拟阵格拉斯曼流形上的 E_∞ 结构

JEFFREY GIANSIRACUSA

摘要。类比于K理论中加法结构的起源，我们在拟阵格拉斯曼流形（定向拟阵空间）上构造了一种E_∞结构，其底层二元运算是拟阵的直和。证明涉及将 Dressian 的多面体扇结构提升为拟阵格拉斯曼流形的多面体模型，并引入一种新颖的E_∞幺半群上同调，它由$\mathbb{N}$的无限子集空间构造而成。

arXiv:2302.05509v1 [math.AT] 10 Feb 2023

在 [GM92], Gelfand 和 MacPherson 找到了三角剖分流形有理庞特里亚金类长期以来未能获得的组合公式。他们的公式在概念上至关重要地运用了定向拟阵 [BLVS$^+$99]。受这一突破启发，MacPherson [Mac93] 提出研究光滑流形范畴的组合类比，并将其称为组合微分流形 或 CD流形。在这个范畴中，切丛理论由拟阵格拉斯曼流形控制；它是固定秩、固定底集上的定向拟阵偏序集的神经。因此，拟阵格拉斯曼流形有时记作 $MacP(d,E)$（其中d 是秩，E 是底集）。MacPherson 指出，当$d = 1,\ 2, |E| - 1$，或 $|E| - 2$时，拟阵格拉斯曼流形与熟知的$Gr(d,E)$ 同胚；后者由d维的 $\mathbb{R}^E$子空间组成。在这些情形之外，其同伦型仍是个谜，而理解它将对特征类理论产生重要影响。

十年后，Biss 声称证明了在所有情况下，拟阵格拉斯曼流形都与实格拉斯曼流形同伦等价 [Bis03a]。遗憾的是，该论证存在致命缺陷，因此论文被撤回 [Bis09b, Mne07]。一项相关主张[Bis03b] 提出以拟阵为基础的组合模型来描述复格拉斯曼流形，但也犯了同样的错误，因此同样被撤回 [Bis09a]。此后，拟阵格拉斯曼流形的同伦型问题仍大体悬而未决，不过 Anderson 和 Davis 已证明了若干结果，阐明了这一问题以及 CD流形理论 [And99, And98, AD02, AD19]。尤其是，他们证明比较映射

$$Gr(d, E) \to MacP(d, E)$$

在模2上上同调上是一个分裂满射。

本文旨在证明一个定理：实格拉斯曼流形同伦结构中的至少一个重要部分，同样存在于拟阵格拉斯曼流形中：与直和相对应的E_∞结构。直和诱导出映射

$$Gr(d_1, E_1) \times Gr(d_2, E_2) \to Gr(d_1 + d_2, E_1 \sqcup E_2)$$

从而在 $\coprod_{d=0}^{\infty} Gr(d, \mathbb{N})$ 上赋予一个 E_∞ 结构。此结构奠定了实K理论的加法结构。

电子邮件地址：jeffrey.giansiracusa@durham.ac.uk。

日期：2023年2月14日。

定理A. 不交并 $\coprod_{d=0}^{\infty} MacP(d,\mathbb{N})$ 带有一个 E_∞ 幺半群上同调的作用，该作用扩展了定向拟阵的直和，因此其群完备化具有无限循环空间的同伦型。

我们的方法是用一个更具几何意义的胞腔复形 $\mathcal{M}(d,E)$ 替代拟阵格拉斯曼流形 $MacP(d,E)$；该胞腔复形位于射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{\binom{|E|}{d}})$ 之中，并且我们能够在其上为幺半群作用给出一个明确而简单的公式。复形 $\mathcal{M}(d,E)$ 是定向拟阵中的 Dressian 的对应物；Dressian 在热带几何中为赋值拟阵提供参数化，而且按照 [BB19] 的定义，它可以实现为带符号热带数超域上的格拉斯曼流形。Anderson and Davis 在 [AD19]中证明，当赋予前者由 $\mathbb{R}$ 上一种略异于通常拓扑的拓扑所诱导的拓扑时，$\mathcal{M}(d,E)$ 与 $MacP(d,E)$ 弱等价（受带符号热带超域结构的启发，0-粗拓扑在 0 以外与通常拓扑一致，但 0 的唯一邻域是整条实线）。

相反，我们采用 $\mathcal{M}(d,E)$ 上的欧几里得诱导拓扑，并证明在对数坐标下，它是一个多面体复形。更准确地说，群同态 $(\mathbb{R},\times) \to \mathbb{T} = (\mathbb{R}\cup\{\infty\},+)$ 由 $x \mapsto -\log|x|$ 给出，并诱导出一个射影空间之间的映射

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{\binom{|E|}{d}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{T}^{\binom{|E|}{d}}),$$

右侧的对象通常称为热带射影空间，是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{\binom{|E|}{d}-1}$ 的一种多面体紧化，在组合意义上等价于一个单纯形。我们证明：

定理B. 空间 $\mathcal{M}(d,E) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{\binom{|E|}{d}})$ 是一个*CW*复形，使得映射 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{\binom{|E|}{d}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{T}^{\binom{|E|}{d}})$ 将每个胞腔同胚地映到一个凸多面体上。

定理C. $\mathcal{M}(d,E)$ （赋予子空间拓扑）与拟阵格拉斯曼流形 $MacP(d,E)$同伦等价。

上述同伦等价的证明涉及对 $\mathcal{M}(d,E)$ 的胞腔偏序集结构作组合描述，然后将该偏序集与定向拟阵偏序集进行比较。

致谢。 我谨向 Felipe Rincon、Ulrike Tillmann 和 Irakli Patchkoria 致谢，感谢他们在本工作早期阶段给予的宝贵交流与鼓励。本研究部分得到了英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/R018472/1 的资助。

1. 拟阵的不同类型

本节简要回顾拟阵、赋值拟阵和定向拟阵的定义。随后讨论一种兼具不同特征的概念：赋值带符号拟阵。我们将通过 Pl¨ucker 向量来研究拟阵。我们的观点基于 Baker 和 Bowler [BB19] 以及 Anderson and Davis [AD19] 的思想。

1.1. 交替函数。

取一个集合 E，并设 V 为一个带有对合（即群 $\mathbb{Z}/2=\{+1,-1\}$的作用）及一个在该对合下保持不变的指定元素 0 的集合。函数 $f\colon E^d \to V$ 称为交替的，如果

$$f(x_1,\dots,x_d) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(d)})$$

对于任意置换 $\sigma\in\Sigma_d$，如果自变量 x_i 并非两两不同，则$f(x_1,\dots,x_d) = 0$

如果我们选择 E 的一个全序，那么任意子集 X 都会继承一个全序 $(x_1, x_2, \ldots)$。这会在交替函数 $f : E^d \to V$ 与函数 $g : \binom{E}{d} \to V$ 之间诱导一个双射，其中 $\binom{E}{d}$ 表示 E 的所有大小为 d 的子集构成的集合；无序集合上的函数 g 可通过 $f(x_1, \ldots, x_d) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot g(\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}\})$ 确定一个交替函数，其中 σ 是满足 $x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(d)}$ 的唯一置换。在下文中，我们将经常隐式地使用这一双射。

