arXiv:2302.05522v1 [math.CV] 10 Feb 2023

Bergman 空间中的 Weissler 型与伯努利型不等式

Anton D. Baranov[a]、Ilgiz R. Kayumov[a, b]、Diana M. Khammatova[b, c, *]、Ramis Sh. Khasyanov[a]

[a]圣彼得堡国立大学，俄罗斯圣彼得堡 Universitetskaya 河岸街 7-9 号，邮编 199034[b]喀山联邦大学，俄罗斯喀山 Kremlyovskaya 街 18 号，邮编 420008[c]莫斯科理工大学，俄罗斯莫斯科 Bolshaya Semyonovskaya 街 38 号，邮编 107023

摘要

我们研究带有一般径向权重的 Bergman 空间上的 Weissler 型不等式，并给出关于权 w 的矩的条件，以确保当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $0 < r \le 1/\sqrt{n}$时，$\|f_r\|_{A^{2n}(w)} \le \|f\|_{A^2(w)}$成立。对于非整数指数，我们证明了该不等式的一个特殊情形，可将其视为伯努利不等式的某种类比。我们构造了一个单调权重的例子，使得这些不等式不再成立。

关键词：Bergman 空间、Weissler 不等式、伯努利不等式

1. 引言

我们研究圆盘中带一般径向权重的 Bergman 空间上的 Weissler 型不等式。尽管经典权函数的相关问题已得到广泛研究，但一般权重的情形此前似乎尚未探讨。本文旨在提出关于权的正则性/凸性条件，并用其矩来表述，以确保 Weissler 型不等式的一些特殊情形成立。我们证明，某种正则性是必需的，因为存在一些单调权重，甚至使 Weissler 型不等式的这些特殊情形也不成立。

为介绍我们的结果，先回顾一些定义和经典不等式。设函数f在单位圆盘 $\mathbb{D}$内解析。若满足下式，则称其属于 Hardy 空间 H^p, $0 < p < \infty$:

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

对于 $r \in (0, 1)$，令 $f_r(z) = f(rz)$。F. B. Weissler 的一个著名结果 [9] 指出，对于 Hardy 空间 H^p 和 H^q $(0 < p < q)$

$$\|f_r\|_{H^q} \le \|f\|_{H^p} \text{ for any } f \in H^p \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \le \sqrt{\frac{p}{q}} \le 1.$$

*通讯作者 电子邮箱：anton.d.baranov@gmail.com（Anton D. Baranov）、ikayumov@gmail.com（Ilgiz R. Kayumov）、dianalynx@rambler.ru（Diana M. Khammatova）、hasbendshurich@gmail.com（Ramis Sh. Khasyanov）

给定定义在 $[0,1)$ 上的可求和非负函数 w，若函数 f 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析，则称其属于加权 Bergman 空间 $A^p(w)$，如果

$$\|f\|_{A^p(w)} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p w(|z|)\, dA(z) \right)^{1/p} < \infty,$$

其中 A表示　　平面 Lebesgue 测度。我们将权 w 的矩定义为

$$h_m = \int_0^1 \rho^{m+1} w(\rho)\, d\rho, \qquad m \geq 0.$$

在下文中，我们始终假设归一化条件 $h_0 = 1$。

权 $w_\alpha(r) = 2(\alpha-1)(1-r^2)^{\alpha-2}$（其中 $\alpha > 1$）称为经典权函数。我们将带权 w_α 的 Bergman 空间记作 A^p_α。有关 Bergman 空间理论，请参见例如[4]。

经典 Carleman 不等式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{H^1}$$

$_\infty$对于 $f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n \in H^1$，可推出 $\|f\|_{A^2_2} \leq \|f\|_{H^1}$，因此很容易推得

$$\|f\|_{A^{2p}_2} \leq \|f\|_{H^p}, \qquad 0 < p < \infty.$$

以下 Carleman 不等式的推广由 J. Burbea [3]证明。设 $k \in \mathbb{N}$、$_\infty k \geq 2$ 和 $p = \frac{2}{k}$。那么，对于 $f(z) = \sum a_n z^n \in H^p$，$_{n=0}$

$$\|f\|_{A^2_{2/p}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{c_{2/p}(n)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{H^p}, \qquad c_\beta(n) = C^n_{n+\beta-1}. \tag{1}$$

