arXiv:2302.05526v1 [cs.DS] 10 Feb 2023

枚举 2-边/点连通诱导子图的线性延迟算法*

Takumi Tada[1] 和 Kazuya Haraguchi[1]

日本京都大学信息学研究生院

摘要。对于集合系统（V、$\mathcal{C} \subseteq 2^V$），我们将子集 $C \in \mathcal{C}$ 称为*component*。非空子集 $Y \subseteq C$ 是 *minimal removable set*（*MRS*），当且仅当 $C \setminus Y \in \mathcal{C}$，并且不存在满足 $C \setminus Z \in \mathcal{C}$的真非空子集 $Z \subsetneq Y$。本文研究这样一个问题：枚举集合系统中的所有分量，使得对于任意两个满足$C' \subsetneq C$, 的分量 C和 $C' \in \mathcal{C}$， C 的每个 MRS X 都满足 $X \subseteq C'$ 或 $X \cap C' = \emptyset$。我们为该问题提出了一种基于划分的算法，从而首次实现了枚举所有 2-边连通诱导子图以及枚举所有 2-点连通诱导子图的线性延迟算法。

关键词：子图枚举 · 2-边连通性 · 2-顶点连通性 · 二分划分 · 线性延迟。

1 引言

枚举问题要求无重复地输出所有可行解，而优化问题则要求仅输出一个关于目标函数而言最优的可行解。枚举是离散数学、 [12], 算法理论 [2]等领域的重要课题，同时在数据挖掘和生物信息学中也有许多实际应用 [1,10,11]。

给定一个图，子图枚举要求列出所有满足指定条件的子图。它可以在网络分析中发现有趣的子结构。团的枚举是此类问题之一 [3,4,9], ，其中团是指任意两个顶点都彼此相邻的子图，因此可以表示一群两两互为好友的社交网络服务用户。为了进一步拓展应用，人们还研究了满足较弱连通性条件的子图枚举问题，例如伪团 [16]。

本文研究满足最弱但基础的连通性条件——2-边连通性和2-点连通性——的子图枚举。对于正整数 k，如果删除任意 $k-1$ 条边（分别为任意 $k-1$ 个顶点）都不会使图断开，且存在 k 条边（分别为 k 个顶点），删除它们会使图断开，则称图为 k-边连通（分别为 k-点连通）。对于 $k = 2$的情形，我们考虑枚举所有诱导出2-边连通或2-点连通子图的顶点子集。

* 本研究部分获得了日本学术振兴会科研补助金项目编号 20K04978 的资助。

对于图 G，令 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集合和 G的边集合。枚举算法通常会输出许多解，其延迟是指：从算法开始运行到首次输出之间、任意两个连续输出之间，以及最后元素输出到算法终止之间的计算时间。如果延迟相对于输入规模被多项式（分别为线性函数）所界定，则该算法达到多项式延迟（分别为线性延迟）。

论文的主要结果总结在以下两个定理中。

定理 1 设 G 是一个简单无向图，$n := |V(G)|$，且 $m := |E(G)|$。G 的所有 2-边连通诱导子图均可在 $O(n + m)$ 延迟和空间内枚举。

定理 2 设 G 是一个简单无向图，$n := |V(G)|$，且 $m := |E(G)|$。G 的所有 2-点连通诱导子图均可在 $O(n + m)$ 延迟和空间内枚举。

我们首次实现了枚举 2-边/点连通诱导子图的线性延迟算法。Ito 等人 [8] 首次研究了 2-边连通诱导子图的枚举问题，并提出了一种基于反向搜索 [2] 的多项式延迟算法，其延迟为 $O(n^3m)$。Haraguchi 和 Nagamochi [6] 研究了汇合集合系统中的一个枚举问题，该系统将枚举 k-边连通（分别为 k-点连通）诱导子图作为特例，由此得到 $O(\min\{k + 1, n\}n^5m)$（分别为 $O(\min\{k+1, n^{1/2}\}n^{k+4}m)$）延迟算法。Wen 等人 [17] 提出了一种算法，用于枚举可诱导出 k-点连通子图的极大顶点子集，其总时间复杂度为 $O(\min\{n^{1/2}, k\}m(n+\delta(G)^2)n)$，其中 $\delta(G)$ 表示图 G中的最小度。

我们在一个更一般的框架下处理这两个子图枚举问题。对于一个由 V 个元素组成的集合，设 $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ 是 V 的一个子集族。称一对 $(V, \mathcal{C})$ 为集合系统；若 $C \in \mathcal{C}$，则称子集 $C \subseteq V$ 为一个分量。若 $C \setminus Y \in \mathcal{C}$，则分量 C 的非空子集 $Y \subseteq C$ 是 C 的可移除集。此外，若不存在作为 C 可移除集的 $Z \subsetneq Y$，则称 C 的可移除集 Y 是极小的，或称为极小可移除集（MRS）。我们用 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C)$ 表示 C 的所有 MRS 组成的族。下面引入集合系统的 SD 性质。

定义 1 若对于任意两个满足 $C \supsetneq C'$ 的分量 C、$C' \in \mathcal{C}$，对 C 的每个 MRS Y，均有 $Y \subseteq C'$ 或 $Y \cap C' = \emptyset$ 成立，则称集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 具有子集不相交（SD）性质。

我们考虑在具有 SD 性质的集合系统中，枚举给定分量的所有子集分量的问题。假设该集合系统由预言机隐式给出：对于分量 $C \in \mathcal{C}$ 和子集 $X \subseteq C$，若存在与 X 不相交的 C 的 MRS Y，预言机就返回该 MRS；否则返回 $\textsc{Nil}$。我们分别用 θ_t 和 θ_s 表示预言机的时间和空间复杂度。我们给出以下定理，这是证明定理 1 和定理 2 的关键。

定理 3 设 $(V,\mathcal{C})$ 是具有 SD 性质的集合系统，$C \in \mathcal{C}$ 是一个分量，$n := |C|$ 且 $q := \max\{|Y| \mid Y \in \textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C')\ C' \in \mathcal{C},\ C' \subseteq C\}$。所有作为 C 子集的分量都可以在 $O(q+\theta_t)$ 延迟和 $O(n+\theta_s)$ 空间内枚举；但输出 C 作为第一个分量需要 $\Theta(n)$ 时间。

论文的组织结构如下。我们在第2节进行准备工作后，在第3节给出一个算法，用于枚举具有 SD 性质的集合系统中、作为给定分量子集的所有连通分量，并进行复杂度分析，以此证明定理 3。随后在第4节证明定理 1 和定理 2。证明包含两个核心部分。第一部分中，给定一个 2-边连通（分别为 2-点连通）图 G，我们证明，如果 $V = V(G)$ 和 $\mathcal{C}$ 是诱导出 2-边连通（分别为 2-点连通）子图的所有顶点子集组成的族，那么集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 应具有 SD 性质。这意味着，可以使用为定理 3 开发的算法来枚举 2-边/点连通诱导子图。第二部分中，我们说明如何设计预言机，以实现线性延迟和空间。我们在第5节给出总结。