1.2. **普通拟阵**。 秩为 d、定义在有限底集 E 上的拟阵是一个非零映射 g

$$p : \binom{E}{d} \to \{0, 1\}$$

满足以下条件：对任意两组集合 $X \in \binom{E}{d+1}$ 和 $Y \in \binom{E}{d-1}$，如果对于某个 $i \in X \setminus Y$，$p(X - i)$ 和 $p(Y \cup i)$ 都为 1，那么就存在另一个元素 $j \in X \setminus Y$（且 $j \neq i$），使得 $p(X - j)$ 和 $p(Y \cup j)$ 都为 1。函数 p 有时称为热带 Plücker 向量，其分量称为 Plücker 坐标。使 $p(B) = 1$ 的集合 B 称为 p 的基。

所有拟阵的集合上有一个偏序：若对所有 B，$p \preceq q$，且 $p(B) \geq q(B)$。也就是说，从 p 变为q时，一些集合可能不再是基，但不会出现新的基。当$p \preceq q$ 时，我们称q 是p的特化。均匀拟阵由常值函数$p = 1$给出，是关于特化的唯一极小拟阵；极大拟阵则是仅有一个基的拟阵。

1.3. **赋值拟阵**。 令 $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 带有拓扑，使其同胚于一个半闭区间；也就是说，映射 $x \mapsto e^{-x}$ 是到 $[0, \infty)$ 的同胚。给定一个函数 $\phi : \binom{E}{d} \to \mathbb{T}$，$\phi$ 的初始数据是函数 I_ϕ，它将每对不同的集合$(X \in \binom{E}{d+1}, Y \in \binom{E}{d-1})$ 映射到集合

$$\arg\min_{i \in X \setminus Y} \left(\phi(X - i) + \phi(Y \cup i)\right) \subset X \setminus Y.$$

若 ϕ 不恒等于 ∞，且$I_\phi(X,Y)$ 的基数总是至少为 2，则称 ϕ 是底集为 E、秩为 d 的热带 *Plücker* 向量 。加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 通过以下方式作用于热带 Plücker 向量} 构成的集合{ϕ

$$(\lambda + \phi)(B) = \phi(B) + \lambda$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，而一个赋值拟阵 是一个轨道等价类。

给定一个热带 Plücker 向量 ϕ，底层拟阵 ϕ 定义如下

$$B \mapsto \begin{cases} 0 & p(B) = \infty \\ 1 & p(B) \neq \infty. \end{cases}$$

我们可以将 ϕ 视为底层拟阵 ϕ 上的赋值数据，它为每个基赋予一个实数。我们称一个函数 I 将每一对 (X,Y) 映射到一个子集$I(X, Y) \subset X \setminus Y$，若存在一个热带 Plücker 向量 ϕ，使得 $I = I_\phi$ 且 $p = \phi$，则称该函数与拟阵 p 相容。

令 $\widetilde{Dr}(d, E) \subset \mathbb{T}^{\binom{E}{d}} \setminus \{\infty\}$ 表示所有热带 Plücker 向量构成的空间。加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 在 $\mathbb{T}^{\binom{E}{d}} \setminus \{\infty\}$ 上有一个对角作用，它扩展了对热带 Plücker 向量集合的作用；其商称为热带射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{T}^{\binom{E}{d}})$。$\widetilde{Dr}$它是一个与单纯形微分同胚的带边界流形。$Dr(d,E)$在热带射影空间中的像是赋值拟阵空间，称为*Dressian* ，记作 $Dr(d,E)$。

1.4. **定向拟阵**。一个 手征符是一个映射

$$\chi : E^d \to \{-1, 0, 1, \}$$

使得:

(1) χ 不恒为零; **(2)** χ 是交替的; **(3)** 给定$X = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in E^{d+1}$ 和$Y = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in E^{d-1}$, 当 k 从 1 变化到 $d+1$ 时, 这些元素要么

$$(-1)^k \chi(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_{d+1}) \chi(x_k, y_1, \ldots, y_{d-1}) \in \{-1, 0, +1\} \tag{1.4.1}$$

全部为零, 要么该列表同时包含 $+1$ 和 -1。

手征符是定向拟阵的 Pl¨ucker 向量。令 $[\chi]$ 表示在上述识别 $\chi \sim -\chi$下 χ 的等价类。定向拟阵是一个等价类 $[\chi]$。

在固定秩的E 上的手征符集合上存在一个特化偏序, 其中

$$\chi \preceq \chi' \text{ if } \chi'(B) \text{ is either } \chi(B) \text{ or } 0 \text{ for each } B \in E^d,$$

并且这在定向拟阵上诱导出一个偏序。*MacPhersonian MacP*(d,E)是集合 E 上所有秩为 d 的定向拟阵所成偏序集的神经。

由于手征符 χ 是一个交替的函数, 对E 进行排序会诱导出每个子集$B \subset E$的排序, 因此我们可以将 χ 编码为函数$(^E{}_d) \to \{-1, 0, 1\}$。因此, 我们可以将定向拟阵看作一个底层普通拟阵, 并为每个基赋予一个满足上述条件的额外符号数据。

如果 χ 是一个手征符, 则绝对值 $|\chi| : E^d \to \{0, 1\}$ 是一个普通拟阵, 我们称之为 χ 的底层拟阵 。我们称初始数据I 与χ 兼容, 当且仅当它与拟阵 $|\chi|$ 兼容, 并且对于所有$(X = \{x_i\}, Y = \{y_i\}) \in (^E{}_{d+1}) \times (^E{}_{d-1})$, 以下两个条件中必有一个成立:

(1) 对所有k, **(1.4.1)** 中的表达式恒等于零; **(2)** 存在指标k_+ 和k_-, 使得x^{k_+}、$x_{k_-} \in I(X$、$Y)$ 且当$k = k_+$ 时, **(1.4.1)** 为 $+1$; 当$k = k_-$时, 为 -1。

1.5. **定向赋值拟阵**。 定向赋值拟阵是将定向拟阵与赋值拟阵以相容方式结合而成的混合对象。

定义 1.5.1。 给定底集为E的秩为d 的热带普吕克向量 ϕ, 若一个具有相同底集和秩的手征符 χ满足以下条件, 则称其与 ϕ 相容:

(1) $\phi(B) = \infty$ 当且仅当 $\chi(B) = 0$; **(2)** 对于有序集$X = \{x_1, \ldots\ldots x_{d+1}\} \in (^E{}_{d+1})$ 和 $Y = \{y_1, \ldots\ldots y_{d-1}\} \in (^E{}_{d-1})$, 令$I \subset \{1, \ldots\ldots d+1\}$ 表示使下列表达式中的最小值达到的指标集合

$$\phi(\{x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{d+1}\}) + \phi(\{x_i, y_1, \ldots, y_{d-1}\})$$

它所达到的值。于是存在一对元素 $i,j \in I$, 使得

$$(-1)^i \chi(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{d+1}) \chi(x_i, y_1, \ldots, y_{d-1})$$

and

$$(-1)^j \chi(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{d+1}) \chi(x_j, y_1, \ldots, y_{d-1})$$

符号异号。

一个定向热带 *Pl¨ucker* 向量是一个相容对(ϕ, χ)。

我们可以将相容对(ϕ,χ) 打包为一个映射 $\Phi\colon E^d \to \mathbb{R}$，其中

$$\phi = -\log|\Phi| \text{ and } \chi = \operatorname{sign}(\Phi).$$

Φ 是定向热带 Pl¨ucker 向量的条件变为：对于每个$X = (x_1,\dots,x_{d+1}) \in E^{d+1}$和$Y = (y_1,\dots,y_{d-1}) \in E^{d-1}$，这些数要么全为零，要么绝对值最大的数同时以正负号出现。

$$\{(-1)^i\Phi(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{d+1})\Phi(x_i,y_1,\dots,y_{d-1})\}_{i=1\dots d+1}$$

群 $\mathbb{R}^\times$ 通过乘法作用于这类 Φ 的集合，而一个定向赋值拟阵就是一个轨道。

通过对E选定一个次序，我们可以将 Φ 表示为映射$\binom{E}{d} \to \mathbb{R}$；以这种形式表示符号并不那么直接，但它使我们能够将定向热带 Pl¨ucker 向量的集合嵌入欧几里得空间 $\mathbb{R}^{\binom{E}{d}}$ 中，并与热带 Pl¨ucker 向量空间直接比较，下一节将对此进行讨论。令 $\mathcal{M}(d,E) \subset \mathbb{R}^{\binom{E}{d}} \setminus \{0\}$ 表示所有定向热带 Pl¨ucker 向量构成的空间，并赋予其欧几里得空间子空间的拓扑；再令

$$\mathcal{M}(d,E) \subset (\mathbb{R}^{\binom{E}{d}} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{\binom{E}{d}})$$

表示所有定向赋值拟阵组成的集合。

注记 1.5.2. 按照 [AD19], 的术语，这是实数热带超域上的拟阵Grassmannian。注意，Anderson and Davis 在实数直线上采用了不同的拓扑，这会在定向赋值拟阵空间上诱导出不同的拓扑。根据 [AD19, 定理 1.1], ，他们的拓扑导出了一个弱等价 $|MacP(d,E)| \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}(d,E)$。我们将证明，欧几里得拓扑实际上在$\mathcal{M}(d,E)$ 上导出了一个CW结构，因而得到一个同伦等价。

有限集$E_1 \hookrightarrow E_2$的包含关系诱导出一个单射映射 $\mathcal{M}(d,E_1) \hookrightarrow \mathcal{M}(d,E_2)$。当$E$ 是可数无限集时，我们将 $\mathcal{M}(d,E)$ 定义为有限子集$F \subset E$上的 $\mathcal{M}(d,F)$ 的余极限。

2. 多面体结构

我们的目标是描述定向赋值拟阵空间 $\mathcal{M}(d,E)$ 上的多面体结构。我们通过提升 Dressian 上的多面体扇结构来定义这一结构；这类结构已由 [HJJS09、HJS14、OPS19、BS19] 等作者研究。事实上，定义 Dressian 上的扇结构有两种自然方式（Pl¨ucker 扇和次级扇），且已在 [OPS19] 中证明二者一致。在 Pl¨ucker 扇的描述中，锥由二次 Pl¨ucker 表达式的初始形式决定。我们将回顾这一结构，然后描述定向赋值拟阵空间 $\mathcal{M}(d,E)$ 上的相应结构。

2.1. Dressian 的多面体结构。

这里我们介绍 Dressian Dr(d, E) 的 Pl¨ucker 扇结构描述。给定一个拟阵 p 和一个相容的初始数据 I，令 C(p, I) $\subset \mathbb{T}^{\binom{E}{d}} \setminus \{\infty\}$ 表示所有底层拟阵为 p 且初始数据为 I 的热带 Pl¨ucker 向量构成的空间。集合 C(p, I) 在 $(\mathbb{R},+)$ 的对角作用下保持不变，因此下降为热带射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{T}^{\binom{E}{d}})$ 的子集。所有热带 Pl¨ucker 向量构成的空间$\widetilde{\text{Dr(d, E)}}$，显然可分割为所有 C(p, I) 的集合论意义上的不交并；这一划分也诱导出 Dr(d, E) 的一个划分。

环境热带仿射空间 $\mathbb{T}^{\binom{E}{d}}$ 按照坐标集合 ∞进行分层。每个分层在规范意义下都是一个欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。若 $\operatorname{supp}(p) \subset \binom{E}{d}$ 表示

的支撑（即拟阵p的基集合），那么$C(p,I)$ 包含于该分层$\mathbb{R}^{\mathrm{supp}(p)}$中。

命题 2.1.1. </style}空间 C(p,I) $\subset \mathbb{R}^{\mathrm{supp}(p)}$ 是一个凸多面锥的相对内部，该锥在沿向量 $\underline{(1,\ldots,1)}$平移下保持不变。闭包 $C(p,I)$ 在 $\mathbb{T}^{\binom{E}{d}}$ 中的边界是那些满足 $p \preceq p'$ 且对所有 X 和 Y 都有 $I(X,Y) \subset I'(X,Y)$ 的锥 $C(p',I')$ 之并。

证明。 集合 $C(p,I) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{supp}(p)}$ 由以下线性方程和不等式确定：

(1) For $X \in \binom{E}{d+1}, Y \in \binom{E}{d-1}, i \in I(X,Y)$ and $j \notin I(X,Y)$ we have
$$\phi(X-i)+\phi(Y+i) < \phi(X-j)+\phi(Y+j).$$
(2) 对于 $X\in\binom{E}{d+1}$、$Y\in\binom{E}{d-1}$、i、$j \in I(X,Y)$，我们有
$$\phi(X-i)+\phi(Y+i) = \phi(X-j)+\phi(Y+j).$$

假设有一列点 ϕ_i 位于 $C(p,I)$ 中，并收敛到边界上的一点 ϕ_∞。该极限点将属于某个集合 $C(p',I')$，现在我们推导对(p',I')的约束。显然， ϕ_∞ 将满足上述所有类型 (2) 的条件，因此只可能发生以下两种情况：