>有人猜想 [2] 不等式 (1) 对所有 $0 < p \leq 2$ 都成立。在 $[2, 6]$ 中证明了一个与 (1) 类似的不等式，但其右侧的常数略差于 1。

许多作者也研究了 Bergman 空间的压缩不等式 A^p_α。特别是，F. Bayart、O. F. Brevig、A. Haimi、J. Ortega-Cerd`a 和 K.-M. Perfekt [1] 证明了 Weissler 不等式的以下对应结果。设 $0 < p \leq q < \infty$ 和 $\alpha = \frac{n+1}{2}$，其中某个$n \in \mathbb{N}$。那么，对于 $f \in A^p_\alpha$

$$\|f_r\|_{A^q_\alpha} \leq \|f\|_{A^p_\alpha} \text{ for any } f \in A^p_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad r \leq \sqrt{\frac{p}{q}} \leq 1. \tag{2}$$

这些问题取得了显著进展，这一进展发生在 2022 年（当时本文的初稿已经完成）。A.Kulikov [5] 证明了猜想中的不等式 (1) 对所有$0 < p \leq 2$都成立，他还证明了该不等式在每个系数上都是尖锐的。利用 Kulikov 论文中的结果和方法

P. Melentijevi´c [7] 证明了，对于任意满足 $q \geq 2$ 的 $0 < p < q < \infty$ 以及任意 $\alpha > 1$，(2) 都成立。此外，如果我们假设 f 没有零点，那么 (2) 对 $q < 2$ 也成立；而在一般情况下，这里只能得到 r 的一个下界。

本文关注具有一般径向权重的 Bergman 空间中式（2）的类似结果。我们的目标是找出权所需满足的条件，使 Weissler 型不等式成立。我们用权 w 的矩 h_{2m} 来表述这些条件。尽管目前的结果只涉及非常特殊的情形（偶整数指数或函数的特定选择），但我们猜想，在权满足这些或类似条件的情况下，结果可以推广到一般指数的情形。

注意到由柯西不等式可知，始终有 $h_{2m}^2 \leq h_{2(m-1)}h_{2(m+1)}$。下一定理中的条件是某种意义下的逆不等式。

定理 1.1. 设 w 是满足以下条件的 Bergman 权

$$\frac{h_{2m}}{h_{2(m-1)}} \geq \frac{m}{m+1}\frac{h_{2(m+1)}}{h_{2m}} \tag{3}$$

对所有 $m \geq 1$ 均成立。则对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\|f_r\|_{A^{2n}(w)} \leq \|f\|_{A^2(w)} \ \ for\ any\ f \in A^2(w) \quad \Longleftrightarrow \quad r \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1. \tag{4}$$

容易看出，式（3）对所有经典权函数 w_α 都成立。

现在我们转而研究 $A^2(w)$ 与 $A^{2q}(w)$ 之间的 Weissler 型不等式，其中 $q > 1$ 是任意实数。这个问题复杂得多，因为此时不能使用组合学。事实上，一个自然的猜想是：不等式 $\|f_r\|_{A^{2q}(w)} \leq \|f\|_{A^2(w)}$ 对 $r = \frac{1}{\sqrt{q}}$ 成立。换言之，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|f^q\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\sqrt{q}}\right)\right|^2 \rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho\right)^q. \tag{5}$$

为使取幂成为可能，我们考虑在 $\mathbb{D}$ 中不消失的函数。它们可以表示为 $f(z) = e^{\varphi(z)}$。设 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k$。由于 A^n_α 中的范数是用系数的模表示的，我们可以假设所有 $a_k \geq 0$。对于这类函数

$$f^q(z) = e^{q\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_n}z^k.$$

交换求和次序并代入自变量的值后，我们得到

$$f^q\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\sqrt{q}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{k!}\sum_{j_1+\ldots+j_k=n} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_k}\right)\frac{\rho^n e^{i\theta n}}{q^{n/2}}.$$

我们引入以下记号。

$$g_{nk} = \frac{1}{k!}\sum_{j_1+\ldots+j_k=n} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_k}.$$

那么，(5) 的左端可以表示为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|f^q\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\sqrt{q}}\right)\right|^2\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k g_{nk}\right)^2 h_{2n}.$$

