arXiv:2302.05529v1 [math.QA] 10 Feb 2023

$\mathfrak{sl}_2(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的展开量子群的重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量

NATHAN GEER、ADAM ROBERTSON、JAN-LUCA SPELLMANN 和 MATTHEW B. YOUNG

Abstract. 本文是一篇自成一体的导论，介绍 Geer、Patureau-Mirand 和 Turaev 所定义的重整化 Reshetikhin–Turaev 链环不变量理论。标准的 C-线性带状范畴 Reshetikhin–Turaev 理论会将任意含有一个分支以量子维数为零的简单对象着色的链环映为平凡不变量，而重整化理论则不会。本文简明地阐述偶数阶单位根处，受限展开量子群 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 上的权模范畴的重整化 Reshetikhin–Turaev 链环理论。

Contents

引言 2 1. 展开量子群 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 及其权模 6 1.1. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的展开量子群 6 1.2. 权模 7 1.3. 单模 8 1.4. 一般半单性 10 1.5. 编织 11 1.6. 带状结构 14 2. Reshetikhin–Turaev 不变量 15 2.1. 链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量 15 2.2. Reshetikhin–Turaev 不变量与量子维数 17 2.3. 通过切割构造的结不变量 18 3. $\mathcal{C}$ 18 的重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量 3.1. 双侧模 18 3.2. 修正量子维数 21 3.3. 链环的重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量 23 3.4. 基本性质与例子 24 4. 延伸阅读 26 参考文献 27

Date：2023年2月14日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：81R50；次要分类：57M25。*Key words and phrases.* Reshetikhin–Turaev 理论。量子群的表示论。

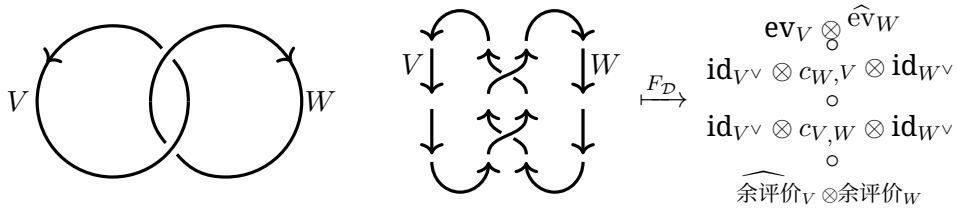


FIGURE 1. 由对象 V 和 W 着色的霍普夫链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量。 $\mathcal{D}$中的复合运算按从下到上的顺序读取。

INTRODUCTION

背景与动机。设 $L \subset S^3$ 是一个带框链环， M_L 是沿 L 对 S^3 进行手术得到的闭定向三维流形。根据 Lickorish 和 Wallace 的定理，任意闭连通可定向三维流形都可以通过这种方式得到 [Wal60, Lic62]。此外，三维流形 M_L 和 $M_{L'}$ 同胚，当且仅当带框链环 L 和 L' 可通过有限次 Kirby 变换彼此联系 [Kir78]。这些结果是采用纽结理论方法研究三维流形拓扑中的问题和构造的起点。例如，由前述两个结果可知，既是带框链环的同痕不变量、又在 Kirby 变换下保持不变的量，定义了一个三维流形不变量，从而凸显了链环不变量在拓扑学中的重要性。

Reshetikhin和Turaev运用带状范畴理论构造了一大类链环不变量 [RT90]。每个带状范畴 $\mathcal{D}$ 都关联一个带状函子 $F_{\mathcal{D}}$： $\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$，其定义域为由 $\mathcal{D}$着色的带状图范畴。将一个 $\mathcal{D}$着色的带框链环 L 的同痕类解释为一个（0，0）缠结，也就是单位对象 $\mathrm{I} \in \mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$的自同态，可得到一个不变量 $F_{\mathcal{D}}(L) \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathrm{I})$，它取值于 L，即 Reshetikhin–Turaev 不变量。按如下方式计算不变量 $F_{\mathcal{D}}(L)$：选取 L的一个正则图 D。将 D 分解为由杯、帽、简单交叉和扭结组成的基本部分，并分别将对应的余评价、评价、编织和扭结赋予这些部分。上述态射在 $\mathcal{D}$ 中的复合即为 $F_{\mathcal{D}}(L)$。图1展示了霍普夫链环的这一过程。

Reshetikhin–Turaev 构造凸显了带状范畴的拓扑学意义。经典表示理论产生了许多对称幺半范畴的例子：群和李代数的表示，以及更一般的余交换霍普夫代数。遗憾的是，与对称幺半范畴相关的 Reshetikhin–Turaev 不变量并无太大意义，因为它们只保留了链环分支数量的信息。另一方面，量子群的表示范畴，以及更一般的拟三角Hopf代数的表示范畴，则众所周知能够产生（非对称的）带状范畴 [Jim85, Dri86, Dri90, CP94]。由此得到的链环量子不变量，包括 Jones 多项式和 HOMFLYPT多项式，是量子拓扑的基础 [Jon87, FYH+85, PT88, RT90, Tur16]。

表示论中出现的许多带状范畴具有以下性质：**(P1)** 范畴中存在量子维数为零的简单对象。**(P2)** 范畴是非半单的，也就是说，并非每个短正合列都分裂。

(P3) 范畴中有无穷多个互不同构的简单对象。

例如，在单位根处，与复单李（超）代数 $\mathfrak{g}$ 相关的量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的有限维表示范畴 $U_q(\mathfrak{g})$-mod 具有性质 (P1)–(P3)。众所周知，由量子维数为零的简单对象着色的链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量为零。因此，Reshetikhin–Turaev 构造不适合提取具有性质 (P1) 的范畴的全部拓扑内容。性质 (P2) 和 (P3) 不会给链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量带来问题，但却严重阻碍了将这些不变量推广到三维流形。例如，这些性质使得 Kirby 颜色无法定义；Kirby 颜色是简单对象同构类的加权和，对于 [RT91] 中三维流形不变量的构造至关重要。

同时消除范畴 $U_q(\mathfrak{g})$-mod 的性质 (P1)–(P3) 的一种标准方法是半单化 [And92], ，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数；半单化将量子维数为零的简单对象形式上置为零。对于特定的单位根，所得的半单化范畴是模张量范畴。由此得到的三维流形不变量构成三维拓扑量子场论的顶层，该理论是规范群为与 $\mathfrak{g}$ [相关联的单连通紧李群的 Chern–Simons 理论的数学模型 Wit89, RT91]。另一方面，对于范畴 $U_q(\mathfrak{g})$-mod，若 $\mathfrak{g}$ 是一个 I 型李超代数，则典型表示的量子维数为零，而半单化会消除该范畴中大部分有趣的内容。

具有性质 (P1)-(P3) 的带状范畴也出现在量子场论中。例如，这类范畴可作为非紧规范群的 Chern–Simons 理论中的线算子 [Wit91, BNW91, RS94, Mik15] ，也可出现在超对称量子场论的拓扑扭曲中 [KS09, CDGG21]；此外，它们还可作为非有理（或对数）共形场论中顶点算子代数的模 [RS93, CR13a, CR13b]。

由具有性质 (P1)-(P3) 的带状范畴构造纽结不变量的早期例子，包括 Akutsu、Deguchi 和 Ohtsuki [ADO92] ，以及 Murakami 和 Murakami [MM01], 的工作；他们利用单位根偶数阶时展开量子群 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的典型表示定义了（带框）链环不变量。Blanchet、Costantino、Geer、Patureau-Mirand 和 Turaev [BCGPM16, GP MT09, CGPM14] 开创了一项系统性研究计划，旨在定义并研究由具有性质 (P1)-(P3) 的带状范畴构造的量子不变量，称为重整化 Reshetikhin–Turaev 理论。在链环的情形下，这些重整化不变量为由零量子维数对象着色的链环提供了非平凡不变量。本文旨在以最简单的情形——$\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上的模范畴——为例，遵循 [GPMT09, CGPM15b]，对链环的重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量理论作一篇自成一体的介绍。本文虽不包含新结果，但我们为已知结果提供了若干新的证明，并在文献中往往缺少完整细节之处补充了详尽说明。熟悉 $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的表示论（达到 [Jan96], 的层次）及其相关的 Reshetikhin–Turaev 不变量会有所帮助，但并非严格必要。我们假设读者具备霍普夫代数和幺半范畴的基础知识。

本文内容。固定一个整数 $r \geq 2$，并令 $q = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{r}}$。De Concini–Kac 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的生成元为 $K^{\pm 1}$、E 和 F，其关系为 $KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$，以及

$$KE = q^2EK, \qquad KF = q^{-2}FK, \qquad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{1}$$

展开量子群 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 如 [GPMT09], 中所引入，其定义与 De Concini–Kac 量子群类似，但多了一个生成元 H，可将其视为 K 的对数；它与 K 对易，并满足前两个关系 (1) 的经典极限：

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F.$$

本文主要研究的代数是受限展开量子群 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$，其定义为对 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 取商模 $E^r = F^r = 0$ 所得。$\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模 V 称为权模，若它是 H-特征子空间的直和，且 $K = q^H$ 作为算子作用于 V 上。有限维权模范畴 $\mathcal{C}$（其对象是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上的有限维权模）是本文的核心代数对象。

第 1 节专门详细研究 $\mathcal{C}$。$\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上自然的霍普夫代数结构赋予 $\mathcal{C}$ 刚性幺半阿贝尔范畴结构。我们利用 Verma 模（由于关系式 $E^r = F^r = 0$，它们是有限维的），在命题 1.7 中对 $\mathcal{C}$ 的简单对象进行分类。结果是：存在一个由最高权为 $n + lr$、维数为 $n + 1$ 的单模 S_n^{lr} 构成的离散族，其中 $l \in \mathbb{Z}$，$0 \leq n \leq r - 2$；此外，还存在一个由最高权为 $\alpha + r - 1$、维数为 r 的简单 Verma 模 V_α 构成的连续族，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。

将 H-权对 $2\mathbb{Z}$ 取模，定义了一个 $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$-分次 $\mathcal{C} = \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$，它与刚性幺半结构相容。尽管范畴 $\mathcal{C}$ 不是半单的，但它在一般意义下是半单的，即大多数齐次子范畴 $\mathcal{C}_{\overline{\alpha}} \subset \mathcal{C}$ 都是半单的。更确切地说，我们在定理 1.13 中证明，除非 $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，否则 $\mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$ 是半单的。命题 1.17 指出，$\mathcal{C}$ 是编织的。文献中似乎尚无这一结论的完整证明。我们给出的证明是初等且自成一体的。编织的形式受到 $\hbar$-进量子群 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的著名泛 R-矩阵的启发（见 Dri86、Oht02]）。我们在定理 1.19 中证明，$\mathcal{C}$ 具有带状结构。候选带状结构基于与刚性幺半结构相关的扭结，即编织的右偏迹。我们利用 $\mathcal{C}$ 的一般半单性证明该扭结与对偶相容：先验证这一性质一般成立，再借助 [GPM18], 的一般结果得出它在整个 $\mathcal{C}$ 上成立。第 1 节的结果可概括如下。

定理 A。范畴 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$-分次的一般半单辫带范畴。

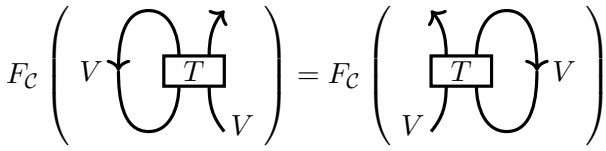
在第 2 节中，我们回顾与带状范畴 $\mathcal{D}$ 所关联的 Reshetikhin–Turaev 函子 $F_{\mathcal{D}}$：$\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ 相关的标准内容。重整化理论的核心是一个众所周知的结论，本文将其证明为引理 2.4：若 $V \in \mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}$-线性带状范畴中的简单对象，L 是一个以 $\mathcal{D}$ 着色的链环，而 T 是一个 (1, 1)-缠结，且

其闭合 L 和开弦均以 V 着色，则

$$F_{\mathcal{D}}(L) = \mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V) F_{\mathcal{D}}(T).$$

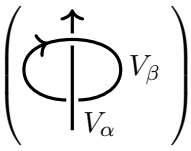
这里，方程两边都被视为它们作用所对应的标量。特别地，如果 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V) = 0$，那么 $F_{\mathcal{D}}(L)$ 为零，而 $F_{\mathcal{D}}(T)$ 则未必为零。我们在命题 2.6 中证明，若 L 是一个纽结，则 $F_{\mathcal{D}}(T)$ 是 L 的不变量。

在第 3 节中，我们将不变量 $L \mapsto F_{\mathcal{D}}(T)$ 从带框架纽结推广到带框架链环。为使论述清晰，我们将讨论范围限定在 $\mathcal{D} = \mathcal{C}$，即权为 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的模所构成的范畴。这一推广的主要障碍在于，对含有多个分支的链环 L 进行切割，会得到一个 (1, 1)-缠结，而其同痕类型取决于被切割的分支。双侧模是克服这一障碍的关键。若一个单纯的 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模 V 满足等式



对 V 着色的开放弧的所有 (2,2) 缠结 T， V 的自态射均成立。我们在推论 3.11 中证明，所有单纯的 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模都是双侧的。

定义一个函数 $S' : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其定义为

$$S'(\beta, \alpha) = F_{\mathcal{C}}\left(\right.$$


$$\left.\right) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\alpha) \simeq \mathbb{C}.$$

对于固定的双侧的模 V_η，单 Verma 模 V_α 的修正量子维数定义为 $\mathbf{d}_\eta(\alpha) = {}^{S'}(\alpha, \eta)\, S'(\eta, \alpha)$。本文的主要结果可以表述如下。 ——