（1）在极限情况下，条件（1）中的某些严格不等式可能变成等式。这意味着存在一个或多个对（X，Y），使得 I(X，Y) $\subsetneq$ I′(X，Y)。（2）某些 ϕ_i(B) 的值可能增大到 ∞，因此 p $\preceq \phi_\infty$。只有当 B 不出现在（p，I）的任何类型–(2）等式中时，这种情况才可能发生；也就是说，对于任意 X、Y 以及 i $\in$ I(X，Y)，B $\neq$ X $-$i 或 Y $+$ i。

这表明，边界包含于胞腔 C（p'，I'）的并集中，其中 $p' \succeq p$ 且对于所有 X、Y，I'（X，Y）$\supset I$（X，Y）。反过来，我们必须证明，胞腔C（p'，I'）中的任意一点 ϕ，只要满足这一条件，就可以扰动到C（p，I）中的一点。我们分两步进行。

如果B 是p 的一个基，但不是p'的基，那么 $\phi(B) = \infty$，且 $\phi(B)$ 不会出现在任何类型 (2) 的等式中。不过， $\phi(B)$ 可能出现在某些类型 (1) 不等式的右侧；将 $\phi'(B)$ 设为足够大的数，仍会满足这些相同的不等式。因此，我们得到对 ϕ 的扰动，使其成为点 $\phi' \in C(p,I') \subset \mathbb{R}^{\mathrm{supp}(p)}$。$C(p,I)$ 在分层 $\mathbb{R}^{\mathrm{supp}(p)}$ 中的闭包是

$$\bigcup_{I'\supset I} C(p,I').$$

因此，我们可以将 ϕ' 扰动到$C(p,I)$中的一个点 ϕ''，如所需。 □

推论 2.1.2。 空间 $Dr(d,E)$ 是一个多面扇，其锥为 $C(p,I)$，并且它诱导出 *Dressian* $Dr(d,E)$上的一个多面体扇结构。

2.2. **定向赋值拟阵空间的多面体结构**。考虑映射

$$\mathbb{R}^{\binom{E}{d}} \to \mathbb{T}^{\binom{E}{d}}$$

通过逐分量应用 $x \mapsto -\log|x|$ 给出。这诱导出子空间之间的映射$\sim \mathcal{M}(d,E) \to Dr(d,E)$，其射影化后成为一个映射

$$\mathcal{M}(d,E) \to Dr(d,E).$$

该映射通过遗忘定向数据，并将一个定向赋值拟阵映射为其底层赋值拟阵来定义。我们将证明，Dressian 上的多面扇结构提升为 $\mathcal{M}(d,E)$ 上的 CW复形结构（在适当的坐标下，可以将其视为多面体复形结构）。

引理2.2.1。 如果手征符 χ 与热带 *Pl¨ucker* 向量 $\phi \in C$（p，I）相容，那么它也与任意其他热带 *Pl¨ucker* 向量 $\phi' \in C$（p，I）相容。

证明。 这立即由定义1.5.1中的相容条件定义得到，因为相容性的条件(1) χ 与 ϕ 仅取决于底层拟阵 $\phi = p$，而条件(2)仅取决于初始数据I。□

设 χ 为一个手征符，且I 为一个相容的初始数据。令D（χ、I）表示所有满足以下条件的定向赋值热带 Pl¨ucker 向量 Φ 的集合：

(1) 赋值拟阵 $|\Phi|$ 的初始数据为$I^{|\Phi|} = I$；(2) sign（Φ）$= \chi$。

令 D($[\chi]$, I) 表示 D(χ, I) 在空间 $\mathcal{M}$(d, E) $\subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{(E}$ d)) 中的像；它是所有以 I 为初始数据、且底层定向拟阵为$[\chi]$的定向赋值拟阵 $[\Phi]$ 的集合。显然，D($[\chi]$, I) 在 $\mathcal{M}$(d, E) 中的原像是不交并，由两个胞腔 D(χ, I) $\sqcup$ D($-\chi$, I)组成。

定理 2.2.2。 空间 $\mathcal{M}(d,E)$ 是一个 *CW*复形，其胞腔为 $D(\chi, I)$；而 $\mathcal{M}(d, E)$ 也是一个 *CW*复形，其胞腔为 $D([\chi],I)$。此外，在映射 $\mathbb{R}^{(E}{}_{d)} \to \mathbb{T}^{(E}{}_{d)}$ 下，每个开胞腔 $D(\chi, I)$ 都同胚地映射到一个凸多面锥的相对内部。

证明。显然， $\mathcal{M}$(d, E) 是集合 D(χ, I) 的集合论意义上的不交并。若 D(χ, I) 非空，则由引理2.2.1可知，它与胞腔 C(p, I) 同胚。由于每个胞腔 C(p, I) 的边界在 Dr(d, E) 中是低维胞腔的并，D(χ, I) 也同样如此。关于 $\mathcal{M}$(d, E) 的相应结论立即得出。□

定理 2.2.3. 存在一个同伦等价 $|MacP(d,E)| \simeq \mathcal{M}(d,E)$。

证明。考虑由胞腔的开星形构成的 $\mathscr{U}$ 对 $\mathcal{M}$(d, E) 的开覆盖。根据定理 2.2.2，这是一个好覆盖；根据神经定理（[Bor48], [Wei52，第 141], 页，或 [McC67，定理 2]），$\mathcal{M}$(d, E) 与该覆盖 $\mathscr{U}$ 的神经同伦等价。这个神经同构于胞腔偏序集 $\mathcal{C}$ 的神经；根据定理 2.2.2，$\mathcal{C}$ 是由满足以下条件的对 ($[\chi]$, I) 构成的集合：对于任意 X、Y，若 I(X, Y) $\subset$ I′(X, Y)，则 ($[\chi]$, I) $\leq$ ($[\chi']$, I′)，且 $[\chi] \leq [\chi']$。