同样，对于（5）右侧，我们有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho\right)^q=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}g_{nk}\right)^2 h_{2n}\right)^q.$$

因此，所需不等式可写成如下形式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k g_{nk}\right)^2 h_{2n}\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}g_{nk}\right)^2 h_{2n}\right)^q.$$

一般而言，这个不等式看起来相当复杂，因此考虑一些特殊情形似乎是合理的。例如，可以取函数 $f(z)=e^z$。在这种情况下，$g_{nk}=\frac{\delta_{nk}}{k!}$ 所需不等式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(n!)^2}h_{2n}\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right)^q. \tag{6}$$

尽管这只是一个特殊情形，但这个不等式似乎具有独立的研究价值，因为它可以看作矩序列的经典伯努利不等式的一个类似形式。应当强调的是，这里 h_{2n} 必须是某个权的矩序列，而且对于任意权（即使是单调权），这个不等式也未必成立。

下面的定理给出了不等式（6）的一个充分条件。我们必须将定理 1.1 中的条件（3）替换为关于矩的更强条件。

定理 1.2. 设 w 是一个伯格曼权。若不等式

$$\frac{h_{2m}}{h_{2(m-1)}}\ge\frac{h_{2(m+1)}}{(m+1)h_{2(m-1)}}+\frac{m}{m+1}\frac{h_{2(m+1)}}{h_{2m}} \tag{7}$$

对所有 $m\ge 1$ 都成立，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(n!)^2}h_{2n}\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right)^q,\qquad q\ge 1. \tag{8}$$

特别地，估计式 (7) 对所有标准伯格曼权 w_α 都成立；对于这些权，估计式会变为等式。因此，看起来满足 (7) 的权是将 (2) 推广到一般权的一类合适对象。

然而，对于任意权函数，（4）和（8）并不成立，因此我们确实需要施加一些正则性条件。

定理 1.3. 存在一个单调递减权函数 w，使得不等式

$$\|f_r\|_{A^{2q}(w)} \le \|f\|_{A^2(w)}$$

对于某些 $\varepsilon > 0$, $f(z) = e^z$, $r = \frac{1}{\sqrt{q}}$和 $q = 2$ 以及 $q \in (1, 1+\varepsilon)$ 均不成立。

本文安排如下。第 2 节证明定理 1.1，该定理给出了当 q 为偶数且 $p = 2$时，Bergman 空间中 Weissler 不等式的对应结果。第 3 节证明两个辅助引理，而第 4 节则用于证明定理 1.2 和定理 1.3。

2. 定理 1.1 的证明

我们需要证明以下不等式。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|f^n\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\sqrt{n}}\right)\right|^2 \rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho\right)^n. \tag{9}$$

设 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$。则 $f^n(z)$ 可表示为

$$f^n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_n}\right) z^k.$$

利用 Parseval 恒等式可以计算式 (9) 中的积分。因此，式 (9) 的左端为

$$\int_0^1 \rho w(\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_n}\right)^2\frac{\rho^{2k}}{n^k}\,d\rho = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_n}\right)^2 h_{2k}$$

而 (9) 的右端为

$$\left(\int_0^1 \rho w(\rho)\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\rho^{2k}\,d\rho\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\int_0^1 \rho^{2k+1}w(\rho)\,d\rho\right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}^2\cdot\ldots\cdot a_{j_n}^2 h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}.$$

由柯西不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{2k}}{n^k}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_n}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{2k}}{n^k}\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} a_{j_1}^2\cdot\ldots\cdot a_{j_n}^2 h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}\cdot\sum_{j_1+\ldots+j_n=k}\frac{1}{h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}}.$$

现在只需证明

$$\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} \frac{1}{h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}} \le \frac{n^k}{h_{2k}},$$

于是，所需的不等式将逐项成立。

由不等式（3）可知，对于 $m \ge n$

$$h_{2n}h_{2m} \ge \frac{n}{m+1}h_{2(n-1)}h_{2(m+1)}.$$

我们需要估计乘积 $h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}$，其中 $j_1+\ldots+j_n=k$。不失一般性，假设 $j_1 \le j_2$。于是

$$h_{2j_1}h_{2j_2} \ge \frac{j_1}{j_2+1}h_{2(j_1-1)}h_{2(j_2+1)} \ge \frac{j_1(j_1-1)}{(j_2+1)(j_2+2)}h_{2(j_1-2)}h_{2(j_2+2)} \ge$$
$$\ge \frac{j_1!}{(j_2+1)\ldots(j_2+j_1)}h_0h_{2(j_2+j_1)} = \frac{j_1!j_2!}{(j_1+j_2)!}h_0h_{2(j_2+j_1)}$$