2 预备知识

令 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示整数集和非负整数集。对于两个整数 i、$j \in \mathbb{Z}$（$i \le j$），记 $[i,j] := \{i, i+1, \ldots, j\}$。

对于任意两个由元素组成的集合 P、Q，当 $P \cap Q = \emptyset$ 时，我们可以用 $P \sqcup Q$ 表示 P 和 Q 的不交并，以强调它们互不相交。

2.1 集合系统

令 $(V,\mathcal{C})$ 为一个不一定具有 SD 性质的集合系统。对于任意两个子集 U、$L \subseteq V$，记 $\mathcal{C}(U,L) := \{C \in \mathcal{C} \mid L \subseteq C \subseteq U\}$。回顾一下，对于一个分量 $C \in \mathcal{C}$，我们用 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C)$ 表示 C 的所有 MRS 构成的族。此外，对于 $X \subseteq C$，记 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,X) := \{Y \in \textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C) \mid Y \cap X = \emptyset\}$。对于满足 $C \supsetneq C'$ 的任意两个分量 C、$C' \in \mathcal{C}$，令 Y_1、Y_2、...、$Y_\ell \subseteq C \setminus C'$ 为满足 $Y_i \cap Y_j = \emptyset$、$1 \le i < j \le \ell$ 的子集，并且 $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \cdots \sqcup Y_\ell = C \setminus C'$（即 $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell\}$ 是 $C \setminus C'$ 的一个划分）。那么，$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell)$ 是一个（介于 C 和 C' 之间的）MRS序列，当且仅当

- $C' \sqcup Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_i \in \mathcal{C}$, $i \in [1,\ell]$；以及 -
  $Y_i \in \textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C' \sqcup Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_i)$，$i \in [1,\ell]$。

容易看出，对于每个 $C, C' \in \mathcal{C}$，只要满足 $C \supsetneq C'$，就存在一个 MRS序列；设有一个由连通分量组成的序列 $(C_0 := C, C_1, C_2, \ldots, C_{\ell-1}, C_\ell := C')$，使得 C_i, $i \in [1,\ell]$ 是 C_{i-1} 的所有包含 $C_\ell = C'$ 作为子集的子集中最大的连通分量。那么，$(Y_1 := C_{\ell-1} \setminus C_\ell, Y_2 := C_{\ell-2} \setminus C_{\ell-1}, \ldots, Y_\ell := C_0 \setminus C_1)$ 是 C 与 C' 之间的 MRS序列。

无论是否满足 SD 性质，以下引理均成立。

引理 1 对于任意集合系统 $(V, \mathcal{C})$，设 $C \in \mathcal{C}$ and $X \subseteq C$。有 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X) = \emptyset \iff \mathcal{C}(C, X) = \{C\}$。

证明。($\Longrightarrow$) 假设存在一个分量 $C' \in \mathcal{C}(C, X)$，使得 $C' \neq C$。则 $X \subseteq C' \subsetneq C$ 成立，并且在 C 和 C'之间存在一个 MRS序列，记为 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell)$。我们看到 $Y_\ell \in \mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C)$ 且 $Y_\ell \subseteq C \setminus X$。因此有 $Y_\ell \in \mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X)$，从而 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X) \neq \emptyset$。($\Longleftarrow$) 假设 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X) \neq \emptyset$。令 $Y \in \mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X)$，其中有 $Y \subseteq C$和 $Y \cap X = \emptyset$。于是我们看到 $C \setminus Y$ 是一个满足 $C \supsetneq C \setminus Y \supseteq X$ 的分量，这表明 $C \setminus Y \in \mathcal{C}(C, X)$。

□

如第 1 节所述，我们假设一个具有 SD 性质的集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 由预言机隐式给出。我们将该预言机记为 $\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}$。给定一个分量 $C \in \mathcal{C}$ 和一个子集 $X \subseteq C$ 作为对预言机的查询，$\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}(C, X)$ 在 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X) \neq \emptyset$ 时返回 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C, X)$ 中的一个 MRS，否则返回 $\textsc{Nil}$，其中我们分别用 θ_t 和 θ_s 表示时间复杂度和空间复杂度。

下面的引理给出了 SD 性质的一个必要但不充分条件。

引理 2 设具有 SD 性质的集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 已给定。对于每个分量 $C \in \mathcal{C}$，$\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C)$ 中的极小可移除集两两不相交。

证明。假设存在 Y_1、$Y_2 \in \mathrm{MRS}_{\mathcal{C}}(C)$ 使得 $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$。根据极小性，$Y_1 \not\subseteq Y_2$ 和 $Y_1 \not\supseteq Y_2$ 成立，由此可得 $Y_2 \setminus Y_1 \neq \emptyset$。于是，$C \setminus Y_1$ 是一个分量，使得 $(C \setminus Y_1) \cap Y_2 = (C \cap Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2) = Y_2 \setminus (Y_1 \cap Y_2) = Y_2 \setminus Y_1 \neq \emptyset$。由于否则将有 $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ 成立，因此 $C \setminus Y_1 \not\supseteq Y_2$ 成立。我们已经看到，$(C \setminus Y_1) \cap Y_2 = \emptyset$ 和 $C \setminus Y_1 \supseteq Y_2$ 均不成立，这与 $(V, \mathcal{C})$ 具有 SD 性质相矛盾。□

2.2 图

设 G 是一个简单无向图。对于顶点 $v \in V(G)$，我们用 $\deg_G(v)$ 表示 v 在图 G 中的度。令 $\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \deg_G(v)$。设 $S \subseteq V(G)$ 是顶点集的一个子集。由 S 诱导的子图是 G 的一个子图 G'，满足 $V(G') = S$ 且 $E(G') = \{uv \in E(G) \mid u, v \in S\}$，记作 $G[S]$。为简便起见，我们将诱导子图 $G[V(G) \setminus S]$ 记作 $G - S$。类似地，对于 $F \subseteq E(G)$，我们将顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G) \setminus F$ 的子图记作 $G - F$。

G 的割集是 $F \subseteq E(G)$ 的一个子集，使得 $G - F$ 不连通。特别地，我们将构成单元素割集的边称为桥。我们将 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 定义为G 的最小割集的基数，除非 $|V(G)| = 1$。如果 $|V(G)| = 1$，则将 $\lambda(G)$ 定义为 ∞。如果 $\lambda(G) \geq k$，则称 G 为k-边连通。G 的点割集是 $S \subseteq V(G)$ 的一个子集，使得 $G - S$不连通。特别地，我们将大小为二的点割集称为割点对，将构成单元素点割集的顶点称为割点。对于子集 $S \subseteq V(G)$，令 $\textsc{Art}(S)$ 表示所有割点的集合

$G[S]$中。我们将 G 的点连通度 κ（G）定义为 G 的最小点割集的基数，除非 G 是完全图。如果 G 是完全图，则将κ（G）定义为 $|V$（G）$|-1$。如果 $|V$（G）$|>k$且 κ（G）$\geq k$，则称 G 为 k-点连通。显然，当且仅当 G中没有桥（分别为没有割点）时，G 是2-边连通（分别为2-点连通）的。