定理 B。（定理 3.12）设 $V_\eta \in \mathcal{C}$ 是一个双侧的模， L 是一个带框链环，且至少有一条弦由某个 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$ 对应的 V_α 着色。那么该赋值

$$L \mapsto F'_\eta(L) := \mathbf{d}_\eta(\alpha) F_{\mathcal{C}}(T),$$

其中， T 是一个 (1,1)-缠结，其闭合为 L ，且其开放弧由 V_α 着色；该赋值是带框架的着色链环的良定义同痕不变量。

在第 3.4 节中，我们讨论重整化不变量 F'_η 的一些基本性质，例如它在连通和下的表现及其相关的 skein 关系，并计算一些基本例子。我们还证明，针对不同双侧模 V_η 进行重整化所得到的不变量彼此相差一个全局标量。

最后，在第 4 节中，我们简要介绍重整化 Reshetikhin–Turaev 链环不变量在数学和物理应用方面的进一步发展方向。

约定。基域为 $\mathbb{C}$。记 $\otimes$ 为 $\otimes_{\mathbb{C}}$。所有模均为左模，且在 $\mathbb{C}$ 上有限维。关于幺半范畴的所有范畴论概念均遵循 [EGNO15] 中的约定。给定向量空间 V 上的标量端同态 e ，定义$\langle e \rangle \in \mathbb{C}$ 为 $e = \langle e \rangle \cdot \mathrm{id}_V$。

致谢。N.G. 获得美国国家科学基金会项目 DMS-1664387 和 DMS-2104497 的部分资助。M.B.Y. 获得西蒙斯基金会数学家合作资助（奖项编号 853541）的部分资助。

1. The unrolled quantum group $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ and its weight modules

取一个整数 $r \geq 2$。令 $q = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{r}}$。对于 $z \in \mathbb{C}$，定义

$$q^z = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}z}{r}}, \qquad \{z\} = q^z - q^{-z}, \qquad [z] = \frac{\{z\}}{\{1\}}.$$

令 $\{0\}! = 1$ 以及 $\{n\}! = \prod_{i=1}^{n}\{i\}$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，对于 $[n]!$ 也类似。对于 $0 \leq k \leq l$，令 $\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} = \frac{[l]!}{[k]![l-k]!}$。

1.1. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的展开量子群。

我们回顾 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的展开量子群的定义，该定义最初见于 [GPMT09, CGPM15b]。展开量子群的先驱概念见于 Ohtuski [Oht02] 的研究。

定义 1.1。$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的展开量子群是由 K、K^{-1}、H、E 和 F 生成的带单位结合代数 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$，其关系为

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad HK = KH,$$
$$HE - EH = 2E, \qquad HF - FH = -2F,$$
$$KE = q^2EK, \qquad KF = q^{-2}FK,$$
$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

受限展开量子群 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 是将 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 关于关系 $E^r = F^r = 0$ 取商得到的商模。◁

非正式地说，生成元 H 应被视为 K 的对数。尽管这一约束并未在代数层面施加，但它被施加于本文所关注的模上。见下文第 1.2 节。

$U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 和 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 都是霍普夫代数，其余乘法、余单位和反对极定义为

$$\begin{aligned}
&\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, && \varepsilon(E) = 0, && S(E) = -EK^{-1},\\
&\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, && \varepsilon(F) = 0, && S(F) = -KF,\\
&\Delta(K) = K \otimes K, && \varepsilon(K) = 1, && S(K) = K^{-1},\\
&\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, && \varepsilon(H) = 0, && S(H) = -H.
\end{aligned}$$

De Concini–Kac 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 同构于由 E、F 和 $K^{\pm 1}$ 生成的 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的 Hopf 子代数。类似地，受限量子群 $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 同构于由 E、F 和 $K^{\pm 1}$ 生成的 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的 Hopf 子代数。代数 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 与 $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 具有许多相同的性质。例如，$\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 具有 Poincaŕe–Birkhoff–Witt 基

$$\{F^aH^bK^cE^d \mid 0 \leq a, d \leq r-1,\ b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ c \in \mathbb{Z}\}$$

并且具有三角分解

$$\overline{U}_q^{H,-}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))\otimes\overline{U}_q^{H,0}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))\otimes\overline{U}_q^{H,+}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))\xrightarrow{\sim}\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$$

其中，$\overline{U}_{,q}^{H}{}^{-}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$、$\overline{U}_{,q}^{H}{}^{0}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 和 $\overline{U}_{,q}^{H}{}^{+}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 分别是由 F、H 和 $K^{\pm1}$ 以及 E 生成的 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的子代数。供后文使用，令 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{b})$ 表示由 E、$K^{\pm1}$ 和 H 生成的 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的 Hopf 子代数。

1.2. 权模。回顾一下，所有模都假定为有限维。

定义 1.2. 设 V 是一个 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模。

(1) 权为 $\lambda\in\mathbb{C}$ 的权向量是满足 $Hv=\lambda v$ 的非零向量 $v\in V$。此外，若 $Ev=0$，则称 v 为最高权向量。子空间 $V[\lambda]=\{v\in V\mid Hv=\lambda v\}$ 称为权为 λ 的权空间。(2) 如果模 V 是其各权空间的直和，$V=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}}V[\lambda]$，且对所有 $v\in V[\lambda]$ 都有 $Kv=q^{\lambda}v$，则称其为权模。(3) 如果模 V 由一个最高权向量生成，则称其为最高权模。◁

本文中考虑的所有 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模都假定为权模。定义 1.2(2) 中的第二个条件可写为算子恒等式$K=q^{H}$ 在 V上。鉴于此，在讨论权模时，我们通常只给出 H 的作用，而省略 K的作用。最后请注意，最高权模必然是权模。

令 $\mathcal{C}$为权 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模及其 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性映射所构成的范畴。范畴 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性的、局部有限的阿贝尔范畴。$\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的双代数结构使 $\mathcal{C}$ 成为单体范畴，其单位对象为一维模 $\mathbb{C}$，其中H、E 和 F 的作用均为零。结合子和单位子与复向量空间范畴中的相同，故下文不再在记号中显式表示它们。

令 $V\in\mathcal{C}$。记 $V^{\vee}\in\mathcal{C}$为对偶向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$，其 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模结构定义如下:

$$(x\cdot f)(v)=f(S(x)v),\qquad x\in\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})),\qquad f\in V^{\vee},\qquad v\in V.$$

给定 V 的基 $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ 及其对偶基 $\{v_i^{\vee}\}_{i=1}^{n}$（属于 $V^{\vee}$），定义

$$\widehat{\mathrm{ev}}_V:V\otimes V^{\vee}\to\mathbb{C},\qquad v\otimes f\mapsto f(K^{1-r}v)$$

and

$$\widehat{\mathrm{coev}}_V:\mathbb{C}\to V^{\vee}\otimes V,\qquad 1\mapsto\sum_{i=1}^{n}K^{r-1}v_i^{\vee}\otimes v_i.$$

注意，$\widehat{\ }\mathrm{coev}_V$与基的选取无关。直接验证可知，$\widehat{\ }\mathrm{ev}_V$和$\widehat{\ }\mathrm{coev}_V$是 $\overline{U}_q^{H}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性的，并满足蛇形关系，即下列复合

$$V\xrightarrow{\mathrm{id}_V\otimes\widehat{\mathrm{coev}}_V}V\otimes V^{\vee}\otimes V\xrightarrow{\widehat{\mathrm{ev}}_V\otimes\mathrm{id}_V}V$$

and

$$V^{\vee}\xrightarrow{\widehat{\mathrm{coev}}_V\otimes\mathrm{id}_{V^{\vee}}}V^{\vee}\otimes V\otimes V^{\vee}\xrightarrow{\mathrm{id}_{V^{\vee}}\otimes\widehat{\mathrm{ev}}_V}V^{\vee}\tag{2}$$

分别为恒等态射。因此， $\widehat{\ }\mathrm{ev}_V$ 和 $\overbrace{\ }\mathrm{coev}_V$ 是右对偶态射。另定义

$$\mathrm{ev}_V : V^\vee \otimes V \to \mathbb{C}, \qquad f \otimes v \mapsto f(v)$$

and

$$\mathrm{coev}_V : \mathbb{C} \to V \otimes V^\vee, \qquad 1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee.$$

这些是有限维向量空间范畴中的通常左对偶态射，很容易验证它们是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性的。因此，范畴 $\mathcal{C}$ 是刚性的。由此， $\mathcal{C}$ 是 EGNO15 定义4.1.1]意义下的张量范畴。

给定一个有限维向量空间 V，记 $V \to V^{\vee\vee}$, $v \mapsto (-|v)$ 为典范求值同构。

引理1.3。映射 $\{p_V\colon V \to V^{\vee\vee\vee}\}_{V\in\mathcal{C}}$，由 $p_V(v) = K^{1-r}(-|v)$ 给出，在 $\mathcal{C}$上定义了一个枢轴结构。

证明。我们需要验证 $\{p_V\}_{V\in\mathcal{C}}$ 是幺半自然同构 $p : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^\vee \circ (-)^\vee$的分支。自然性显然成立，直接检验可知 p_V是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性的。关系 $\Delta(K^{1-r}) = K^{1-r} \otimes K^{1-r}$ 蕴含等式$p_{V\otimes W} = p_V \otimes p_W$, $V, W \in \mathcal{C}$，这正是所需的幺半性。□

容易看出，上述定义的右、左对偶结构与上述枢轴结构相容，也就是说，对每个 $V \in \mathcal{C}$，等式 $\mathrm{id}_{V^\vee} \otimes (p_V \circ \overbrace{\ }\mathrm{coev}_V) = \mathrm{coev}_{V^\vee}$和 $\widehat{\ }\mathrm{ev}_V = (\mathrm{ev}_{V^\vee} \circ p_V) \otimes \mathrm{id}_{V^\vee}$ 均成立。

1.3. 单模。非零模 $V \in \mathcal{C}$ 称为单模（或不可约模），如果它没有非零真子模。本节对 $\mathcal{C}$ 的简单对象进行分类。本节的结果见 [CGPM15b, §5], ，但我们给出了不同的证明。

引理1.4. $\mathcal{C}$ 的每个简单对象都是最高权模。

证明。设 $V \in \mathcal{C}$ 是单模，且 $v \in V$ 是一个权向量。由于 $E^r = 0$，存在最小整数 $l > 0$，使得 $E^l v = 0$。于是 $E^{l-1}v$ 是一个最高权向量，并且$\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \cdot E^{l-1}v \subset V$ 是一个非零子模；由单纯性可知，该子模等于 V。□

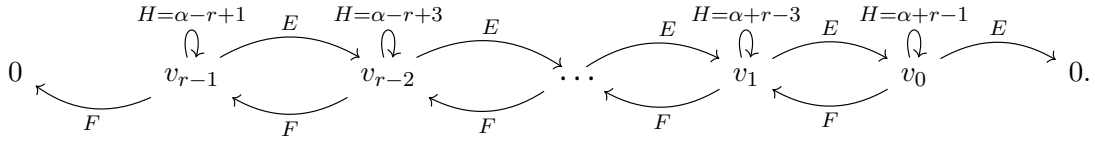
设 $\alpha \in \mathbb{C}$。记 $\mathbb{C}_{\alpha+r-1}$ 为一维权 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{b})$-模，其 H-权为$\alpha + r - 1$，且 E 和 F的作用均为零。

定义 1.5。最高权为 $\alpha+r-1$ 的 Verma 模是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模$V_\alpha = \overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes_{\overline{U}_q^H(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\alpha+r-1}$. ◁

将向量 $F^i \otimes 1 \in V_\alpha$记作 v_i。 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的庞加莱–伯克霍夫–维特基表明，$\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$ 是 V_α和 $V_\alpha \in \mathcal{C}$的权基。直接计算可得 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 在 V_α 上的作用为

$$Hv_i = (\alpha + r - 1 - 2i)v_i, \quad Ev_i = \frac{\{i\}\{i-\alpha\}}{\{1\}^2}v_{i-1}, \quad Fv_i = v_{i+1},$$

其中约定 $v_{-1}=v_r=0$。特别地， V_α 是由 v_0生成的最高权模。 V_α 的结构可由下图概括



引理 1.6。如果 V 是最高权为 $\alpha+r-1$ 的最高权模，则存在一个满射 $V_\alpha \twoheadrightarrow V$。

证明。根据伴随性，存在一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_\alpha, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{U}_q^H(\mathfrak{b})}(\mathbb{C}_{\alpha+r-1}, V\big|_{\overline{U}_q^H(\mathfrak{b})}).$$

由此可知，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_\alpha, V)$ 同构于 V 中权为 $\alpha+r-1$ 的最高权向量子空间。特别地，如果 $v\in V$ 是权为 $\alpha+r-1$ 的生成最高权向量，则赋值 $v_0\mapsto v$ 可延拓为 $\mathcal{C}$ 中的满态射 $V_\alpha \to V$。□

