arXiv:2302.05533v1 [math.OA] 10 Feb 2023

关于 Drazin可逆 C^*-算子与广义C^*-韦尔算子

Stefan Ivković，stefan.iv10@outlook.com

塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所，克涅兹·米哈伊洛街36号，11000 贝尔格莱德，塞尔维亚

摘要

Djordjević 在 [4] 中引入并研究了希尔伯特空间上的广义 Weyl 算子。本文通过给出充分条件，推广了他的结果至希尔伯特 C^*-模上的 C^*-算子情形：在这些条件下，广义 C^*-Weyl 算子与有限生成 C^*-算子的和是广义 C^*-Weyl 算子。此外，我们将 Djordjević 关于希尔伯特空间上算子的结果推广至巴拿赫空间上算子的情形。接下来，我们考察希尔伯特 C^*-模上的半-C^*-B-Fredholm 算子，并给出充分条件，使得两个彼此可交换的半-C^*-B-Fredholm 算子的复合是半-C^*-B-Fredholm 算子，从而推广了 Berkani 关于巴拿赫空间上半-B-Fredholm 算子的结果。最后，我们考察 Drazin可逆 C^*-算子，并给出两个彼此可交换的 C^*-算子在其复合为 Drazin可逆时本身为 Drazin可逆的充要条件。

关键词： 希尔伯特 C^*-模，广义 C^*-韦尔算子，半-C^*-B-弗雷德霍姆算子，Drazin可逆 C^*-算子

致谢

我感谢 Dragan S. Djordjević教授建议我将半-C^*-Fredholm理论作为研究课题，并向我介绍了相关文献。此外，我感谢 Snezana Živković Zlatanović教授建议我考虑 Drazin可逆算子和Browder算子 C^*。最后，我感谢 Vladimir M. Manuilov教授对本文引言部分提出的宝贵意见。

这篇预印本未经同行评审（如适用），也未经过任何投稿后的改进或更正。本文的正式发表版本刊载于 [10], ，并可通过 https://doi.org/10.1007/s43034- 023-00258-0 在线获取。

1 引言

在 [4] 中，Djordjević 将巴拿赫空间上的广义 Weyl 算子定义为核与余像同构的闭值域算子。随后他证明，若希尔伯特空间上两个广义 Weyl 算子的乘积具有闭像，则该乘积也是广义 Weyl 算子；他还证明，希尔伯特空间上所有广义 Weyl 算子的集合在有限秩扰动下保持不变。然而，对于一般巴拿赫空间上的算子，这些结论是否仍成立，至今仍是一个开放问题。本文将 Djordjević 的这些结果推广到巴拿赫空间上的算子情形。

现在，当标量域替换为任意 C^*-代数时，Hilbert C^*-模是希尔伯特空间的自然推广。Paschke 在例如 [17] 中建立了 Hilbert C^*-模的一般理论。

作为希尔伯特空间上 Fredholm 理论的推广，Hilbert C^*-模上的 Fredholm 理论由 Mishchenko 和 Fomenko 于 [15]年开创。他们引入了幺 C^*-代数上标准模的 Fredholm 算子这一概念，并建立了它的主要性质。在 [6] 中，我们沿着这一方向进一步研究，定义了 Hilbert C^*-模上的可伴随半-C^*-Fredholm 算子和可伴随半-C^*-韦尔算子。随后，我们研究并证明了这些广义半 Fredholm 算子和半韦尔算子在 Hilbert C^*-模上的若干性质，这些性质类比或推广了希尔伯特空间和巴拿赫空间上经典半 Fredholm 算子与半韦尔算子的众所周知的性质。研究这类算子的兴趣源于作用在流形上的伪微分算子。经典理论在紧流形上适用良好，但对一般流形则不然。即使是欧几里得空间上的算子也难以研究，例如拉普拉斯算子就不是 Fredholm 算子。然而，当它们被视为系数取自某个 C^*-代数的紧流形上的算子时，有时会成为 Fredholm 算子。许多算子的核和余核作为巴拿赫空间是无限维的，但作为 Hilbert 模来看则是有限生成的。这是研究半-C^*-Fredholm 算子最重要的原因。

