'}(P,\ Q) = 0$ 或 $1\,2$，由表 2.4 可知。在这种情况下，由于 $\mathrm{contr}_{v'}(P,\ Q)$ 是一个整数，它必为 0，结论得证。为说明 $T_{v'} = A_1$ ，我们分析 $\mathrm{contr}_{v'}(P)$。由于$\Delta = 2$，根据表 2.6，有 $c_{\min} = \frac{1}{2}$，且 $\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min} = \frac{1}{2}$。由表 2.4 可知，这仅在$T_{v'} = A_{n-1}$ 且 $\frac{1}{2} = \frac{i}{(n-i)\ n}$ 对某个 $0 \leq i < n$成立时才会发生。唯一的可能是 $i = 1, n = 2, T_{v'} = A_1$。 □

借助引理 4.4.5 ，我们可以陈述当 $\Delta = 2$。 时，存在某个 P_1，$P_2 \in E(K)$ ，使得 $P_1 \cdot P_2 = k$。的充分条件

引理 4.4.6. 假设 $\Delta = 2$ 且令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若 $h(P) \in [2 + 2k - c_{max}, 2 + 2k - c_{min})$ 对某个 $P \notin E(K)^0$，成立，则对某个 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。由高度公式 (2.3)， $h(P) = 2+2(P\cdot O)-c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$。我们重复引理 4.4.1 中的论证，在此情形下使用右半开区间，因此，假设 $h(P) \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min})$ 意味着 $P\cdot O-k$ 是 $I' := \left[\frac{c-c_{\max}}{2}, \frac{c-c_{\min}}{2}\right)$ 中的一个整数。

由于 I' 是长度为 $\frac{c_{\max}-c_{\min}}{2} = \frac{\Delta}{2} = 1$的半开区间，因此 I' 恰好包含一个整数。若$0 \in I'$，则 $P\cdot O - k = 0$，即 $P\cdot O = k$，结论得证。因此我们假设 $0 \notin I'$。

我们断言 $P\cdot O = k - 1$。首先注意，若 $c > c_{\min}$，则不等式 $c_{\min} < c \leq c_{\max}$推出 $\frac{c-c_{\max}}{2} \leq 0 < \frac{c-c_{\min}}{2}$，即 $0 \in I'$，这与之矛盾。因此 $c = c_{\min}$。由于 $\Delta = 2$，于是$I' = [-1, 0)$。从而 $P\cdot O - k = -1$，即 $P\cdot O = k - 1$，如所断言。

最后，令 $Q \in E(K)_{\mathrm{tor}} \setminus \{O\}$，于是 $P\cdot Q = P\cdot O + 1 = k$ 由引理 4.4.5 可得，结论得证。我们指出，根据表 2.6， $E(K)_{\mathrm{tor}}$ 并非平凡，因此存在这样的 Q 。 □

下面的推论是推论 4.4.3 和推论 4.4.4 针对 $\Delta = 2$所作的类比。与情形 $\Delta < 2$类似，推论 4.4.7 比推论 4.4.8更强，尽管后者在具体例子中更实用。提醒读者， μ 表示最小范数（定义 2.7.10）。

推论 4.4.7。 假设 $\Delta = 2$ 且令 $d :=$ 行列式 $E(K)^0$。如果 Q_X 表示区间 $[d\cdot(2+2k-c_{max})\ d\cdot(2+2k-c_{min}))$ 中不能被 d 整除的一个整数，那么 $P_1\cdot P_2 = k$ 对于某些 P_1、 $P_2 \in E(K)$成立。

证明。 我们重复推论4.4.3中的论证，这里使用半开区间。 □

推论 4.4.8. 假设 $\Delta = 2$。若存在完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right)$ 使得$n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。 我们重复推论 4.4.4中的论证，这里使用半开区间。 □

4.5 当 $\Delta \leq 2$ 时的充要条件

为求完整起见，我们给出一个统一的陈述，说明在假设 $\Delta \leq 2$ 的情况下，对于某些 P_1, $P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$ 的充要条件。这自然由第 4.3 节和 4.4 节的结果得出。

引理 4.5.1. 假设 $\Delta \leq 2$ 且令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$ 当且仅当以下条件之一成立：

i) $h(P) = 2 + 2k$ 对某个 $P \in E(K)^0$成立。

ii) $h(P) \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min})$ 对某个 $P \notin E(K)^0$成立。

iii) $h(P) = 2 + 2k - c_{\min}$ 且 $\sum_{v \in R} \operatorname{contr}_v(P) = c_{\min}$ 对某个 $P \in E(K)$成立。

证明。 若 i) 或 iii) 成立，则 $P \cdot O = k$ 可由高度公式（2.3）直接得到。但若 ii) 成立，只需在 $\Delta < 2$ 时应用引理 4.4.6 ，并在 $\Delta = 2$时应用

反过来，设 $P_1 \cdot P_2 = k$。不失一般性，可假设 $P_2 = O$，因此$P_1 \cdot O = k$。由高度公式（2.3）， $h(P_1) = 2 + 2k - c$，其中 $c := \sum_v \operatorname{contr}_v(P_1)$。

若 $c = 0$，则 $P_1 \in E(K)^0$ 且 $h(P_1) = 2+2k$，因此 i) 成立。于是令 $c \neq 0$，即 $P_1 \notin E(K)^0$，从而由引理 2.8.4 可得 $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$。若 $c = c_{\min}$，则 $h(P_1) = 2+2k-c_{\min}$，且 iii) 成立。否则 $c_{\min} < c \leq c_{\max}$，这意味着 $2 + 2k - c_{\max} \leq h(P_1) < 2 + 2k - c_{\min}$，因此 ii) 成立。 □

4.6 充分条件概要

为清晰起见，我们在一个命题中总结本章证明的所有满足$P_1 \cdot P_2 = k$ 的充分条件，其中 P_1, $P_2 \in E(K)$。

命题 4.6.1. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若以下条件之一成立，则对某个$P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

1) $h(P) = 2 + 2k$ 对于某个 $P \in E(K)^0$。

2) $h(P) = 2k$ 对于某个 $P \in E(K)^0$，且 $E(K)_{tor}$ 非平凡。

3) $\Delta < 2$ 且存在一个完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$ 满足 $n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，其中 μ 是最小范数（定义 *2.7.10*）。若 $\Delta = 2$，考虑右半开区间。

4) $\Delta < 2$ 且二次型 Q_X 在区间 $[d \cdot (2 + 2k - c_{max})\ d \cdot (2 + 2k - c_{min})]$中表示一个不能被 $d := \det E(K)^0$ 整除的整数。若 $\Delta = 2$，则考虑右半开区间。

证明。在 1) 中，高度计算给出 $2+2k=h(P)=2+2(P\cdot O)-0$，因此 $P\cdot O=k$。对于 2)，我们应用引理 4.4.5，得出对于任意 $Q\in E(K)_{\mathrm{tor}}\setminus\{O\}$，都有 $P\cdot Q=k$。在 3) 中，当 $\Delta<2$ 时我们使用推论 4.4.4，当 $\Delta=2$ 时使用推论 4.4.8。在 4) 中，若$\Delta<2$，则应用推论 4.4.3；若 $\Delta=2$，则应用推论 4.4.7。 □

4.7 应用

我们证明本章的四个主要定理，它们是对第 4.3 节和4.4节结果的独立应用。前两个定理试图一般性地描述间隙数在何时以及如何出现：定理 4.7.2 指出，较大的 Mordell-Weil 群会阻止间隙数的存在；更准确地说，当 Mordell-Weil 秩 $r\geq 5$时；在定理 4.7.4 中，我们证明，对于较小的 Mordell-Weil 群，更准确地说，当 $r\leq 2$时，间隙数出现的概率为 1。另一方面，后两个定理讨论间隙数的具体取值：定理 4.7.7完整描述了某些情形下的间隙数，而定理 4.7.8 则对所有存在 1-间隙的情形进行了分类。

4.7.1 在 $r\geq 5$ 中无间隙数

我们证明，若 $E(K)$ 的秩为 $r\geq 5$，则 X 无间隙。我们的策略是证明，对每个 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在某个 $P\in E(K)^0$，使得 $h(P)=2+2k$；由命题 4.6.1 1)，即可得证。我们分两步完成这一证明。首先，我们证明，当 $A_1^{\oplus}$ 或 A_4 嵌入到 $E(K)^0$ 中时，该结论成立（引理 4.7.1）。其次，我们证明，若 $r\geq 5$，则存在这样的嵌入，因此 X 无间隙（定理 4.7.2）。

引理 4.7.1。假设 $E(K)^0$ 含有一个同构于 $A_1^{\oplus 4}$或 A_4的子格。那么对每个 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在 $P\in E(K)^0$，使得 $h(P)=2\ell$。

证明。首先假设 $A_1^{\oplus 4}\subset E(K)^0$，并令 P_1、P_2、P_3、P_4 分别为 $A_1^{\oplus 4}$中每个因子 A_1 的生成元。于是 $h(P_i)=2$，且对于互不相同的 i、$j=1$、2、3、4，有 $\langle P_i,P_j\rangle=0$。由拉格朗日四平方定理 [HW79, §20.5]，存在整数 a_1、a_2、a_3、a_4，使得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=\ell$。定义 $P:=a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3+a_4P_4\in A_1^{\oplus 4}\subset E(K)^0$,，我们有

$$h(P)=2a_1^2+2a_2^2+2a_3^2+2a_4^2=2\ell.$$

现在令 $A_4\subset E(K)^0$，其生成元为 P_1、P_2、P_3、P_4。那么，对于 $i=1$、2、3、4，有 $h(P_i)=2$；对于 $i=1$、2、3，有 $\langle P_i,P_{i+1}\rangle=-1$。我们需要求出整数 x_1，……，x_4，使得 $h(P)=2\ell$，其中$P:=x_1P_1+\ldots+x_4P_4\in A_4\subset E(K)^0$。等价地，我们需要

$$\ell=\frac{1}{2}\langle P,P\rangle=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4.$$

因此 ℓ必须可由 $q(x_1,\ldots\ldots,x_4)$ 表示：$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4$。我们证明 q 表示所有正整数。注意，q 是正定的，因为它由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$诱导。根据 Bhargava-Hanke 的 290 定理 [BH][定理 1]，q 表示所有正整数，当且仅当它表示以下整数：

$$2,3,5,6,7,10,13,14,15,17,19,21,22,23,26,$$

$$29,30,31,34,35,37,42,58,93,110,145,203,290.$$

上述各项的表示见表4.1。 □

现在我们证明本截面的主定理。

定理 4.7.2。 若 $r \geq 5$，则 X 无间隙。

证明。 我们证明，对每个 $k \geq 0$，都存在 $P \in E(K)^0$，使得 $h(P) = 2 + 2k$，因此由命题 4.6.1 1)，结论成立。由引理 4.7.1 只需证明 $E(K)^0$ 含有一个与 $A_1^{\oplus 4}$或 A_4同构的子格。

满足 $r \geq 5$ 的情形为第 1–7 号（表 6.1）。在第 1–6 号中，$E(K)^0 = E_8$、E_7、E_6、D_6、D_5、A_5分别如此。它们各自都包含一个 A_4 子格 [Nis96，引理 4.2、4.3]。在第 7 号中，我们断言 $E(K)^0 = D_4 \oplus A_1$ 包含一个 $A_1^{\oplus 4}$子格。之所以如此，是因为 D_4 包含一个 $A_1^{\oplus 4}$子格[Nis96，引理 4.5 (iii)]。