利用引理 1.6，容易验证映射 $v_{\alpha,\ r-1}^{\vee} \mapsto v_{-\alpha,\ 0}$ 可延拓为一个 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-模同构 $\overline{U}_q^H$

$$V_\alpha^{\vee} \xrightarrow{\sim} V_{-\alpha}. \tag{3}$$

由引理 1.4 和 1.6 可知， $\mathcal{C}$ 的任意简单对象都是某个唯一 Verma 模 V_α的商模。特别地，简单模的维数至多为 r。

命题 1.7. 设 $\alpha\in\mathbb{C}$。

(1) 若 $\alpha\notin \mathbb{Z}\setminus r\mathbb{Z}$，则 V_α 是简单的。(2) 若 $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus r\mathbb{Z}$ 可唯一写成 $\alpha=(l-1)r+n+1$ 的形式，其中 $0\le n\le r-2$且 $l\in\mathbb{Z}$，则存在一个非分裂短正合列

$$0\to S_{r-n-2}^{(l-1)r}\to V_\alpha\to S_n^{lr}\to 0$$

它是 V_α的 Jordan–H ¨older 滤过。

(3) $\mathcal{C}$ 的任意简单对象都同构于以下形式的唯一模： V_α， $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\cup r\mathbb{Z}$，或 S_n^{lr}，$l\in\mathbb{Z}$， $0\le n\le r-2$。

证明。若 $\alpha\notin\mathbb{Z}\setminus r\mathbb{Z}$，则对 $i=1,\dots,r-1$ 有 $\frac{\{i\}\{i-\alpha\}}{\{1\}^2}\neq 0$，这由 q 是一个本原 $2r^{\text{th}}$ 单位根的假设可知。由E在 V_α上的作用的显式形式可得，对 $i=1,\dots,r-1$ 有 $Ev_i\neq 0$，因此 V_α是简单的。

反之，若 $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus r\mathbb{Z}$，则 V_α 恰有一个真子模。事实上，按命题陈述中的方式写作$\alpha=(l-1)r+n+1$，因此 V_α的最高权为$lr+n$。考察 E在 V_α上的作用可知，若 $i\neq 0$，则 $Ev_{n+1}=0$且 $Ev_i\neq 0$。因此， $S:=\mathrm{span}\{v_{n+1},\dots,v_{r-1}\}$是 V_α的唯一真子模。模 S的维数为 $r-n-1$，其商模 $S_n^{lr}:=V_\alpha/S$是一个最高权为 $lr+n$、维数为 $n+1$的单纯最高权模。由引理 1.6，存在一个满射$V_{(l-1)r-n-1}\to S$；根据本段的论证，该满射可下降为一个同构

$S_{r-n-2}^{(l-1)r} \xrightarrow{\sim} S$。最后， S 的唯一性意味着序列

$$0 \to S_{r-n-2}^{(l-1)r} \to V_\alpha \to S_n^{lr} \to 0$$

不是直和分裂的。

由引理 1.4 和 1.6 可知，任意简单模都是某个 Verma 模的商模。因此，命题的第三个陈述由前两个陈述推出。□

由于 $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的 Hopf 子代数，因此存在一个幺半群遗忘函子 $\mathcal{C} \to \overline{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-模。按照 [Jan96, §2.11]，中的记号，该函子分别将 $\mathcal{C}$ 的简单对象 S_n^{lr} 和 V_α 送到 $L(n,(-1)^l)$ 和 $Z_0(q^{\alpha+r-1})$。◁

命题 1.7 意味着，简单对象在同构意义下由其最高权决定，而且简单对象 S_n^{lr} 既不是内射的，也不是投射的。

命题 1.9. 若 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$，则 $V_\alpha \in \mathcal{C}$ 是投射的且内射。

证明。设 $f\colon V \twoheadrightarrow W$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个满射，且 $\phi\colon V_\alpha \to W$ 是一个非零态射。由引理 1.6 的证明可知，映射 ϕ 由一个最高权向量 $\phi(v_0) = w \in W$确定，其权为 $\alpha + r - 1$。 f的满射性意味着 w在 f下有一个原像，记为 v；它的权为 $\alpha + r - 1$，且满足 $Ev \in \ker f$。

设 $\xi = Ev$，其权为 $\alpha+r+1$且满足 $E^{r-1}\xi = 0$。对于任意 a_0、……、 $a_{r-2} \in \mathbb{C}$，向量

$$v' = v + \sum_{i=0}^{r-2} a_i F^{i+1} E^i \xi.$$

的权为 $\alpha + r - 1$，且满足 $f(v') = w$。利用 [Jan96, §1.3]，，我们计算得

$$Ev' = \xi + \sum_{i=0}^{r-2} a_i (F^{i+1}E^{i+1}\xi + [i+1][\alpha+r+1+i]F^iE^i\xi).$$

那么当且仅当递推方程

$$a_i = -[i+2][\alpha+r+2+i]a_{i+1} \qquad i = -1, \dots, r-3,$$

成立，其中有 $a_{-1} = 1$。该递推系统当且仅当 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$ 时确定 $\{a_i\}_i$，否则某个 a_{i+1} 的系数会消失。仿照证明开头的论证，赋值 $v_0 \mapsto v'$ 确定了一个 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性映射 $\tilde{\phi}\colon V_\alpha \to V$，其满足$f \circ \phi = \phi$。这证明了 V_α 的投射性。

鉴于同构 (3) 以及上一段，模 $V_\alpha^\vee$是投射的。标准的伴随性同构（见 [EGNO15，命题 2.10.8]）给出了逆变函子之间的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V_\alpha) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_\alpha^\vee, -) \circ (-)^\vee.$$

由于 $V_\alpha^\vee$是投射的，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_\alpha^\vee, -)$ 是一个正合函子。由于 $(-)^\vee$ 在复向量空间层面是一个正合函子，因此它在 $\mathcal{C}$ 上也正合。因此，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V_\alpha)$ 是正合的，并且 V_α 是内射的。□

1.4. 一般半单性。回顾一下，若阿贝尔范畴中的每个对象都是简单对象的直和，则称该阿贝尔范畴为半单。由命题 1.7(2)可知，范畴

$\mathcal{C}$ 不是半单的。然而， $\mathcal{C}$ 以一种可控的方式不具备半单性。本节旨在对这一说法作出精确表述。为此，我们从 [GPM18] 中的一些一般定义开始。

设 G是一个加法阿贝尔群。

定义 1.10. 刚性幺半范畴 $\mathcal{D}$ 上的一个 G-分次，是指由非空满子范畴 $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{D}$, $g \in G$构成的数据，使得 $\mathcal{D} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{D}_g$ 且 $V^\vee \in \mathcal{D}_{-g}$，并且 $V \otimes V' \in \mathcal{D}_{g+g'}$，只要 $V \in \mathcal{D}_g$ 且 $V' \in \mathcal{D}_{g'}$。 ◁

定义 1.11. 若子集 $X \subset G$ 满足 $-X = X$，则称其为对称的；若对所有 $g_1, \dots, g_n \in G$，都有 $G \neq \bigcup_{i=1}^n (g_i + X)$，则称其为小的。◁

定义 1.12. 若 G-分次范畴 $\mathcal{D}$ 满足：只要 $g \in G \setminus X$， $\mathcal{D}_g$ 就是半单的，则称其为具有小对称子集 $X \subset G$ 的一般半单范畴。在这种情况下，处于度 $g \in G \setminus X$ 的简单模 $V \in \mathcal{C}_g$ 称为一般单。◁

再次考虑 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上的权模范畴。令 G 为加法群 $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$。对每个 $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$，令 $\mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的满子范畴，其中包含权属于类 $\overline{\alpha}$ 的模。 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的 Hopf 代数结构表明，$\mathcal{C} = \bigoplus_{\overline{\alpha}\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$ 是一个 $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$-分次。

定理 1.13. $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$-分次范畴 $\mathcal{C}$ 一般半单，且具有小的对称子集 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$。

证明. 令 $\overline{\alpha} \in (\mathbb{C}/2\mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，并设 $V \in \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$ 是一个非零对象。那么 V 包含一个权为 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的最高权向量 v，其中 α 属于类 $\overline{\alpha}$。关于 $\overline{\alpha}$ 的假设意味着由 v 生成的子模同构于 $V_{\alpha-r+1}$；参见命题 1.7 的证明。由命题 1.9，模 $V_{\alpha-r+1}$ 是内射的，因此存在一个分裂 $V \simeq V_{\alpha-r+1} \oplus V'$，其中某个 $V' \in \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$ 的维数严格小于 V 的维数。对 V 的维数作归纳论证，即可完成证明。□

根据命题 1.7， $\mathcal{C}$ 的一般单对象是 Verma 模 V_α，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$。

1.5. 编织。本节中，我们在 $\mathcal{C}$上构造一种编织。该编织的形式受到 $\hbar$-进量子群 $U_\hbar(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的通用 R-矩阵的启发，如 [Dri86, §10], [Oht02, §§4.5 和 A.2] 所述。

定义 1.14. r-截断 q-指数映射为 $\exp_q^<(x) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{q^{l(l-1)/2}}{[l]!}\, x^l$。 ◁

设 $V, W \in \mathcal{C}$ 分别具有权基 $\{v_i\}_i$ 和 $\{w_j\}_j$，其权分别为 $\{\lambda_i^v\}_i$ 和 $\{\lambda_j^w\}_j$。定义 $q^{H\otimes H/2} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ 如下：

$$q^{H\otimes H/2}(v_i \otimes w_j) = q^{\lambda_i^v \lambda_j^w/2} v_i \otimes w_j$$

以及 $R \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ 作为

$$R = q^{H\otimes H/2} \circ \exp_q^<(\{1\}E \otimes F) = q^{H\otimes H/2} \circ \sum_{l=0}^{r-1} \frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!} q^{l(l-1)/2} E^l \otimes F^l,$$

其中 $\exp_q^<(\{1\}E\otimes F)$ 被视为通过左乘定义的 $\mathbb{C}$-线性映射。最后，定义$c_{V,\ W}\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V\otimes W, W\otimes V)$ 为

$$c_{V,W}(v\otimes w)=\tau R(v\otimes w),$$

其中 τ 是交换映射 $V\otimes W\to W\otimes V, v\otimes w\mapsto w\otimes v$。

引理 1.15. 映射 $c_{V,W}$ 是 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-线性的。

证明. 只需检验 $c_{V,W}$ 在生成元 H, F, E 上的线性性。设 $v\in V$ 和$w\in W$ 的权分别为 λ^v 和 λ^w。我们有

$$\begin{aligned}H\cdot c_{V,W}(v\otimes w)&=\tau q^{H\otimes H/2}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{q^{l(l-1)/2}}{[l]!}E^l\otimes F^l((H+2l)v\otimes w+v\otimes(H-2l)w)\\&=(\lambda^v+\lambda^w)c_{V,W}(v\otimes w)\\&=c_{V,W}(H\cdot v\otimes w).\end{aligned}$$

我们证明 E-线性。我们有等式

$$K\otimes E\circ q^{H\otimes H/2}=q^{H\otimes H/2}\circ 1\otimes E$$

在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V\otimes W)$ 中。事实上，我们计算得到

$$K\otimes E\circ q^{H\otimes H/2}(v_i\otimes w_j)=q^{\lambda_i^v}q^{\lambda_i^v\lambda_j^w/2}v_i\otimes Ew_j=q^{\lambda_i^v(\lambda_j^w+2)/2}v_i\otimes Ew_j$$

and

$$q^{H\otimes H/2}\circ 1\otimes E(v_i\otimes w_j)=q^{H\otimes H/2}v_i\otimes Ew_j=q^{\lambda_i^v(\lambda_j^w+2)/2}v_i\otimes Ew_j.$$

类似的计算表明 $E\otimes 1\circ q^{H\otimes H/2}=q^{H\otimes H/2}\circ E\otimes K^{-1}$。利用这两个等式，$c_{V,\ W}$ 关于 E 的线性归结为等式

$$(E\otimes K^{-1}+1\otimes E)\exp_q^<(\{1\}E\otimes F)=\exp_q^<(\{1\}E\otimes F)(E\otimes K+1\otimes E)$$

在 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))\otimes\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 中，这在 [Oht02 的等式 A.10] 中得到了证明。F 的线性也可类似证明。□

引理 1.16. 映射 $c_{V,\ W}$ 是可逆的。

证明。显然，τ 是可逆的。我们断言，R 的逆为

$$R^{-1}=\exp_{q^{-1}}^<(-\{1\}E\otimes F)q^{-H\otimes H/2}.$$

参见 [Oht02，§A.2]。我们有 $q^{H\otimes H/2}\circ q^{-H\otimes H/2}=1$。根据定义，

$$\begin{aligned}&\exp_q^<(\{1\}E\otimes F)\cdot\exp_{q^{-1}}^<(-\{1\}E\otimes F)\\&\qquad=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{q^{l(l-1)/2}q^{-k(k-1)/2}}{[l]![k]!}(-1)^k(\{1\}E\otimes F)^{l+k}.\end{aligned}$$

由于 $(E\otimes F)^r=0$，二重求和为

$$\sum_{i=0}^{r-1}\frac{q^{-i(i-1)/2}}{[i]!}(-\{1\}E\otimes F)^i\sum_{l=0}^{i}(-1)^l\begin{bmatrix}i\\l\end{bmatrix}q^{l(i-1)}.$$

和 $\sum_{l=0}^{i}(-1)^l \begin{bmatrix} i \\ l \end{bmatrix} q^{l(i-1)}$ 在 $i>0$ 时为 0，在 $i=0$ 时为 1；参见 [Jan96, §0.2]。因此，R 的逆元正如所述。□

命题 1.17。映射 $\{c_{V,W}\colon V\otimes W\to W\otimes V\}_{V,\,W}$ 在 $\mathcal{C}$ 上定义了一个编织。