作为半-C^*-Fredholm 理论研究项目的一部分，在 [8] 中，我们定义并研究广义 C^*-韦尔算子，将其视为 Djordjević 定义的广义 Weyl 算子在 Hilbert C^*-模算子这一框架下的推广。举例来说，我们在 [8] 中证明了广义 C^*-韦尔算子框架下的一个类似结果，对应于 Djordjević 在 [4] 中的两条主要定理中的第一条；该定理指出，当两个广义 Weyl 算子的乘积具有闭值域时，这个乘积也是广义 Weyl 算子。

本文将 Djordjević 在 [4], 中提出的两条主要定理中的第二条推广到广义 C^*-Weyl 算子的情形。该定理指出，希尔伯特空间上所有广义 Weyl 算子的集合在有限秩扰动下保持不变。

Berkani 在例如 [1], [2] 中定义并研究了半-B-Fredholm 算子。作为半-B-Fredholm 算子的推广，希尔伯特C^*-模上的半-C^*-B-Fredholm 算子这一概念在 [8]中被提出。本文将 Berkani 在 [2] 中给出的著名结果推广到半-C^*-B-Fredholm 算子的情形。该结果指出，如果两个 B-Fredholm 算子彼此交换，那么它们的复合也是 B-Fredholm 算子，且指标具有可加性。

本文中的若干结果假设算子的像是闭的，这表明闭值域算子在希尔伯特 C^*-模上的半 Fredholm 理论中十分重要。因此，自然需要研究闭值域的 C^*-算子。对于两个像均为闭集的任意有界 C^*-算子，我们给出了它们的复合具有闭像的充要条件。这是在希尔伯特 C^*-模上的算子这一情形下，对希尔伯特空间上算子的著名 Bouldin 的结果的推广。 [3] 此外，我们给出了像非闭的 C^*-Fredholm 算子的例子。我们还给出了一个 C^*-Fredholm 算子的例子 F ，其中 ImF 是闭的，但 ImF^2 不是闭的。这说明 C^*-Fredholm 算子的行为可能与经典 Fredholm 算子大不相同；后者作用于希尔伯特空间和巴拿赫空间时，其像总是闭的。

回顾一下，Banach 空间上的有界线性算子若具有有限的上升指数和下降指数，则称为 Drazin可逆；若同时是 Fredholm 算子和 Drazin可逆算子，则称为 Browder算子。本文最后一节将 Drazin可逆的 C^*-算子视为希尔伯特空间上 Drazin可逆算子的一种推广。我们给出两个彼此可交换的 C^*-算子在其复合为 Drazin可逆时自身也是 Drazin可逆的充要条件。此外，我们给出两个彼此可交换的 C^*-算子的例子：它们的复合是 Drazin可逆的，但它们自身并非 Drazin可逆。最后，我们引入 C^*-Browder 算子的概念，将其作为希尔伯特空间上 Browder算子的一种推广，并研究 Drazin可逆的 C^*-算子与 C^*-Browder 算子之间的关系。

第3节和第4节包含作者博士学位论文中尚未发表的结果，见 [9]。

2 预备知识

本文令 $\mathcal{A}$表示一个含幺 C^*-代数，并令 $H_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$. 上的标准 Hilbert 模。对于 Hilbert $\mathcal{A}$-模 M ，令 $B^a(M)$表示 M.上所有 $\mathcal{A}$-线性、有界、可伴随算子构成的C^*-代数

此外，对于一般的巴拿赫空间 X 和 Y，令 $B(X,Y)$表示从 X 到 Y 的所有有界线性算子构成的巴拿赫代数，并简记 $B(X,X) := B(X)$。

我们用符号 $\tilde{\oplus}$ 表示 [14]中给出的模的直和。

因此，若 M 是一个希尔伯特 C^*-模，且 M_1、M_2 是 M的两个闭子模，那么当 $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ 和 $M_1 + M_2 = M.$ 时，我们记作 $M = M_1 \tilde{\oplus} M_2$ 。此外，若 M_1 和 M_2 相互正交，则记作 $M = M_1 \oplus M_2.$

定义 2.1。 [6, 定义 2.1], [15] 设 $F \in B^a(H_{\mathcal{A}})$。若存在一个分解，使得 F 是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子，则称之为上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子。

$$H_{\mathcal{A}} = M_1 \tilde{\oplus} N_1 \xrightarrow{F} M_2 \tilde{\oplus} N_2 = H_{\mathcal{A}}$$

在此分解下， F 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix},$$

其中 F_1 是一个同构， M_1、M_2、N_1、N_2 是 $H_{\mathcal{A}}$ 的闭子模，且 N_1 是有限生成的。类似地，若满足上述所有条件，但此时假设 N_2 （而非 N_1 ）是有限生成的，则称 F 为下半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子。若 N_1 和 N_2 都是有限生成的，则称 F 为 $\mathcal{A}$-Fredholm 算子。