将 ($[\chi]$,I) 映射到 $[\chi]$ 定义了一个偏序集态射

$$\pi : \mathcal{C} \to MacP(d, E).$$

我们将证明 π 在神经上诱导同伦等价：首先证明每个几何纤维都是可缩的，然后证明每个几何纤维到对应同伦纤维的包含是同伦等价。

设 χ 是一个手征符，它给出 $MacP(d,E)$的一个顶点。 π在 $[\chi]$ 上的几何纤维 $\mathcal{F}_{[\chi]}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子偏序集，由所有对 ($[\chi]$,I)组成。该偏序集有一个由 ($[\chi]$,$I^{\chi}_{\max}$)给出的终对象，其中 $I^{\chi}_{\max}$ 是与 χ 相容的极大初始数据：

$$x \in I(X, Y) \text{ if } |\chi|(X - x) \cdot |\chi|(Y + x) \neq 0.$$

因此， $\mathcal{F}_{[\chi]}$ 的神经是可缩的。

现在考虑纤维范畴 $\mathrm{h}\mathcal{F}_{[\chi]} = [\chi]\backslash\pi$ ，它由满足$[\tau] \geq [\chi]$的对 ([τ], I) 组成。我们将其视为 π 的同伦纤维的一个模型。令 $\mathrm{j}: \mathcal{F}_{[\chi]} \hookrightarrow \mathrm{h}\mathcal{F}_{[\chi]}$ 表示包含映射。我们将证明 j 是等价，通过证明它的纤维范畴全都是可缩的。给定 $\mathrm{h}\mathcal{F}_{[\chi]}$ 中的一个对象 ([τ], I)，纤维范畴 j/([τ], I) 是由与 χ 相容且满足 J(X, Y) $\subset$ I(X, Y) 的初始数据 J 构成的偏序集。由于与 τ 相容的初始数据也与任意手征符 $\tau' \leq \tau$相容，因此特别地，I 与 χ 相容，因为 $\chi \leq \tau$

现在，根据 Quillen 定理 A（[Qui78]or [McC66, 定理 6]），映射 j 在神经的几何实现之间诱导出一个同伦等价，

$$|\mathcal{F}_{[\chi]}| \hookrightarrow |h\mathcal{F}_{[\chi]}|,$$

因此，对于任意的 χ， $|\mathcal{F}_{[\chi]}|$ 都是可缩的。然后，再次应用 Quillen 定理 A， π 诱导出一个同伦等价 $|\mathcal{C}| \to |MacP(d,E)|$。□

3. H-空间结构

在这里，我们研究对应于直和的空间 $\mathcal{M}(d,E)$ 之间的映射。

单射 $\alpha : E \to F$ 诱导出一个单射 $\alpha_* : \mathcal{M}(d,E) \hookrightarrow \mathcal{M}(d,F)$。给定两个单射 α、$\beta : E \to F$，本节将构造 α_* 和 β_* 之间的一个同伦。此外，我们将证明这些同伦之间存在高阶同伦关系。

3.1. 直和。设 p_1 和 p_2 是底集分别为 E_1 和 E_2、秩分别为 d_1 和 d_2 的拟阵。直和 $\mathrm{p}_1 \oplus \mathrm{p}_2$ 是定义在 $\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2$ 上、秩为 $\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2$ 的拟阵，其基为形如 $\mathrm{B}_1 \sqcup \mathrm{B}_2$ 的集合，其中每个 B_i 都是 p_i 的一个基。此运算可如下推广到定向赋值拟阵。交错函数 $(\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2)^{d_1+\mathrm{d}_2} \to \mathbb{R}$ 由其在子集 $\mathrm{E}_1^{d_1} \times \mathrm{E}_2^{d_2}$ 上的限制唯一确定；在此，我们将 $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ 定义为 Φ_1 在第一个因子上的值与 Φ_2 在第二个因子上的值之积。

这个直和运算定义了一个连续映射

$$\mathcal{M}(d_1, E_1) \times \mathcal{M}(d_2, E_2) \to \mathcal{M}(d_1 + d_2, E_1 \sqcup E_2).$$

若 $E_1 = E_2 = \mathbb{N}$，则我们可以选取一个单射 $\alpha : \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。与 α_* 复合后得到一个映射

$$\mathcal{M}(d_1, \mathbb{N}) \times \mathcal{M}(d_2, \mathbb{N}) \to \mathcal{M}(d_1 + d_2, \mathbb{N}).$$

令 $\mathcal{M} = \coprod_{d=0}^{\infty} \mathcal{M}(d, \mathbb{N})$。那么我们有一个二元运算

$$\mu : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

空间 $\mathcal{M}(0, \mathbb{N})$ 是一个单点（对应唯一的秩为零的有向赋值拟阵），而该点是 μ 的单位元。不过请注意， μ 既不具交换性，也不具结合性。尽管如此，我们将在下文证明，只要 α 的像的补集是无限的，它在同伦意义下是结合且可交换的。随后，我们的主要结果将证明它扩展为一个 E_∞ 结构。

3.2. **拟阵滑动**。 给定一组两两不相交的单射映射 $A = (\alpha_k : E \hookrightarrow F)_{k=0}^n$，令 $x \mapsto x$ 为映射

$$\bigcup_k \alpha_k(E) \to E \tag{3.2.1}$$

在 α_k 的像上限制为 $\alpha^{-1}\mathrm{k}$（对每个 k）。对于 $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d) \in \mathrm{F}^d$，令 $\mathrm{b}_i \in \mathbb{N}(\mathrm{i} = 1 \ldots, \mathrm{d})$ 表示 $\alpha_i(\mathrm{E})$ 中的分量数。给定 E 上一个秩为 d 的有向热带 Pl¨ucker 向量 Φ 以及一点 $\mathrm{t} = (\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_n) \in \Delta^n$（即，$\mathrm{t}_k \in [0,1] \,\mathrm{and} \sum_k \mathrm{t}_k = 1$），考虑由下式给出的函数 $\Phi_t^A \colon \mathrm{F}^d \to \mathbb{R}$

$$\Phi_t^A(x_1, \ldots, x_d) = \begin{cases} \Phi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}) t_0^{b_0} t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n} & \sum b_k = d \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 3.2.1。 若 Φ 是底集为 E 的有向热带 *Pl¨ucker* 向量，则上述定义的函数Φ_t^A是 F 上的有向热带 *Pl¨ucker* 向量。此外，当 $(t_0, \ldots, t_n)$ 位于 Δ^n 的第 k^{th} 个顶点处（即，对于 $\ell \neq k$，$t_k = 1$ *and* $t_\ell = 0$），则 $\Phi_t^A = (\alpha_k)_* \Phi$。

证明。 对于任意元组 $X = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in F^{d+1}$ 和 $Y = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in F^{d-1}$，考虑实数列表

$$\{\Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{d+1}) \cdot \Phi_t^A(x_i, y_1, \ldots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}\}_{i=1\ldots,d+1}. \tag{3.2.2}$$

我们将考察元组X 和Y 与映射 (3.2.1) 的纤维相交的各种方式。令a_k 和b_k 分别表示X 和Y中落在 α_k 的像中的分量数。

如果X 在同一个纤维中包含 3 个或更多元素，那么对于任意i，元组

$$(\overline{x_1}, \ldots, \widehat{\overline{x_i}}, \ldots, \overline{x_n})$$

将至少有两个相等的分量，因此 $\Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{d+1}) = 0$。因此，(3.2.2) 中的所有数均为零，所以在$(X,Y)$ 处，有向热带 Pl¨ucker 关系平凡地成立。