证明。引理 1.15 和 1.16 表明，映射$c_{V,\,W}$ 在 $\mathcal{C}$ 中给出了一族同构。c_V的自然性W 源于自同态 $q^{H\otimes H/2}$ 与$\overline{U}_q^H$ ($\mathfrak{sl}_2$(C))-线性映射交换这一事实。剩下的工作是验证六边形公理 [EGNO15，定义 8.1。1]。令 V、W、$U\in\mathcal{C}$。我们证明

$$c_{V,W\otimes U}=(\mathrm{id}_W\otimes c_{V,U})\circ(c_{V,W}\otimes \mathrm{id}_U) \tag{4}$$

并将等式 $c_{V\otimes W,\,U}=(c_{V,\,U}\otimes \mathrm{id}_W)\circ(\mathrm{id}_V\otimes c_{W,\,U})$ 的验证留给读者。令 $v\in V$、$w\in W$、$u\in U$分别为权为 λ^v、λ^w、λ^u的权向量。我们计算

$$c_{V,W\otimes U}(v\otimes w\otimes u)=q^{H\otimes H/2}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}\Delta(F^l)(w\otimes u)\otimes E^l v.$$

通过直接的归纳论证可得

$$\Delta(F^l)=\sum_{i=0}^{l}q^{i(l-i)}\begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}F^iK^{-(l-i)}\otimes F^{l-i}.$$

与 [Jan96, §3.1]，比较可知，其中使用了略有不同的约定。利用这一点，我们得到

$$c_{V,W\otimes U}(v\otimes w\otimes u)=q^{H\otimes H/2}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}\sum_{i=0}^{l}q^{(i-\lambda^w)(l-i)}\begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}F^i\otimes F^{l-i}\otimes E^l(w\otimes u\otimes v)$$

其计算结果为

$$\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}\sum_{i=0}^{l}q^{(\lambda^w+\lambda^u-2l)(\lambda^v+2l)/2}q^{(i-\lambda^w)(l-i)}\begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}F^i\otimes F^{l-i}\otimes E^l(w\otimes u\otimes v).$$

另一方面，我们计算得

$$\begin{aligned} c_{V,W}\otimes \mathrm{id}_U(v\otimes w\otimes u)&=q^{H\otimes H/2}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}F^n w\otimes E^n v\otimes u\\ &=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}q^{(\lambda^w-2l)(\lambda^v+2l)/2}F^l w\otimes E^l v\otimes u.\end{aligned}$$

应用 $\mathrm{id}_W\otimes c_{V,\,U}$ 后得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{id}_W\otimes c_{V,U}\Big(\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l}}{\{l\}!}q^{l(l-1)/2}q^{(\lambda^w-2l)(\lambda^v+2l)/2}F^l w\otimes E^l v\otimes u\Big)\\ &\qquad=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\{1\}^{2l+2k}}{\{l\}!\{k\}!}q^{l(l-1)/2}q^{k(k-1)/2}q^{(\lambda^w-2l)(\lambda^v+2l)/2}\cdot\\ &\qquad\qquad\cdot q^{(\lambda^u-2k)(\lambda^v+2l+2k)/2}\cdot(F^l w\otimes F^k u\otimes E^k E^l v).\end{aligned}$$

为验证等式 $c_{V,\ W\otimes U}(v\otimes w\otimes u) = c_{V,\ W}\otimes \mathrm{id}_U(v\otimes w\otimes u)$，我们比较 $F^a w\otimes F^b u\otimes E^{a+b}v$ 的系数。所求等式左右两边的系数分别为

$$\frac{\{1\}^{2(a+b)}}{\{a+b\}!}q^{(a+b)((a+b)-1)/2}q^{(\lambda^w+\lambda^u-2(a+b))(\lambda^v+2(a+b))/2}q^{(a-\lambda^w)((a+b)-a)}\begin{bmatrix}a+b\\ a\end{bmatrix}$$

and

$$\frac{\{1\}^{2a+2b}}{\{a\}!\{b\}!}q^{a(a-1)/2}q^{b(b-1)/2}q^{(\lambda^w-2a)(\lambda^v+2a)/2}q^{(\lambda^u-2b)(\lambda^v+2a+2b)/2},$$

分别如此，直接验证可知它们相等。 □

1.6. 带状结构。本节中，我们在 $\mathcal{C}$ 上构造带状结构。既然已经证明 $\mathcal{C}$ 是编织的（命题 1.17），带状结构所需的附加数据就是一个扭结，即恒等函子 $\theta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的自然自同构，它满足平衡条件

$$\theta_{V\otimes W}=(\theta_V\otimes\theta_W)\circ c_{W,V}\circ c_{V,W}$$

以及缎带条件

$$(\theta_V)^\vee=\theta_{V^\vee} \tag{5}$$

对所有 V、$W\in\mathcal{C}$

回顾一下，$f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V\otimes W)$ 的右偏迹是自同态 $\mathrm{ptr}_R(f)\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$，其定义为

$$V\xrightarrow{\mathrm{id}_V\otimes\mathrm{coev}_W}V\otimes W\otimes W^\vee\xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}_{W^\vee}}V\otimes W\otimes W^\vee\xrightarrow{\mathrm{id}_V\otimes\widehat{\mathrm{ev}}_W}V.$$

定义一个自然自同构 $\theta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，使其满足

$$\theta_V:=\mathrm{ptr}_R(c_{V,V}),\qquad V\in\mathcal{C} \tag{6}$$

其中 c 是 $\mathcal{C}$ 的编织。编织的六边形公理保证 θ 满足平衡条件。为验证 θ 也满足缎带条件，我们使用以下一般延拓结果。

定理 1.18（[GPM18，定理 9]）。设 $\mathcal{D}$ 是一个一般半单刚性编织范畴。定义自然自同构 $\theta:\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$，使其分量由方程 (6) 给出。若对于任意一般单对象 $V\in\mathcal{D}$，都有 $\theta_V^\vee=\theta_{V^\vee}$，则 θ 是 $\mathcal{D}$ 上的一个扭结。

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 1.19。自然变换 c 和 θ 赋予 $\mathcal{C}$ 带状范畴的结构。

证明。回顾一下，$\mathcal{C}$ 的一般单对象是 V_α Verma 模，满足 $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$。对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，c_{V_α,V_α} 的右偏迹为

$$V_\alpha\xrightarrow{\mathrm{id}_{V_\alpha}\otimes\mathrm{coev}_{V_\alpha}}V_\alpha\otimes V_\alpha\otimes V_\alpha^\vee\xrightarrow{c_{V_\alpha,V_\alpha}\otimes\mathrm{id}_{V_\alpha^\vee}}V_\alpha\otimes V_\alpha\otimes V_\alpha^\vee\xrightarrow{\mathrm{id}_{V_\alpha}\otimes\widehat{\mathrm{ev}}_{V_\alpha}}V_\alpha.$$

由于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\alpha) \simeq \mathbb{C}$（参见引理 1.6 的证明），只需计算最高权向量 $v_0 \in V_\alpha$ 在此复合映射下的像。我们有

$$v_0 \mapsto \sum_{i=0}^{r-1} v_0 \otimes v_i \otimes v_i^\vee \mapsto \sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1)(\alpha+r-1-2i)/2} v_i \otimes v_0 \otimes v_i^\vee$$
$$\mapsto q^{(\alpha+r-1)(\alpha+r-1)/2} q^{(\alpha+r-1)(1-r)} v_0 = q^{(\alpha+r-1)(\alpha-r+1)/2} v_0.$$

由于 $V_\alpha^\vee \simeq V_{-\alpha}$ 以及标量 $q^{(\alpha+r-1)(\alpha-r+1)/2}$ 在替换$\alpha \mapsto -\alpha$下保持不变，因此对所有 $\alpha \in \mathbb{C}$，都有 $\theta_{V_\alpha^\vee} = \theta_{V_\alpha}^\vee$。因此，定理 1.18 适用于当前情形，由此可得映射 $\{\theta_V\}_{V\in\mathcal{C}}$ 在 $\mathcal{C}$上定义了一个扭结。□

2. Reshetikhin–Turaev invariants

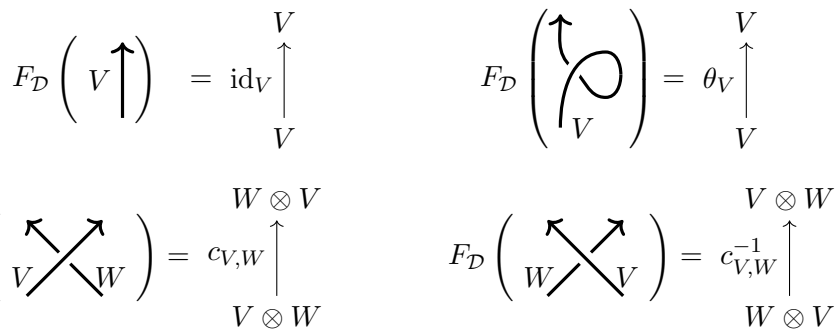
我们回顾 Reshetikhin–Turaev 链环不变量 [RT90] 的基础背景知识。关于该理论的详细介绍，请参阅 [Tur16]。本节最后，我们将修改 Reshetikhin–Turaev 构造，从而为由零量子维数简单对象着色的纽结构造非零不变量。熟悉 Reshetikhin–Turaev 理论的读者可以回顾引理 2.4，然后继续阅读第 3 节。

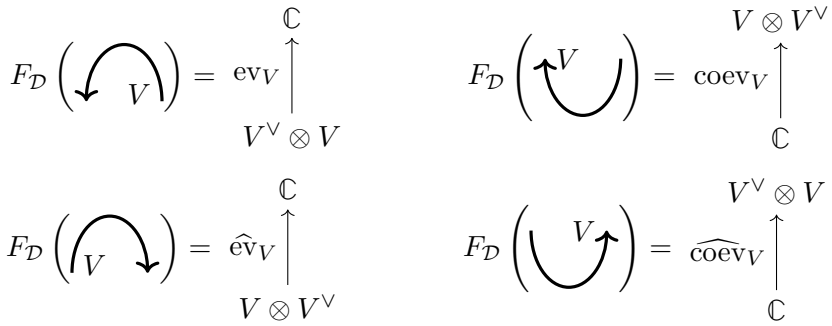
2.1. 链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量。

设 $\mathcal{D}$ 为一个带状范畴。与 $\mathcal{D}$ 相关联的是由 $\mathcal{D}$着色的带状图组成的带状范畴 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ [Tur16, §I.I.2]。$\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ 的对象是由若干对 (V, ϵ) 组成的有限序列，其中 $V \in \mathcal{D}$ 且 $\epsilon \in \{\pm\}$。$\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ 中的态是以两个这样的对象序列为边界的 $\mathcal{D}$着色带状图的同痕类。带状图的着色须以显然的方式与定义域和陪域对象相容。态射的复合由带状图的拼接定义。$\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ 的幺半群结构在对象上由序列的拼接定义，在态上由不交并定义。

定理2.1（[Tur16，定理2.5]）。存在唯一的带状函子 $F_{\mathcal{D}} : \mathrm{Rib}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$，使得对所有 $V \in \mathcal{D}$，均有 $F_{\mathcal{D}}(V, +) = V$且 $F_{\mathcal{D}}(V, -) = V^\vee$。

函子 $F_{\mathcal{D}}$ 称为 Reshetikhin–Turaev 函子。$\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ 的带状结构的精确定义以及 $F_{\mathcal{D}}$ 是带状的这一事实，意味着 $F_{\mathcal{D}}$ 在 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{D}}$ 的态射上取以下值：

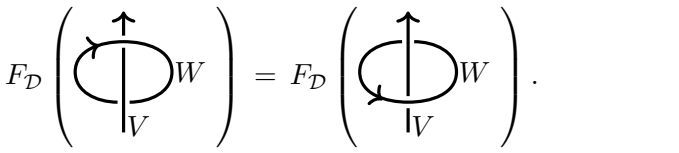




上述 $\mathbf{Rib}_{\mathcal{D}}$ 中的八个态射生成 $\mathbf{Rib}_{\mathcal{D}}$ [中的所有态射（Tur16，§I.3-4]）。特别地， $F_{\mathcal{D}}$ 在 $\mathbf{Rib}_{\mathcal{D}}$ 中任意态射上的取值，都可以表示为 $\mathcal{D}$ 中（余）求值、（逆）编织和（逆）扭转的迭代复合。带色框架链环是 $\mathbf{Rib}_{\mathcal{D}}$ 中态射的特例——它们是空序列的自同态。因此，赋值 $L \mapsto \langle F_{\mathcal{D}}(L) \rangle$ 是带色框架链环的同痕不变量。

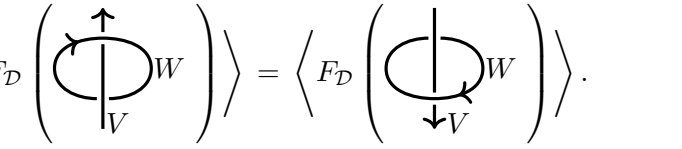
我们记录下面将用到的结果。

引理 2.2. 对于任意 V、$W \in \mathcal{D}$， $\mathcal{D}$ 中的态射满足以下等式：



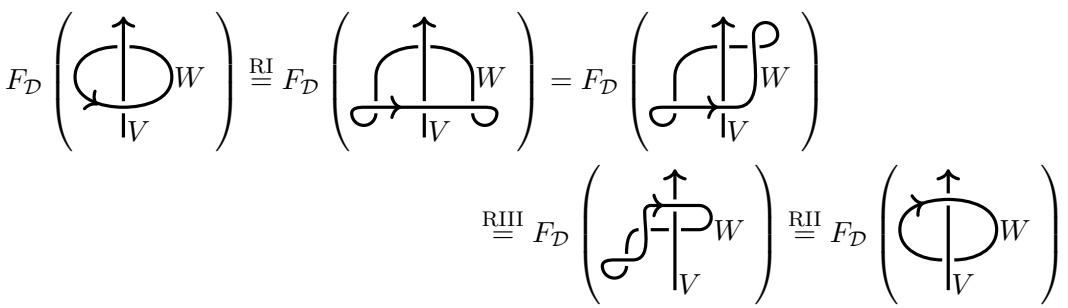
(7)