命题 1 ([19]) 假设给定一个简单无向图 G。如果 $|V(G)|\geq 2$，则有 $\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$。

3 具有 SD 性质的集合系统中的分支枚举

本节提出一种算法，用于枚举具有 SD 性质的集合系统 $(V,\mathcal{C})$ 中给定分量的所有子集分量，并进行复杂度分析，以证明定理 3。

首先介绍设计枚举算法所需的具有 SD 性质的集合系统的数学基础。

引理 3 对于具有 SD 性质的集合系统 $(V,\mathcal{C})$，设 $C\in\mathcal{C}$ 为一个分量，且 $I\subseteq C$ 为 C 的子集。对于任意 $Y\in\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I)$，有 $\mathcal{C}(C,I)=\mathcal{C}(C\setminus Y,I)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y)$。

证明。根据定义，Y和 I这两个子集互不相交。$\mathcal{C}(C\setminus Y,I)$和 $\mathcal{C}(C,I\sqcup Y)$互不相交，因为前者中的每个分量都不包含 Y中的任何元素，而后者中的每个分量都将 Y 作为子集。对于等式，显然 $\mathcal{C}(C,I)\supseteq\mathcal{C}(C\setminus Y,I)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y)$成立。令$C'\in\mathcal{C}(C,I)$。若 $C'=C$，则 $C'\in\mathcal{C}(C,I\cup Y)$。否则（即若 $I\subseteq C'\subsetneq C$），则 $Y\subseteq C'$或 $Y\cap C'=\emptyset$成立。若 $Y\subseteq C'$，则 $C'\in\mathcal{C}(C,I\cup Y)$；否则，$C'\in\mathcal{C}(C\setminus Y,I)$。□

引理 4 对于具有 SD 性质的集合系统 $(V,\mathcal{C})$，设 $C\in\mathcal{C}$ 是一个分量，$I\subseteq C$ 是 C 的子集，且 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I):=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_k\}$。则有

$$\mathcal{C}(C,I)=\{C\}\sqcup\Big(\bigsqcup_{i=1}^{k}\mathcal{C}(C\setminus Y_i,I\sqcup Y_1\sqcup\cdots\sqcup Y_{i-1})\Big).$$

证明。由引理 3，我们有一个划分 $\mathcal{C}(C,I)=\mathcal{C}(C\setminus Y_1,I)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y_1)$。我们看到 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I\sqcup Y_1)=\{Y_2,\ldots,Y_k\}$，因为 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I\sqcup Y_1)\subsetneq\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I)$，且 $Y_1\cap Y_i=\emptyset, i\in[2,k]$ 由引理 2 得出。递归应用引理 3，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(C,I)&=\mathcal{C}(C\setminus Y_1,I)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y_1)\\&=\mathcal{C}(C\setminus Y_1,I)\sqcup\mathcal{C}(C\setminus Y_2,I\sqcup Y_1)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y_1\sqcup Y_2)\\&=\left(\bigsqcup_{i=1}^{k}\mathcal{C}(C\setminus Y_i,I\sqcup Y_1\sqcup\cdots\sqcup Y_{i-1})\right)\sqcup\mathcal{C}(C,I\sqcup Y_1\sqcup\cdots\sqcup Y_k),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C}(V,I\sqcup Y_1\sqcup\cdots\sqcup Y_k)=\{C\}$ 由引理 1 得出，因为 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C,I\sqcup Y_1\sqcup\cdots\sqcup Y_k)=\emptyset$。□

算法1 在 $\mathcal{C}(C, I)$ 中枚举所有连通分量的算法，其中 $C \in \mathcal{C}$ 是具有 SD 性质的集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 中的一个分量，且 I 是一个子集 of C

输入：一个分量 $C \in \mathcal{C}$ 和一个子集 $I \subseteq C$
输出：$\mathcal{C}(C, I)$ 中的所有连通分量

```
1: 过程 List(C, I)
2:     输出 C;
3:     X ← I;
4:     当 ComputeMrs_C(C, X) ≠ Nil 时
5:         Y ← ComputeMrs_C(C, X);
6:         List(C \ Y, X);
7:         X ← X ∪ Y
8:     结束循环
9: 结束过程
```

算法。设 $C \in \mathcal{C}$、$I \subseteq C$ 和 $\mathrm{Mrs}_{\mathcal{C}}(C, I) := \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$。引理 4 描述了 $\mathcal{C}(C, I)$ 的一个划分，使得对于 $\mathcal{C}(C_i, I_i)$ 存在一个类似的划分，其中 $C_i = C \setminus Y_i$ 和 $I_i = I \sqcup Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_{i-1}$、$i \in [1, k]$。因此，我们有一个算法，通过输出 C，然后对每个 $i \in [1, k]$ 递归地输出 $\mathcal{C}(C_i, I_i)$ 中的所有连通分量，来枚举 $\mathcal{C}(C, I)$ 中的所有连通分量。

对于 $C \in \mathcal{C}$ 和 $I \subseteq C$，算法1概述了一个过程，用于枚举 $\mathcal{C}(C, I)$ 中的所有连通分量。算法1中的过程 List 在第2行输出 C，并在第6行递归计算 $\mathcal{C}(C_i, I_i)$、$i \in [1, k]$。为达到我们的目的，只需调用 $\mathrm{List}(C, \emptyset)$，即可枚举 $\mathcal{C}(C, \emptyset)$ 中的所有连通分量。

为证明定理 3，我们在算法 2 中给出该算法的详细版本。我们主要使用栈来存储数据，可以通过使用数组并管理指向最后元素的索引，分别在常数时间内添加给定元素（压入）、查看最近添加的元素（最后元素）、移除最后一个元素（弹出），以及通过移除最近添加的元素将栈收缩至给定大小（收缩至）。在算法 2 中，算法 1 的集合 X 通过一个栈实现。此外，栈 Seq 存储 MRS，栈 Idx 存储 X 中父节点与子节点边界的索引，而整数 depth 表示算法 1 中递归的深度。根据引理 4 可知，该算法会枚举 $\mathcal{C}$ 中 C 的所有子集分量。为获得更好的时间复杂度，我们在第 4–6 行和第 13–15 行将替代方法应用于该算法，从而降低延迟 [15]。我们还可以只输出与前一次输出的差异来降低延迟。对于前一次输出 $C' \in \mathcal{C}$ 和 $Y \subseteq V$，如果该分量为 $C' \cup Y$（分别为 $C' \setminus Y$），我们就输出“$+Y$”（分别输出“$-Y$”）。输出第一个分量 C 需要 $\Theta(|C|)$ 时间，而在第 9 行和第 18 行追踪差异需要 $O(q)$ 时间，其中 $q = \max\{|Y| \mid Y \in \mathrm{Mrs}_{\mathcal{C}}(C') \quad C' \in \mathcal{C}(C, \emptyset)\}$。接下来讨论空间复杂度。栈 Ans 存储分量之间的差异，因此使用 $O(q)$ 空间。由于 Seq 在遍历子节点后会弹出 MRS，我们可以看到 Seq 存储的是一个分量与 C 之间的 MRS序列，因此它占用 $O(n)$ 空间。根据引理 2 和定义，栈 X 使用 $O(n)$ 空间