接下来，不失一般性，假设 $j_1+j_2 \ge j_3$。于是

$$h_{2j_1}h_{2j_2}h_{2j_3} \ge \frac{j_1!j_2!}{(j_1+j_2)!}h_{2(j_1+j_2)}h_{2j_3} \ge \frac{j_1!j_2!j_3!}{(j_1+j_2+j_3)!}h_{2(j_1+j_2+j_3)}.$$

如此继续，最终得到

$$h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n} \ge \frac{j_1!j_2!\ldots j_n!}{(j_1+j_2+\ldots+j_n)!}h_{2(j_1+j_2+\ldots+j_n)} = \frac{j_1!j_2!\ldots j_n!}{k!}h_{2k}$$

因此，

$$\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} \frac{1}{h_{2j_1}\cdot\ldots\cdot h_{2j_n}} \le \frac{k!}{h_{2k}} \sum_{j_1+\ldots+j_n=k} \frac{1}{j_1!\cdot\ldots\cdot j_n!} = \frac{k!}{h_{2k}}\cdot\frac{n^k}{k!} = \frac{n^k}{h_{2k}}.$$

通过比较以下各项的系数，得到等式 $\sum_{j_1+\ldots+j_n=k} {}^{1}{}_{j_1!\ldots j_n!} = \frac{n^k}{k!}$

$$e^{nz} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kz^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_1+\ldots+j_m=k}\frac{z^k}{j_1!\cdot\ldots\cdot j_n!}.$$

至此，(9) 的证明完成。

还需证明数值 $r=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的尖锐性。为此，我们使用标准测试函数 $f(z)=1+\varepsilon z$ 其中 ε 可以任意小。于是，所需不等式左侧（即 $\|f_r\|^{2n}_{A^{2n}(w)}$）将等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|1+\varepsilon r\rho e^{i\theta}\right|^{2n}\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho = 1+n^2\varepsilon^2r^2\int_0^1\rho^3w(\rho)\,d\rho+O(\varepsilon^4)$$

而右侧（即 $\|f\|^{2n}_{A^2(w)}$）则为

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|1+\varepsilon\rho e^{i\theta}\right|^2\rho w(\rho)\,d\theta\,d\rho\right)^n = 1+n\varepsilon^2\int_0^1\rho^3 w(\rho)\,d\rho+O(\varepsilon^4).$$

将这些值与 $\varepsilon\to 0$ 进行比较可知，如果所需的不等式成立，则 $nr^2\le 1$，因此 $r\le\frac{1}{\sqrt{n}}$。

我们来证明，该定理适用于所有经典权函数 w_α。在这种情况下

$$h_{2n}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n)},$$

由此可得

$$\frac{h_{2(n+1)}}{(n+1)h_{2(n-1)}}+\frac{n}{n+1}\frac{h_{2(n+1)}}{h_{2n}}=\frac{n}{n+\alpha-1}=\frac{h_{2n}}{h_{2(n-1)}}.$$

因此，不等式 (7) 变为等式，特别地，较弱的条件 (3) 得以满足。定理 1.1 得证。

3. 两个引理

引理 3.1。设 g_n 是一个实数序列，满足对于 $n\ge 1$，$0<g_n\le g_{n-1}$ $g_0=1$，并且

$$\frac{g_n}{g_{n-1}}\ge\frac{n}{n+1}\frac{g_{n+1}}{g_n},\qquad n\ge 1. \tag{10}$$

那么不等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{g_{n-k}\cdot g_{k+2}}{((n-k)!)^2(k!)^2(k+1)(k+2)}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{g_{n-k+1}\cdot g_{k+1}}{((n-k)!)^2(k!)^2(n-k+1)(k+1)}.$$