此外，若 V 是单纯的，则标量满足以下等式：

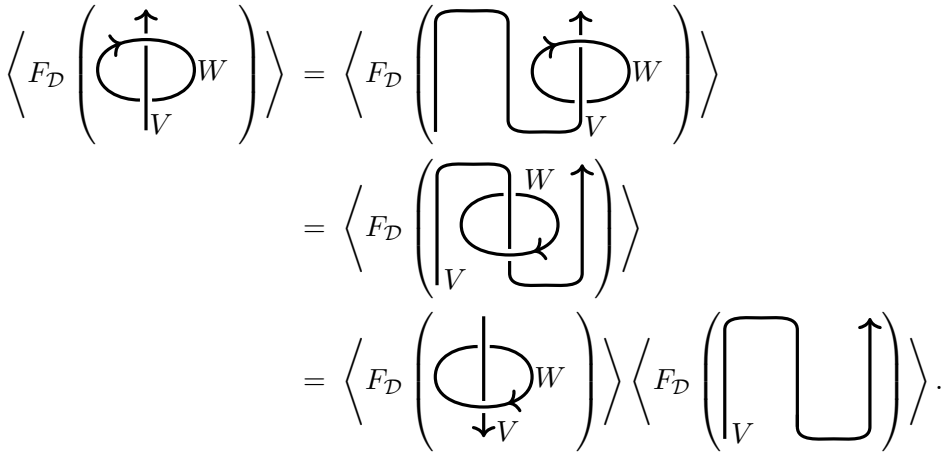


(8)

证明。方程 (7) 由以下所示的带框架的 Reidemeister 变换组合成立：



如果 V 是单纯的，那么方程 (8) 通过平面同痕成立：



蛇形关系 (2) 表明，最后一行中的第二个标量为 1。 □

2.2. Reshetikhin–Turaev 不变量与量子维数。令 K 为无结。用 C-线性带状范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象 V 为 K 着色。与映射 $F_{\mathcal{D}}(K) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 相关联的标量 $\langle F_{\mathcal{D}}(K)\rangle$ 称为 V 的量子维数，记作 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V)$。具体而言，我们有 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V) = \langle \widehat{\ }\mathrm{ev}_V \circ \mathrm{coev}_V\rangle$。

例 2.3. 再次考虑权 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathsf{C}))$-模的范畴 $\mathcal{C}$。令 K 为以 V_α, $\alpha \in \mathsf{C}$ 着色的无结。令 $\{v_i \mid 0 \le i \le r-1\}$ 为第 1.3 节中描述的 V_α 的权基，$\{v_i^\vee \mid 0 \le i \le r-1\}$ 为其对偶基。则 $F_{\mathcal{C}}(K)$ 是以下映射的复合

$$1 \xmapsto{\mathrm{coev}_{V_\alpha}} \sum_{i=0}^{r-1} v_i \otimes v_i^\vee \xmapsto{\widehat{\mathrm{ev}}_{V_\alpha}} \sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1-2i)(1-r)} = q^{(\alpha+r-1)(1-r)} \sum_{i=0}^{r-1} q^{-2i+2ir}.$$

由于 q 是一个本原 $2r^{\mathrm{th}}$ 单位根，我们有 $\sum_{i=0}^{r-1} q^{-2i+2ir} = \sum_{i=0}^{r-1} q^{-2i} = 0$。因此，$F_{\mathcal{C}}(K) = 0$，且 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{C}}(V_\alpha) = 0$。如果改为用简单模 S_n^{lr} 为 K 着色，$0 \le n \le r-2$ 和 $l \in \mathsf{Z}$，那么

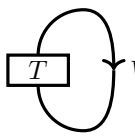
$$\langle F_{\mathcal{C}}(K)\rangle = \sum_{j=0}^{n} v_j^\vee(K^{1-r} v_j) = q^{(1-r)(lr+n)} \sum_{j=0}^{n} q^{-2j} = (-1)^{n+l+lr}[n+1],$$

由此 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{C}}(S_n^{lr}) \neq 0$。 ◁

引理 2.4. 设 $\mathcal{D}$ 为一个 C-线性带状范畴，$V \in \mathcal{D}$ 为一个简单对象，L 为一个 $\mathcal{D}$-着色链环，T 为一个 (1, 1)-缠结，其闭合为 L，且其开弦由 V 着色。那么

$$\langle F_{\mathcal{D}}(L)\rangle = \mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V)\langle F_{\mathcal{D}}(T)\rangle. \tag{9}$$

证明. 利用同痕不变性，我们可以将 L 画成如下形式的图



由于 V 是单纯的，自同态 $F_{\mathcal{D}}(T)$ 是一个标量，因此公式 (9) 成立。 □

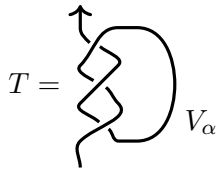


FIGURE 2. 一个 (1, 1)-缠结 T，其闭合为右手三叶结。

因此，只要一个纽结由零量子维数的简单对象着色，Reshetikhin–Turaev 不变量就平凡。特别地，鉴于例 2.3， $\mathcal{C}$-着色链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量为零，只要其中至少有一个分支由单 Verma 模着色。

2.3. 通过切割构造的结不变量。公式 (9) 是 [GPMT09] 重整化量子不变量理论的起点。其核心思想是：尽管 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{D}}(V)$ 因而 $F_{\mathcal{D}}(K)$ 为零，但 $F_{\mathcal{D}}(T)$ 未必为零，并可能给出一个有趣的 K 不变量。用图示语言来说，要得到一个非平凡的纽结 K 不变量，我们将其切开，得到一个 (1, 1)-缠结 T，再对 T 应用标准Reshetikhin–Turaev函子。

例2.5。设 K 为一个由 Verma 模 $V_\alpha \in \mathcal{C}$ 着色的右手三叶结。例 2.3 表明 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{C}}(V_\alpha) = 0$。由引理 2.4 可知 $F_{\mathcal{C}}(K) = 0$。

设 T 为图2所示的 (1,1)-缠结。 T 的闭合为 K。端同态 $F_{\mathcal{C}}(T) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\alpha)$ 是以下复合

$$V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_\alpha}\otimes \mathrm{coev}_{V_\alpha}} V_\alpha \otimes V_\alpha \otimes V_\alpha^\vee \xrightarrow{(c_{V_\alpha,V_\alpha}\otimes \mathrm{id}_{V_\alpha^\vee})^{\circ 3}} V_\alpha \otimes V_\alpha \otimes V_\alpha^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_\alpha}\otimes \widehat{\mathrm{ev}}_{V_\alpha}} V_\alpha.$$

由于 V_α 是最高权， $F_{\mathcal{C}}(T)$ 由其在最高权向量$v_0 \in V_\alpha$上的取值决定。利用编织的显式形式，我们计算得到

$$\langle F_{\mathcal{C}}(T)\rangle = q^{\frac{3}{2}(\alpha+r-1)^2+(\alpha+r-1)(1-r)} \sum_{i=0}^{r-1} q^{i(-3\alpha-r+1)} \prod_{j=0}^{i-1} \{i-j-\alpha\}.$$

例如，当 $r = 2$和 $\alpha = 2$时，这特化为 $\langle F_{\mathcal{C}}(T)\rangle = -3e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} \neq 0$。 ◁

命题 2.6。赋值 $K \mapsto \langle F_{\mathcal{D}}(T)\rangle$ 是一个良定义的着色带框结不变量，其中 K 是一个着色带框结，且T 是一个闭合为 K的 (1, 1)-缠结。

证明。这由定理2.1以及以下标准事实得出：两个连通的 (1, 1)-缠结 T 和 T' 同伦等价，当且仅当它们的闭合是带框同痕结。□

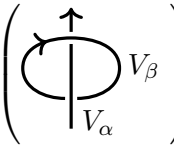
3. RENORMALIZED RESHETIKHIN–TURAEV INVARIANTS OF $\mathcal{C}$

以下我们将仅考虑权为 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的模所构成的带状范畴 $\mathcal{C}$，并用 F 表示 Reshetikhin–Turaev 函子 $F_{\mathcal{C}}$。

3.1. 双侧模块。从纽结处剪开得到一个 (1,1)-缠结，进而构造非零不变量的想法，并不能直接推广到链环，以下例子便说明了这一点。

例 3.1. 令 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，且 L 为霍普夫链环，其分支分别由 V_α 和 V_β着色。在同痕意义下，剪开的方式有两种。剪开由 V_α着色的那股绳，得到

$$F\left(\quad\right) = \begin{cases} q^{\beta\alpha}\frac{\{\alpha r\}}{\{\alpha\}} \cdot \mathrm{id}_{V_\alpha} & \text{if } \alpha \in \mathbb{C} \setminus r\mathbb{Z}, \\ q^{\beta r z} \cdot (-1)^{(r+1)z} r \cdot \mathrm{id}_{V_\alpha} & \text{if } \alpha = rz \in r\mathbb{Z}. \end{cases}$$



事实上，由上述缠结定义的映射是以下复合

$$V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{coev}_{V_\beta}} V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\beta^\vee \xrightarrow{c_{V_\alpha, V_\beta}} V_\beta \otimes V_\alpha \otimes V_\beta^\vee \xrightarrow{c_{V_\beta, V_\alpha}} V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\beta^\vee \xrightarrow{\widehat{\mathrm{ev}}_{V_\beta}} V_\alpha.$$

与定理 1.19 的证明一样，只需计算最高权向量 $v_0 \in V_\alpha$ 在此映射下的像。设 $\{w_i \mid 0 \le i \le r-1\}$ 是 V_β 的权基，其对偶基为 $\{w_i^\vee \mid 0 \le i \le r-1\}$。那么在上述复合下，我们有

$$v_0 \xmapsto{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}_{V_\beta}} \sum_{i=0}^{r-1} v_0 \otimes w_i \otimes w_i^\vee \xmapsto{c_{V_\alpha,V_\beta}\otimes\mathrm{id}} \sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1)(\beta+r-1-2i)/2} w_i \otimes v_0 \otimes w_i^\vee \xmapsto{c_{V_\beta,V_\alpha}\otimes\mathrm{id}}$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1)(\beta+r-1-2i)} v_0 \otimes w_i \otimes w_i^\vee + \cdots \xmapsto{\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathrm{ev}}_{V_\beta}} \sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1)(\beta+r-1-2i)} q^{(\beta+r-1-2i)(1-r)} v_0,$$

其中省略的量 $\cdots$ 是形如 $E^j v_0 \otimes w_{i+j} \otimes w_i^\vee$, $j > 0$ 的项的线性组合，因此属于 $\mathrm{id}_{V_\alpha} \otimes \widehat{\mathrm{ev}}_{V_\beta}$ 的核。我们有

$$\sum_{i=0}^{r-1} q^{(\alpha+r-1)(\beta+r-1-2i)} q^{(\beta+r-1-2i)(1-r)} = q^{\alpha(\beta+r-1)} \sum_{i=0}^{r-1} q^{-2\alpha i}.$$

若 $\alpha \notin r\mathbb{Z}$，则 $q^{-2\alpha} \neq 1$，且前一行的结果为

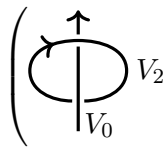
$$q^{\alpha(\beta+r-1)} \frac{1-q^{-2\alpha r}}{1-q^{-2\alpha}} = q^{\alpha\beta} \frac{q^{\alpha r} - q^{-\alpha r}}{q^\alpha - q^{-\alpha}} = q^{\alpha\beta} \frac{\{\alpha r\}}{\{\alpha\}}.$$

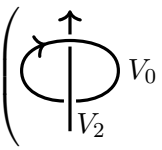
反之，若 $\alpha = rz \in r\mathbb{Z}$，则

$$q^{rz(\beta+r-1)} \sum_{i=0}^{r-1} q^{-2rzi} = q^{rz(\beta+r-1)} r = (-1)^{rz+z} q^{\beta r z} r.$$

特别地，取 $r = 2$、$\alpha = 0$ 和 $\beta = 2$，我们得到

$$F\left(\quad\right) = 2\mathrm{id}_{V_0}, \qquad F\left(\quad\right) = -2\mathrm{id}_{V_2}.$$

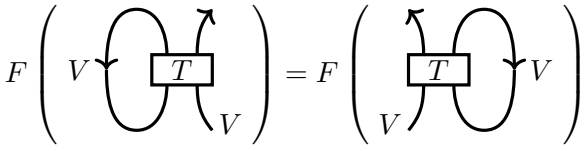




根据公式 (9)，我们希望给由 V_0 和 V_2 着色的霍普夫链环赋予一个标量，该标量由将霍普夫链环剪开成一个 (1,1)-缠结而得到。然而，我们发现，这个标量会显著依赖于我们选择剪开的那条股。◁

以下概念是解决前例所示切割歧义的关键。

定义 3.2（[GPMT09，§3]）。如果等式成立，则称模 $V \in \mathcal{C}$ 为双侧的：

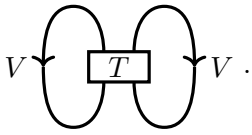


(10)

对所有开弦着色为 V 的 (2,2) 缠结， T 均成立。 ◁

引理 3.3. 若 $V \in \mathcal{C}$ 是量子维数非零的单纯对象，则 V 是双侧的。

证明. 设 T 是一个开弦着色为 V 的 (2, 2) 缠结图，并令 L 为如下图形



.