□

n	x_1，x_2，x_3，x_4，其中 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 = n$
1	$1, 0, 0, 0$
2	$1, 0, 1, 0$
3	$1, 1, 2, 0$
5	$1, 0, 2, 0$
6	$1, 1, -2, -1$
7	$1, 1, -2, 0$
10	$1, 0, 3, 0$
13	$2, 0, 3, 0$
14	$1, 2, 5, 1$
15	$1, 5, 5, 2$
17	$1, 0, 4, 0$
19	$1, 5, 3, -1$
21	$1, 5, 0, 0$
22	$1, 5, 0, -1$
23	$1, 6, 6, 2$
26	$1, 0, 5, 0$
29	$2, 0, 5, 0$
30	$1, 5, 0, -3$
31	$1, 3, -4, -2$
34	$3, 0, 5, 0$
35	$1, 2, -2, 4$
37	$1, 0, 6, 0$
42	$1, 1, -4, 3$
58	$3, 0, 7, 0$
93	$1, 1, -10, 0$
110	$1, -2, 3, -8$
145	$1, 0, 12, 0$
203	$1, -5, -9, 8$
290	$1, 0, 17, 0$

表 4.1：Bhargava-Hanke 的 290 定理中临界整数的表示。

4.7.2 概率为1 的间隙（ $r \leq 2$中）

固定一个有理椭圆曲面 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$，其 Mordell-Weil 秩为 $r \leq 2$。我们证明，若 k 是均匀随机选取的自然数，则 k 以概率 1 是间隙数。更准确地说，若$G := \{k \in \mathbb{N} \mid k$ 是 $X\}$ 的间隙数集合，则 $G \subset \mathbb{N}$ 的密度为 1，即

$$d(G) := \lim_{n\to\infty} \frac{\#G \cap \{1, ..., n\}}{n} = 1.$$

我们采用以下策略。若 $k \in \mathbb{N} \setminus G$，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$，根据推论 4.3.2，二次型 Q_X 表示某个取决于 k的整数 t 。这定义了一个函数 $f\colon \mathbb{N} \setminus G \to T$，其中 T是由 Q_X表示的整数集合。由于 Q_X是一个关于 $r \leq 2$ 个变量的二次型，根据引理 4.7.3， T 在 $\mathbb{N}$ 中的密度为 0。通过分析 f的原像，我们在定理 4.7.4 中得出结论： $d(\mathbb{N} \setminus G) = d(T) = 0$，因此 $d(G) = 1$，如所求。

引理 4.7.3. 设 Q 是定义在 $r = 1$上的正定二次型，具有2 个变量，且系数为整数。则 Q 表示的整数集合在 $\mathbb{N}$中的密度为0 。

证明。令 S 为由 Q表示的整数集合。若 d 是 Q系数的最大公因数，令 S' 为本原型 $Q' := \frac{1}{d} \cdot Q$ 所能表示的整数集合。根据构造， S' 是 S的一个缩放，因此 $d(S) = 0$ 当且仅当 $d(S') = 0$。

若 $r = 1$，则 $Q'(x_1) = x_1^2$ 且 S' 是完全平方数集合，所以显然 $d(S') = 0$。若 $r = 2$，则 Q' 是一个二元二次型，而 S' 中不超过 $x > 0$ 的元素个数由 $C \cdot \sqrt{\frac{x}{\log x}} + o(x)$ 给出，其中 $C > 0$ 为常数，且 $\lim_{x\to\infty} \frac{o(x)}{x} = 0$ [Ber12，第 91]页。因此

$$d(S') = \lim_{x\to\infty} \frac{C}{\sqrt{\log x}} + \frac{o(x)}{x} = 0.$$

□

现在我们证明本节的主要结果。

定理 4.7.4. 设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是一个有理椭圆曲面，其 *Mordell-Weil* 秩为 $r \leq 2$。那么， X 的间隙数集合 $G := \{k \in \mathbb{N} \mid k$ 是 X的间隙数$\}$在 $\mathbb{N}$中的密度为 1 。

证明。若 $r = 0$，则所有截面都是挠截面，由定理 2.2.7 可知结论显然成立。假设 $r = 1, 2$。我们证明 $S := \mathbb{N} \setminus G$ 的密度为 0。若 S 是有限集，则无须证明。否则，令 $k_1 < k_2 < ...$ 为 S 中所有元素构成的递增序列。根据推论 4.3.2，对于每个 n，存在某个 $t_n \in J_{k_n} := [d \cdot (2 + 2k_n - c_{\max}) \; d \cdot (2 + 2k_n)]$，由二次型 Q_X 表示。令 T 为由 Q_X 表示的整数集合，并定义函数 $f\colon S \to T$ by$k_n \mapsto t_n$。由于 Q_X 有 $r = 1$ 个变量，根据引理 4.7.3， T 的密度为 0。

对于 $N > 0$，令 $S_N := S \cap \{1, ..., N\}$ 和 $T_N := T \cap \{1, ..., N\}$。由于 T 的密度为零，$\#T_N = o(N)$，即当 $N \to \infty$ 时$\frac{\#T_N}{N} \to 0$，我们需要证明 $\#S_N = o(N)$。我们分析函数 f 在 S_N 上的限制。注意，当 $t_n \in J_{k_n}$时， $k_n \leq N$ 蕴含 $t_n \leq d \cdot (2 + 2k_n) \leq d \cdot (2 + 2N)$。因此，限制 $g := f|_{S_N}$ 可视为函数 $g\colon S_N \to T_{d\cdot(2+2k)}$。

我们断言，对于所有 $t \in T_{d\cdot(2+2N)}$，$\#g^{-1}(t) \leq 2$，在这种情况下，$\#S_N \leq 2 \cdot \#T_{d\cdot(2+2N)} = o(N)$，于是得证。反设 $g^{-1}(t)$ 包含三个互不相同的元素，例如 $k_{\ell_1} < k_{\ell_2} < k_{\ell_3}$ 满足 $t = t_{\ell_1} = t_{\ell_2} = t_{\ell_3}$。由于对于每个 $i = 1、2、3$，$t_{\ell_i} \in J_{k_{\ell_i}}$，因此 $t \in J_{k_{\ell_1}} \cap J_{k_{\ell_2}} \cap J_{k_{\ell_3}}$。我们证明 $J_{k_{\ell_1}}$ 和 $J_{k_{\ell_3}}$ 不相交，这将导出矛盾。事实上，由于 $k_{\ell_1} < k_{\ell_2} < k_{\ell_3}$，特别是 $k_{\ell_3} - k_{\ell_1} \geq 2$，因此 $d \cdot (2 + 2k_{\ell_1}) \leq d \cdot (2 + 2k_{\ell_3} - 4)$。但根据引理 2.8.4， $c_{\max} < 4$，所以 $d \cdot (2 + 2k_{\ell_1}) < d \cdot (2 + 2k_{\ell_3} - c_{\max})$，即 $\max J_{k_{\ell_1}} < \min J_{k_{\ell_3}}$。因此 $J_{k_{\ell_1}} \cap J_{k_{\ell_3}} = \emptyset$，如所要求。

□

4.7.3 当 $E(K)$ 无挠且秩为 $r=1$ 时的间隙的确定

第 4.7.1 和 4.7.2 小节中的结果涉及间隙数的存在性及其分布。在接下来的小节中，我们将注意力转向显式求出间隙数。在本小节中，假设 $E(K)$ 是无挠的，且秩为 $r=1$，我们将完整描述间隙数。在一般情形下，这类描述较为困难，但我们的假设保证每个 $E(K)$ $E(K)^0$ 均由单个元素生成，并且根据 $\Delta<2$ 引理 2.9.1，这使问题更易于处理。

本小节安排如下。首先，我们指出关于 $E(K)$ $E(K)^0$ 在 $r=1$ 时的生成元的一些显然事实，见引理 4.7.5。接下来，我们在引理 $P_1\cdot P_2=k$ 中陈述当 $E(K)$ 无挠且 $r=1$ 时成立的充要条件，见引理 4.7.6。作为后者的应用，我们证明定理 4.7.7，这是本小节的主要结果。

引理 4.7.5。 设 X 是一个 *Mordell-Weil* 秩为 $r=1$的有理椭圆曲面。若 P 生成 $E(K)$的自由部分，则

a) $h(P)=\mu$.

b) $1/\mu$ 是偶整数。

c) $E(K)^0$ 由 $P_0:=(1/\mu)P$和 $h(P_0)=1/\mu$生成。

证明。 a) 项显然。b)、c) 项由以下事实推出： $E(K)^0$ 是一个偶格，并且$E(K)\simeq L^*\oplus E(K)_{\text{tor}}$，其中 $L:=E(K)^0$ [OS91，主定理]。 □

下文将利用引理 4.7.5 以及第 4.4 节的结果，给出存在 $P_1\cdot P_2=k$ 的充要条件，其中某个 P_1, $P_2\in E(K)$ 满足 $E(K)$ 无挠且秩为 $r=1$。

引理 4.7.6。 假设 $E(K)$ 无挠且秩为 $r=1$。那么，存在某个 $P_1,P_2\in E(K)$ 使得 $P_1\cdot P_2=k$，当且仅当以下条件之一成立：

i) $\mu\cdot(2+2k)$ 是完全平方数。

ii) 存在完全平方数 $n^2\in\left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu},\frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$，使得 $\mu\cdot n\notin\mathbb{Z}$。

证明。 由引理 4.7.5， $E(K)$ 由某个 P生成，其中 $h(P)=\mu$ 且 $E(K)^0$ 由以下元素生成：$P_0:=n_0P$，其中 $n_0:=\frac{1}{\mu}\in 2\mathbb{Z}$。

首先假设，对于某个 P_1,P_2，有 $P_1\cdot P_2=k$。不失一般性，可设 $P_2=O$。令 $P_1=nP$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。我们证明，$P_1\in E(K)^0$ 蕴含 i)，而 $P_1\notin E(K)^0$ 蕴含 ii)。

若 $P_1\in E(K)^0$, ，则 $n_0\mid n$，因此 $P_1=nP=mP_0$，其中 $m:=\frac{n}{n_0}$。由高度公式（2.3）， $2+2k=h(P_1)=h(mP_0)=m^2\cdot\frac{1}{\mu}$。因此 $\mu\cdot(2+2k)=m^2$，即 i) 成立。

若 $P_1\notin E(K)^0$, ，则 $n_0\nmid n$，从而 $\mu\cdot n=\frac{n}{n_0}\notin\mathbb{Z}$。此外， $h(P_1)=n^2h(P)=n^2\mu$，根据高度公式（2.3）， $n^2\mu=h(P)=2+2k-c$，其中 $c:=\sum_v\text{contr}_v(P_1)\neq 0$。不等式$c_{\min}\le c\le c_{\max}$ 进而给出 $\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu}\le n^2\le\frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}$。~~因此 ii) 成立。~~