$\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}$，此外，Idx 仅使用 $O(n)$ 空间，因为最大深度为 n。

定理 3 的证明。根据引理 4，我们可以看到，算法 2 确实枚举了 $\mathcal{C}(C,\emptyset)$ 中的所有分量。我们首先证明，算法 2 除了需要 $\Theta(n)$ 的时间输出 C 作为第一个分量外，能够以 $O(q+\theta_t)$ 的延迟运行。我们应当输出 C 作为第一个分量，因此准备工作（即语句"Ans.push(C)"）需要 $\Theta(n)$ 的时间。我们将替代方法应用于我们的算法，因此可以看到，while 循环中的操作均在 $O(q+\theta_t)$ 的时间内完成。通过计算当前分量与前一个分量之间的差异，可以在 $O(q)$ 的时间内输出一个分量，第一个分量 C 除外。通过在深度发生变化之前和之后分别减去和加上一个 MRS，可以追踪该差异，因此需要 $O(q)$ 的时间。此外，根据定义，$\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}$ 可在 θ_t 的时间内运行，其他操作是加上和减去一个 MRS，其计算时间为 $O(q)$。

接下来，我们讨论算法 2 的空间复杂度。我们得到，深度的最大值为 n，因为在深度增加的过程中，输入连通分量的大小单调递减，而输入连通分量的 MRS 最初为空这一终止条件至多在深度为 n 时满足。接下来要证明的是，Seq、X 和 Idx 所占的空间为 $O(n)$。对于分量 $C' \in \mathcal{C}(C,\emptyset)$，我们得到，Seq 等价于 C' 与 C 之间的 MRS序列，因为每次深度增加之前，Seq 都会存储一个新的 MRS；每次深度减少之前，Seq 都会丢弃一个 MRS。X 可在 $O(n)$ 空间内存储，因为对于任意子集 $I \subseteq C'$，I 和 $\textsc{Mrs}_{\mathcal{C}}(C',I)$ 两两不相交。显然，Idx 使用 $O(n)$ 空间，因为最大深度为 n。由此可得，整体空间复杂度为 $O(n+\theta_s)$。□

4 枚举 2-边/点连通诱导子图

本节将给出定理 1 和定理 2 的证明。假设给定一个简单无向图 G，该图是 2-边连通的（分别为 2-点连通的）。在第4.1节中，我们将证明，当 $V = V(G)$ 且 $\mathcal{C}$ 是所有诱导出 2- 边连通子图（分别为 2- 点连通子图）的顶点子集所构成的族时，集合系统 $(V,\mathcal{C})$ 具有 SD 性质。这表明，可以通过上一节中的算法枚举所有 2-边/点连通诱导子图。然后在第4.2节中，我们将说明如何设计用于生成 MRS 的预言机，从而达到所需的计算复杂度。

4.1 构造具有 SD 性质的集合系统

我们定义

$$\mathcal{C}_e \triangleq \{C \subseteq V(G) \mid G[C] \text{ is 2-edge-connected and } |C| > 1\};$$
$$\mathcal{C}_v \triangleq \{C \subseteq V(G) \mid G[C] \text{ is 2-vertex-connected}\}.$$

算法 2 枚举以下集合系统的所有分量的算法
$C \in \mathcal{C}$ 中具有 SD 性质的 $(V, \mathcal{C})$

输入：具有 SD 性质的集合系统 $(V, \mathcal{C})$ 和分量 $C \in \mathcal{C}$
输出：C 中属于 $\mathcal{C}$的所有分量子集

Ans, Seq, X, $Idx \leftarrow$ 空栈; $C' \leftarrow C$;
Ans.压入("C"); Idx.压入(0); $depth \leftarrow 1$;
当 $depth \neq 0$ 时
  如果 $depth$ 为奇数，则
    输出 Ans; Ans.清除()
  结束 if;
  如果 $\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}(C', X) \neq \textsc{Nil}$ 那么 ▷模拟递归调用
    $Y \leftarrow \textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}}(C', X)$;
    Ans.压入("$-Y$");
    Seq.压入(Y); $C' \leftarrow C' \setminus Y$; Idx.压入(X.length());
    $depth \leftarrow depth + 1$
  else ▷回溯
    如果 $depth$ 是偶数，则
      输出 Ans; 清空 Ans。
    结束 if;
    $C' \leftarrow C' \cup Seq$.最后元素();
    X.收缩至(Idx.最后元素()); Idx.弹出();
    Ans.压入("$+Seq$.最后元素()");
    X.压入(Seq.最后元素());
    Seq.弹出(); $depth \leftarrow depth - 1$
  结束 if
结束 while

我们的问题是枚举 $\mathcal{C}_e$ 或 $\mathcal{C}_v$ 中的所有子集。为使问题在我们的表述中易于处理，我们不将单点集（按定义属于 2-边连通分量）纳入 $\mathcal{C}_e$。下面的引理可由命题 1 直接得出。

引理 5 对于简单无向图 G，有 $\mathcal{C}_v \subseteq \mathcal{C}_e$。

简单无向图 G 的块是一个不含割点的极大连通子图。G 的每个块都是一个孤立顶点；一条割边（即删除该边后会增加连通分量数量的边）；或一个极大 v-分量；例如，参见 [18]中的注释 4.1.18。下面的引理是显然的。

引理 6 对于给定的简单无向图 G，设 $C \in \mathcal{C}_e$ 为一个 e-分量。则有 $C = \bigcup_{H \in \textsc{Max}_v(C)} H$。

我们处理如下集合系统（V、$\mathcal{C}$）：$V = V(G)$ 且 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}_e, \mathcal{C}_v\}$。我们使用第 2.1 节中介绍的集合系统相关记号和术语，讨论在 $\mathcal{C}_e$ 或 $\mathcal{C}_v$中枚举子集的问题。对于$S \subseteq V(G)$，如果 $S \in \mathcal{C}_e$（$S \in \mathcal{C}_v$），我们称 S 为 e-分量（分别为 v-分量）。根据引理 5，每个 v-分量都是 e-分量。令 $\textsc{Max}_e(S)$

（分别为 $\mathrm{MAX}_v(S)$）表示 S的子集中的所有极大 e-分量（分别为 v-分量）所组成的族。对于 e-分量 $C \in \mathcal{C}_e$ （分别为 v-分量 $C \in \mathcal{C}_v$），为简便起见，我们将 C 的所有极小可移除集所组成的族 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}_e}(C)$（分别为 $\mathrm{MRS}_{\mathcal{C}_v}(C)$）记作 $\mathrm{MRS}_e(C)$（分别为 $\mathrm{MRS}_v(C)$）。我们称 $\mathrm{MRS}_e(C)$中的 MRS（分别为 $\mathrm{MRS}_v(C)$中的 MRS）为 C 的 e-MRS（分别为 C的 v-MRS）。极小 e-分量 $C \in \mathcal{C}_e$ 诱导出一个环（即 $G[C]$ 是一个环），因为根据定义，没有单元素集包含于 $\mathcal{C}_e$ 中；在此情况下，有$\mathrm{MRS}_e(C) = \emptyset$。