由于 L 是通过对公式 (10) 中出现的 (1,1)-缠结分别取右偏迹和左偏迹得到的，我们发现该公式两边都等于 $\frac{\langle F(L)\rangle_{\text{量子维数}\mathcal{C}}(V)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)}\,\mathrm{id}_V$。□

当 V 的量子维数为零时，我们需要进一步考察。

引理 3.4。设 V、$W \in \mathcal{C}$ 是简单对象，且 $V \otimes W$ 是半单且无重数的。则代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes W)$ 同构于若干个 $\mathbb{C}$ 的直和。

证明。设 U_1，...，U_n 是两两不同构的简单对象，且 $V \otimes W \simeq U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$。由舒尔引理可知，代数同构 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes W) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U_i) \simeq \mathbb{C}^n$。□

引理 3.5。设 $\eta \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。则 $V_\eta \otimes V_\eta \in \mathcal{C}$ 是半单且无重数的。

证明。由于 $2\eta \notin \mathbb{Z}$，对象 $V_\eta \otimes V_\eta \in \mathcal{C}_{\overline{2\eta}}$ 根据定理 1.13 是半单的。因此，存在唯一的整数 $m_{2\eta_r - r + 2i + 1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

$$V_\eta \otimes V_\eta \simeq \bigoplus_{i=0}^{r-1} V_{2\eta - r + 2i + 1}^{\oplus m_{2\eta_r - r + 2i + 1}}.$$

考虑 $\mathbb{Q}[\mathbb{C}]$，的群代数，其基为 $\{x^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$。 $V \in \mathcal{C}$ 的特征为 $\mathrm{ch}(V) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim_{\mathbb{C}}(V[\lambda]) x^\lambda$。 V_α 的显式描述给出 $\mathrm{ch}(V_\alpha) = x^\alpha [r]_x$，其中 $[r]_x = \sum_{i=0}^{r-1} x^{r-1-2i}$。我们断言集合

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{ch}(V_{2\eta - r + 2i + 1}) \mid 0 \leq i \leq r - 1\} \subset \mathbb{Q}[\mathbb{C}]$$

线性无关。假设 $\sum_{i=0}^{r-1} a_i \mathrm{ch}(V_{2\eta - r + 2i + 1}) = 0$，其中 $a_i \in \mathbb{Q}$。由于此方程中出现的 x 的所有幂都位于 $\mathbb{C}$ 中同一条实仿射直线上，因此它们具有自然的次序。最大的幂为 $x^{2\eta + 2(r-1)}$，其系数为 a_{r-1}，该项来自 $\mathrm{ch}(V_{2\eta - r + 2(r-1) + 1})$。因此， $a_{r-1} = 0$。如此继续下去可得 $a_{r-2} =$
$\cdots = a_0 = 0$ 和 $\mathcal{S}$ 线性无关。

$V_\eta \otimes V_\eta$ 的特征为 $\mathrm{ch}(V_\eta)^2 = x^{2\eta}[r]_x^2$。另一方面，

$$\mathrm{ch}(V_\eta)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{r-1} m_{2\eta - r + 2i + 1} x^{2\eta - r + 2i}\Big)[r]_x.$$

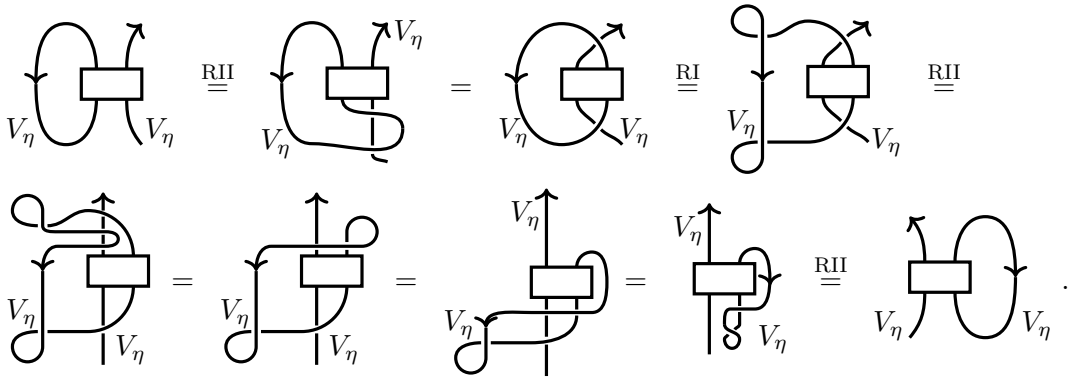
令每个 $m_{2\eta-r+1+2i}=1$，上一个方程的右边变为 es

$$\left(\sum_{i=0}^{r-1} x^{2\eta-r+2i}\right)[r]_x = x^{2\eta}[r]_x^2 = \mathrm{ch}(V_\eta)^2.$$

鉴于 $\mathcal{S}$ 的线性无关性，证明至此完成。 □

定理 3.6。设 $\eta \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。则 V_η 是双侧的。

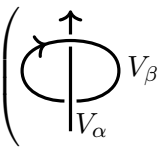
证明。由引理 3.4 和 3.5，代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\eta \otimes V_\eta)$ 是交换的。设 T 是一个 (2, 2) 缠结图，其开放弧由 V_η 着色。于是有如下等式序列，其中我们默认对每个缠结应用 F，且纽结图标签由 T 着色：



第二个等式由 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\eta \otimes V_\eta)$ 的交换性推出。第五个和第七个等式各由带框架的 Reidemeister 变换 RII 和 RIII 组合而成。第六个等式成立，是因为可以应用一系列取决于 T 的带框架的 Reidemeister 变换。其余等式则由所示的带框架的 Reidemeister 变换得出。□

3.2. 修正量子维数。定义一个函数 $S' : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得

$$S'(\beta,\alpha) = \left\langle F\left(\right.\right.$$



$$\left.\left.\right)\right\rangle.$$

命题 3.7。等式

$$S'(\beta,\alpha) = \begin{cases} q^{\beta\alpha}\frac{\{\alpha r\}}{\{\alpha\}} & \text{if } \alpha \in \mathbb{C} \setminus r\mathbb{Z}, \\ q^{\beta r z}\cdot(-1)^{(r+1)z} r & \text{if } \alpha = rz \in r\mathbb{Z} \end{cases}$$

成立。特别地，对于所有 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$，$S'(\beta,\alpha)$ 均非零。

证明。这在例 3.1 中已计算得出。 □

定义 3.8。设 $\eta \in \mathbb{C}$。相对于 η 的修正量子维数是函数 $\mathrm{d}_\eta : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，定义为 $\mathrm{d}_\eta(\alpha) = {}^{S'}{}_{(\alpha,\eta)}\, S'(\eta,\alpha)$。◁

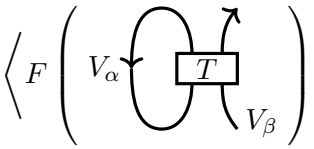
根据命题 3.7，修正量子维数 d_η 处处非零。与不同参数 η 相关联的修正量子维数之间的关系如下。

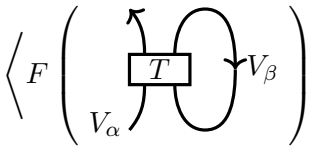
命题 3.9. 对于 $\eta, \eta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$，以下等式成立：

$$\mathbf{d}_\eta(\alpha) = \frac{\sin(\pi\frac{\eta}{r})\sin(\eta'\pi)}{\sin(\eta\pi)\sin(\pi\frac{\eta'}{r})}\mathbf{d}_{\eta'}(\alpha).$$

证明。由命题 3.7 以及 $\mathbf{d}(-)$ 的定义可立即得到。 □

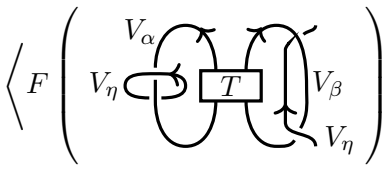
定理 3.10（[GPMT09，引理 2]）。设 $\eta \in \mathbb{C}$，使得 V_η 是双侧的，并且 α、$\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。则对于所有 (2, 2) 缠结图 T，以下等式成立：

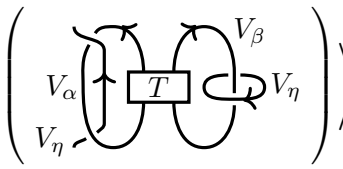
$\mathbf{d}_\eta(\beta)$ 

$= \mathbf{d}_\eta(\alpha)$ 

.

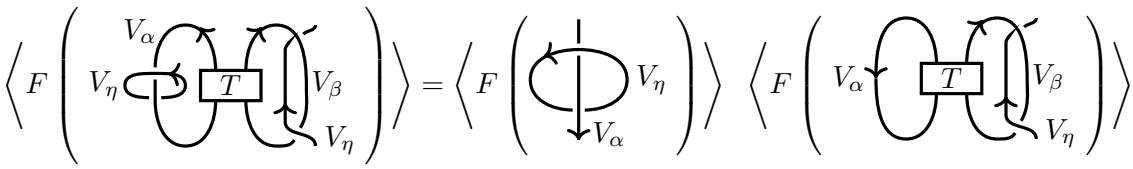
证明。由于 V_η 是双侧的，存在一个等式

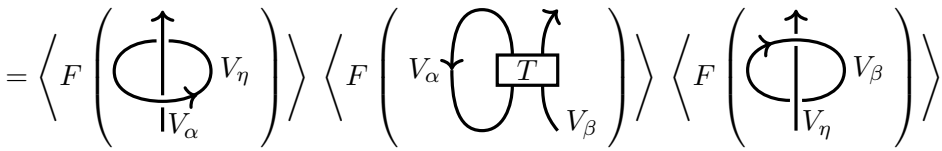


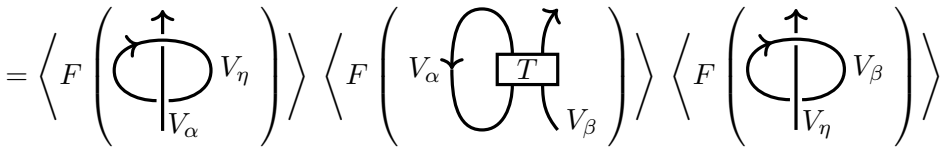
$=$ 

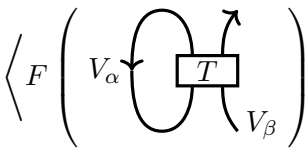
. (11)

我们将这一等式两边展开。左边变为

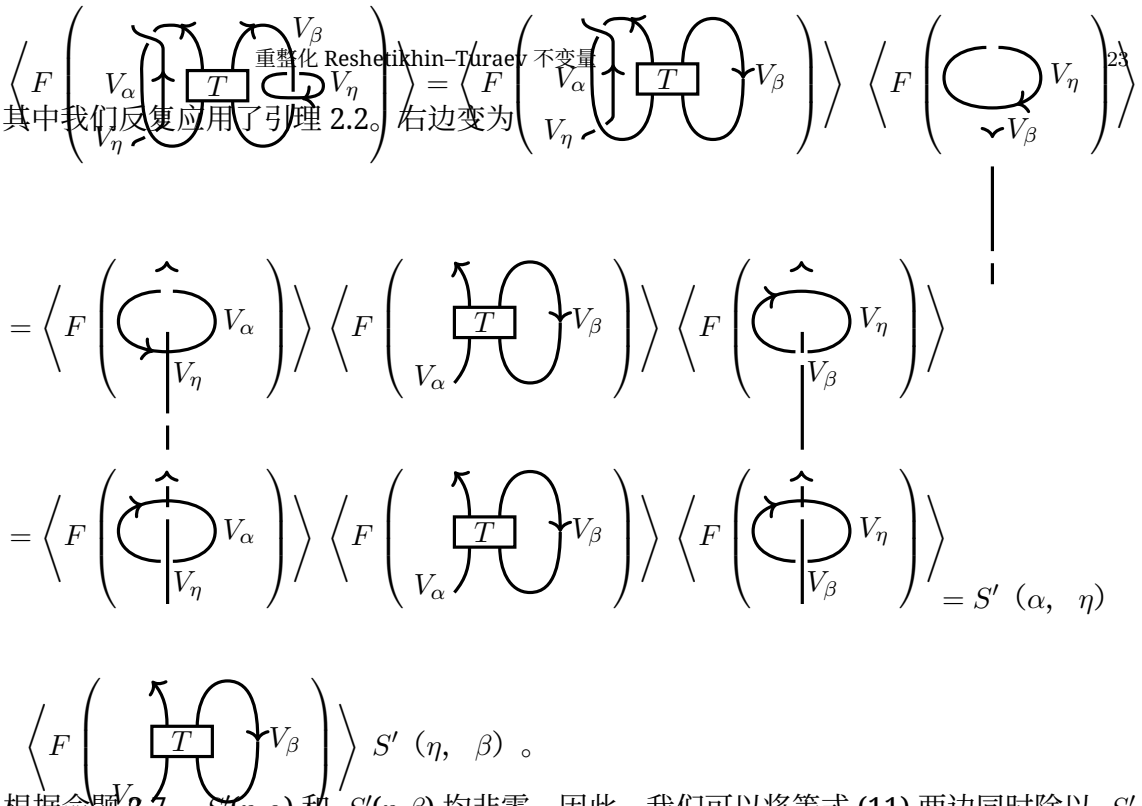






$= S'(\eta, \alpha)$ 

$S'(\beta, \eta)$,



其中我们反复应用了引理 2.2。右边变为

$= S'(\alpha,\ \eta)$

$S'(\eta,\ \beta)$ 。

根据命题 3.7，$S'(\eta,\alpha)$ 和 $S'(\eta,\beta)$ 均非零。因此，我们可以将等式 (11) 两边同时除以 $S'(\eta,\alpha)S'(\eta,\beta)$，从而完成证明。□