反过来，假设 i) 或 ii) 成立。由于 $E(K)$ 是无挠的，根据引理 2.9.1， $\Delta<2$，因此我们可以应用引理 4.4.1。若 i) 成立，则对于某个 $m\in\mathbb{Z}$，有 $\mu\cdot(2+2k)=m^2$。由于 $mP_0\in E(K)^0$ 且 $h(mP_0)=\frac{m^2}{\mu}=2+2k$，由引理 4.4.1 i) 可得结论。若 ii) 成立，则条件 $\mu\cdot n\notin\mathbb{Z}$ 等价于 $n_0\nmid n$，因此 $nP\notin E(K)^0$。此外， $n^2\in\left[\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu},\frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}\right]$ 蕴含 $h(nP)=n^2\mu\in[2+\cancel{2k-c_{\max}},\cancel{2+2k-c_{\min}}]$。根据引理 4.4.1 ii)，结论成立。 □

将引理 4.7.6 应用于所有可能的情形，其中 $E(K)$ 无挠且秩为 $r=1$，即可得到本小节的主要结果。

定理 4.7.7. 若 $E(K)$ 是无挠的，秩为 $r=1$，则 X 的所有间隙数均可由表4.2描述。

No.	T	k 是间隙数 $\Leftrightarrow$均非以下完全平方数	前几个间隙数
43	E_7	$k+1,\ 4k+1$	$1,4$
45	A_7	$\frac{k+1}{4},\ 16k,\ \ldots\ldots,\ 16k+9$	8, 11
46	D_7	$\frac{k+1}{2},\ 8k+1,\ \ldots,\ 8k+4$	$2,5$
47	$A_6\oplus A_1$	$\frac{k+1}{7},\ 28k-3,\ \ldots\ldots,\ 28k+21$	12, 16
49	$E_6\oplus A_1$	$\frac{k+1}{3},\ 12k+1,\ \ldots,\ 12k+9$	$3,7$
50	$D_5\oplus A_2$	$\frac{k+1}{6},\ 24k+1,\ \ldots,\ 24k+16$	6, 11
55	$A_4\oplus A_3$	$\frac{k+1}{10},\ 40k-4,\ \ldots\ldots,\ 40k+25$	16, 20
56	$A_4\oplus A_2\oplus A_1$	$\frac{k+1}{15},\ 60k-11,\ \ldots,\ 60k+45$	22, 27

表 4.2：当 $E(K)$ 为无挠且其 $r=1$ 时的间隙数描述。

证明。 为简洁起见，我们只讨论第 55 号。其他情形的处理类似。这里 $c_{\max}=\frac{2\cdot 3}{5}+\frac{2\cdot 2}{4}=\frac{11}{5}$，$c_{\min}=\min\left\{\frac{4}{5},\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}$ and $\mu=1/20$.

根据引理 4.7.6, k 是一个间隙数，当且仅当 i) 和 ii) 均不成立。条件 i) 是 $\frac{2+2k}{20}=\frac{k+1}{10}$ 是一个完全平方数。条件 ii) 是 $\left[\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu},\frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}\right]=[40k-4,40k+25]$ 包含某个 n^2 满足 $20\nmid n$。我们验证，对于每个 $20\nmid n$，只要 n，就有 $n^2=40k+\ell$，其中 $\ell=-4,\ldots,25$。事实上，若 $20\mid n$，则 $400\mid n^2$，尤其是 $40\mid n^2$。于是 $40\mid(n^2-40k)=\ell$，这显然荒谬。 □

4.7.4 具有1个间隙的曲面

在小节 4.7.3 中，我们逐一考察表 4.2 中的每种情形，并描述其所有间隙数。本小节则反其道而行之：固定一个数，并描述所有以它为间隙数的情形。提醒读者，我们最初的问题是确定何时存在截面 P_1,P_2 使得 $P_1\cdot P_2=1$，由此诱导出一个圆锥丛，且 P_1+P_2 是其可约纤维。这个问题的答案就是本小节的主定理：

定理 4.7.8. 设 X 是一个有理椭圆曲面。那么， X 有一个1间隙，当且仅当 $r=0$ 或$r=1$，且 π 有一个$Ш^*$ 纤维。

我们的证明策略如下。我们已经知道，只要 1-间隙存在，$r = 0$（定理 2.2.7）或者在 $r = 1$ 且 π 有一个 III* 纤维时（定理 4.7.7，第 43 号）。反过来，我们需要找到 P_1，P_2，使得 $P_1 \cdot P_2 = 1$ 在所有满足 $r \geq 1$ 和 $T \neq E_7$ 的情形下成立。

首先我们介绍两个引理，它们只需少量计算即可解决大多数情形，并将剩余情形留待定理4.7.8的证明。在引理4.7.9和引理4.7.11 中，我们的目标是分析窄格 $E(K)^0$，并应用命题4.6.1 来检测不存在1-间隙的情形。

Le引理 4.7.9。 若下列条件之一成立，则对于某个 $P \in E(K)^0$，有 $h(P) = 4$.

a） $E(K)^0$ 的格拉姆矩阵的主对角线上有一个4 。

b）存在将 $A_n \oplus A_m$ 嵌入到 $E(K)^0$ 中的嵌入，其中 n、$m \geq 1$为某些元素。

c）对于某个 $n \geq 3$，存在将 A_n、D_n 或 E_n 嵌入到 $E(K)^0$ 中的嵌入。

证明。情形 a）是平凡的。在假设 b）的情况下，我们分别从 A_n、A_m 中取生成元 P_1、P_2，使得$h(P_1) = h(P_2) = 2$。由于 A_n、A_m属于直和，$\mathbf{h}P_1, P_2\mathbf{i} = 0$，因此 $h(P_1 + P_2) = 4$，如所要求的。若 c）成立，则由 $n \geq 3$ 这一事实，我们可以在 $L_1 = A_n$、D_n 或 E_n 的生成元中选取两个元素 P_1、P_2，使得 $h(P_1) = h(P_2) = 2$ 且 $\mathbf{h}P_1, P_2\mathbf{i} = 0$。于是 $h(P_1 + P_2) = 4$，结论得证。□

推论 4.7.10. 在以下情形中，X 没有1-间隙。

- $r \geq 3$： 除第 20 号外的所有情形。
- $r = 1$，2：情形 第 25、26、30、32–36、38、41、42、46、52、54、60 号。

证明。 我们查看表 $E(K)^0$ 中的第 6.1 列，以找出哪些情形满足引理4.7.9中的条件 a）、b）、c）之一。

a) 适用于第 12、17、19、22、23、25、30、32、33、36、38、41、46、52、54、60 号情形.

b) 适用于第 10、11、14、15、18、24、26、34、35、42 号情形。

c) 适用于第 1–10、13、16、21 号。

特别是，这涵盖了所有 $r \geq 3$ (第 1–24 号)的情形，但第 20 号除外。根据引理 4.7.9 ，在这些情形中，每种情况都有 $P \in E(K)^0$ 满足 $h(P), = 4$ 因此由命题 4.6.1 1) 即可得证。□

在下一个引理中，我们还将分析 $E(K)^0$ ，以找出没有 1-间隙的曲面。

引理 4.7.11。 假设 $E(K)^0 \simeq A_n$ 对某个 $n \geq 1$ 成立，并且 $E(K)$ 具有非平凡挠部分。那么 X 没有 1-间隙。此结论适用于表 6.1中的第 *28*、*39*、*44*、*48*、*51*、*57*、*58* 号。

证明。 取一个生成元 P属于 $E(K)^0$，使得 $h(P), = 2$ 并应用命题 4.6.1 2)。□

我们已经可以证明本小节的主要结果了。

定理的证明 *4.7.8.* 我们需要证明，在所有满足 $r \geq 1$ 和 $T \neq E_7$ 的情形下，都存在$P_1, P_2 \in E(K)$ 使得 $P_1 \cdot P_2 = 1$. 这对应于表 6.1 中除第 43 号以外的第 1–61 号情形。

满足 $r = 1$ 和 $E(K)$ 无挠的情形可由定理 4.7.7 解决，即第 45–47、49、50、55、56 号情形。将这些情形与推论 4.7.10 和引理 4.7.11 中处理的情形合并，我们因此解决了以下问题：

$$\text{No. } 1\text{-}19,\ 21\text{-}26,\ 28,\ 30,\ 32\text{-}36,\ 38,\ 39,\ 41\text{-}52,\ 54\text{-}58,\ 60.$$

对于剩余情形，我们应用命题 4.6.1 3)，这需要在区间 $\left[\frac{4-c_{\max}}{\mu}, \frac{4-c_{\min}}{\mu}\right]$ 中寻找完全平方数（见表 4.3），并在满足$\Delta = 2$ 的情形下考虑半开区间（第 53、61 号）。

No.	T	$E(K)$	μ	I	$n^2 \in I$
20	$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_2^* \oplus \langle 1/6 \rangle$	$\frac{1}{6}$	$[13, 23]$	4^2
27	E_6	A_2^*	$\frac{2}{3}$	$[4, 4]$	2^2
29	$A_5 \oplus A_1$	$A_1^* \oplus \langle 1/6 \rangle$	$\frac{1}{6}$	$[12, 21]$	4^2
31	$A_4 \oplus A_2$	$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{15}$	$[16, 21]$	4^2
37	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_1^* \oplus \langle 1/12 \rangle$	$\frac{1}{12}$	$[22, 28]$	5^2
40	$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/6 \rangle^{\oplus 2}$	$\frac{1}{6}$	$[10, 21]$	4^2
53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{1}{6}$	$[9, 12]$	3^2
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/12 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{1}{12}$	$[16, 42]$	$4^2, 5^2, 6^2$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{1}{6}$	$[9, 12]$	3^2

表 4.3：区间 $I := \left[\frac{4-c_{\max}}{\mu}, \frac{4-c_{\min}}{\mu}\right]$ 中的完全平方数。

在第 59 号中，我们有 $\Delta > 2$，因此需要特别处理。设 $T = T_{v_1} \oplus T_{v_2} \oplus T_{v_3} \oplus T_{v_4} = A_3 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$。如果 P生成了 $E(K)$ 的自由部分，而 Q 生成了其挠子部分，那么$h(P) = \frac{1}{12}$且 $4P + Q$ 在 $\Theta_{v_1,2}, \Theta_{v_2,1}, \Theta_{v_3,1}, \Theta_{v_4,1}$ [Kur14][Example 1.7]处与可约纤维相交。根据表 2.4 和高度公式 (2.3),

$$\frac{4^2}{12} = h(4P + Q) = 2 + 2(4P + Q) \cdot O - \frac{2 \cdot 2}{4} - \frac{1 \cdot 2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

因此 $(4P + Q) \cdot O = 1$，如所需。 □

第5章

大幅秩跃升与希尔伯特性质

在本章中，k 表示一个数域，X 表示定义在 k 上、带有椭圆纤维化 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 且 Mordell-Weil 秩为 r （在 k上）的几何有理椭圆曲面。我们研究当 t 遍历 $t \in \mathbb{P}^1_k$ 时，纤维 $\pi^{-1}(t)$ 的 Mordell-Weil 秩 r_t （在 k上）相对于一般秩 r 的变化，并称若 $r_t > r$，则发生了秩跃升 。我们介绍文献中采用的一些方法，解释其局限性以及我们如何调整这些方法，以证明本章的主定理，即

定理 5.0.1. 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在某个数域上的几何有理椭圆曲面k ，其一般秩为 r。假设 π 具有一个 *RNRF* 圆锥曲线丛（定义 *5.2.2*）。那么，椭圆纤维化的基底子集

$$\{t \in \mathbb{P}^1_k \mid r_t \geq r + 3\} \subset \mathbb{P}^1_k$$

不是薄的（定义 *2.4.1*）。

我们研究的出发点是 Silverman 的一个特化定理 [Sil83，定理 C]，该定理指出 $r_t \geq r$ 除有限多个 $t \in \mathbb{P}^1_k$外。我们指出，这一结果是 Néron 的一个更一般定理的发展 [Né52，定理 6]，该定理针对高维基底，指出除基曲线的一个薄子集（见定义2.4.1）之外，秩至少为一般秩。有鉴于此，我们自然要问：发生秩跃升的纤维集合具有什么性质?