Set

$$\mathcal{M}\Phi_+(H_{\mathcal{A}}) = \{F \in B^a(H_{\mathcal{A}}) \mid F \text{ is upper semi-}\mathcal{A}\text{-Fredholm }\},$$

$$\mathcal{M}\Phi_-(H_{\mathcal{A}}) = \{F \in B^a(H_{\mathcal{A}}) \mid F \text{ is lower semi-}\mathcal{A}\text{-Fredholm }\},$$

$$\mathcal{M}\Phi(H_{\mathcal{A}}) = \{F \in B^a(H_{\mathcal{A}}) \mid F \text{ is } \mathcal{A}\text{-Fredholm operator on } H_{\mathcal{A}}\}.$$

接下来，记 $\mathcal{M}\Phi_{\pm}(H_{\mathcal{A}}) = \mathcal{M}\Phi_+(H_{\mathcal{A}}) \cup \mathcal{M}\Phi_-(H_{\mathcal{A}})$。注意，若 M、N是两个任意的 Hilbert 模 C^*-模，则上述定义可推广至类 $\mathcal{M}\Phi_+(M,N)$ 和 $\mathcal{M}\Phi_-(M,N)$。

定义 2.2。 [12] [14, 定义 2.7。1] 设 M 为阿贝尔幺半群。考虑笛卡尔积 $M \times M$ 及其关于等价关系的商幺半群

$$(m,n) \sim (m',n') \Leftrightarrow \exists p,q : (m,n) + (p,p) = (m',n') + (q,q).$$

这个商幺半群是一个群，记作 $S(M)$，称为 $M.$ 的对称化。现在考虑幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上投射模构成的加性范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$，并以 $[\mathcal{M}]$ 表示来自 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 的对象 $\mathcal{M}$ 的同构类。这些同构类的集合 $\phi(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$ 在运算 $[\mathcal{M}] + [\mathcal{N}] = [\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}].$ 下构成一个阿贝尔幺半群。在这种情况下，群 $S(\phi(\mathcal{P}(\mathcal{A})))$ 记作 $K(\mathcal{A})$ 或 $K_0(\mathcal{A})$，称为 $\mathcal{A}$ 的 K-群，或范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 的格罗滕迪克群。

关于 K-群 $K_0(\mathcal{A})$，值得一提的是，对于 $\mathcal{A}$ 上的两个有限生成希尔伯特模 M、N，一般而言，$[M]=[N]$ 并不意味着 $M\cong N$。如果 $K_0(\mathcal{A})$ 满足这样的性质：对于 $\mathcal{A}$ 上任意两个有限生成希尔伯特模 M、N，$[N]=[M]$ 都意味着 $N\cong M$，那么就称 $K_0(\mathcal{A})$ 满足“消去性质”，参见 [19, 第 6 节 2]。

定义 2.3. [14, 定义 2.7.8] 设 $F\in\mathcal{M}\Phi(H_{\mathcal{A}})$。我们将 F 的指标定义为

$$\operatorname{index} F=[\mathcal{N}_1]-[\mathcal{N}_2]\in K_0(\mathcal{A}).$$

定理 2.1. *[14, 定理 2.7.9]* 该指标定义良好。

引理 2.1. 设 M 是一个希尔伯特 C^*-模，且 M_1,M_2 是 M的闭子模，满足 $M_1\subseteq M_2$ 和 $M=M_1\tilde{\oplus}M_1'$，其中 M_1'.是某个希尔伯特子模。则 $M_2=M_1\tilde{\oplus}(M_1'\cap M_2)$.

证明. 由于根据假设 $M=M_1\tilde{\oplus}M_1'$ 且 $M_2\subseteq M$，任意 $z\in M_2$ 都可写为 $z=x+y$，其中 $x\in M_1$ 且 $y\in M_1'$.。现在，由于根据假设 $M_1\subseteq M_2$，我们有 $y=z-x\in M_2$.。因此，$y\in M_1'\cap M_2$. □

注记 2.1。 引理 2.1 是对 [7, 引理 2.6]的略微修改版本。

3 广义 C^*-韦尔算子

本节讨论广义 C^*-韦尔算子，并在此框架下推广 [4, 定理 2]关于以有限秩算子扰动广义韦尔算子的结论。此外，我们将 [4]中的结果从希尔伯特空间上的算子情形推广到巴拿赫空间上的正则算子情形。