对所有 $n\ge 0$ 都成立。

证明。我们可以写成

$$\begin{aligned}T_n:=&\sum_{k=0}^{n}\frac{g_{n-k}\cdot g_{k+2}}{((n-k)!)^2(k!)^2(k+1)(k+2)}-\\&-\sum_{k=0}^{n}\frac{g_{n-k+1}\cdot g_{k+1}}{((n-k)!)^2(k!)^2(n-k+1)(k+1)}=\\&=\frac{g_0\,g_{n+2}}{(n!)^2(n+1)(n+2)}-\frac{g_1\,g_{n+1}}{(n!)^2(n+1)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g_{n-k}\,g_{k+2}(2k-n+1)}{((n-k)!)^2((k+1)!)^2(k+2)}.\end{aligned}$$

情形 1. 设 n 为偶函数，即 $n=2m$。那么它可以表示为

$$\begin{aligned}T_{2m}:=&\frac{g_0\,g_{2m+2}}{((2m)!)^2(2m+1)(2m+2)}-\frac{g_{m+1}^2}{(m!)^2((m+1)!)^2(m+1)}+\\&+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g_{m+k+2}\,g_{m-k}}{((m+k+2)!)^2((m-k)!)^2}(-2m+4k^2+8k+2).\end{aligned}$$

我们记

$$t_k = \frac{g_{m+k+2}\, g_{m-k}}{\left((m+k+2)!\right)^2 \left((m-k)!\right)^2}(-2m+4k^2+8k+2)$$

并按以下方式引入数列 s_k。

$$s_0 = -\frac{g_{m+1}^2}{\left(m!\right)^2 \left((m+1)!\right)^2 (m+1)},$$

$$s_k = s_{k-1} \cdot \frac{(m-k+2)}{(m+k+1)} \frac{g_{m-k+1}\, g_{m+k+1}}{g_{m-k+2}\, g_{m+k}} + t_{k-1}, \qquad 0 \le k \le m.$$

通过归纳法很容易证明

$$s_k = -\frac{(2k+1) g_{m+k+1}\, g_{m-k+1}}{\left((m-k)!\right)^2 \left((m+k+1)!\right)^2 (m-k+1)}.$$

因此， $s_k < 0$。可以注意到，在每次迭代中，先前得到的结果都会乘以某个系数，并加到 t_{k-1} 上；这一过程从项 s_0 开始，而该项参与了 T_{2m}。

由条件（10）可得

$$\frac{p}{q+1} g_{p-1}\, g_{q+1} \le g_p\, g_q \le \frac{q}{p+1} g_{p+1} g_{q-1}, \qquad p < q. \tag{11}$$

因此,

$$g_{m-k+1}\, g_{m+k+1} \le \frac{(m+k+1)}{(m-k+2)} g_{m-k+2}\, g_{m-k}.$$

我们得出

$$s_k \ge s_{k-1} + t_{k-1} \ge s_{k-2} + t_{k-2} + t_{k-1} \ge \ldots \ge s_0 + \sum_{q=0}^{k-1} t_k.$$

因此,

$$T_{2m} \le \frac{g_0\, g_{2m+2}}{((2m)!)^2 (2m+1)(2m+2)} + s_m.$$

由性质 (11)

$$s_m = -\frac{(2m+1) g_2\, g_{2m+1}}{((2m+1)!)^2} \le -\frac{g_0\, g_{2m+2}}{((2m)!)^2 (2m+1)(2m+2)}$$

以及 $T_n = T_{2m} \le 0$。

情形 2。现在设 n 为奇数。在这种情况下

$$T_n := \frac{g_0\, g_{n+2}}{(n!)^2 (n+1)(n+2)} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{g_{\frac{n+3}{2}+k}\, g_{\frac{n+1}{2}-k}}{\left(\left(\frac{n+3}{2}+k\right)!\right)^2 \left(\left(\frac{n+1}{2}-k\right)!\right)^2}(-n+4k^2+4k-1).$$

与前面一样，我们记

$$t_k = \frac{g_{\frac{n+3}{2}+k}\, g_{\frac{n+1}{2}-k}}{\left(\left(\frac{n+3}{2}+k\right)!\right)^2 \left(\left(\frac{n+1}{2}-k\right)!\right)^2}(-n+4k^2+4k-1)$$