处理这一问题的技巧包括：研究族中根数的变化（最早由 Rohrlich 开展） [Roh93]；采用 Billard 所做的高度理论估算 [Bil98]以及几何技巧，更确切地说是 Néron 引入的基变换 [Né52]。

根数方法的一项重大局限是，它依赖 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想；即使接受这一假设，也只能局限于 $\mathbb{Q}$ ，因为一般而言，函数方程在数域上的成立仍属猜想。至于高度理论的运用，往往也只能局限于 $\mathbb{Q}$，因为高度理论工具的许多性质仅在有理数域上得到证明。另一方面，几何技巧通常允许基域有更大的灵活性，已有多位作者采用这些技巧，例如 [Shi91、Sal12、Sal15、HS19、CT20]

我们来介绍 Néron几何方法。他在 [Né56, §5] 中的目标是从 X 出发，其一般秩为8 ，构造一个椭圆曲面 $f\colon\ Y \to C$ 使得 Y 是6 次 X 覆盖，且其一般秩至少为 $11 = 8 + 3$。更准确地说，椭圆纤维化 $\pi\colon\ X \to \mathbb{P}^1$ 与 $f\colon\ Y \to C$ 由以下交换图关联。

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle 6:1}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

通过应用 Néron 专化定理， f 这一事实： $Y \to C$ 的秩至少为 11，意味着 π 存在无穷多个秩至少为 $11 = 8 + 3$的纤维，因此秩跃升了 3。 Y 的构造是通过在 X（定义 2.1.4）中取三个有理双截面 L_1、 L_2和 L_3 来完成的，使得对 $\pi\colon\ X \to \mathbb{P}^1$ 进行 $C\colon = L_1 \times_{\mathbb{P}^1} L_2 \times_{\mathbb{P}^1} L_3$ 的基变换后得到新的纤维化 $f\colon\ Y \to C$；他证明该纤维化拥有 3 个新的独立截面。这一构造的一个关键特征是，基底 $L_i \to \mathbb{P}^1$ 的态射共享一个分歧点，因此曲线 $L_1 \times_{\mathbb{P}^1} L_2 \times_{\mathbb{P}^1} L_3$ 的亏格为 1。

Salgado 在 [Sal12] 时对这一技术作了推广， X 是任意一个允许在 k上具有圆锥丛的有理椭圆曲面 L_i 。与 Néron 的构造相比，一个关键区别在于，曲线不必被明确给出。相反，她针对椭圆曲面给出了一个更一般的结果：相对于线性系中的曲线进行基变换后，秩会严格增大：

定理 5.0.2。 *[Sal12，推论 4。3]* 设 $f\colon S \to C$ 是数域上的椭圆曲面，且 $\mathscr{L}$是 S上的一个曲线铅笔，其中不包含 f的纤维。那么，除有限多个 $D \in \mathscr{L}$外，基变换后的纤维化 $S \times_C D \to D$ 的一般秩严格大于 $f\colon S \to C$。

然而，这种构造的一个缺点是，映到基底 $D \to \mathbb{P}^1$ 的态射在 Néron 的构造中起到 $L_i \to \mathbb{P}^1$ 的作用，但它们不一定有共同的分歧点。在这种情形下， $D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2$ 的亏格可能已经是 1，这将基变换的次数限制为 2。因此，我们只能得出秩至少跃升 2，而不能得出跃升 3；这正是 [Sal12] 和 [LS22]中的情形。克服这一困难的一种方法是考虑具有特定分歧性质的圆锥丛，我们称之为 ***RNRF***圆锥丛 （即 在非约化纤维处分歧，定义 5.2.2），借此可以检测至少跃升3的秩跃升。

此外，我们希望研究秩至少跃升 3 的纤维集合的结构。鉴于 Néron 专化定理，自然会问这个集合是否为薄集。在 Néron 的构造中，当秩跃升 3 时，曲线 L_i 具有刚性，这意味着该集合是薄集。另一方面，在 Salgado 的构造中， [Sal12], 中的曲线铅笔带来了更大的秩跳跃集合，后来与 Loughran 合作证明，该集合并非 薄集 [LS22]。结合 [Sal12]中的技巧与 [LS22], 后续的发展，我们得到了定理 5.0.1，并将在本章中证明它。

本章安排如下。在第 5.1 节，我们探讨一些具有非约化纤维的有理椭圆曲面的性质。在第 5.2 节，我们介绍一种关键工具，即$RNRF$ 圆锥丛，并展示其构造。第 5.3节讨论考虑非约化纤维的必要性，并引出第 5.4节主定理的证明。最后，第5.5节给出一系列例子。

5.1 非约化纤维

定理 5.0.1 的核心假设是存在一个 *RNRF* 圆锥丛，即在非约化纤维处分歧的圆锥丛（定义 5.2.2）。我们所说的非约化，是指某个纤维至少有一个分支的重数为 ≥ 2；根据 Kodaira 分类（定理 2.1.8），这对应于星号型，即 $\mathrm{I}^*_{n\geq 0}$，II*，III*，IV*。本节针对 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 具有非约化纤维的情形，给出一些结果（命题 5.1.1，推论 5.1.2 和 5.1.3），并证明引理 5.1.5，该引理有助于第 5.2节中圆锥丛的构造。

我们首先考虑有理椭圆曲面的局部魏尔斯特拉斯形式，即

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \text{ where } a_i \in k(\mathbb{P}^1) \text{ for all } i.$$

Dokchitsers 的表2.1使我们可以轻易看出，在 $t = \infty$ 处具有非约化纤维（可能的 I^*_0 除外）的有理椭圆纤维化，存在一个映到 x 直线上的圆锥丛。更确切地说，有如下结果。

命题 5.1.1。 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在 k 上的有理椭圆曲面，具有一个位于 $t = \infty$ 处、 F 型且非约化的纤维，其中该纤维不属于 I_0^* 型。那么， X 存在如下形式的魏尔斯特拉斯方程

$$y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t), \quad \textit{with } \deg a_i \leq 2 \textit{ for all } i.$$

特别地， X 可通过投影到 x 直线而具有一个圆锥丛。

证明。 为了分析无穷远处纤维的行为，即 $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}^1$，我们将 X 的（长）魏尔斯特拉斯方程写成齐次系数形式：

$$y^2 + a_1(t,u)xy + a_3(t,u)y = x^3 + a_2(t,u)x^2 + a_4(t,u)x + a_6(t,u).$$

由于 X 是有理的，$\deg a_i(t,u) = i$。Dokchitser 等人的表 2.1 告诉我们，如果 F 是 IV*、Ш* 或 Ц* 类型，则 $v_\infty(\frac{a_i}{i}) \geq \frac{2}{3}$。因此，$\deg_u a_i \geq \frac{2i}{3}$ 或 $a_i = 0$，这立即将 a_1、a_2、a_3、a_4 和 a_6 关于变量 t 的次数上界限定为 2，正如所声称的那样。

还需检查对于满足 $n \neq 0$ 的 I^*_n 类型纤维，这一结论是否也成立。在这种情况下，Dokchitser 等人的表告诉我们， $v_\infty(\frac{a_i}{i}) \geq \frac{1}{2}$，且 $v_\infty(d) \geq 6$。前者意味着，对于 $i = 1,2,3$ 和 4，$\deg_t a_i(u,t) \leq 2$ 或 $a_i = 0$；后者则给出 $\deg_t a_6(u,t) \leq 2$，或 $a_6 = 0$。 □

推论 5.1.2. 设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在 k 上的几何有理椭圆曲面。假设π 具有唯一的非约化纤维。那么 X 是 k-单有理的。

证明. 我们应用 [KM17，定理 7] 到通过收缩零截面得到的曲面上，该曲面是次数为 1 的圆锥丛。 □

推论 5.1.3. 设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在 k 上的有理椭圆纤维化，具有一个类型不是 I^*_0 的非约化纤维。那么子集

$$\{t \in \mathbb{P}^1_k \mid r_t \geq r + 2\} \subset \mathbb{P}^1_k$$

不是薄集。

证明。 命题 5.1.1 使我们能够应用 [LS22，定理 1。1]。 □

备注 5.1.4。

i) 有理　　具有 2 个 I 型纤维的椭圆曲面$^*_0$ 已在 [LS22] 中单独处理　　.

ii) 遗憾的是，未必能使用命题 5.1.1 中的圆锥丛来证明秩跃升 3，这正是我们的主要目标。事实上，限制 π 到圆锥曲线上的映射具有公共分歧这一假设至关重要。根据 [LS22，引理 2。10],这种情况只可能发生在非约化纤维上。例 5.5.0.2 展示了一个具有 IV 型纤维* 的曲面，其圆锥丛在 x-直线上并未在非约化纤维处分歧。

下面的引理与第 5.2 节中圆锥丛的构造有关。它提供了一系列除子，可用于构成亏格 0 双截面的支集，其基底为 k。

引理 5.1.5。 设 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在 k 上的有理椭圆曲面，具有一个非约化纤维F，其分支 Θ_i 如表2.2所示。那么以下情形之一成立：

i) 若 $F = \mathrm{II}^*$ 或 III^*，则其所有分支都定义在 k 上。

ii) 若 $F = \mathrm{IV}^*$，则 Θ_0、Θ_1、Θ_2 定义在 k 上。其他分支定义在 k 的某个扩张上，该扩张的次数至多为 2。

iii) 若 $F = \mathrm{I}^*_n\ (n \geq 1)$，则 Θ_0、Θ_1 以及所有非约化分支都定义在 k 上。远端分支 Θ_2、Θ_3 定义在 k 的某个扩张上，该扩张的次数至多为 2。

iv) 若 $F = \mathrm{I}^*_0$，且 F 是 π的唯一可约纤维，则 Θ_0 和 Θ_4 定义在 k 上。其他分支定义在 k 的某个扩张上，该扩张的次数至多为 3。

证明。 纤维化 π 定义在 k 上，并且根据假设，其零截面 O也定义在该域上。伽罗瓦群 G:= Gal(k/k)作用于 Néron-Severi 群，并保持交叉重数。由于假设 F 是其类型中唯一的纤维， G 的元素会置换 F的分支。

特别是，共轭分支的存在意味着 F 的交图具有对称性。为使下文表述清晰并避免重复，我们将 G 在 Néron-Severi 群中的保交作用的一个直接推论作为事实陈述。下文称之为交点事实。

交点事实（I.F.）： 设 C、D、$E \subset X$ 是整曲线，其中 C 与 D 相交，但不与 E 相交。若 C 在 G 作用下稳定，则 D、 E 不可能共轭。

我们还注意到，由于 O 定义在 k 上（因此在 G作用下稳定），且与 Θ_0相交，因此 Θ_0必然在 G作用下稳定。现在我们用表 5.1中的记号分析 i)、ii)、iii)、iv)。