我们先给出以下定义。

定义 3.1. 对于两个希尔伯特 C^*-模 M和 M'，记 $\tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(M,M')$ 为所有满足以下条件的闭值域算子 $F\in B^a(M,M')$ 的类：存在有限生成希尔伯特子模 N，N，使得

$$N\oplus\ker F\cong\tilde{N}\oplus ImF^{\perp}.$$

于是我们得到 [4,定理 2]的以下推广。

引理 3.1。 设 $T\in\tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$ 和 $F\in B^a(H_{\mathcal{A}})$ 满足 ImF 是闭的、有限生成的。假设 $Im(T+F)$ $T(\ker F)$ $P(\ker T)$ $P(\ker(T+F))$均为闭集，其中 P 表示到$\ker F^{\perp}$. 上的正交投影。于是

$$T+F\in\tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}}).$$

证明。 由于根据假设，ImT和 $Im(T+F)$是闭的，由 [14, 定理 2.3.3] 可得 $H_{\mathcal{A}}=ImT\oplus ImT^{\perp}$和 $H_{\mathcal{A}}=Im(T+F)\oplus Im(T+F)^{\perp}$. 类似地，由于根据假设 ImF 是闭的，由 [14, 定理 2.3.3] 可得

$H_{\mathcal{A}}$ =核 $F^{\perp}$ ⊕核 F.因此， $T_{|_{\ker F}}$是一个从核 F到ImT的可伴算子（并且($T+F)_{|_{\ker F}} = T_{|_{\ker F}}$是一个从核 F到$Im(T+F)$的可伴算子）。现在，由于根据假设 $T(F)$是闭的，再次应用算子 $T_{|_{\ker F}}$上的[14, 定理 2.3.3]，我们可推得

$$ImT = T(\ker F) \oplus N \text{ and } Im(T+F) = T(\ker F) \oplus N'$$

对于某些希尔伯特子模 N， N'. 因此

$$ImT^{\perp} \oplus N = Im(T+F)^{\perp} \oplus N' = T(\ker F)^{\perp}.$$

因此， T(ker F) 在 $H_{\mathcal{A}}$. 中是正交可补的。令 Q 表示到 T(ker F) 上的正交投影。事实证明， N 和 N' 是有限生成的。事实上，我们有

$$ImT = T(\ker F) + T(\ker F^{\perp}) \text{ and } Im(T+F) = T(\ker F) + (T+F)(\ker F^{\perp}).$$

由于根据 Banach开映射定理， $F_{|_{\ker F^{\perp}}}$ 是到 ImF 上的同构，并且根据假设， ImF 是有限生成的，因此 ker $F^{\perp}$ 是有限生成的。因此， QT(ker $F^{\perp}$) 和 $Q(T+F)$(ker $F^{\perp}$) 是有限生成的。然而，我们有

$$N = Q(ImT) = QT(\ker F^{\perp}) \text{ and } N' = Q(Im(T+F)) = Q(T+F)(\ker F^{\perp}).$$

此外，由于根据假设 P(ker T) 是闭的，并且 $P_{|_{\ker T}}$ 是可伴随的（因为根据 [14, 定理 2.3.3], ker T 是正交可补的），所以 ker $P_{|_{(\ker T)}}$= ker F ∩ ker T 在 ker T 中是正交可补的，因此

$$\ker T = (\ker F \cap \ker T) \oplus M$$

对于某个闭子模 M. ，我们有 $P_{|_M}$ 是到 P(ker T) 上的同构。由于 $P_{|_{\ker T}}$ 可伴随，且 P(ker T) 是闭的，根据 [14, 定理 2.3, 3] P(ker T) 在 ker $F^{\perp}$. 中正交可补。由于 ker $F^{\perp}$ 是有限生成的，因此 P(ker T) 是有限生成的。因此， M 必须是有限生成的，因为 $P_{|_M}$ 是到 P(ker T) 上的同构。