并引入数列

$$s_0 = t_0 = -\frac{2g_{\frac{n+3}{2}}\, g_{\frac{n+1}{2}}}{\left(\left(\frac{n+3}{2}\right)!\right)^2 \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

$$s_k = s_{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{n+3}{2} - k\right)}{\left(\frac{n+3}{2} + k\right)} \cdot \frac{g_{\frac{n+3}{2}+k}\, g_{\frac{n+1}{2}-k}}{g_{\frac{n+1}{2}+k}\, g_{\frac{n+3}{2}-k}} + t_k.$$

可以通过归纳法证明

$$s_k = -\frac{2(k+1)g_{\frac{n+3}{2}+k}\, g_{\frac{n+1}{2}-k}}{\left(\left(\frac{n+3}{2} + k\right)!\right)^2 \left(\left(\frac{n-1}{2} - k\right)!\right)^2 \left(\frac{n+1}{2} - k\right)}.$$

采用与偶数情形相同的推理，我们得到

$$T_n \le \frac{g_0\, g_{n+2}}{(n!)^2(n+1)(n+2)} + s_{\frac{n-1}{2}}.$$

由性质 (11) 得到

$$s_{\frac{n-1}{2}} = -\frac{(n+1)g_{n+1}\, g_1}{((n+1)!)^2} \le -\frac{g_0\, g_{n+2}}{(n!)^2(n+1)(n+2)}.$$

因此， $T_n \le 0$ 对于两种情形均成立。证明完毕。 □

引理 3.2. 若伯格曼权 w 对所有 $n \ge 1$均满足不等式 (7)，则

$$\frac{h_{2(n+1)}}{n+1} \le h_{2n} \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right), \qquad n \ge 1. \tag{12}$$

证明. 设 $n = 1$。由 H¨older 不等式可得估计

$$h_2^n = \left(\int_0^1 \rho^3 w(\rho)\, d\rho\right)^n \le \int_0^1 \rho^{2n+1} w(\rho)\, d\rho \cdot \left(\int_0^1 \rho w(\rho)\, d\rho\right)^{n-1} = h_{2n}$$

（回顾 $h_0 = 1$）。由条件 (7)（其中 $m = 1$），还可推出

$$h_4 \le \frac{2h_2^2}{h_2 + 1}. \tag{13}$$

因此,

$$2h_2 \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right) - h_4 \ge 2h_2 \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_2^k}{(k!)^2}\right) - \frac{2h_2^2}{h_2 + 1} \ge$$

$$\ge 2h_2 \ln I_0(2\sqrt{h_2}) - 2h_2^2\left(1 - \frac{h_2}{4}\right).$$

这里， I_0 是修正贝塞尔函数。回忆一下，修正贝塞尔函数 I_n定义为

$$I_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+n}}{m!(m+n)!},$$

相关联 与经典贝塞尔函数 J_n通过等式 $I_n(z) = e^{-\frac{in\pi}{2}} J_n(ze^{\frac{i\pi}{2}})$).

下文将使用函数 I_n 的以下三个性质，这些性质可在 [8, §2.12]中找到:

$$I_n'(x) = I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x), \tag{14}$$

$$\frac{2n}{x} I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x), \tag{15}$$

$$2I_n'(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x). \tag{16}$$

记 $2\sqrt{h_2} = t$ 并考虑函数

$$u_1(t) = 16 \ln I_0(t) - 4t^2 + \frac{t^4}{4}.$$

由于 $0 < h_2 \leq 1$, 我们的目标是证明 $u_1(t) \geq 0$ 对 $0 \leq t \leq 2$成立。根据$n = 0$的性质（(14)），我们有

$$u_1'(t) = \frac{16 I_1(t)}{I_0(t)} - 8t + t^3.$$

由于 $I_0(t) > 0$ 对 $t \geq 0$成立，我们需要考虑

$$16 I_1(t) - 8t I_0(t) + t^3 I_0(t).$$

利用性质 (15) 和 $n = 1$，我们得到表达式

$$t^3 I_0(t) - 8t I_2(t) =: t u_2(t)$$

对 $u_2(t)$ 求导，并利用性质 (14)–(16)，可得

$$u_2'(t) = 2t I_0(t) + t^2 I_1(t) - 4(I_1(t) + I_3(t)) \geq 2t I_0(t) - 4 I_1(t) - 4 I_3(t) =$$
$$= 2t I_2(t) - 4 I_3(t) = 2t I_2(t) - \frac{2}{3} t I_2(t) + \frac{2}{3} t I_4(t) = \frac{4}{3} t I_2(t) + \frac{2}{3} t I_4(t).$$