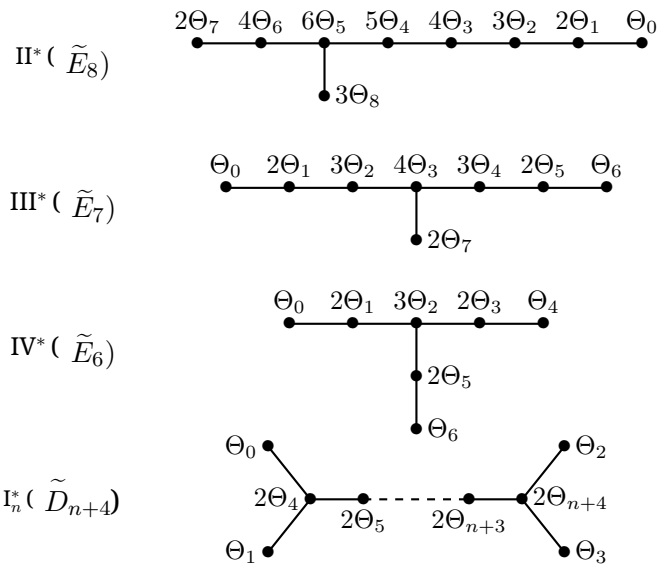


表 5.1： π 的非约化纤维

i) 设 $F =$II*。由于缺乏对称性， F 的每个分支都在 G作用下稳定，符合要求。现在设$F =$III*。由对称性可知， Θ_3、Θ_7 稳定，可能的共轭对为（Θ_0， Θ_6）、（Θ_1， Θ_5）、（Θ_2， Θ_4）。由于 Θ_0 稳定， Θ_6也稳定。我们对（C， D， E） $=$（Θ_0， Θ_1， Θ_5）使用 I.F.，从而Θ_1、Θ_5 稳定。于是对于（C， D， E） $=$（Θ_1， Θ_2， Θ_4），我们得出 Θ_2、Θ_4 稳定。

ii) 设 $F =$ IV*。由对称性， Θ_2 是稳定的，可能的 G-轨道为 $(\Theta_0, \Theta_4, \Theta_6)$ 和 $(\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5)$。由于 Θ_0 是稳定的，因此 Θ_4, Θ_6 可能互为共轭元；此时二者都定义在某个满足 $[L:\ k] \leq 2$ 的 L/k 上。对 $(C, D, E) = (\Theta_0, \Theta_1, \Theta_3)$ 应用 I.F.，再对 $(C, D, E) = (\Theta_0, \Theta_1, \Theta_5)$ 应用 I.F.，由此得出 Θ_1 是稳定的，并且 (Θ_3, Θ_5) 可能构成一个轨道。此时， Θ_3, Θ_5 定义在某个满足 $[L:\ k] \leq 2$ 的 L/k 上。

iii) 设 $F =$ I*$_{n\geq 1}$。由对称性，以下对可能构成 G-轨道：(Θ_i, Θ_{n+j})，其中 Θ_i, Θ_{n+j} 分别是 F 和 $i + j = 8$ 中重数为 2 的分支。由于 Θ_0 是稳定的，我们对 $(C, D, E) = (\Theta_0, \Theta_4, \Theta_{n+4})$ 应用 I.F.，得出 Θ_4, Θ_{n+4} 是稳定的。现在对 i使用归纳法：假设 Θ_i 是稳定的，并对带有$j + i = 8$的 $(C, D, E) = (\Theta_i, \Theta_{i+1}, \Theta_{n+j+1})$ 应用 I.F.，由此得出 $\Theta_{i+1}, \Theta_{n+j+1}$ 是稳定的，因此所有重数为 2 的分支都是稳定的。剩下的是 Θ_2, Θ_3。由对称性，$(\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ 可能构成一个轨道。但 Θ_0, Θ_4是稳定的，因此 Θ_2, Θ_3 可能互为共轭元，故二者都定义在某个满足 $[L:\ k] \leq 2$ 的 L/k 上。

iv) 设 $F =$ I*$_0$。由对称性， Θ_4 稳定，且（Θ_0， Θ_1， Θ_2， Θ_3）是一个可能的 G-轨道。但 Θ_0 稳定，因此 Θ_1， Θ_2， Θ_3 可能是共轭元，三者都定义在某个满足 $[L:\ k] \leq 3$ 的 L/k 上。 □

5.2 在非约化纤维处分歧的圆锥丛（RNRF）

我们引入一种圆锥丛，其性质是椭圆纤维化在所有圆锥曲线上的限制共享一个分歧点；它们是证明定理 5.0.1 的主要工具。

我们先定义一个在 处分歧的多截面，位于纤维 $\pi:\ X\to\mathbb{P}^1$，由此引出本章的核心对象，即*RNRF* 圆锥曲线丛。提醒读者，存在一个以 k 为底的圆锥丛，等价于存在一个亏格为 0 且以 k 为底的双截面（由引理 2.3.5可知）。

定义 5.2.1. 设 $C\subset X$ 是一个多截面 $\pi:X\to\mathbb{P}^1$。若有限态射 $\pi|_C:C\to\mathbb{P}^1$ 在 t处分歧，则称 C 在纤维 $\pi^{-1}(t)$处分歧。

定义 5.2.2. 设$\varphi_{|D|}:\ X\to\mathbb{P}^1$ 是由双截面 $D\subset X$诱导的圆锥丛。若 π有唯一的非约化纤维 F，且 D 在F处分歧，则称其为*RNRF* 圆锥曲线丛。等价地，若每个 $C\in|D|$都与 F的一个非约化分支横截相交。缩写$RNRF$ 代表在非约化纤维处分歧。

RNRF圆锥丛自然出现在具有非约化纤维的有理椭圆曲面上。以下结果表明，无论非约化纤维的类型如何，在 k 上都存在这类圆锥丛，无须任何额外假设；同时给出了在其余构型中这类圆锥丛存在的条件。

命题 5.2.3. 设 $\pi:X\to\mathbb{P}^1$ 是 k上的有理椭圆曲面。假设以下条件之一成立：

1. 它有一个类型为 $\mathrm{II}^*,\mathrm{III}^*$ 或 I_n^* 的纤维，其中 $n\in\{2,3,4\}$。 *2.* 它有一个类型为 IV^* 或 I_m^*的纤维，其中 $m\in\{0,1\}$，并且还有一个可约约化纤维。 *3.* 它有一个类型为 IV^* 的纤维，以及一个定义在 k上的非平凡截面。 *4.* 它有一个类型为 I_1^* 的纤维，以及一个定义在 k 上的非平凡截面，该截面与近端分支相交。 *5.* 它有一个类型为 I_1^* 的纤维，以及两个互不相交且在 $Gal(k/k)$作用下互为共轭的截面。 *6.* 它有 *2* 个类型为 I_0^* 的纤维，以及一个定义在 k上的非平凡 *2*-扭截面。

–

那么 X 在 k 上存在一个 *RNRF* 圆锥曲线丛。

证明。 对于定理假设中列出的每一种可能构型，我们给出一个有效除子 D，它定义在 X 上（见表 5.2），使得 $D^2=0,\ \ D\cdot F=2$，并且每个 $D'\in|D|$都与 F 的一个非约化分支相交。此外，根据引理 5.1.5，除子 D 定义在k上，即在 Gal 的作用下保持不变(k/k)。

要证明 $\pi|_D:\ D\to\mathbb{P}^1$ 在 F上分歧，只需注意到每个构造出的 D都与 F 交于一个非约化分支。 □

注记 5.2.4。

i) RNRF 圆锥曲线丛中的圆锥曲线具有如下区别。通常，对有理椭圆曲面作二次基变换会得到一个 K3 曲面。如果基变换在光滑纤维处分歧，这一结论成立；即使基变换在约化奇异纤维处分歧，只要考虑基变换后曲面的消解奇异点，这一结论仍然成立。另一方面，如果二次基变换在非约化纤维处分歧，那么通过欧拉数计算可以证明，基变换后的曲面仍然是有理曲面（见引理 5.2.5）。

ii) 关于具有 IV 型纤维的曲面所需满足的附加条件，自然会引发疑问*，I_1^*，I_0^*。可以证明，具有此类纤维构型的曲面总是允许一个以 k为底的圆锥丛。尽管如此，这样的圆锥丛不一定是 RNRF 圆锥丛。值得注意的是，另一方面，具有$2\mathrm{I}_0^*$ 的等变有理曲面允许一个 RNRF 圆锥丛。在这种特定情形下，它称为 Châtelet 丛（见 [LS22，引理 3。3]），因为它们是将 π的截面吹下后，在 Châtelet 曲面上得到的圆锥丛。不过，它们对我们的目的毫无帮助，因为所有纤维都在同一组2 个非约化纤维上分歧；这就没有留下足够的自由度，以便在验证秩跃升发生于一个非薄子集上时避开某些覆盖。

下面的结果说明了研究有理椭圆曲面上的 RNRF 圆锥曲线丛的合理性。它告诉我们，对 RNRF 圆锥曲线丛中的双截面进行基变换后，有理椭圆纤维化仍然是有理椭圆纤维化。这使我们能够将 [LS22，定理 1。1] 应用于基变换后的有理椭圆曲面，从而实现更高的秩跃迁。

引理 5.2.5。 设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是一个仅有一个非约化纤维 F的有理椭圆曲面。设$D \subset X$ 是一个亏格为 0 且在 F处分歧的双截面，并设 X_D 是基变换曲面的正规化。那么 X_D 是一个有理椭圆曲面，且 $|D|$在 X_D上诱导出一个圆锥丛。

证明。 设 $\varphi := \pi|_D\colon D \to \mathbb{P}^1$ 是基变换映射。曲线 D 是有理曲线，因此由 Hurwitz 公式 φ 有两个分歧点。根据假设，这两个点分别对应于 F 和另一个约化纤维。通过考察有理椭圆曲面上可能出现的奇异纤维 [Per90]， F 是以下情形之一：

$$\mathrm{I}_n^* \text{ with } 0 \le n \le 4,\ \mathrm{II}^*,\ \mathrm{III}^* \text{ or } \mathrm{IV}^*.$$

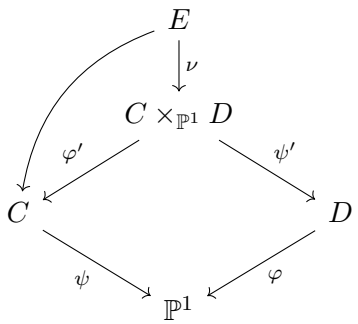
由 φ 的分歧可知，在 X_D 上方的 F 中恰有一个纤维。检查表 2.3 可确认欧拉数呈现如下规律： $e(F') = 2\,e(F) - 12\,(*)$。

此外，若 G 是 π 中不同于 F 的任意奇异纤维，我们断言 $\sum_{G'} e(G') = 2e(G)\,(**)$，其中 G' 遍历 X_D 在 G 上方的纤维（由于 φ 的次数为 2， G' 至多有 2 种可能）。事实上，若 G 没有相应的分歧，则有两个与 G 同构的纤维 G'_1、G'_2，因此 $e(G'_1) + e(G'_2) = 2\,e(G)$。若发生分歧，则 G' 只有一种可能；根据表 2.3，在所有情况下均有 $e(G') = 2\,e(G)$。这就证明了 $(**)$。

我们通过验证 X_D 是有理的来证明 $e(X_D) = 12$，并应用引理 2.2.4。由于X 是有理的，因此 $e(X) = 12$，结合 (∗)、(∗∗) 可得

$$\begin{aligned} e(X_D) &= e(F') + \sum_{G' \neq F'} e(G') \\ &= e(F') + \sum_{G \neq F} \sum_{G'} e(G') \\ &= 2\,e(F) - 12 + 2 \sum_{G \neq F} 2\,e(G) \\ &= 2\,e(X) - 12 \\ &= 12, \end{aligned}$$