采用与上述类似的论证，并利用假设可知 P(ker$(T+F)$) 是闭的，我们得到

$$\ker(T+F) = (\ker(T+F) \cap \ker F) \oplus M',$$

其中 M' 是有限生成希尔伯特子模。现在，ker T ∩ker F =ker$(T+F)$ ∩ ker F，因此我们有

$$\ker(T+F) = (\ker T \cap \ker F) \oplus M'.$$

最后，由于 $T \in \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$，存在有限生成希尔伯特子模$R$和 R'，使得 $R \oplus \ker T \cong R' \oplus ImT^{\perp}$.。综合以上各点，我们推得

$$\ker(T+F) \oplus M \oplus N \oplus R \cong (\ker T \cap \ker F) \oplus M' \oplus M \oplus N \oplus R$$
$$\cong \text{核 } T \oplus M' \oplus N \oplus R \cong ImT^{\perp} \oplus M' \oplus N \oplus R' \cong Im(T+F)^{\perp} \oplus M' \oplus N' \oplus R'.$$

□

接下来，我们回顾广义 $\mathcal{A}$-韦尔算子的定义。

定义 3.2. [8, 定义 11] 设 $F \in B^a(H_{\mathcal{A}})$。若 F 是广义 $\mathcal{A}$-韦尔算子，则称之为 $F \in \mathcal{M}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$，其中 ImF 是闭的，且 $kerF \cong ImF^{\perp}$.

由引理 3.1 可推得以下推论。

推论 3.1. 设 $T \in \mathcal{M}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$，并假设 $\ker T \cong ImT^{\perp} \cong H_{\mathcal{A}}.$。若$F \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ 满足引理 *3.1* 的假设，则

$$\ker(T+F) \cong Im(T+F)^{\perp} \cong H_{\mathcal{A}}.$$

特别地，$T+F \in \mathcal{M}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$。

证明。 注意，由于根据假设有 $T \in \mathcal{M}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$，我们已经知道 $\ker T \cong ImT^{\perp}$，因此额外的假设是 $\ker T$和 $ImT^{\perp}$同构于 $H_{\mathcal{A}}.$。根据引理 3.1 的证明（并使用相同的记号），由于$\mathcal{M}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}}) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$，我们有

$$\ker(T+F) \oplus M \oplus N \oplus R \cong \ker T \oplus M' \oplus N \oplus R$$

$$\cong ImT^{\perp} \oplus M' \oplus N \oplus R' \cong Im(T+F)^{\perp} \oplus M' \oplus N' \oplus R'.$$

由于 M, N, R, M', N', R' 是有限生成希尔伯特子模，且根据假设 $\ker T \cong ImT^{\perp} \cong H_{\mathcal{A}}$，由 Kasparov 稳定化定理 [14, 定理 1.4.2]，我们有

$$H_{\mathcal{A}} \cong \ker T \oplus M' \oplus N \oplus R \cong ImT^{\perp} \oplus M' \oplus N \oplus R'.$$

因此

$$H_{\mathcal{A}} \cong \ker(T+F) \oplus M \oplus N \oplus R \cong Im(T+F)^{\perp} \oplus M' \oplus N' \oplus R'.$$

由 Dupre-Filmore 定理 [14, 定理 1.4.5], ，容易得到

$$\ker(T+F) \cong Im(T+F)^{\perp} \cong H_{\mathcal{A}}.$$

□

推论 3.2. 设 H 是一个可分无限维 *Hilbert* 空间，且 T 是 $H.$ 上的广义 *Weyl* 算子。若 核 $T(\cong ImT^{\perp})$ 是无限维的，且 F 是 H 上的有限秩算子，则 $T+F$ 是广义 *Weyl* 算子。

证明。 由于 $ImT = T(\ker F) + T(\ker F^{\perp})$ 且 $dimT(\ker F^{\perp}) < \infty$，由 Kato 定理 [20, 推论 1.1.7] 应用于算子 $T_{|_{\ker F}}$: $\ker F \to ImT$，可得 $T(\ker F)$ 是闭的。因此，由于 $Im(T+F) = T(\ker F) + (T+F)(\ker F^{\perp})$ 且 $\dim(T+F)(\ker F^{\perp}) < \infty$，根据 [20, 引理 1.1.2]，必有 $Im(T+F)$ 是闭的。

最后，由于 P 是有限秩算子（其中 P 是到 $\ker F^{\perp}$上的正交投影），可知 $P(\ker T)$ 和 $P(\ker(T+F))$ 是闭的。因此，由推论 3.1 可得 $T+F$ 是广义 Weyl。

□

注 3.1。 推论 3.2 实际上是 [4, 定理 2]中的主要结论。事实上，若 ker T($\cong ImT^{\perp}$) 是有限维的，则 T在经典意义下是韦尔算子，因此众所周知，在这种情况下 $T+F$ 也是韦尔算子。因此， [4, 定理 2] 的证明只需处理 ker T($\cong ImT^{\perp}$) 是无限维的情形。