推论 3.11. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$，模 V_α 都是双侧的。特别地，$\mathcal{C}$ 中的任意简单模都是双侧的。

证明. 设 $\eta \in \mathbb{C}\setminus\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。根据定理 3.6，模 V_η 是双侧的。根据命题 3.7，标量 $\mathrm{d}_\eta(\alpha)$ 非零。令 $\alpha = \beta$ 取定理 3.10 中的值，即得第一个结论。利用命题 1.7 中给出的 $\mathcal{C}$ 的简单对象的分类，结合上述结果和引理 3.3，即得第二个结论。□

3.3. 链环的重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量。用 $\mathfrak{L}$表示所有带框架的着色链环的集合，其中至少有一种颜色形如 V_α，其中$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。我们将 $\mathfrak{L}$ 视为 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{C}}$ 的态射子集。

定理 3.12（[GPMT09，定理 3]）。设 $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。则映射 $F'_\eta\colon \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ 定义如下:

$$F'_\eta(L) = \mathbf{d}_\eta(\alpha)\langle F(T)\rangle,$$

其中，T 是一个 (1, 1)-缠结，其闭合为 L，且其开弦由 V_α 着色，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$；这是 $\mathfrak{L}$ 中链环的良定义同痕不变量。

证明。F'_η 的良定义性是指 $F'_\eta(L)$ 与定义中所用的 (1, 1)-缠结 T的选取无关。若 T和 T' 是由 L 沿分别由 V_α 和 V_β着色的弦剪开而构造的 (1, 1)-缠结，那么根据推论 3.11，定理 3.10 表明 $\mathrm{d}_\eta(\alpha)\langle F(T)\rangle = \mathrm{d}_\eta(\beta)\langle F(T')\rangle$。$F'_\eta$的同痕不变性由定理2.1推出。□

将 $F'_\eta(L)$ 的定义与公式 (9) 进行比较可知，$\mathrm{d}_\eta(\alpha)$ 在标准理论中所起的作用相当于 $\mathrm{qdim}_{\mathcal{C}}(V_\alpha)$。因此，将函数 d_η 称为修正量子维数是合理的。

3.4. 基本性质与示例。我们首先讨论定理 3.12 中的重整化不变量对参数 η 的依赖性。根据命题 3.9，与这两个参数 η 和 η' 相关的修正量子维数函数相差一个显式的全局标量。事实上，情况还不止于此。

引理 3.13. 设 $D : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是一个函数，使得赋值 $L \mapsto D(\alpha)\langle F(T)\rangle$ 是一个良定义的 T不变量；其中 T是任意一个 (1, 1)-缠结，其闭合与 L 同伦等价，且其开弦由某个 V_α 着色，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。则对于任意 $\eta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$，存在一个标量 $d \in \mathbb{C}$，使得 $D = d \cdot \mathbf{d}_\eta$。

证明. 设 L是一个霍普夫链环，其两条弦分别由某些 V_α和 V_η着色，其中 $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\cup r\mathbb{Z}$ 且$\eta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$。该不变量良定义性的假设意味着 $D(\alpha)S'(\eta, \alpha) = D(\eta)S'(\alpha, \eta)$，因此 $D(\alpha) = D(\eta)\mathbf{d}_\eta(\alpha)$。取 $d = D(\eta)$ 即得引理。 □

由引理 3.13 可知，由修正量子维数 $\mathbf{d}_\eta$ 得到的重整化不变量，实际上是唯一纳入上述切割过程的不变量。当 $r = 2$ 时，引理 3.13 可以加强。根据命题 3.9，任何给出纳入切割过程的不变量的函数 D，都等于某个 $\eta \in \mathbb{C}$ 的 $\pm\mathbf{d}_\eta$；也就是说，引理 3.13 中的标量 d 可以取为 ± 1。

注 3.14. 根据例 2.3，单模S_n^{lr}的量子维数非零，因此由引理 3.3 可知，它们是双侧的。鉴于此，可以对定理 3.12 作出如下修改：相对于 S_n^{lr} 而非 V_η，对标准 Reshetikhin–Turaev 不变量进行重整化。所得不变量 $F'_{n,lr}$ 定义在 $\mathfrak{L}$ 上，也定义在至少由一个形如 S_m^{kr} 的单模着色的那些纽结 $\tilde{\mathfrak{L}}$ 上。按照例 3.1 中的方法计算可知，S_n^{lr}-重整化量子维数 $\mathbf{d}_n^{lr}$ 在 V_α 上为零，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。特别地，$F'_{n,lr}$ 在 $\mathfrak{L}$ 上为零。另一方面，直接计算可得

$$\operatorname{qdim}_{\mathcal{C}}(S_m^{kr}) = \operatorname{qdim}_{\mathcal{C}}(S_n^{lr}) \cdot \mathbf{d}_n^{lr}(S_m^{kr}).$$

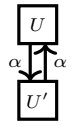
由此可知，$F'_{n,lr}$ 到 $\tilde{\mathfrak{L}}$ 的限制等于标准 Reshetikhin–Turaev 不变量 F的$c\mathrm{qdim}(S_n^{lr})^{-1}$ 倍。从这个角度来看，重整化理论恢复了标准理论。◁

接下来，我们将描述重整化不变量在连通和下的行为。

命题 3.15. 设 L、$L' \in \mathcal{L}$各自至少有一条由 V_α着色的股，其中某个 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \cup r\mathbb{Z}$。那么，沿由 V_α 着色的股作连通和 $L\#L'$ 所得的 η-重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量满足

$$\mathbf{d}_\eta(\alpha)F'_\eta(L\#L') = F'_\eta(L) \cdot F'_\eta(L').$$

证明。考虑形如以下形式的 $L\#L'$ 的结图



其中，（2, 0）-缠结 U 和（0, 2）-缠结 U' 的显然闭合分别是 L 和 L'的结图，并且我们将颜色 V_α 记作 α。沿着其中一条连接股线切开此结图

沿着其中一条连接股线给出

$$F'_\eta(L\#L') = \mathbf{d}_\eta(\alpha)\left\langle F\left(\begin{array}{c}\alpha\uparrow\\ \boxed{U}\\ \alpha\uparrow\\ \boxed{U'}\\ \alpha\uparrow\end{array}\right)\right\rangle$$

这里稍微滥用一下记号，我们现在用 U 表示将一条开弦拉到顶部后由 U 得到的 (1,1)-缠结，对于 U' 也类似。由于 V_α 是单纯的，这个等式右边等于

$$\mathbf{d}_\eta(\alpha)\left\langle F\left(\begin{array}{c}\alpha\uparrow\\ \boxed{U}\\ \alpha\uparrow\end{array}\right)\right\rangle\left\langle F\left(\begin{array}{c}\alpha\uparrow\\ \boxed{U'}\\ \alpha\uparrow\end{array}\right)\right\rangle = \mathbf{d}_\eta(\alpha)^{-1}F'_\eta(L)F'_\eta(L').$$

这就得到了 $F'_\eta(L\#L')$ 所需的表达式。 □

例 3.16。令 $r=2$。取 $V=V_\alpha$，其中某个 $\alpha\in$ 属于 C。考虑以 $\{v_0\otimes v_0, v_0\otimes v_1, v_1\otimes v_0, v_1\otimes v_1\}$ 为基的 $V\otimes V$。直接计算可得

$$c_{V,V} = \begin{pmatrix} q^{\frac{(\alpha+1)^2}{2}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q^{\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}} & 0\\ 0 & q^{\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}} & q^{\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}}\{1-\alpha\} & 0\\ 0 & 0 & 0 & q^{\frac{(\alpha-1)^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

例如，$c_{V,\,V}$ 的 (3, 2) 和 (3, 3) 项是 $c_{V,\,V}(v_1\otimes v_0)$ 的系数：

$$\begin{aligned} c_{V,V}(v_1\otimes v_0) &= \tau(q^{H\otimes H/2}(1+\frac{\{1\}^2}{\{1\}}E\otimes F)(v_1\otimes v_0)\\ &= \tau(q^{H\otimes H/2}(v_1\otimes v_0+\frac{\{1\}^2}{\{1\}}Ev_1\otimes Fv_0)\\ &= q^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{2}}v_0\otimes v_1 + q^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{2}}\{1-\alpha\}v_1\otimes v_0. \end{aligned}$$

利用 $c_{V,\,V}$ 的显式公式，我们验证等式

$$q^{-\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}}c_{V,V} - q^{\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}}c_{V,V}^{-1} = \{\alpha+1\}\mathrm{id}_{V\otimes V}. \tag{12}$$

回顾定理 1.19 的证明可知，$\theta_V = q^{-\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}}\mathrm{id}_V$。~~定义 $\mathcal{F}'(L)$ $=q^{\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{2}\mathrm{wr}(L)}F'(L)$~~，其中 wr(*L*) 是 L 的扭转数。于是，$\mathcal{F}'$ 是由 V_α 着色的定向链环的不变量。这是去框架化过程的一个实例，例如 [JM19，第 3 节中对此作了解释。关系 (12) 意味着 $\mathcal{F}'$ 满足 Alexander skein 关系，其中 $t=q^{\alpha+1}$。◁

我们以一些关于交叉数较少的纽结的重整化不变量的计算结束本节。

例 3.17. 利用例2.5的结果，由简单模 V_α 着色的右手三叶结 $K=3_1$ 的重整化不变量为

$$F'_\eta(K) = \frac{\{\eta r\}\{\alpha\}}{\{\eta\}\{\alpha r\}}q^{\frac{3}{2}(\alpha+r-1)^2+(\alpha+r-1)(1-r)}\sum_{i=0}^{r-1}q^{i(-3\alpha-r+i)}\prod_{j=0}^{i-1}\{i-j-\alpha\}. \qquad ◁$$

例 3.18. 仿照例 3.17，八字结 $K = 4_1$ 由简单模 V_α 着色时的重整化不变量为

$$F'_\eta(K) = \frac{\{\eta r\}\{\alpha\}}{\{\eta\}\{\alpha r\}} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{r-i} q^{(-\alpha+r-1-2i)(\alpha-r+1)/2} q^{-(-\alpha+r-1-2(i-j))(i+r-1-j)} \cdot$$
$$q^{-(-\alpha+r-1-2(i-j+k))(\alpha+r-1-2(i+k))/2} q^{j(j-1)/2} q^{k(k-1)/2} q^{(i+k-r+1)(i+k-r)/2} \cdot$$
$$\prod_{x=r-1}^{r-1-j} \frac{\{x\}\{x-\alpha\}}{\{j\}!} \prod_{y=i-j}^{i-j+k} \frac{\{y\}\{y+\alpha\}}{\{k\}!}) \prod_{z=i+k}^{r-1} \frac{\{z\}\{z-\alpha\}}{\{l\}!}. \quad \triangleleft$$

4. Further reading

在本节最后，我们简要介绍重整化 Reshetikhin–Turaev 理论的近期进展。

定理 3.10 中给出的、针对 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上权模范畴的链环重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量构造，可以更一般地应用于某些非半单带状范畴 [GPMT09]。这一更一般背景下的关键新概念是修正迹（以及由此得到的修正量子维数）和双侧对象 [GKPM11, GKPM13, GKPM22, GPM18, FOG18, GR20, BBG21]。复单李代数 [GPM13] 和李超代数 [GPM07, GPM10] 的展开量子群上的权模范畴中的链环重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量已有研究 [KS91, ADO92, Vir06, GPM10]。重整化不变量的动机来自先前的特设重整化不变量，并且能够还原这些不变量 [KS91, ADO92, Vir06, GPM10]。

重整化理论从链环推广到三维流形，是在[CGPM14] 中针对 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上的权模范畴实现的，其中性质 (P2) 和 (P3) 构成了重大障碍。一般而言，为得到三维流形不变量，输入带状范畴所需的额外数据和约束称为非退化相对预模性。由此得到的三维流形不变量具有新颖性质，包括能够区分透镜空间的同伦类，以及与体积猜想的联系；它们还与早期的非半单三维流形不变量相关，包括 Hennings [Hen96] 和 Kerler–Lyubashenko [KL01] 的不变量。参见[DRGPM18、DRGG+23]。 [AGPM21、BH21、Ha18、BI22] 研究了与非退化相对预模范畴相关的更多三维流形不变量实例。关于链环和三维流形的标准 Reshetikhin–Turaev 不变量与重整化 Reshetikhin–Turaev 不变量之间的联系，参见 [CGPM15a、CGP21、DRGPM20、Mor22]。

重整化三维流形不变量进一步扩展到三维拓扑量子场论（TQFT），最初是在 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ [BCGPM16] 上的权模这一情形中实现的。这些拓扑量子场论具有一些有趣的特征，包括将 Reidemeister 扭率扩展为拓扑量子场论，以及有可能构造出模映射类群在其中心模意义下忠实的表示。De Renzi [DR22]，给出了从相对模范畴构造（扩展）拓扑量子场论的一般框架，这一框架推广了所谓的半单拓扑量子场论普适构造[BHMV95]。关于这一系列思想的综述，参见 [BDR21] 。 [DRGG+22、GY22] 构造并研究了更多源自重整化不变量的拓扑量子场论实例。