如所需。为了证明 $|D|$ 在 X_D上诱导出一个圆锥丛，任取一个 $C \in |D|$，并令 $\psi := \pi|_C \colon C \to \mathbb{P}^1$。如 φ 中所述，映射 ψ 有 2 个分歧点。令 $\nu \colon X_D \to X \times_{\mathbb{P}^1} D$ 为正规化映射，$E \subset X_D$ 为 $C \times_{\mathbb{P}^1} D$ 在 ν 下的严格变换。我们证明 E 是光滑的亏格 0 曲线，从而 $|E|$ 在 X_D 上诱导出一个圆锥丛。我们有如下图表:



$C \times_{\mathbb{P}^1} D$的奇点是点（$c$，$d$）$\in C \times D$，满足 ψ，φ分别在 c，d处分歧。这些点也是 $X \times_{\mathbb{P}^1} D$ 的奇点，而 ν消除了这些奇点，因此 E 是光滑的。由于 φ 的次数为 2，因此 $E \to C$ 的次数为 2，并且有 2 个分歧点，即 ψ 发生分歧的点。由 Hurwitz 公式，g（E）$= 0$，如所要求。

□

5.3 RNRF 与多重基变换

在 [Sal12] 和 [LS22], 中，作者通过 2 次圆锥丛中曲线的基变换，证明秩至少跃升 2。基变换后纤维化的最终基底是一条具有正 Mordell-Weil 秩的椭圆曲线。人们很容易想到进行第三次基变换，以进一步增加秩跃升。不幸的是，这在如此一般的情形下无法实现。事实上，第三次基变换后新基底的亏格至少为 2。特别地，由法尔廷斯定理，基曲线将只有有限个 k-点 [Fal83]。

另一方面，具有非约化纤维的有理椭圆曲面允许进行一系列三次基变换，最终得到亏格为 1 的基曲线。对曲面施加进一步的假设后，我们可以证明这条亏格为 1 的曲线是一条具有正 Mordell–Weil 秩的椭圆曲线。事实上，引理5.2.5 保证，首先通过一个 RNRF 圆锥曲线丛进行基变换，会得到一个仍为有理曲面、并且还具有圆锥丛的曲面。换言之，它具有一个算术亏格为 0 的双截面，正如 [LS22，定理 2] 中的假设所要求的那样。接着可以将后者作为起点，并应用 [LS22，定理 2] 得出结论。下一节将对此作详细说明。

5.4 秩跃升三次

本节中，我们利用一个具有唯一的非约化纤维的有理椭圆曲面上的 RNRF 圆锥曲线丛，证明使 Mordell–Weil 秩至少达到一般秩加 3 的纤维集合，作为纤维化基底的子集并非薄集。

在本节中，$\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个具有唯一的非约化纤维 F 的几何有理椭圆曲面，而 D 是 π 的双截面，使得 $|D|$ 是一个 RNRF 圆锥曲线丛。

令 $\psi_i : Y_i \to \mathbb{P}^1$，对于 $i \in I$，为一组任意的、次数为 ≥ 2 的有限态射，如第 2.4 节末尾的讨论所述。我们的目标是证明存在一条曲线 $X \supset C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$满足：

1. $C(k)$ 是无限集；
2. $\operatorname{rank}(X \times_{\mathbb{P}^1} C)(k(C)) \geq r + 3$；3. $\exists P \in \varphi(C(k)) \subset \mathbb{P}^1(k)$，使得 $P \notin \bigcup_i \psi(Y_i(k))$。

引理 5.4.1。假设 $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 有唯一的非约化纤维。那么对于所有 $D_1 \in |D|$，存在无穷多个对 $(D_2, D_3) \in |D| \times |D|$，使得 $D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2 \times_{\mathbb{P}^1} D_3$ 是一条亏格为 1 的曲线。

证明。对于给定的一个 D_1，只有有限多个 $D_2, D_3 \in |D|$ 使得 D_2 或 D_3 与 D_1有 2 个公共分歧点。我们排除这些情况。这 3 个二次扩张 $k(D_i)$ 彼此不同构，因为它们恰有一个公共分歧点。因此它们线性互素，且曲线 $C = D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2 \times_{\mathbb{P}^1} D_3$ 是几何整的。此外，关于公共分歧的假设意味着曲线 $D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2$ 的亏格为 0（见 [LS22，引理 5.2]）。设 $t, t_i \in \mathbb{P}^1(k)$ 是 $D_i \to \mathbb{P}^1$ 的两个分歧点，其中 t 是对应于非约化纤维的公共分歧点，且 $t_i \neq t_j$，对于 $i \neq j$。考虑二次态射ϕ：$D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2 \times_{\mathbb{P}^1} D_3 \to D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2$。则 ϕ 在 $t_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ 上方的四个点处分歧。直接应用 Hurwitz 公式可得，C 是一条亏格为 1 的曲线。

□

命题 5.4.2。 假设 $\pi\colon\ X \to \mathbb{P}^1$ 有唯一的非约化纤维，并令 $P = \{P_1, \cdots\ P_m\}$ 为 $\mathbb{P}^1_k$的有限子集。那么存在无穷多个 $D_1, D_2, D_3 \in |D|$ 使得：

a) $C : = D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2 \times_{\mathbb{P}^1} D_3$ 是在 k 上具有正 *Mordell-Weil* 秩的椭圆曲线；

b) $k(D_1) \otimes k(D_2) \otimes k(D_3)$ 与每个 $k(Y_i)$均线性互素；

c) $X_C \to C$ 的一般纤维的秩至少为 $r + 3$；

d) C 恰在 P_j 中的一个点上分歧。

证明。此证明类似于 [LS22，命题 4.1] 的证明。我们可以假设 P 包含 Y_i 的所有分支点以及 π 的奇异轨迹。因此，它包含 $|D|$ 中所有圆锥曲线的一个分歧点。我们将此点记为 P_1。按照 [LS22]，的做法，选取 D_1 和 D_2，使其属于一个无限集合，且椭圆纤维化 π_{12}：
$X_{D_1 \times_B D_2} \to D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2$ 的一般纤维的秩至少为 $r + 2$， $D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2(k)$ 无限，而 $X_{D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2}(k)$ Zariski 稠密；允许 D_3 在 $|D|$ 中变化，由引理 5.4.1 可得一族无限多个具有正 Mordell-Weil 秩、且为 π_{12} 双截面的椭圆曲线。根据定理 5.0.2，这些曲线中除有限多个外，都可用于基变换，从而得到一个椭圆曲面 $X_C \to C$，其 $C = D_1 \times_{\mathbb{P}^1} D_2 \times_{\mathbb{P}^1} D_3$ 且一般纤维的秩至少为 $r + 3$。

纤维化 π 有唯一的非约化纤维，因此在选取 D_1， D_2 和 D_3 时，排除有限条曲线后，我们可以假设 D_i没有在 π的其他奇异纤维处分歧，也不与 Y_i 共享分歧点，至多可能在 P_1处共享。由此证明了 d)。

□

以下结果与 [LS22，引理 55]平行。由于我们构造的圆锥丛中，其成员总是在一个非约化奇异纤维处分歧，因此需要重新证明该结果。幸运的是，这并不需要额外付出，因为定义在整体域上的椭圆纤维化至少有两个奇异纤维。

引理 5.4.3. 椭圆曲面 $X \times_{\mathbb{P}^1} C \to C$ 是非平凡的，即不同构于 $E \times C \to C$，其中 E 是一条椭圆曲线。

证明。 曲面 $X \to \mathbb{P}^1$ 是定义在整体域上的相对极小几何有理椭圆曲面。特别地，它至少有 2 个奇异纤维。因此，至少存在 1 个约化奇异纤维 F。由于我们选取 C时使得 $C \to \mathbb{P}^1$ 在 F处不分歧，因此将 F拉回到$X \times_{\mathbb{P}^1} C \to C$ 后得到的是一个奇异纤维。

□

我们已掌握证明主要结果所需的全部工具。

定理 5.0.1 的证明。我们选取命题 5.4.2 中的 C。根据构造，曲线 D_1、 D_2、 D_3 和 Y_i 都是光滑的，且相应的映射到 $\mathbb{P}^1$ 至多有一个分歧点。另一方面，映射 $C \times_{\mathbb{P}^1} Y_i \to C$在 $Y_i \to \mathbb{P}^1$的分歧点处分歧。直接应用黎曼–赫尔维茨公式可得 $g(C \times_{\mathbb{P}^1} Y_i) \geq 2$。特别地，由法尔廷斯定理， [Fal83],$C \times_{\mathbb{P}^1} Y_i(k)$ 是有限的。最后，我们运用命题 5.4.2 的 c) 部分，并将定理 5.0.2 应用于非常值椭圆曲面 $X \times_{\mathbb{P}^1} C \to C$。

□

5.5 例子

例 5.5.0.1。 设 X 是一个椭圆曲面，其魏尔斯特拉斯方程为

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t),$$

其中 deg $a(t)$ $b(t) \leq 1$ 以及 $a(t)$ 和 $b(t)$ 不同时为常数。于是， X 在无穷远处有一个非约化纤维。更准确地说：如果 deg $a(t)$ $= 1$，那么 X 有一个 III 型*纤维；如果 deg $a(t)$ $= 0$，那么 X 有一个 II 型*纤维。

曲面 X 在 x-直线上有一个 RNRF 圆锥曲线丛。在情形 ii) 下，这是该曲面上唯一的圆锥丛。对于这一情形，一个很好的几何描述如下。设 C 是一个定义在 k上的平面三次曲线，并且具有一个拐点 P。设 L 是于 P处与 C 相切的直线。我们考虑如下的平面三次曲线铅笔

$$uC + t(3L) = 0, \ (t : u) \in \mathbb{P}^1,$$

其基点集为非约化概形 $\{9P\}$。我们对其进行 9 次吹起，得到一个带有 II 型纤维的有理椭圆曲面*，该纤维位于无穷远处。其唯一的圆锥丛由经过 P的直线铅笔的严格变换给出。沿着吹起过程追踪可轻易看出，所有圆锥曲线都与 II 型纤维的唯一重分量相交* （图5.1）。