对于 $P \subseteq S \subseteq V(G)$，若对每个 $u \in P$ 都成立 $\deg_{G[S]}(u) = 2$，则称 P 为 $G[S]$中的二度路径（简称 S 中的二度路径）。特别地，若不存在满足 $P \subsetneq P'$ 的二度路径 P' 属于 S，则称 P 是 S 中的极大二度路径。极大二度路径也可能只包含一个顶点。对于一个 e-分量$C \in \mathcal{C}_e$，我们用 $\mathrm{CAN}_{=2}(C)$ 表示其中所有极大二度路径构成的族。我们还记 $\mathrm{CAN}_{>2}(C) := \{\{v\} \mid v \in C, \deg_{G[C]}(v) > 2\}$，并定义$\mathrm{CAN}(C)$ $\mathrm{CAN}_{=2}(C)$ $\sqcup\, \mathrm{CAN}_{>2}(C)$。显然，$C$ 中的每个顶点都属于 $\mathrm{CAN}_{=2}(C)$ 中的一条极大二度路径，或属于 $\mathrm{CAN}_{>2}(C)$ 中的一个单点；后者不存在满足 $\deg_{G[C]}(v) \leq 1$ 的顶点 $v \in C$，因为 $G[C]$ 是 2-边连通的。

设 G 为一个简单无向图。对于 e-分量（分别地，v-分量），e-MRS（分别地，v-MRS）的集合由引理 7（分别地，引理 8）刻画，其中我们看到，对于每个 v-分量 $C \in \mathcal{C}_v$， $\mathrm{MRS}_v(C)$ $\subseteq \mathrm{MRS}_e(C)$ 成立。

引理 7（ [8] 中的观察 3）对于简单无向图 G，设 $C \in \mathcal{C}_e$。则 $\mathrm{MRS}_e(C)$ $= \{Y \in \mathrm{CAN}(C) \mid C \setminus Y \in \mathcal{C}_e\}$ 成立。

引理 8 对于简单无向图 G，设 $C \in \mathcal{C}_v$。则 $\mathrm{MRS}_v(C)$ $=\{Y \in \mathrm{CAN}(C)$ $\mid C \setminus Y \in \mathcal{C}_v\}$ 成立。

证明。记 $\mathcal{M} := \{Y \in \mathrm{CAN}(C) \mid C \setminus Y \in \mathcal{C}_v\}$。

（$\supseteq$）设 $Z \in \mathcal{M}$。我们看到 $C \setminus Z \in \mathcal{C}_v$ 成立，因此由引理 5 可知 $C \setminus Z \in \mathcal{C}_e$ 成立。根据 $Z \in \mathrm{CAN}(C)$ 和引理 7， Z 是 C 的一个 e-MRS。没有非空真子集 $Z' \subsetneq Z$ 满足 $C \setminus Z' \in \mathcal{C}_v$，否则 $C \setminus Z' \in \mathcal{C}_e$ 将成立，这与 Z 是 C 的一个 e-MRS 矛盾。我们看到 $Z \in \mathrm{MRS}_v(C)$。

($\subseteq$) 令 $Y \in \mathrm{MRS}_v(C)$，且 $C' := C \setminus Y$。显然， $C' \in \mathcal{C}_v$。我们证明 $Y \in \mathrm{CAN}(C)$。对于 $|Y| = 1$ 的情况，令 $u \in Y$ 为一个顶点。根据命题 1，可知 $\deg_{G[C]}(u) \geq 2$ 成立，因此 $\{u\} \in \mathrm{CAN}(C)$ 成立。假设 $|Y| > 1$ 成立。对于任意顶点 $v \in Y$，我们可知 $\deg_{G[C' \cup \{v\}]}(v) \leq 1$ 成立；否则，将存在一个顶点 $w \in Y$，使得 $C' \cup \{w\} \in \mathcal{C}_v$ 和$\{w\} \subsetneq Y$,，这与 Y 的极小性矛盾。由 $G[C]$的连通性，存在一个 $xy \in E(G[C])$，使得 $x \in C'$ 且 $y \in Y$。令 $z \in C'$ 为一个满足$x \neq z$的顶点；这样的 z 存在，因为 C' 是一个 v-分量，因此 $|C'| > 2$。由于 $G[C]$是 2-顶点连通的，因此在$G[C] - \{x\}$中， y 与 z 之间必然存在一条最短路径 P。假设沿着路径 P从 y开始依次访问各顶点，并令 $z' \neq y$表示满足 $\deg_{G[C' \cup \{z'\}]}(z') = 1$的第一个顶点。我们用 $P' \subseteq P$表示在 P 中位于 y与 z'之间的顶点子集。路径 P'是 $C' \cup P'$ 中的一条极大二度路径。根据定义， z' 与 x 不相邻，因此 x 不可能是 $G[C' \cup P']$中的割点。于是 $C' \cup P' \in \mathcal{C}_v$，并且

$P' \subseteq Y$成立，因此根据 Y 的极小性，$P' = Y$成立，从而 $Y \in \mathrm{CAN}(C)$ 成立。□

如果简单无向图 G 是 2-边连通（分别地，2-点连通），那么集合系统 $(V(G)\ \mathcal{C}_e)$（分别地，$(V(G)\ \mathcal{C}_v)$）具有 SD 性质，如下文引理9（分别地，引理10）所示。

引理 9 对于简单无向 2-边连通图 G，集合系统 $(V(G)\ \mathcal{C}_e)$ 具有 SD 性质。

证明。由于 G 是 2-边连通的，我们可知 $V(G) \in \mathcal{C}_e$。设 C、$C' \in \mathcal{C}_e$ 为 e-分量，使得 $C \supsetneq C'$，并且 $Y \in \mathrm{MRS}_e(C)$ 是 C 的一个 e-MRS。我们证明 $Y \subseteq C'$ 或 $Y \cap C' = \emptyset$ 成立。$|Y| = 1$ 的情形显然。假设 $|Y| > 1$。根据引理 7，Y 在 $G[C]$ 中诱导出一条极大二度路径，使得对任意 $u \in Y$，均有 $\deg^{G[C]}(u) = 2$。如果 $Y \not\subseteq C'$ 且 $Y \cap C' \neq \emptyset$，那么将存在两个相邻顶点 v、$v' \in Y$，使得 $v \in C \setminus C'$ 且 $v' \in C'$；由此可知 $\deg^{G[C']}(v') \leq 1$ 成立。C' 是一个 e-分量，因此 $|C'| \geq 2$。根据命题 1，我们得到 $1 \geq \delta(G[C']) \geq \lambda(G[C'])$，这与 $C' \in \mathcal{C}_e$ 矛盾。□