假设X 在同一纤维中包含一对元素x_j、$x_{j'}$，因此$x_j = x_{j'}$，其中$x_j \in \mathrm{Im}(\alpha_k)$ 且$x_{j'} \in \mathrm{Im}(\alpha_{k'})$。那么，$\Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{d+1})$ 只有在$i = j$ 或$i = j'$时才可能非零。因此，式 (3.2.2) 中至多有两项非零。我们有

$$\begin{aligned}
&(-1)^j \Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{d+1}) \cdot \Phi_t^A(x_j, y_1, \ldots, y_{d-1}) \\
&= (-1)^j \Phi(\overline{x_1}, \ldots, \widehat{\overline{x_j}}, \ldots, \overline{x_{d+1}}) t_0^{a_0} \cdots t_k^{a_k - 1} \cdots t_n^{a_n} \cdot \Phi(\overline{x_j}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{d-1}}) t_0^{b_0} \cdots t_k^{b_k + 1} \cdots t_n^{b_n} \\
&= (-1)^j \Phi(\overline{x_1}, \ldots, \widehat{\overline{x_j}}, \ldots, \overline{x_{d+1}}) \cdot \Phi(\overline{x_j}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{d-1}}) t_0^{a_0 + b_0} \cdots t_n^{a_n + b_n},
\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
&(-1)^{j'} \Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x_{j'}}, \ldots, x_{d+1}) \cdot \Phi_t^A(x_{j'}, y_1, \ldots, y_{d-1}) \\
&= (-1)^{j'} \Phi(\overline{x_1}, \ldots, \widehat{\overline{x_{j'}}}, \ldots, \overline{x_{d+1}}) \cdot \Phi(\overline{x_{j'}}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{d-1}}) t_0^{a_0 + b_0} \cdots t_n^{a_n + b_n},
\end{aligned}$$

由于$x_j = x_{j'}$和 Φ 是交替的，这两个表达式相差一个符号。该符号等于$(-1)^{j+j'}$ 乘以将$(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{d+1})$对应到 $(x_1, \ldots, \widehat{x_{j'}}, \ldots, x_{d+1})$的唯一置换的符号，即 $(-1)^{j+j'+1}$。

现在考虑 X 在每个纤维中至多包含一个元素的情况。于是我们有

$$\begin{aligned}
&(-1)^i \Phi_t^A(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{d+1}) \cdot \Phi_t^A(x_i, y_1, \ldots, y_{d-1}) \\
&= (-1)^i \Phi(\overline{x_1}, \ldots, \widehat{\overline{x_i}}, \ldots, \overline{x_{d+1}}) \cdot \Phi(\overline{x_i}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{d-1}}) t_0^{a_0 + b_0} \cdots t_n^{a_n + b_n}.
\end{aligned}$$

t 的单项式是一个与 i 无关的常数，因此，在 (X, Y) 处， Φ_t^A 满足有向热带 Pl¨ucker 关系，因为 Φ 在 (X,Y) 处满足该关系。□

由此可直接得出，若 α 和 β 是$E \to F$之间的单射，则诱导映射 α_*, β_*： $\mathcal{M}(d,E) \to \mathcal{M}(d, F)$ 彼此同伦。此外，在底集可数无限的特殊情形下，我们有：

推论 3.2.2. 若 $\alpha, \beta : E \to \mathbb{N}$ 是单射，且各自的余集均为无限集，则 α_* 和β_* 同伦。

证明。若 $\alpha(\mathrm{E})^c \cap \beta(\mathrm{E})^c$ 为无限集，则取一个单射 $\gamma : \mathrm{E} \to \alpha(\mathrm{E})^c \cap \beta(\mathrm{E})^c \subset \mathbb{N}$。根据命题 3.2.1， α_* 和 β_* 均与 γ_*同伦。若交集 $\alpha(\mathrm{E})^c \cap \beta(\mathrm{E})^c$ 为有限集，则 $\alpha(\mathrm{E}) \smallsetminus \beta(\mathrm{E})$ 和 $\beta(\mathrm{E}) \smallsetminus \alpha(\mathrm{E})$ 必定均为无限集，因此可以取单射 $\gamma : \mathrm{E} \to \alpha(\mathrm{E}) \smallsetminus \beta(\mathrm{E})$ 和 $\delta : \mathrm{E} \to \beta(\mathrm{E}) \smallsetminus \alpha(\mathrm{E})$。于是我们有一列同伦

$$\beta_* \simeq \gamma_* \simeq \delta_* \simeq \alpha. \qquad \square$$

4. 单射的单纯形算子

在本节中，我们将构造一个通过上一节定义的滑动操作作用于拟阵格拉斯曼流形的幺半群上同调，然后证明它实际上是一个E_∞ 幺半群上同调。

一个最常见的E_∞ 幺半群上同调例子是小圆盘幺半群上同调，其中n元运算的空间是空间中$d \to \infty$ 个互不相交的n 个d维圆盘在一个大圆盘中的构形的余极限。我们构造的幺半群上同调与此类似，但我们使用的是 $\mathbb{N}$的无限子集，而不是大圆盘中的小圆盘。

4.1. 幺半群上同调背景。 我们回顾May72、May74]中的一些定义和结果。一个幺半群上同调由以下部分组成：

(1) 一个从有限集及双射范畴到空间的函子 $\mathscr{O}$（因此对称群 Σ_A 作用在每个空间 $\mathscr{O}(A)$）上）。(2) 对于有限集的每个映射 $\gamma : B \to A$，一个复合映射

$$\gamma^* : \mathscr{O}(A) \times \prod_{a \in A} \mathscr{O}(\gamma^{-1}(a)) \to \mathscr{O}(B)$$

满足以下条件。

复合映射必须满足结合性、含单位元性，并具有如下等变性：

(1)（含单位元性）存在一个指定元素 $1 \in \mathscr{O}(\{*\})$，使得对于任意 $\mathrm{x} \in \mathscr{O}(\mathrm{A})$，与恒等映射 $\mathrm{id} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 相对应的复合满足 $\mathrm{id}^*(\mathrm{x}, 1 \ldots, 1) = \mathrm{x}$；与映射 $\pi : \mathrm{A} \to \{*\}$ 相对应的复合满足 $\pi^*(1, \mathrm{x}) = \mathrm{x}$。(2)（等变性）给定 $\gamma : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$，以及一个保持元素在 A 上属于同一纤维这一关系的置换 $\sigma \in \Sigma_B$，则存在 $\mathscr{O}(\mathrm{A})$、$\prod_{a \in A} \mathscr{O}(\gamma^{-1}(\mathrm{a}))$ 和 $\mathscr{O}(\mathrm{B})$ 的诱导自同构，并且图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(A) \times \prod_{a \in A} \mathscr{O}(\gamma^{-1}(a)) & \xrightarrow{\gamma^*} & \mathscr{O}(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_*} \\ \mathscr{O}(A) \times \prod_{a \in A} \mathscr{O}(\gamma^{-1}(a)) & \xrightarrow{\gamma^*} & \mathscr{O}(B) \end{array}$$