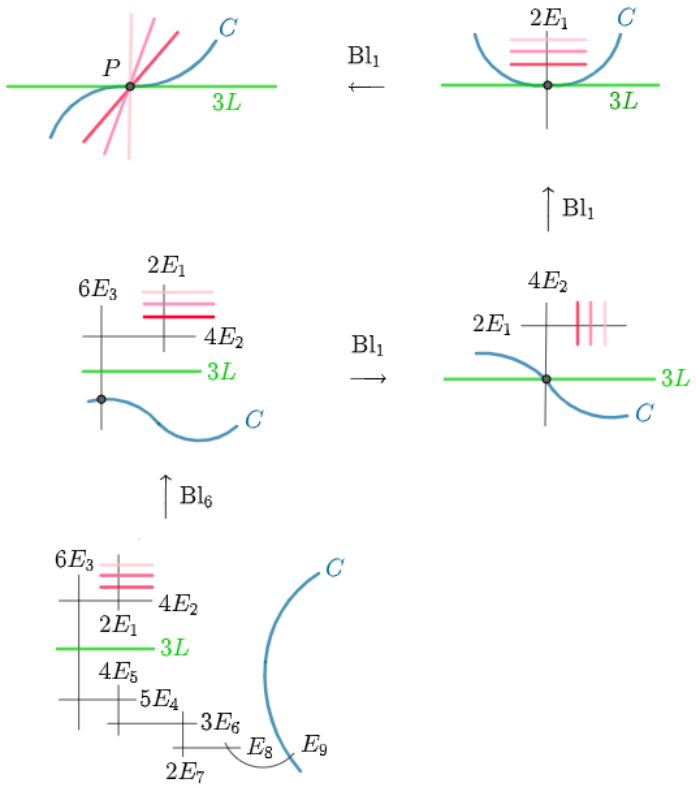


图 5.1： X 上的 RNRF 圆锥曲线丛（粉色）及一个 II^* 纤维。

例 5.5.0.2。 设 $F = y^2z - x^3 + x^2z + xz^2 - z^3$ 和 $G = z^2(y - z)$ 是两条平面三次曲线。令$P_1 = (0 : 1 : 0)$ 和 $P_i = (x_i : 1 : 1)$，其中 x_i，对于 $i = 2$，3，4，它们是多项式 $x^3 - x^2 - x$ 的 3 个根。因此 F，G 在非约化概形 $F \cap G = \{6P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\}$处相交。设 X 是在 $F \cap G$ 处对 $\mathbb{P}^2$ 吹起所得。于是其（仿射）魏尔斯特拉斯方程为

$$y^2 - ty = x^3 - x^2 - x + (t - 1).$$

特别地， X 具有一个类型 IV* 的纤维，位于 $t = \infty$ 处；正如命题 5.1.1所预期的，它在 x-直线上承认一个圆锥丛。从几何上看，类型 IV*的纤维由 $G' - E_1 - E_2 - E_3 - E_4$给出，其中 G' 是 G 的严格变换，而 E_i 是 P_i上方的例外除子。若 D 是圆锥丛在 x-直线上的一个纤维，则 $D = \ell_1 - E_1$，其中 ℓ_1 是经过P_1的一条直线的严格变换。特别地，对于所有经过 P_1的直线，除了经过 P_2、P_3 或 P_4的 3 条直线之外，曲线 D 横截地交于纤维 IV* 的单分量 $m - E_2 - E_3 - E_4$，其中 m 是直线 $y = z$的严格变换；同时还交于吹起 P_1上方的一个单分量。因此，椭圆纤维化限制在除 3 条圆锥曲线之外的所有圆锥曲线上时，在 IV* 处均不分歧，特别是它们不可能共享公共分歧。换言之，x-直线上的圆锥丛不是 RNRF 圆锥曲线丛。

然而， X 存在一个 RNRF 圆锥丛，即由 $|\ell_2 - E_2|$给出的圆锥丛，其中 ℓ_2 是经过 P_2的一条直线的严格变换。事实上， ℓ_2 与 IV 的重分量相交，交点位于* 的严格变换上方。 $z^2 = 0$由于 $P_2 = (0 : 1 : 1)$，该圆锥丛定义在 $\mathbb{Q}$上。因此，存在无穷多个 $t \in \mathbb{Q}$ 使得 $r_t \geq 1 + 3 = 4$ （图5.2）。

例 5.5.0.3. 设 X 为 Washington 在 [Was87] 中研究的有理椭圆曲面，其魏尔斯特拉斯方程为

$$y^2 = x^3 + tx^2 - (t + 3)x + 1.$$

该曲面在 $\mathbb{Q}$ 上的一般 Mordell-Weil 秩为 1。其奇异纤维的类型为$(\mathrm{I}_2^*,\ 2\mathrm{II})$。特别地，由命题5.2.3可知，它存在一个定义在 $\mathbb{Q}$上的 RNRF 圆锥丛。应用定理5.0.1 可得，秩至少为 4 的纤维集合不是薄集。

对于这个曲面，我们可以预期在一个非薄集合上出现更高的秩跃迁。事实上，Rizzo 在 [Riz03，定理 1]中证明，每个纤维的根数都是 -1。因此，在奇偶性猜想 [Dok13], 成立的前提下，所有纤维的秩都是奇数。结合定理5.0.1，这将意味着秩至少为 5 的纤维集合不是薄的。换言之，在奇偶性猜想成立的前提下，一个非薄的纤维集合上会出现至少 4 的秩跃升。

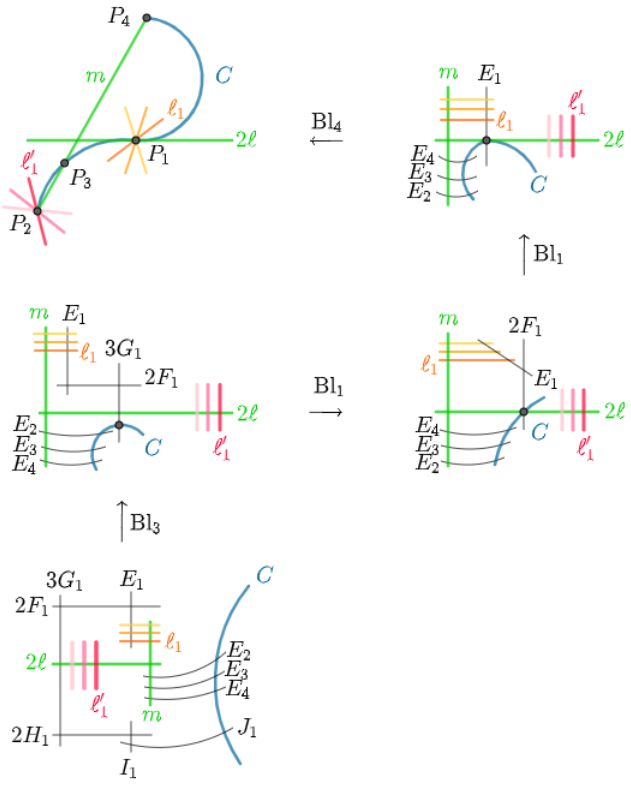


图 5.2： X 上具有一个 IV*纤维的 RNRF 圆锥曲线丛（粉色）和一个非 RNRF 圆锥丛（橙色）。

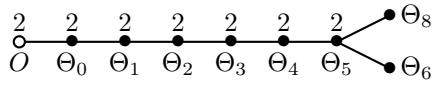
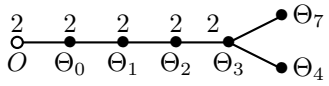
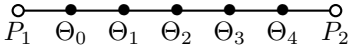
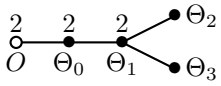
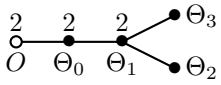
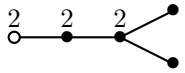
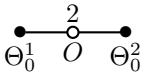
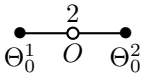
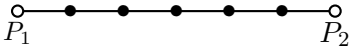
Mordell–Weil 秩	非约化纤维	圆锥曲线类	额外信息
0	II^*		
0,1	III^*		
0	IV^*		
0	I_4^*		
0,1	I_3^*		
0,1,2	I_2^*		
0	I_1^*		
1,2	I_1^*		
3	I_1^*		P_1, P_2 共轭截面相交于附近分支
1	IV^*		
2	IV^*		P_1, P_2 不相交的共轭截面

表 5.2：命题证明所用的圆锥曲线类 5.2.3

第6章

附录

我们重现了 [OS91，主定理] 中关于Mordell-Weil 秩为 $r \geq 1$的有理椭圆曲面之Mordell-Weil 格的数据表的一部分。我们添加了列 $c_{\max}$， $c_{\min}$， Δ。

No.	r	T	$E(K)^0$	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$	Δ
1	8	0	E_8	E_8	0	0	0
2	7	A_1	E_7	E_8^*	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	6	A_2	E_6	E_6^*	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
4		$A_1^{\oplus 2}$	D_6	D_6^*	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
5	5	A_3	D_5	D_5^*	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
6		$A_2 \oplus A_1$	A_5	A_5^*	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
7		$A_1^{\oplus 3}$	$D_4 \oplus A_1$	$D_4^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
8	4	A_4	A_4	A_4^*	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
9		D_4	D_4	D_4^*	1	1	0
10		$A_3 \oplus A_1$	$A_3 \oplus A_1$	$A_3^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
11		$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{*\oplus 2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
12		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
13		$A_1^{\oplus 4}$	D_4	$D_4^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
14		$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{*\oplus 4}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

15	3	A_5	$A_2 \oplus A_1$	$A_2^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$
16		D_5	A_3	A_3^*	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
17		$A_4 \oplus A_1$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$
18		$D_4 \oplus A_1$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
19		$A_3 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
20		$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_2 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_2^* \oplus \frac{1}{6}\langle 1 \rangle$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
21		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	A_3	$A_3^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
22		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1 \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^* \oplus \frac{1}{4}\langle 1 \rangle$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
23		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$A_1^* \oplus \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
24		$A_1^{\oplus 5}$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
25	2	A_6	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
26		D_6	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
27		E_6	A_2	A_2^*	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0
28		$A_5 \oplus A_1$	A_2	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
29		$A_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_1^* \oplus \frac{1}{6}\langle 1 \rangle$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
30		$D_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^* \oplus \frac{1}{4}\langle 1 \rangle$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
31		$A_4 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$
32		$D_4 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
33		$A_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{10}$
34		$D_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

35		$A_3^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
36		$A_3^{\oplus 2}$	$\boldsymbol{h}4\boldsymbol{i}^{\oplus 2}$	$\boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i}^{\oplus 2}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
37		$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \boldsymbol{h}12\boldsymbol{i}$	$A_1^* \oplus \boldsymbol{h}1/12\boldsymbol{i}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
38		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \boldsymbol{h}4\boldsymbol{i}$	$A_1^* \oplus \boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
39		$A_2^{\oplus 3}$	A_2	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
40		$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\boldsymbol{h}6\boldsymbol{i}^{\oplus 2}$	$\boldsymbol{h}1/6\boldsymbol{i}^{\oplus 2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$
41		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\begin{matrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix}\Big)$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
42		$A_1^{\oplus 6}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
43	1	E_7	A_1	A_1^*	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
44		A_7	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{8}$
45		A_7	$\langle 8 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/8\boldsymbol{i}$	2	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{8}$
46		D_7	$\langle 4 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
47		$A_6 \oplus A_1$	$\langle 14 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/14\boldsymbol{i}$	$\frac{31}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}$
48		$D_6 \oplus A_1$	A_1	A_1^*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
49		$E_6 \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/6\boldsymbol{i}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
50		$D_5 \oplus A_2$	$\langle 12 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/12\boldsymbol{i}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
51		$A_5 \oplus A_2$	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
52		$D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 4 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
53		$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 6 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/6\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
54		$D_4 \oplus A_3$	$\langle 4 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
55		$A_4 \oplus A_3$	$\langle 20 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/20\boldsymbol{i}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{20}$
56		$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\langle 30 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/30\boldsymbol{i}$	$\frac{71}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{28}{15}$
57		$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	A_1	A_1^*	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 12 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/12\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
60	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\langle 4 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/4\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\boldsymbol{h}1/6\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