引理 10 对于简单无向 2-点连通图 G，集合系统 $(V(G)\ \mathcal{C}_v)$ 具有 SD 性质。

证明。由于 G 是 2-点连通的，我们看到 $V(G) \in \mathcal{C}_v$。令 C、$C' \in \mathcal{C}_v$ 为 v-分量，使得 $C \supsetneq C'$，并令 $Y \in \mathrm{MRS}_v(C)$ 为 C 的一个 v-MRS。我们证明 $Y \subseteq C'$ 或 $Y \cap C' = \emptyset$ 成立。$|Y| = 1$ 的情形显然。假设 $|Y| > 1$。根据引理 8，Y 在 $G[C]$ 中诱导出一条极大二度路径，使得对于任意 $u \in Y$，都有 $\deg^{G[C]}(u) = 2$。若 $Y \not\subseteq C'$ 且 $Y \cap C' \neq \emptyset$，则存在两个相邻顶点 v、$v' \in Y$，使得 $v \in C \setminus C'$ 且 $v' \in C'$，由此可见 $\deg^{G[C']}(v') \leq 1$ 成立。C' 是一个 v-分量，因此 $|C'| > 2$。根据命题 1，我们得到 $1 \geq \delta(G[C']) \geq \kappa(G[C'])$，这与 $C' \in \mathcal{C}_v$ 矛盾。□

4.2 在线性时间和空间内计算 MRS

设 G 是一个简单无向图。我们描述如何在线性时间和空间内计算一个 e-分量的 e-MRS。计算 v-分量的 v-MRS 的情形也可以用几乎相同的方法处理。

具体而言，对于给定的 e-分量 $C \in \mathcal{C}_e$ 和子集 $X \subseteq C$，我们要如何设计预言机 $\mathrm{ComputeMRS}_{\mathcal{C}_e}(C, X)$，使其在线性时间和空间内，在 $\mathrm{MRS}_e(C, X) \neq \emptyset$ 时输出一个 e-MRS $A \in \mathrm{MRS}_e(C, X)$，否则输出 NIL。接下来，我们将推导出一个更强的结果：$\mathrm{MRS}_e(C, X)$ 中的所有 e-MRS 均可在线性延迟和空间内枚举。

证明思路如下。

(1) 我们证明，对于枚举 $\mathrm{MRS}_e(C, X)$ 中的 e-MRS，只需分别考察每个 $S \in \mathrm{MAX}_v(C)$ 的 $\mathrm{MRS}_e(S, X)$ 即可。这表明我们可以假设 C 是一个 v-分量。相关结果总结为推论1，随后给出引理 11。

(2) 借助某个辅助图，我们证明可以在线性时间和空间内输出 $\textsc{Can}(C)$ 中作为 C 的 e-MRS 的所有候选者（引理 13）；请注意，根据引理 7，所有 e-MRS 的候选者都包含在 $\textsc{Can}$(C) 中。

引理 11 对于一个简单无向 2-边连通图 G，令 $V := V(G)$，并令 $Y \subsetneq V$ 为 V 的任意子集。则 Y 是 V 的 e-MRS，当且仅当存在 $S \in \textsc{Max}_v(V)$ 使得

(i) 对于满足 $S' \neq S$的每个 $S' \in \textsc{Max}_v(V)$，$Y \cap S' = \emptyset$ 均成立；并且 (ii) Y 要么是由 S 中除一个顶点外的所有顶点组成的路径，要么是 S的 e-MRS。

证明。对于必要性，每个 v-分量 $S \in \textsc{Max}_v(V)$ 都是一个 e-分量。根据 SD 性质的定义，$Y \subsetneq S$ 或 $Y \cap S = \emptyset$ 必然成立。假设存在两个不同的 v-分量 S、$S' \in \textsc{Max}_v(V)$，使得 $Y \subsetneq S$ 且 $Y \subsetneq S'$。由于 $1 \geq |S \cap S'| \geq |Y| \geq 1$，这将导致 $|Y| = 1$，其中第一个不等式由两个块至多共享一个顶点这一事实得到（例如，见 [18]中的命题 4.1.19）。于是 Y 是一个仅由 G的某个割点组成的单元素集合，这与 Y 是 V的 e-MRS 相矛盾。至多存在一个 $S \in \textsc{Max}_v(V)$ 将 Y 作为真子集包含其中；这样的 S 必然存在，因为根据引理 6，在 $\textsc{Max}_v(V)$ 中至少有一个 v-分量与 Y 相交，这证明了 (i)。为证明 (ii)，假设 $G[S]$ 是一个环。则 $|S \cap \textsc{Art}(V)| = 1$成立；若 $|S \cap \textsc{Art}(V)| \geq 2$，则 S 中的单元素集合或路径都不是 V的 e-MRS，这与 $Y \subsetneq S$相矛盾；若 $|S \cap \textsc{Art}(V)| = 0$，则 S 是 G中的一个连通分量，这与 G 连通相矛盾。因此，Y 应当是 S 中的一条路径，该路径包含除唯一割点外的所有顶点。假设 $G[S]$ 不是一个环。令 u、$v \in S$ 为两个不同的顶点。我们断言，u 与 v 之间的每条路径都不应经过 S 之外的顶点；若存在这样的路径，则该路径经过的 v-分量的并集将是一个包含 S的 v-分量，这与 S的极大性相矛盾。在图 $G - Y$中，任意两个顶点 u、$v \in S - Y$之间至少存在两条边不相交路径。这些路径不经过 S之外的任何顶点，因此 $S - Y$是一个 e-分量。容易看出，$Y \in \textsc{Can}(S)$。

对于充分性，假设 $G[S]$ 是一个环。根据定义，S 不存在 e-MRS。集合 Y 应当是一条包含 S 中除一个顶点外所有顶点的路径，并且根据 (i)，未包含在 Y 中的顶点应当是一个割点（这意味着 $|S \cap \textsc{Art}(V)| = 1$）。假设 $G[S]$ 不是一个环。由于 S 是一个非极小 e-分量，S 存在一个 e-MRS。令 Y 为满足 (i) 的 S 的一个 e-MRS，也就是说，Y 在 $\textsc{Art}(V)$ 中不包含割点。无论哪种情况，都容易看出 $V \setminus Y$ 是一个 e-分量，且 $Y \in \textsc{Can}(V)$ 成立，这表明 Y 是 V 的一个 e-MRS。□

推论1 对于给定的简单无向图 G，设 $C \in \mathcal{C}_e$ 是一个 e-分量。那么有

$$\begin{aligned}\textsc{Mrs}_e(C) = \big(&\bigsqcup_{S\in \textsc{Max}_v(C):\ G[S]\ \textit{is not a cycle}} \{Y \in \textsc{Mrs}_e(S) \mid Y \cap \textsc{Art}(C) = \emptyset\}\big) \\ &\sqcup \big(\bigsqcup_{S\in \textsc{Max}_v(C):\ G[S]\ \textit{is a cycle and}\ |S\cap \textsc{Art}(C)|=1} (S \setminus \textsc{Art}(C))\big).\end{aligned}$$