可交换。

(3)（结合性）给定映射 $C \xrightarrow{\tau} B \xrightarrow{\gamma} A$，若令 τ_a 表示 τ 在$\gamma^{-1}(a)$上的限制，则

$$\gamma^* \circ \left(\prod_{a \in A} \tau_a^* \right) = \tau^* \circ \gamma^*.$$

幺半群上同调 $\mathscr{O}$ 对空间 X 的作用由以下映射组成

$$\mu_A : \mathscr{O}(A) \times X^A \to X$$

这些映射与对称群的作用相容，并且按照以下意义与 $\mathscr{O}$ 的复合映射相容：下图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(A) \times \prod_{a \in A} \mathscr{O}(\gamma^{-1}(a)) \times X^B & \xrightarrow{\gamma^* \times \mathrm{id}} & \mathscr{O}(B) \times X^B \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \prod \mu_{\gamma^{-1}(a)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ \mathscr{O}(A) \times X^A & \xrightarrow{\qquad \mu_A \qquad} & X \end{array}$$

可交换，并且对任意 $x \in X$，有 $\mu_{\{*\}}(1, x) = x$。

在紧生成空间范畴中，E_∞-幺半群上同调 是指满足以下条件的幺半群上同调：每个空间 $\mathscr{O}(A)$ 都是可缩的，且对称群 Σ_A 在其上的作用是自由的。如果一个 E_∞-幺半群上同调作用于空间 X，那么我们可以在二元运算的空间 $\mathscr{O}(\{1,2\})$ 中选取一个点，从而 X 成为一个同伦交换的 H- 空间。识别原理 [May74, 定理 2.3] 断言：如果 X 是类群（即 $\pi_0(X)$ 是一个群），那么 X 弱等价于一个无限循环空间；如果 X 不是类群，那么它的群完备化弱等价于一个无限循环空间。

4.2. 单射映射空间。固定将 $\mathbb{N}$ 划分为可数个无限基数的部分，

$$\mathbb{N} = P_0 \cup P_1 \cup \cdots.$$

例如，可以令 P_i $(i \geq 1)$ 为所有 i^{th} 次素数幂组成的集合，并令$P_0 = (P_1 \cup P_2 \cup \cdots)^c$。具体选择并不重要，因为不同的选择会得到同构的结果。给定一个有限集或可数无限集 A，令 $\mathscr{I}(A)$ 表示如下单纯复形：其顶点是单射映射 $\alpha : A \hookrightarrow \mathbb{N}$，满足其像$\alpha$ 包含于单个部分 P_i中；而 $\{\alpha_0, \ldots\ldots \alpha_n\}$ 张成一个n单纯形，当且仅当它们的像两两不相交。$\mathscr{I}(A)$ 中的任意一点都可以表示为顶点的形式有限凸和，

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \alpha_i$$

其中 $t_i \in (0,1)$，且满足 $\sum t_i = 1$，并且这些 α_i 张成一个n单纯形。

引理 4.2.1. 空间 $\mathscr{I}(A)$ 是可缩的。

证明。由于 $\mathscr{I}$(A) 是 CW复形，只需证明所有同伦群都是平凡的。由于球面 S^n 是紧的，任意映射 $f : S^n \to \mathscr{I}$(A) 的像都包含在由有限集 $\{\alpha_1、\ldots、\alpha_N\}$ 个顶点张成的子复形 K 中。每个 α_i 的像都包含在某个 P_{j_i} 中。选取足够大的 M，使得对于 $i = 1、\ldots、N$，$M > j_i$，并选取一个单射 $\beta : A \to P_M$。那么，β 的像与 K 中作为顶点出现的任何 α_i 都不相交。因此，如果 σ 是 K 的一个单纯形，那么 $\sigma \cup \{\beta\}$ 也必定是 K 的一个单纯形。于是，将锥顶映到顶点 β，即可得到从 K 上的锥到 $\mathscr{I}$(A) 的包含映射。由此可得

$$f : S^n \to K \hookrightarrow \mathrm{Cone}(K) \hookrightarrow \mathscr{I}(A)$$

是零伦的。 □

4.3. **一个 E∞运算子**。现在我们从空间 $\mathscr{I}(A)$ 构造一个幺半群上同调。对于一个有限集 A，定义

$$\mathscr{E}(A)=\begin{cases}\mathscr{I}(A\times\mathbb{N}) & |A|\geq 2,\\ \{\text{the bijection } \{a\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ given by } (a,n)\mapsto n\} & A=\{a\}.\end{cases}$$

给定有限集的一个映射 $\gamma: B\to A$，运算子复合映射

$$\gamma^*:\mathscr{E}(A)\times\prod_{a\in A}\mathscr{E}(\gamma^{-1}(a))\to\mathscr{E}(B) \tag{4.3.1}$$

构造如下。

我们首先在顶点层面描述 (4.3.1)。设 $\alpha: A\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是 $\mathscr{E}(A)$ 的一个顶点，并且对每个 $a\in A$，设 $\beta_a: \gamma^{-1}(a)\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是 $\mathscr{E}(\gamma^{-1}(a))$ 的一个顶点。我们可以将α 视为一组单射 $\alpha_a: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，其中 $a\in A$（满足：若 $|A|\geq 2$，则它们的像两两不交，且都位于 $\mathbb{N}$的划分中同一个部分 P_i）。集合$\{\beta_a\}_{a\in A}$ 可以表示为一族单射 $\{\beta_b: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\}_{b\in B}$，满足若$\gamma(b)=\gamma(b')$，则 β_b 和 $\beta_{b'}$ 的像不相交，但包含于同一个 P_i 中。于是，运算子复合映射 (4.3.1) 将

$$\left((\alpha_a)_{a\in A},(\beta_b)_{b\in B}\right)\mapsto(\alpha_{\gamma(b)}\circ\beta_b)_{b\in B},$$

它表示空间 $\mathscr{E}(B)$的一个顶点。

在顶点层面定义了复合映射 γ^* 之后，我们现在将其线性扩展到高维单形的乘积上。注意，如果 α^0、α^1、……、α^n 是 $\mathscr{E}(A)$ 中像两两不相交的顶点，那么对于任意的 $b\in B$，这些复合

$$\left(\alpha^i_{\gamma(b)}\circ\beta_b\right)_{i=0,\dots,n}$$

的像两两不相交。同样，如果 $(\beta^i_a)_{i=0}$、……、n 是 $\mathscr{E}(\gamma^{-1}(a))$ 中张成一个n-单纯形的顶点，那么对于任意的 $b\in B$，相应的复合 $\left(\alpha_{\gamma(b)}\circ\beta^i_b\right)_{i=1}$、……、$n$ 的像两两不相交。因此，γ^* 可从 $\mathscr{E}(A)\times\prod_{a\in A}\mathscr{E}(\gamma^{-1}(a))$的 0-骨架线性扩展到整个空间。