表 6.1：Mordell-Weil 秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格。

参考文献

[AGL16] M. Artebani、A. Garbagnati 和 A. Laface。有理椭圆极端曲面的 Cox 环。《美国数学会会刊》，368(3):1735–1757，2016。[AL09] M. Artebani 和 A. Laface。曲面的 Cox 环与反典范 Iitaka 维数。《数学进展》，266(6):5252–5267，2009。[Art24] E. Artin。《高次同余域中的二次域》II（解析部分）。《数学杂志》，19:207–246，1924。[Bea96] A. Beauville。《复代数曲面》。剑桥大学出版社，1996。[Ber12] P. Bernays。《以非平方判别式的本原二元二次型表示正整数》。博士论文，哥廷根，1912。[BH] M. Bhargava 和 J. Hanke。万有二次型与 290 定理。预印本，见 http://math.stanford.edu/~vakil/files/290-Theorem-preprint.pdf。[Bil98] H. Billard。《椭圆曲面上有理点的分布》。《纯粹与应用数学杂志》，505:45–71，1998。[BSD65] B. Birch 和 P. Swinnerton-Dyer。《椭圆曲札记（II）》。《纯粹与应用数学杂志》，218:79–108，1965。[CD89] F. R. Cossec 和 I. V. Dolgachev。《恩里克斯曲面 I》，数学进展丛书第 76 卷。Birkhäuser，1989。[Cosa] R.D. Costa。《任意特征下有理椭圆曲面上圆锥丛的分类》。arXiv:2206.03549。[Cosb] R.D. Costa。《有理椭圆曲面截面交数的间隙》。ArXiv：即将发表。[CS] R.D. Costa 和 C. Salgado。《椭圆曲面上的大幅秩跃升与希尔伯特性质》。ArXiv：2205.07801。[CT20] J.-L. Colliot-Thélène。《一般点与 Mordell-Weil 群的秩跃升》。《算术学报》，196:93–108，2020。[CZ79] D. Cox 和 S. Zucker。《椭圆曲面截面的交数》。《数学发明》，53:1–44，1979。

[DD13] T. Dokchitser 和 V. Dokchitser。《关于 Tate 算法与 Kodaira 类型的一点说明》。《算术学报》，160:95–100，2013。[Dok13] T. Dokchitser。《奇偶性猜想札记》。载于《椭圆曲线、希尔伯特模形式与伽罗瓦变形》，第 201–249 页。Springer Basel，2013。[Ebe13] W. Ebeling。《格与码》。Springer Spektrum Wiesbaden，2013。[Elk90] N.D. Elkies。《有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格》。波恩工作会议，1990。[Elk06] N.D. Elkies。 $\mathbb{Z}^{28}$ 发表于 E（$\mathbb{Q}$）。数论邮件列表服务器，2006。[Enr49] F. Enriques。《代数曲面》。Zanichelli，1949。[Fal83] G. Faltings。《数域上阿贝尔簇的有限性定理》。《数学发明》，73:349–366，1983。[Fer92] S. Fermigier。《一个定义在 $\mathbb{Q}$（t）上、秩为 ≥ 19 的椭圆曲线例子》。《巴黎科学院院报》，315(6):719–722，1992。[Fer97] S. Fermigier。《一条定义在 $\mathbb{Q}$ 上、秩为 ≥ 22 的椭圆曲线》。《算术学报》，82:359–363，1997。[GS17] A. Garbagnati 和 C. Salgado。《有理椭圆曲面上的线性系与 K3 曲面上的椭圆纤维化》。《纯粹与应用代数杂志》，223(1):277–300，2017。[GS20] A. Garbagnati 和 C. Salgado。《带有固定有理曲线及一条正亏格曲线的非辛对合的 K3 曲面上的椭圆纤维化》。《伊比利亚美洲数学杂志》，36(4):1167–1206，2020。[Har77] R. Hartshorne。《代数几何》，数学研究生教材第 52 卷。Springer Verlag New York Inc，1977。[Har95] B. Harbourne。《反典范有理曲面》。《美国数学会会刊》，349(3):1191–1208，1995。[HK00] Y. Hu 和 S. Keel。《Mori 梦空间与几何不变理论》。《密歇根数学杂志》，48(1):331–348，2000。[HS19] M. Hindry 和 C. Salgado。《基变换下阿贝尔簇族秩的下界》。《算术学报》，189:263–282，2019。[Hum90] J. E. Humphreys。《反射群与考克斯特群》。剑桥大学出版社，1990。[HW79] G. H. Hardy 和 E. M. Wright。《数论导引》。克拉伦登出版社，1979。[Isk79] V. A. Iskovskikh。《任意域上有理曲面的极小模型》。《苏联科学院学报：数学辑》，43(1):19–43，1979。

[Isk87] V. A. Iskovskikh. 关于圆锥丛有理性问题. 《杜克数学杂志》, 54(2):271–294, 1987.[KM17] J. Kollar 和 M. Mella. 椭圆曲线的二次族与次数1圆锥曲线丛的单有理性. 《美国数学杂志》, 139(4):915–936, 2017.[Kod63a] K. Kodaira. 关于紧解析曲面 II. 《数学年刊》, 77:563–626, 1963.[Kod63b] K. Kodaira. 关于紧解析曲面 III. 《数学年刊》, 78:1–40, 1963.[Kur14] Y. Kurumadani. 三次曲线铅笔与有理椭圆曲面. 硕士论文, 京都大学, 2014.[LS22] D. Loughran 和 C. Salgado. 椭圆曲面上的秩跳跃与希尔伯特性质 . 《傅里叶研究所年刊》 , 72(2):617–638, 2022.[Man64] Y. Manin. 阿贝尔簇上点的泰特高度、其变体及应用. 《苏联科学院学报：数学辑》, 28(6):1363–1390, 1964.[Mes92] J.-F. Mestre. 有理数域上的一个秩为 ≥ 15 的椭圆曲线例子 . 《巴黎科学院院报》, 314:453–455, 1992.[Mir89] R. Miranda. 椭圆曲面的基本理论（讲义）, 1989.[MM98] R. Martin 和 W. McMillen. 有理数域上秩至少为 23 的椭圆曲线. 数论邮件列表服务器, 1998. $\mathbb{Q}$ MM00] R. Martin 和 W. McMillen. 有理数域上秩至少为 24 的椭圆曲线. 数论邮件列表服务器, 2000.[MP89] R. Miranda 和 U. Persson. 椭圆曲面的挠群. 《数学汇编》, 72(3):249–267, 1989.[MT86] Yu. I. Manin 和 M. A. Tsfasman. 有理簇：代数、几何与算术. 《俄罗斯数学评论》, 41(2):51–116, 1986.[Né52] A. Néron. 与域中代数曲线秩这一概念相关的算术与几何问题. 《法国数学学会通报》, 80:101– 166, 1952.[Né56] A. Néron. 某些代数曲线族的算术性质. 国际数学家大会论文集, 3:481–488, 1956.[Né64] A. Néron. 局部域与全局域上阿贝尔簇的极小模型. 高等科学研究院数学出版物, 21:5–128, 1964.[Nag92] K.I. Nagao. 有理数域上秩为 ≥ 17的椭圆曲线例子. 《日本学士院纪要：A辑数学科学》, 68(9):287–289, 1992.[Nag93] K.I. Nagao. 有理数域上秩为 ≥ 20 的椭圆曲线例子. 《日本学士院纪要：A辑数学科学》, 69:291–293, 1993.

[Nis96] K. Nishiyama. 某些 K3 曲面上的雅可比纤维化及其 Mordell-Weil群. 《日本数学杂志》, 22(2):293–347, 1996.[NK94] K.I. Nagao 和 T. Kouya. 有理数域上秩为 ≥ 21的椭圆曲线例子. 1994.[OS91] K. Oguiso 和 T. Shioda. 有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格. 《圣保罗大学数学评论》, 40:83–99, 1991.[Per90] U. Persson. 有理椭圆曲面上 Kodaira 纤维的构型 . 《数学杂志》 , 205(1):1–47, 1990.[Pet95] C. Peters. 复代数几何导论，侧重曲面理论，傅里叶研究所课程第23卷. 1995.[Pro18] Yu. G. Prokhorov. 圆锥丛的有理性问题 . 《俄罗斯数学评论》 , 73(3):375–456, 2018.[Riz03] O. G. Rizzo. 非恒定椭圆曲线族的平均根数. 《数学汇编》, 136(1):1–23, 2003.[Roh93] D.E. Rohrlich. 椭圆曲线族中根数的变化. 《数学汇编》, 87(2):119–151, 1993.[Sal09] C. Salgado. 椭圆曲面的秩：比较定理. 博士论文，巴黎第七大学（巴黎-狄德罗）, 2009.[Sal12] C. Salgado. 有理椭圆曲面纤维的秩. 《代数与数论》, 6(7):1289–1314, 2012.[Sal15] C. Salgado. 椭圆 K3 曲面纤维的秩. 《巴西数学会通报》, 43:7–16, 2015.[Sar80] V. G. Sarkisov. 圆锥丛的双有理自同构. 《苏联科学院学报：数学辑》, 44(4):918–945, 1980.[SAV+65] I.R. Shafarevich、B.G. Averbukh、J.R. Vainberg、A.B. Zhizhchenko、J.I. Manin、B.G. Moishezon、G. N. Tyurin 和 A.N. Tyurina. 代数曲面. V.A. Steklov 数学研究所论文集, 75:1–215, 1965.[Ser08] J.-P. Serre. 伽罗瓦理论专题，数学研究札记第1卷. A K Peters，第2版，2008.[Shi72] T. Shioda. 关于椭圆模曲面. 《日本数学会杂志》, 24:20–59, 1972.[Shi89] T. Shioda. Mordell-Weil 格与伽罗瓦表示，I、II、III. 《日本学士院纪要：A辑数学科学》, 65:268–271; 296–299; 300–303, 1989.[Shi90] T. Shioda. 关于 Mordell-Weil 格. 《圣保罗大学数学评论》, 39:211–240, 1990.

[Shi91] T. Shioda. 通过 Néron 方法构造一族秩较大的有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线。《数学发明》，106(1):109–120，1991。[Sil83] J. Silverman. 阿贝尔簇族的高度与特化映射。《纯粹与应用数学杂志》，342:197–211，1983。[Sil94] J. Silverman.《椭圆曲线算术高级专题》。施普林格，纽约，NY，1994。[SS10] M. Schuett 和 T. Shioda. 椭圆曲面。《纯粹数学高级研究》，60:51–160，2010。[SS19] M. Schuett 和 T. Shioda. *Mordell-Weil* 格，《数学成果丛书》卷 70。施普林格，2019。[Szy04] M. Szydlo. 非完美剩余域上的椭圆纤维。《数论杂志》，104(1):75–99，2004。[Tat66] J. Tate. 关于伯奇-斯温纳顿-戴尔猜想及其几何类比。载于《布尔巴基研讨班：*1964/65*、*1965/66* 年，第 *277–312* 讲》，布尔巴基研讨班第 9 卷。法国数学会，1966。第 306 讲。[Tat75] J. Tate. 确定椭圆铅笔中奇异纤维类型的算法。载于 B. J. Birch 和 W. Kuyk 编，《单变量模函数 *IV*》，第 33–52 页。施普林格，1975。[Was87] L.C. Washington. 最简单三次域的类数。《计算数学》，48(177):371–384，1987。[Wei48] A. Weil.《代数曲线及其导出的簇》。《科学与工业时事》1041。斯特拉斯堡大学数学研究所，1948。