引理 3.2。 设 $T \in \mathcal{M}\Phi(H_{\mathcal{A}})$ 且假设 ImT 是闭的。则 $T \in \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(H_{\mathcal{A}})$。

证明。 由 [8, 引理 12], , 由于 ImT 是闭的且 $T \in \mathcal{M}\Phi(H_{\mathcal{A}})$，我们有 ker T 和 $ImT^{\perp}$ 都是有限生成的。由 [14, 定理 2.7。5] 我们可以找到一个 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$L_n = P\tilde{\oplus}p_n(\ker T) = P'\tilde{\oplus}p_n(ImT^{\perp})$$

and

$$p_n(\ker T) \cong \ker T, p_n(ImT^{\perp}) \cong ImT^{\perp},$$

其中 P 和 P' 是有限生成希尔伯特子模， p_n 表示到 L_n上的正交投影。因此 $P \oplus \ker T \cong P' \oplus ImT^{\perp}$. □

现在我们给出巴拿赫空间上正则算子的定义。

定义 3.3。 设 X, Y为巴拿赫空间，且 $T \in B(X,Y)$。若 $T(X)$ 在 Y中是闭的，且此外 $T^{-1}(0)$ 和 $T(X)$ 分别在 X 和 Y中可补，则称 T为正则算子。

注记 3.2。 不难看出， T 是正则算子，当且仅当 T存在广义逆；也就是说，当且仅当存在某个 $T' \in B(Y,X)$，使得 $TT'T = T$. 在这种情况下， TT'和 $T'T$分别是到 $T(X)$ 及 $T^{-1}(0)$ 的补空间上的投影；此外， $T'TT' = T'$.因此，定义 3.3 对应于 [5] 中给出的巴拿赫空间上正则算子的定义。

我们可以应用引理 3.1 证明中的论证，将 [4, 定理 2] 推广到巴拿赫空间上正则算子的情形。首先给出以下定义。

定义 3.4。 设 X, Y为巴拿赫空间。我们将 $\Phi_0^{gc}(X,Y)$ 定义为满足以下性质的所有正则算子 $T \in B(X,Y)$ 所构成的集合：存在有限维巴拿赫空间 Z_1 和 Z_2，使得 ker $T \oplus Z_1 \cong ImT^{\circ} \oplus Z_2$，其中 ImT° 表示 Y.中 ImT 的补空间。

然后，我们给出 [4, 定理 2] 在巴拿赫空间上的正则算子情形下的推广。

引理 3.3. 设 X, Y是巴拿赫空间，且 $T \in \Phi_0^{gc}(X,Y)$. 假设 F是一个从 X 到 Y. 的有限秩算子，则 $T+F \in \Phi_0^{gc}(X,Y)$。

证明。 由于 F 是有限秩算子，因此它是正则的，即 ImF 是闭的，$\ker F$ 并且 ImF 分别在 X 和 Y中可补。 令 $\ker F^{\circ}$ 表示 $\ker F$ 在 $X.$ 中的补空间。由于根据假设 ImT 是闭的，且 $ImT = T(\ker F) + T(\ker F^{\circ})$，由此可得 $T(\ker F)$在 ImT中具有有限余维，因此，根据 Kato 定理 [20, 推论 1.1.7],，我们有 $T(\ker F)$ 是闭的（因为 $T(\ker F) = ImT_{|_{\ker F}}$且 $\ker F^{\circ}$ 是有限维的）。因此，再次利用由于 $T(\ker F)$ 具有有限余维，根据 [18, 引理 4.21] 中的 b) 部分，我们得到即 $ImT = T(\ker F)\tilde{\oplus}N$，其中 N 是一个有限维子空间。现在，由于 $T(\ker F)$ 是闭的，并且

$$Im(T+F) = T(\ker F) + (T+F)(\ker F^{\circ}),$$

由 [20, 引理 1.1.2] 可知， $Im(T+F)$ 是闭的，因为 $(T+F)(\ker F^{\circ})$ 是有限维的。通过与上文类似的论证，我们进而推得，对于某个有限维子空间 $N'.$，有 $Im(T+F) = T(\ker F)\tilde{\oplus}N'$。由于

$$Y = ImT\tilde{\oplus}ImT^{\circ} = T(\ker F)\tilde{\oplus}N\tilde{\oplus}ImT^{\circ},$$