命题 4.3.1。空间 $\mathscr{E}(A)$ 构成一个 E_∞ 幺半群上同调。

证明。直接检查即可验证，上述构造的幺半群上同调复合映射满足结合性、具有单位元且是等变的。由定义可立即得出，对称群作用是自由的，而 $\mathscr{E}(A)$ 的可缩性已在引理 4.2.1 中证明。□

4.4. **定向赋值拟阵空间上的幺半群作用**。

定理 4.4.1。幺半群上同调 $\mathscr{E}$作用于空间 $\mathcal{M}=\coprod_d\mathcal{M}(d,\mathbb{N})$。

证明。我们必须给出作用映射

$$\mu_A:\mathscr{E}(A)\times\prod_{a\in A}\mathcal{M}(d_a,\mathbb{N})\to\mathcal{M}(d,\mathbb{N}),$$

其中 $d=\sum_{a\in A}d_a$。我们分两步构造这些映射。首先，应用拟阵直和映射

$$\prod_{a\in A}\mathcal{M}(d_a,\mathbb{N})\to\mathcal{M}\left(d,\coprod_{a\in A}\mathbb{N}\right)=\mathcal{M}(d,A\times\mathbb{N}).$$

接下来我们必须定义一个映射

$$\mathscr{E}(A)\times\mathcal{M}(d,A\times\mathbb{N})\to\mathcal{M}(d,\mathbb{N}).$$

左侧的一个点由以下部分组成：

- 形式线性组合 $\sum_i t_i\alpha_i$，其中 $t_i \in (0,1)$ 为满足 $\sum_i t_i = 1$ 的数，且 α_i 是互不相交的单射 $A \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$,
- 底集为 $A \times \mathbb{N}$ 的定向赋值拟阵 Φ。

我们将这对 $(\sum_i t_i\alpha_i, \Phi)$ 映射为定向赋值拟阵 $\Phi^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\,(t_0,\ldots,t_n)}$，该拟阵由拟阵滑动定义（命题 3.2.1）。□

$\mathcal{M}$ 的连通分支群是加法幺半群 $\mathbb{N}$，因此群完备化 $\Omega B\mathcal{M}$ 弱等价于一个具有连通分支群 $\mathbb{Z}$ 的无限循环空间。

参考文献

[AD02] Laura Anderson 和 James F. Davis，《组合格拉斯曼流形的模2上同调》，《Selecta Mathematica》新系列 8（2002），第2期，161–200页。[AD19] Laura Anderson 和 James F. Davis，《超域格拉斯曼流形》，《Advances in Mathematics》341（2019），336–366页。[And98] Laura Anderson，《组合格拉斯曼流形的同伦群》，《Discrete & Computational Geometry》20（1998），第4期，549–560页。[And99] ，《拟丛》，《代数组合学新视角》，剑桥：剑桥大学出版社，1999，1–21页。[BB19] Matthew Baker 和 Nathan Bowler，《部分超结构上的拟阵》，《数学进展》343（2019），821–863页。[Bis03a] Daniel K. Biss，《拟阵格拉斯曼流形的同伦型》，《数学年刊》（第二辑）158（2003），第3期，929–952页。[Bis03b] ，《定向拟阵、复流形及 BU 的组合模型》，《数学进展》179（2003），第2期，250–290页（英文）。[Bis09a] Daniel Biss，《〈定向拟阵、复流形及 BU 的组合模型〉勘误》，《数学进展》221（2009），第2期，681页（英文）。[Bis09b] Daniel K. Biss，《〈拟阵格拉斯曼流形的同伦型〉勘误》 *[*mr*2031856],*《数学年刊》（第二辑）170（2009），第1期，493页。[BLVS+99] Anders Bj¨orner、Michel Las Vergnas、Bernd Sturmfels、Neil White 和 G¨unter Ziegler，《定向拟阵》，第2版，《数学百科全书及其应用》第46卷，剑桥：剑桥大学出版社，1999（英文）。[Bor48] Karol Borsuk，《关于将紧空间系嵌入单纯复形》，Fundam. Math. 35（1948），217–234页。[BS19] Madeline Brandt 和 David E Speyer，《拟阵及其 Dressian 空间》，2019。[GM92] I. M. Gelfand 和 Robert D. MacPherson，《庞特里亚金类的组合公式》，Bull. Am. Math. Soc. 新系列 26（1992），第2期，304–309页（英文）。[HJJS09] Sven Herrmann、Anders Jensen、Michael Joswig 和 Bernd Sturmfels，《如何绘制热带平面》，《Electronic Journal of Combinatorics》16（2009），第2期，研究论文 r6，26页（英文）。[HJS14] Sven Herrmann、Michael Joswig 和 David E Speyer，《Dressian 空间、热带格拉斯曼流形及其射线》，《Forum Mathematicum》26（2014），第6期，1853–1881页（英文）。[Mac93] Robert MacPherson，《组合微分流形》，载于《现代数学中的拓扑方法》（纽约州石溪，1991），Publish or Perish，得克萨斯州休斯敦，1993，203–221页。[May72] J. P. May，《迭代环路空间的几何》，《数学讲义》271卷，施普林格，1972。[May74] ，E_∞ 空间、群完备化与置换范畴，载于《拓扑学新进展：1972年6月牛津代数拓扑研讨会论文集（经编辑和修订）》，剑桥大学出版社，1974。[McC66] M. C. McCord，《有限拓扑空间的奇异同调群与同伦群》，《Duke Mathematical Journal》33（1966），465–474页。[McC67] Michael C. McCord，《空间与其开覆盖相关复形的同伦型比较》，《美国数学会会刊》18（1967），第4期，705–708页。[Mne07] Nikolai Mnev，《论 D.K. Biss 的论文〈拟阵格拉斯曼流形的同伦型〉及〈定向拟阵、复流形及 BU 的组合模型〉》，arXiv:0709.1291，2007。[OPS19] Jorge Alberto Olarte、Marta Panizzut 和 Benjamin Schr¨oter，《关于拟阵的局部 Dressian 空间》，《格多面体上的代数组合学与几何组合学：格多面体夏季研讨会论文集

关于格多面体，2018年7月23日至8月10日，日本大阪，新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社，2019，309–329页（英文）。[Qui78] 丹尼尔·奎伦，群的非平凡 p-子群偏序集的同伦性质，《数学进展》**28**（1978），101–128页。 [Wei52] Andr´e Weil，论德拉姆定理。ˆ，《瑞士数学评论》**26**（1952），119–145页。