根据该推论，要获得 e-分量 C 的 e-MRS，只需分别检查 $\textsc{Max}_v(C)$ 中的所有极大 v-分量。

我们观察推论1右侧的第一个族。设 C 是一个 v-分量，且 $G[C]$ 不是环。对于每条路径 $P \in \textsc{Can}_{=2}(C)$，恰有两个顶点 $u, v \in \textsc{Can}_{>2}(C)$，使得 u 与 P 的一个端点相邻，而 v 与 P 的另一个端点相邻。我们称这样的 u, v 为 P 的边界。我们将 P 的一对边界记为 $B(P)$，即 $B(P) := uv$。我们定义 $\Lambda_{>2}(C) \{uv \in E(G) \mid u, v \in \textsc{Can}_{>2}(C)\}$。令 $\Lambda(C) := \textsc{Can}_{=2}(C) \sqcup \Lambda_{>2}(C)$。接着定义一个辅助图 H_C，使得

$$\begin{aligned}V(H_C) :=& \textsc{Can}_{>2}(C) \sqcup \textsc{Can}_{=2}(C) \sqcup \Lambda_{>2}(C) \\ =& \textsc{Can}_{>2}(C) \sqcup \Lambda(C) = \textsc{Can}(C) \sqcup \Lambda_{>2}(C), \\ E(H_C) :=& \{uP \subseteq V(H_C) \mid u \in \textsc{Can}_{>2}(C),\ P \in \textsc{Can}_{=2}(C),\ u \in B(P)\} \\ &\sqcup \{ue \subseteq V(H_C) \mid u \in \textsc{Can}_{>2}(C),\ e \in \Lambda_{>2}(C),\ u \in e\}.\end{aligned}$$

我们将 $\textsc{Can}_{>2}(C)$ 中的顶点称为普通顶点，而将 $\Lambda(C) = \textsc{Can}_{=2}(C) \sqcup \Lambda_{>2}(C)$ 中的顶点称为辅助顶点。

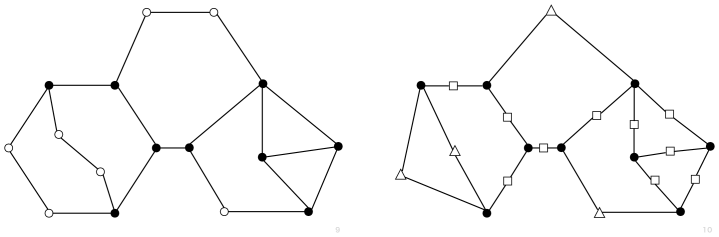
辅助图 H_C 通过如下方式编辑 $G[C]$ 得到：将每条路径 $P \in \textsc{Can}_{=2}(C)$ 替换为一个顶点（它是 $\textsc{Can}_{=2}(C)$ 中的辅助顶点）；然后在连接 $\textsc{Can}_{>2}(C)$ 中两个顶点的每条边上插入一个顶点（它是 $\Lambda_{>2}(C)$ 中的辅助顶点）。显然，H_C 是 2-点连通的。

图1 给出了给定 v-分量 C 的辅助图示例。在 (a) 中，我们看到 C 由 16 个顶点组成。集合 $\textsc{Can}_{>2}(C)$ 由九个黑色圆形顶点组成，而 $\textsc{Can}_{=2}(C)$ 由七个白色圆形顶点构成的四条路径组成，其中一条路径是单顶点路径。辅助图 H_C 如 (b) 所示，其中 $\textsc{Can}_{>2}(C)$ 同样由黑色圆形顶点组成，$\textsc{Can}_{=2}(C)$ 由白色三角形顶点组成，$\Lambda_{>2}(C)$ 由白色方形顶点组成。

对于 $P \in \textsc{Can}_{=2}(C)$，我们用 $E(P)$ 表示路径 $P \cup B(P)$ 中所有边的集合。对于 $e \in \Lambda_{>2}(C)$，我们记 $E(e) := \{e\}$。我们看到，$E(G[C]) = \bigsqcup_{h\in\Lambda(C)} E(h)$ 成立。

引理 12 给定一个简单无向图 G，设 $C \in \mathcal{C}_v$ 是一个 v-分量，且 $G[C]$ 不是一个环，并且 $Y \in \textsc{Can}(C)$。那么，$Y \in \textsc{Mrs}_e(C)$ 成立，当且仅当不存在辅助顶点 $h \in \Lambda(C)$，使得 $\{Y, h\}$ 是 H_C 的割点对。

证明。对于必要性，假设存在 $h \in \Lambda(C)$，使得 $\{Y, h\}$ 是 H_C 的割点对。那么 h 是 $H_C - Y$ 的割点。每条边 $e \in E(h)$



(a) (b)

图1。(a) v-分量 C；(b) 辅助图 H_C

都是 $G[C]-Y$ 中的桥，这表明 $G[C]-Y$ 不是 2-边连通的，因此 $Y \notin \textsc{Mrs}_e(C)$。

对于充分性，假设 $Y \notin \textsc{Mrs}_e(C)$。那么 $G[C]-Y$ 不是 2-边连通的，但应当是连通的。在 $G[C]-Y$ 中存在一条桥，记作 e。设 $h \in \Lambda(C)$ 是满足 $e \in E(h)$ 的辅助顶点。我们看到，h 是 $H_C - Y$ 的割点，这表明 $\{Y, h\}$ 是 H_C 的割点对。□

引理 13 设给定一个简单无向 2-边连通图 G。令 $V := V(G)$。对于任意子集 $X \subseteq V$，$\textsc{Mrs}_e(V, X)$ 中的所有 e-MRS 均可在 $O(n+m)$ 时间和空间内枚举。

证明。我们可以按如下步骤完成所需任务。(1) 求得 $\textsc{Art}(V)$，并将 V 分解为极大 v-分量。对于每个极大 v-分量 C，(2) 若 $G[C]$ 是一个环，且 $|C \cap \textsc{Art}(V)| = 1$，则当其与 X 不相交时，输出 $C \setminus \textsc{Art}(V)$；(3) 若 $G[C]$ 不是一个环，则构造辅助图 H_C，计算 H_C 的所有割点对，并输出所有与 $X \cup \textsc{Art}(V)$ 不相交且不包含在任何与辅助顶点组成的割点对中的 $Y \in \textsc{Can}(C)$。该算法的正确性由推论1和引理 12 得出。

关于时间复杂度，(1) 可在 $O(n+m)$ 时间内完成 [13]。对于每个 $C \in \textsc{Max}_v(V)$，令 $n_C := |C|$ 和 $m_C := |E(G[C])|$。我们可以在 $O(n_C + m_C)$ 时间内判断 C 属于 (2)、(3) 还是两者都不属于。若属于 (2)，则该任务可在 $O(n_C)$ 时间内完成。若属于 (3)，则该任务可在 $O(n_C + m_C)$ 时间内完成，因为 H_C 可在线性时间内构造，且 2-点连通图 H_C 的所有割点对均可在线性时间内枚举 [5,7]。一个割点 v 至多出现在 $\deg_G(v)$ 个极大 v-分量中，因此 $\sum_{C \in \textsc{Max}_v(V)} O(n_C) = O(n+m)$。极大 v-分量的数量为 $O(n)$，而在 $C \in \textsc{Max}_v(V)$ 上的总时间复杂度为 $O(n) + \sum_{C \in \textsc{Max}_v(V)} O(n_C + m_C) = O(n+m)$。空间复杂度分析类似。□