其中 ImT° 表示 ImT在 Y中的补空间。由此可知， $T(\ker F)$ 在 $Y.$ 中是可补的。设 $T(\ker F)^{\circ}$ 表示 $T(\ker F)$ 在 Y中的补空间，且 Q 是沿着 $T(\ker F)$ 投影到 $T(\ker F)$ 的投影。那么 $Q_{|_{N'}}$是单射。由于 N'是有限维的，$Q(N')$ 也是有限维的，因此 $Q(N')$ 是闭的，并且 $T(\ker F)^{\circ} = Q(N')\tilde{\oplus}V$，其中 $V.$是某个闭子空间。这由引理 4.21] 的 a) 部分得出。由于 $Q_{|_{N'}}$ 是到 $Q(N')$ 上的同构，按照命题 3] 的证明中的相同论证，我们可推出

$$Y = T(\ker F)\tilde{\oplus}N'\tilde{\oplus}V = Im(T+F)\tilde{\oplus}V,$$

因此 $Im(T+F)$ 是可补的。

接下来，设 P是沿着 $\ker F.$ 投影到 $\ker F^{\circ}$ 的投影。那么 $P_{|_{\ker T}}$和 $P_{|_{\ker(T+F)}}$ 是有限秩算子，因此是正则的。由此可知，它们的核是可补的，因此按照引理 3.1 的证明中的相同论证，我们可推出

$$\ker T = (\ker T \cap \ker F)\tilde{\oplus}M \text{ and } \ker(T+F) = (\ker T \cap \ker F)\tilde{\oplus}M'$$

对于某些有限维子空间 M 和 $M'.$，由于 T 的核在 X 中是可补的，且 T 是正则的，因此 $T\cap\ker F$ 的核在 X 中是可补的。于是，利用与上述类似的论证，我们可以推出 $\ker(T+F)$ 在 $X.$ 中是可补的。因此， $T+F$ 是一个正则算子。此外，按照引理 3.1 证明中的相同方法，通过考虑同构链，我们得到 $T+F \in \Phi_0^{gc}(X,Y)$。 □

注 3.3。 如果 H 是一个希尔伯特空间，则可以推出：若 $F \in \Phi_0^{gc}(H)$ 且 $\ker F$ 或 $ImF^{\perp}$ 是无限维的，那么 $\ker F \cong ImF^{\perp}.$。因此，不难看出，引理 3.3 确实是 [4,定理 2] 的推广。

接下来，我们回顾巴拿赫空间上广义 Weyl 算子的定义。

定义 3.5。 [4] 设 X,Y 为巴拿赫空间，且 $T \in B(X,Y)$。若 $T(X)$ 在 Y 中是闭的，且 $T^{-1}(0)$ 与 $Y/T(X)$ 是彼此同构的巴拿赫空间，则称 T 为广义 Weyl 算子。

于是我们给出以下命题，将 [4, 定理 1] 推广到巴拿赫空间上正则算子的情形。

命题 *3.1.* 设 X、Y、Z 为巴拿赫空间，且 $T \in B(X,Y)$ $S \in B(Y,Z)$。假设 T、S、ST 为正则算子，即 $T(X)$ $S(Y)$ $ST(X)$ 是闭的，并且 T、S、ST 具有广义逆。若 T 和 S 是广义 *Weyl* 算子，则 ST 是广义 *Weyl* 算子。

证明. 由假设，T、S、ST 是正则算子，因此它们的核和值域在相应的巴拿赫空间 X、Y、Z. 中是可补的。此外，注意到 $S_{|_{T(X)}}$ 是正则的。事实上，若 U 表示 ST 的广义逆，则对于 X 中的任意 x，有 $STUST(x) = ST(x)$，因此容易看出 TU 是 $S_{|_{T(X)}}$. 的广义逆。因此，$(S_{|_{T(X)}})^{-1}(0)$ 在 $T(X)$ 中是可补的。然而，我们有 $(S_{|_{T(X)}})^{-1}(0) = S^{-1}(0) \cap T(X)$。由于 T 是正则的，$T(X)$ 在 Y 中是可补的，因此 $S^{-1}(0) \cap T(X)$ 在 Y. 中是可补的。由引理 2.1，$S^{-1}(0) \cap T(X)$ 于是可补于 $S^{-1}(0)$ 中。此外，由引理 2.1，$ST(X)$ 在 $S(Y)$ 中是可补的，因为 $ST(X)$ 在 Z. 中是可补的。最后，由于 T 是正则的，$T^{-1}(0)$ 在 X 中是可补的，且 $T^{-1}(0) \subseteq ST^{-1}(0)$，再次由引理 2.1 可得，$T^{-1}(0)$ 在 $ST^{-1}(0)$ 中是可补的。于是我们可以完全按照 [8, 命题 3]中的证明进行。