由于 $I_n(x) > 0, x > 0$，因此

$$u_2(t) \geq u_2(0) = 0$$

因此 u_1 也递增。接着

$$u_1(t) \geq u_1(0) = 0.$$

因此，我们证明了

$$\frac{h_4}{2} \leq h_2 \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2} \right).$$

假设不等式 (12) 对 $n-1$ 成立。显然，由 (7) 可得

$$\frac{h_{2n}}{h_{2(n-1)}} \geq \frac{n}{n+1}\frac{h_{2(n+1)}}{h_{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

因此，

$$\frac{h_{2(n+1)}}{n+1} \leq \frac{h_{2n}^2}{nh_{2(n-1)}} \leq \frac{h_{2n}}{h_{2(n-1)}} \cdot h_{2(n-1)} \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right),$$

这正是所需的不等式。 □

4. 定理 1.2 和定理 1.3 的证明

定理 1.2 的证明。我们考虑函数

$$\varphi(q) = \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n}\right) - q \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right).$$

其导数为

$$\varphi'(q) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2(n+1)} h_{2(n+1)}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n}} - \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right).$$

我们还取二阶导数

$$\varphi''(q) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2(n+1)(n+2)} h_{2(n+2)} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n} - \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2(n+1)} h_{2(n+1)}\right)^2}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n}\right)^2}.$$

将级数相乘，可见分子中的第一项为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{h_{2(n-k)} \cdot h_{2(k+2)}}{((n-k)!)^2(k!)^2(k+1)(k+2)}\right) q^n,$$

第二项等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{h_{2(n-k+1)} \cdot h_{2(k+1)}}{((n-k)!)^2(k!)^2(n-k+1)(k+1)}\right) q^n.$$

由于 (7) im 对于 $g_n = h_{2n}$，由 (10) 可知，我们可以应用引理 3.1，并得到对于所有 $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h_{2(n-k)} \cdot h_{2(k+2)}}{((n-k)!)^2(k!)^2(k+1)(k+2)} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{h_{2(n-k+1)} \cdot h_{2(k+1)}}{((n-k)!)^2(k!)^2(n-k+1)(k+1)}.$$

由此可得 $\varphi''(q) \le 0$。因此，当 $q \ge 1$ 时，$\varphi'(q) \le \varphi'(1)$。我们记

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2(n+1)}}{(n!)^2(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2} \cdot \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right).$$

由引理 3.2 可知

$$\frac{h_{2(n+1)}}{n+1} \le h_{2n} \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right), \qquad n \ge 1.$$

我们证明了级数的所有项

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{h_{2(n+1)}}{n+1} - h_{2n} \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right)\right),$$

除了 $n = 0$ 这一种情况外，都是负数。为了消去这个例外项，我们将它与含有 $n = 1$ 的项相加。

$$\begin{aligned} h_2 - \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right) + \frac{h_4}{2} - h_2 \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right) = \\ = h_2 + \frac{h_4}{2} - (1+h_2) \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{2k}}{(k!)^2}\right) \le \\ \le h_2 + \frac{h_4}{2} - (1+h_2) \ln\left(1 + h_2 + \frac{h_4}{4}\right) =: y(h_2, h_4). \end{aligned}$$

这个表达式关于 h_4 的导数

$$\frac{\partial y}{\partial h_4} = \frac{2 + 2h_2 + h_4}{8 + 8h_2 + 2h_4} > 0,$$

因此 y 随着 h_4 的增大而增大。回想一下，我们有 $h_4 \le \frac{2h_2^2}{1+h_2}$ （见（13））。因此，只需将这个值代入 y:

$$y\left(h_2, \frac{2h_2^2}{1+h_2}\right) = h_2 + \frac{h_2^2}{1+h_2} - (1+h_2) \ln\left(1 + h_2 + \frac{h_2^2}{2+2h_2}\right).$$

函数 $v(h_2) = y\left(h_2, \frac{2h_2^2}{1+h_2}\right)/(1+h_2)$ 与表达式 $y\left(h_2, \frac{2h_2^2}{1+h_2}\right)$ 同号。计算表明，其导数等于

$$v'(h_2) = -\frac{h_2^2(2 + 3h_2 + 3h_2^2)}{(1+h_2)^3(2 + 4h_2 + 3h_2^2)} \le 0.$$