目前，相对模范畴的主要来源是展开量子群的表示论，因此这类量子群在非半单拓扑中居于核心地位。受半单拓扑中有理共形场论技术取得成功的启发，许多作者致力于研究一种猜想性的对数版本 Kazhdan–Lusztig 对应；该猜想断言，展开量子群上的权模范畴与非有理（或对数）顶点算子代数上的模范畴等价。在 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的情形中已取得许多进展，人们发现了权模与单峰、三重以及 Feigin–Tipunin 代数之间的联系 [CMR18, CR22]。

最后，将非半单数学拓扑量子场论与物理量子场论联系起来的研究取得了令人振奋的进展。这可以看作是著名的紧致 Chern–Simons 理论与 Reshetikhin–Turaev 拓扑量子场论之间联系的非半单推广 [Wit89, RT91]。关于由 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 导出的拓扑量子场论的情形，文献 [CDGG21], 进行了研究，并将其与规范群为 $SU(2)$ 的三维 $\mathcal{N}=4$ Chern–Simons 物质理论的拓扑扭曲联系起来。类似地，文献 [GY22] 表明，由李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的展开量子化导出的拓扑量子场论，与规范群为 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 和 $U(1|1)$ 的超群 Chern–Simons 理论相关。两种物理实现的一个关键特征是存在全局对称群，使得量子场论能够与背景平坦联络耦合。关于此类量子场论的进一步物理研究，见 [GHN+21, Jag22]。在凝聚态物理中，Levin 和 Wen 使用酉球形融合范畴，为拓扑序和弦网凝聚提供了数学基础 [LW05]。近期，这一构造被推广到 $\overline{U}_q^H(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 上的权模非半单范畴这一情形 [GLPMS22a, GLPMS22b]。

References

[ADO92] Y. Akutsu、T. Deguchi 和 T. Ohtsuki。着色链环的不变量。 *J. Knot Theory Rami-fications*, 1(2)：161–184，1992。[AGPM21] C. Anghel、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。来自特殊线性李超代数的相对（预）模范畴。 *J. Algebra*，586：479–525，2021。[And92] H. Andersen。量子倾斜模的张量积。 *Comm. Math. Phys.*，149(1)：149–159，1992。[BBG21] A. Beliakova、C. Blanchet 和 A. Gainutdinov。修正迹是对称化积分。*Selecta Math. (N.S.)*，27(3)：论文编号31，51，2021。[BCGPM16] C. Blanchet、F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。非半单拓扑量子场论、Reidemeister 扭率与 Kashaev不变量。 *Adv. Math.*，301：1–78，2016。[BDR21] C. Blanchet 和 M. De Renzi。超越半单性的模范畴与拓扑量子场论。载于 *Topology and geometry—a collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*，第33卷 *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*，第175–208页。欧洲数学学会，苏黎世，2021。[BH21] A. Beliakova 和 K. Hikami。非半单不变量与Habiro级数。载于 *Topology and geometry—a collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*，第33卷 *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*，第161–174页。欧洲数学学会，苏黎世，2021。[BHMV95] C. Blanchet、N. Habegger、G. Masbaum 和 P. Vogel。由Kauffman括号导出的拓扑量子场论。 *Topology*，34(4)：883–927，1995。[BI22] Y. Bao 和 N. Ito。 $\mathfrak{gl}(1|1)$-三维流形的 Alexander 多项式。arXiv:2022:00238，2022。

[BNW91] D. Bar-Natan 和 E. Witten。非紧规范群的陈-西蒙斯理论的微扰展开。 *Comm. Math. Phys.*，141(2)：423–440，1991。[CDGG21] T. Creutzig、T. Demote、N. Garner 和 N. Geer。用于非半单拓扑量子场论的量子场论。arXiv:2112.01559，2021。[CGP21] F. Costantino、S. Gukov 和 P. Putrov。非半单拓扑量子场论与BPS q-级数。arXiv:2107.14238，2021。[CGPM14] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。通过链环手术表示和非半单范畴构造三维流形的量子不变量。 *J. Topol.*，7(4)：1005–1053，2014。[CGPM15a] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。Witten-Reshetikhin-Turaev 与非半单 $\mathfrak{sl}(2)$三维流形不变量之间的关系。 *Algebr. Geom. Topol.*，15(3)：1363–1386，2015。[CGPM15b] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。关于 $\mathfrak{sl}(2)$展开量子群的若干注记。 *J. Pure Appl. Algebra*，219(8)：3238–3262，2015。[CMR18] T. Creutzig、A. Milas 和 M. Rupert。 $\overline{U}_q^H$ ($\mathfrak{sl}_2$)的对数链环不变量与单态顶点代数的渐近维数。 *J. Pure Appl. Algebra*，222(10)：3224–3247，2018。[CP94] V. Chari 和 A. Pressley。 *A guide to quantum groups*。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[CR13a] T. Creutzig 和 D. Ridout。对数共形场论：超越入门。 *J.Phys. A*，46(49)：494006，72，2013。[CR13b] T. Creutzig 和 D. Ridout。联系对数共形场论的原型。*Nuclear Phys. B*，872(3)：348–391，2013。[CR22] T. Creutzig 和 M. Rupert。展开量子群的再展开。 *Commun. Contemp. Math.*，24(4)：论文编号2150023，27，2022。[DR22] M. De Renzi。非半单扩展拓扑量子场论。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，277(1364)：v+161，2022。[DRGG+22] M. De Renzi、A. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 I. Runkel。来自非半单模范畴的三维拓扑量子场论。 *Selecta Math. (N.S.)*，28(2)：论文编号42，60，2022。[DRGG+23] M. De Renzi、A. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 I. Runkel。来自非半单拓扑量子场论的映射类群表示。 *Commun. Contemp. Math.*，25(1)，2023。[DRGPM18] M. De Renzi、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。重整化Hennings不变量与$2+1$-拓扑量子场论。 *Comm. Math. Phys.*，362(3)：855–907，2018。[DRGPM20] M. De Renzi、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。来自小的和展开量子群的非半单量子不变量与拓扑量子场论。 *Algebr. Geom. Topol.*，20(7)：3377–3422，2020。[Dri86] V. Drinfeld。量子群。 *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.(LOMI)*，155（微分几何、李群与力学 VIII）：18–49，193，1986。[Dri90] V. Drinfeld。霍普夫代数与量子 Yang–Baxter 方程。载于 *Yang-Baxter Equa-tion in Integrable Systems*，第264–268页。World Scientific，1990。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。 *Tensor categories*，第205卷 *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[FOG18] A. Fontalvo Orzco 和 A. Gainutdinov。模迹与Hopf 群余代数。arXiv:1809.01122，2018。[FYH+85] P. Freyd、D. Yetter、J. Hoste、W. B. R. Lickorish、K. Millett 和 A. Ocneanu。纽结与链环的新多项式不变量。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*，12(2)：239–246，1985。[GHN+21] S. Gukov、P.-S. Hsin、H. Nakajima、S. Park、D. Pei 和 N. Sopenko。库仑分支的 Rozansky-Witten 几何与对数纽结不变量。 *J. Geom. Phys.*，168：论文编号104311，22，2021。

[GKPM11] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。带状范畴上的广义迹与修正维数函数。 *Selecta Math. (N.S.)*，17(2):453–504，2011。[GKPM13] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。非半单范畴中的双侧对象与迹函数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，141(9):2963–2978，2013。[GKPM22] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。（非幺模）幺半范畴中的 M-迹。 *Algebr Represent Theor*，125:759–776，2022。[GLPMS22a] N. Geer、A. Lauda、B. Patureau-Mirand 和 J. Sussan。由量子 $\mathfrak{sl}(2)$-模的一个非半单范畴构造的厄米拓扑量子场论。 *Lett. Math. Phys.*，112(4):论文编号 74，27 页，2022。[GLPMS22b] N. Geer、A. Lauda、B. Patureau-Mirand 和 J. Sussan。来自非半单拓扑量子场论的伪厄米 Levin-Wen 模型。 *Ann. Physics*，442:论文编号 168937，33 页，2022。[GPM07] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。由 $\mathfrak{sl}(2|1)$与 Alexander 多项式导出的多变量链环不变量。 *J. Pure Appl. Algebra*，210(1):283–298，2007。[GPM10] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。由 I 型李超代数导出的多变量链环不变量。 *J. Knot Theory Ramifications*，19(1):93–115，2010。[GPM13] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。来自非受限量子群的拓扑不变量。*Algebr. Geom. Topol.*，13(6):3305–3363，2013。[GPM18] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。量子群投射表示上的迹。 *Lett. Math. Phys.*，108(1):117–140，2018。[GPMT09] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 V. Turaev。修正量子维数与重正规化链环不变量。 *Compos. Math.*，145(1):196–212，2009。[GR20] A. Gainutdinov 和 I. Runkel。可分解有限张量范畴中的投射对象与修正迹。 *Compos. Math.*，156(4):770–821，2020。[GY22] N. Geer 和 M. Young。由 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$与 $U(1|1)$ Chern–Simons 理论构造的三维拓扑量子场论。arXiv:2210.04286，2022。[Ha18] N. P. Ha。单位根处量子群 $U_\xi\mathfrak{sl}(2|1)$的拓扑不变量。 *Abh. Math.Semin. Univ. Hambg.*，88(1):163–188，2018。[Hen96] M. Hennings。由霍普夫代数得到的链环与三维流形不变量。 *J. LondonMath. Soc. (2)*，54(3):594–624，1996。[Jag22] M. Jagadale。装饰拓扑量子场论及其希尔伯特空间。arXiv:2206.14967，2022。[Jan96] J. Jantzen。 *Lectures on quantum groups*。数学研究生教材，第 6 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996。[Jim85] M. Jimbo。 *q*-差分类比的 $U(\mathfrak{g})$与 Yang-Baxter 方程。 *Lett. Math. Phys.*，10(1):63–69，1985。[JM19] D. Jackson 和 I. Moffatt。 *An introduction to quantum and Vassiliev knot invariants*。CMS 数学丛书/Ouvrages de Mathematiques de la SMC。施普林格，Cham，2019。[Jon87] V. Jones。辫群的 Hecke 代数表示与链环多项式。 *Ann. of Math.(2)*，126(2):335–388，1987。[Kir78] R. Kirby。 S^3中带框链环的演算。 *Invent. math*，45(1):35–56，1978。[KL01] T. Kerler 和 V. Lyubashenko。 *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*，第 1765 卷，丛书 *Lecture Notes in Mathematics*。施普林格出版社，柏林，2001。[KS91] L. Kauffman 和 H. Saleur。自由费米子与 Alexander-Conway 多项式。 *Comm.Math. Phys.*，141(2):293–327，1991。[KS09] A. Kapustin 和 N. Saulina。Chern-Simons-Rozansky-Witten 拓扑场论。 *Nu-clear Phys. B*，823(3):403–427，2009。[Lic62] W. Lickorish。可定向组合三维流形的一种表示。 *Ann. of Math. (2)*，76:531–540，1962。[LW05] M. Levin 和 X.-G. Wen。弦网凝聚：拓扑相的一种物理机制。 *Phys. Rev. B*，71:045110，2005 年 1 月。

[Mik15] V. Mikhaylov。解析挠率、 $3d$ 镜像对称与超群 Chern–Simons 理论。arXiv:1505.03130，2015。[MM01] H. Murakami 和 J. Murakami。彩色琼斯多项式与纽结的单纯体积。 *Acta Math.*，186(1):85–104，2001。[Mor22] A. Mori。Reshetikhin–Turaev 不变量与重正规化链环不变量之间的关系。arXiv:2209.03608，2022。[Oht02] T. Ohtsuki。 *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*，第 29 卷，丛书 *Series on Knots and Everything*。世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，2002。[PT88] J. Przytycki 和 P. Traczyk。Conway 型链环不变量。 *Kobe J. Math.*，4(2):115–139，1988。[RS93] L. Rozansky 和 H. Saleur。超 U(1, 1) WZW 模型的 S-矩阵与 T-矩阵。应用于基于 Alexander-Conway 多项式的手术及三维流形不变量。*Nuclear Phys. B*，389(2):365–423，1993。[RS94] L. Rozansky 和 H. Saleur。Reidemeister 扭率、Alexander 多项式与 U(1,1) Chern-Simons 理论。 *J. Geom. Phys.*，13(2):105–123，1994。[RT90] N. Reshetikhin 和 V. Turaev。带状图及其由量子群导出的不变量。 *Comm. Math. Phys.*，127(1):1–26，1990。[RT91] N. Reshetikhin 和 V. Turaev。通过链环多项式与量子群得到的三维流形不变量。 *Invent. Math.*，103(3):547–597，1991。[Tur16] V. Turaev。 *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*，第 18 卷，丛书 *De Gruyter Studiesin Mathematics*。德格鲁伊特出版社，柏林，2016。第三版。[Vir06] O. Viro。亚历山大多项式的量子类似物。 *Algebra i Analiz*，18(3):63–157，2006。[Wal60] A. Wallace。修正与共边流形。 *Canadian J. Math.*，12:503–528，1960。[Wit89] E. Witten。量子场论与琼斯多项式。 *Comm. Math. Phys.*，121(3):351–399，1989。[Wit91] E. Witten。复规范群的陈-西蒙斯规范理论量子化。 *Comm.Math. Phys.*，137(1):29–66，1991。

Department of Mathematics and Statistics、 Utah State University、 Logan、 Utah 84322、USA*Email address*: nathan.geer@gmail.com*Email address*: adam.robertson@usu.edu*Email address*: jspellmann@outlook.de*Email address*: matthew.young@usu.edu