接下来，我们讨论如何生成 v-分量 $C \in \mathcal{C}_v$ 的所有 v-MRS。在这种情况下，下面的引理是 e-分量情形下引理 12 的对应版本。

引理 14 设 G 为一个简单无向图，令 $C \in \mathcal{C}_v$ 为一个 v-分量，且 $Y \in \textsc{Can}(C)$。那么，当且仅当不存在普通顶点 $u \in \textsc{Can}_{>2}(C)$ 使得 $\{Y, u\}$ 是 H_C 的割点对时，$Y \in \textsc{Mrs}_v(C)$ 成立。

证明。对于必要性，假设存在 $u \in \textsc{Can}_{>2}(C)$，使得 $\{Y, u\}$是 H_C的割点对。那么，u 是 $H_C - Y$的割点。这意味着 u 是 $G[C] - Y$的割点。子图 $G[C] - Y$不是 2-点连通的，因此 $Y \notin \textsc{Mrs}_v(C)$成立。

对于充分性，假设 $Y \notin \textsc{Mrs}_v(C)$。子图 $G[C] - Y$有一个割点 $u \in C - Y$。如果 $u \in \textsc{Can}_{>2}(C)$，那么结论成立。否则（即，如果 $u \in \textsc{Can}_{=2}(C)$），令 u' 为包含 u的路径的边界。我们看到 u' 是 $G[C] - Y$的割点，并且 $\{Y, u'\}$是 H_C的割点对。□

与 e-分量的情形类似，我们可以给出以下关于生成一个 v-分量的 v-MRS 的复杂度引理。

引理 15 设给定一个简单无向 2-点连通图 G。令 $V := V(G)$。对于任意子集 $X \subseteq V$，$\textsc{Mrs}_v(V, X)$ 中的所有 v-MRS 均可在 $O(n + m)$ 时间和空间内枚举。

定理 1 和定理 2 的证明。对于定理 1，我们注意到 $\mathcal{C}_e = \bigsqcup_{S \in \textsc{Max}_e(V)} \mathcal{C}_e(S, \emptyset)$。通过移除 G 中的所有桥，可以在 $O(n + m)$ 时间和空间内枚举 $\textsc{Max}_e(V)$ 中的所有极大 e-分量。根据定理 3，对于每个 $S \in \textsc{Max}_e(V)$，$\mathcal{C}_e(S, \emptyset)$ 中的所有 e-分量均可在 $O(q + \theta_t)$ 延迟和 $O(n + \theta_s)$ 空间内枚举，其中 $q = |S| \leq n$。根据引理 13，我们可以实现 $\textsc{ComputeMrs}_{\mathcal{C}_e}$，使得 $\theta_t = O(n + m)$ 且 $\theta_s = O(n + m)$。定理 2 的证明类似。□

5 总结

本文提出了首个线性延迟算法，用于枚举给定简单无向图中的所有 2-边/顶点连通诱导子图，其关键工具是集合系统的 SD 性质。

未来的工作包括将我们的框架扩展到 k-边/点连通度，以用于 $k > 2$；以及研究 SD 性质与文献中已知集合系统（例如独立系统、可达系统、强可达系统、汇合系统）之间的关系。

枚举 2-边/顶点连通诱导子图的 图 15

参考文献

1. Agrawal, R., Imieli´nski, T., Swami, A.：大型数据库中项目集之间关联规则的挖掘。载于：1993年ACM SIGMOD数据管理国际会议论文集，SIGMOD '93，第207–216页（1993）。https://doi.org/10.1145/170035.170072 2. Avis, D., Fukuda, K.：用于枚举的反向搜索。离散应用数学 63(1-3)，21–46（1996）。https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00026-N 3. Chang, L., Yu, J.X., Qin, L.：稀疏图中极大团的快速枚举。Algorithmica 66(1)，173–186（2013）。https://doi.org/10.1007/s00453-012-9632-8 4. Conte, A., Grossi, R., Marino, A., Versari, L.：用于图中极大团枚举的亚线性空间与有界延迟算法。Algorithmica 82(6)，1547–1573（2020）。https://doi.org/10.1007/s00453-019-00656-8 5. Gutwenger, C., Mutzel, P.：SPQR树的线性时间实现。载于：Marks, J.（编）《图绘制》。GD 2000。《计算机科学讲义》，第1984卷。施普林格，柏林，海德堡。https://doi.org/10.1007/3-540-44541-2 8 6. Haraguchi. K., Nagamochi, H.：汇合系统中支持闭合集合的枚举。Algorithmica 84，1279–1315（2022）。https://doi.org/10.1007/s00453-022-00927-x 7. Hopcroft, J. E., Tarjan, R. E.：将图划分为三连通分量。SIAM计算杂志 2(3)，135–158，（1973）。https://doi.org/10.1137/0202012 8. Ito, Y., Sano, Y., Yamanaka, K., Hirayama, T.：枚举2-边连通诱导子图的多项式延迟算法。IE-ICE Transactions on Information and Systems E105.D(3)，466–473（2022）。https://doi.org/10.1587/transinf.2021FCP0005 9. Makino, K., Uno, T.：枚举所有极大团的新算法。载于：Hagerup, T., Katajainen, J.（编）《算法理论 - SWAT 2004》。SWAT 2004。《计算机科学讲义》，第3111卷，第260–272页。施普林格，柏林，海德堡（2004）。https://doi.org/10.1007/978-3-540-27810-8 23 10. Roux de B´ezieux, H., Lima, L., Perraudeau, F., Mary, A., Dudoit, S., Jacob, L.：CALDERA：寻找细菌全基因组关联研究中所有显著的 de Bruijn 子图。生物信息学。38(1)，36–44（2022）。https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btac238 11. Seki, M., Sese, J.：活性生物网络及共同表达条件的识别。载于：第八届IEEE生物信息学与生物工程国际会议，BIBE 2008，第1–6页（2008）。https://doi.org/10.1109/BIBE.2008.4696746。12. Stanley, R., Fomin, S.：《组合计数学》（剑桥高等数学研究丛书）。剑桥大学出版社，剑桥（1999）https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589 13. Tarjan, R.：深度优先搜索与线性图算法。SIAM计算杂志 1(2)，146–160（1972）。https://doi.org/10.1137/0201010 14. Tarjan, R.：关于寻找图的桥的注记。信息处理快报 2(6)，160–161（1974）。15. Uno, T.：减少枚举算法延迟与变化的两种一般方法。NII技术报告（2003）16. Uno, T.：求解伪团枚举问题的高效算法。Algorithmica 56，3–16（2010）。https://doi.org/10.1007/s00453-008-9238-3

17. Wen, D., Qin, D., Zhang, Y., Chang, L., Chen, L.：大型图中的 k-顶点连通分量枚举。2019 IEEE 第 35 届数据工程国际会议（ICDE），第 52–63 页，澳门，中国（2019）。https://doi.org/10 00014 18 1109 2019 . /ICDE. . . West, D.B.：《图论导论》（第 2 版；重印本）。培生现代经典（2018）19. Whitney, H.《全等图与图的连通性》。Amer. J. Math. 54, 150–168（1932）。