Then

$$y\left(h_2, \frac{2h_2^2}{1+h_2}\right) \le y(0,0) = 0$$

对于所有 $h_2 \in (0, 1)$。因此，含有 $n = 0$ 的项不影响符号，且 $\psi < 0$。

我们证明了 $\varphi'(q) < 0$，因此

$$\varphi(q) \le \varphi(1) = \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right) - \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right) = 0.$$

由于对数是递增函数，我们最终得到所需的不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n} \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right)^q.$$

□

定理 1.3 的证明。考虑权

$$w^*(\rho) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\rho}, & 0 \le \rho \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2\rho}, & \dfrac{1}{2} < \rho \le 1. \end{cases}$$

于是 $h_n = \frac{1+2^{-n}}{2\ 1+n}$ ()。注意到 $h_0 = 1$，因此这个权是可容许的。它不是连续的，但我们总可以用连续甚至光滑的单调递减权函数来逼近它，使其矩 h_n 任意接近。

然而，可以通过数值检验发现，函数

$$\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n!)^2} h_{2n} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{2n}}{(n!)^2}\right)^q$$

在 $q = 1$ 处的导数为正（≈ 0.0048）。因此，函数 ψ 在 $q = 1$ 时等于零，随后递增。这意味着该值至少在某个区间 $(1, 1+\varepsilon)$ 上为正， $\varepsilon > 0$，而 (6) 不成立。此外，数值计算还表明 $\psi(2) \approx 0.0105 > 0$。

□

注 4.1. 正如我们在第 2 节末尾所示，对于经典权函数 w_α，不等式 (7) 变为等式。我们将说明，所有幂权函数 $w(\rho) = (m+2)\rho^m$, $m \ge 0$ （不一定为整数）也满足 (7)。事实上，我们有 $h_{2n} = \frac{2+m}{2+m+2n}$ 且

$$\frac{h_{2n}}{h_{2(n-1)}} - \left(\frac{h_{2(n+1)}}{(n+1)h_{2(n-1)}} + \frac{n}{n+1}\frac{h_{2(n+1)}}{h_{2n}}\right) = \frac{2m}{(1+n)(2+m+2n)(4+m+2n)} \ge 0.$$

经费资助

第 3 节和第 4 节（定理 1.2）的结果是在俄罗斯科学基金会项目 22-71-10094 的资助下取得的。本文的其他结果是在俄罗斯联邦科学与高等教育部协议编号 075-15-2021-602 的资助下取得的。

参考文献

[1] Bayart, F., Brevig, O.F., Haimi, A., Ortega-Cerd`a, J., Perfekt, K.-M.：Bergman 空间与乘法Hankel型的压缩不等式。Trans. Amer. Math. Soc. 371, no. 1, 681–707 (2019). DOI: 10.1090/tran/7290[2] Brevig, O.F., Ortega-Cerd`a, J., Seip, K., Zhao, J.：Hardy空间的压缩不等式。Funct. Approx. Comment. Math. 59, no. 41–56 (2017). DOI: 10.7169/facm/1680[3] Burbea, J.：全纯函数的尖锐不等式。Illinois J. Math. 31, no. 2, 248–264 (1987). DOI: 10.1215/ijm/1255989319[4] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K.：Bergman空间理论。数学研究生教材。施普林格出版社，纽约 (2000)[5] Kulikov, A.：在再生核处取得极值的泛函。Geom. Funct. Anal. 32, 938–949 (2022). DOI: 10.1007/s00039-022-00608-5[6] Llinares, A.：关于加权 Bergman 空间压缩不等式猜想。https://arxiv.org/abs/2112.09962[7]Melentijevi´c, P.：加权 Bergman 空间的超收缩不等式。https://arxiv.org/abs/2211.03655[8] Watson, G.N.：贝塞尔函数理论论著，第 2 版。剑桥大学出版社。英国剑桥 (1995)[9] Weissler F.B.：圆上的对数Sobolev不等式与超收缩估计。J. Funct. Anal. 37, no. 2, 218–234 (1980). DOI: 10.1016/0022-1236(80)90042-7