□

注记 3.4. 一般而言，若 X、Y、Z 是巴拿赫空间，且 $F \in B(X,Y)$ $G \in B(Y,Z)$ $GF \in B(X,Z)$ 是正则算子，则有如下正合序列

$$0 \to \ker F \to \ker GF \to \ker G \to ImF^{\circ} \to ImGF^{\circ} \to ImG^{\circ} \to 0$$

其中，ImF°、ImG° 和 $ImGF^{\circ}$ 分别表示相应巴拿赫空间中 ImF、ImG 和 $ImGF$ 的补空间。这可由 [8, 命题 3] 和命题 3.1 的证明推得，也可由 [13, 命题 2.1] 和 [13,定理 2.7] 推得。若 G、F、GF 是正则算子，则上述序列中的所有子空间在相应的巴拿赫空间中都是可补的。由上述序列的正合性，我们可以直接推得若干推论，例如 [4, 定理 1] 和指标定理、Harte 幽灵定理等，见 [5]。

引理 3.4. 设 $\tilde{M}$ 是一个希尔伯特 C^*-模，且 $F, D \in \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(\tilde{M})$. 若 $ImDF$ 是闭的，则 $DF \in \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(\tilde{M})$.

证明。 根据假设，$F, D \in \tilde{\mathcal{M}}\Phi_0^{gc}(\tilde{M})$，存在有限生成的~ ~希尔伯特子模 N, N, N' 和 N'，使得

$$N \oplus \ker F \cong \tilde{N} \oplus ImF^{\perp} \text{ and } N' \oplus \ker D \cong \tilde{N}' \oplus ImD^{\perp}.$$

通过应用命题 [8, Proposition 3] 证明中的论证，并采用相同的记号，我们得到以下同构链：

$$\ker DF \oplus N \oplus N' \cong \ker F \oplus (\ker D \cap \ker F) \oplus N \oplus N'$$

$$\cong ImF^{\perp} \oplus (\text{核 } D \cap ImF) \oplus \tilde{N} \oplus N' \cong S(X) \oplus M \oplus (\text{核 } D \cap F) \tilde{\oplus} \tilde{N} \oplus N'$$
$$\cong S(X) \oplus \text{核 } D \oplus \tilde{N} \oplus N' \cong X \oplus ImD^{\perp} \oplus \tilde{N} \oplus \tilde{N}' \cong ImDF^{\perp} \oplus \tilde{N} \oplus \tilde{N}'.$$

□

注 3.5。 正如命题 3.1 和注 3.4 的证明中所述，命题 [8, 命题 3] 的证明适用于巴拿赫空间上的正则算子情形。结合引理 3.4 的证明可知，若 $T \in \Phi_0^{gc}(X, Y)$ $S \in \Phi_0^{gc}(Y, Z)$ 且 ST 是正则的，则 $ST \in \Phi_0^{gc}(X, Z)$（其中 X、Y 和 Z 是巴拿赫空间）。

4 半-C^*-B-Fredholm 算子

本节讨论半-C^*-B-Fredholm 算子，并将 [2, 定理 3.2] 推广到这一情形，该定理涉及半-B- Fredholm 算子的复合。此外，我们给出两个闭值域 C^*-算子的复合具有闭像的充要条件。我们还介绍像非闭的 C^*-Fredholm 算子示例。首先回顾以下定义

.

定义 4.1。 [8, 定义 16] 设 M 为希尔伯特 $\mathcal{A}$-模，且 $F \in B^a(M)$。若存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得对所有 $m \geq n$， ImF^m 均为闭的，且 $F_{|_{ImF^n}}$ 是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子，则称 F 为上半-$\mathcal{A}$-B-Fredholm 算子。类似地，若上述条件成立，但此时假设 $F_{|_{ImF^n}}$ 是下半-$\mathcal{A}$-Fredhlom 算子而非上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子，则称 F 为下半-$\mathcal{A}$-B-Fredholm 算子。

引理 4.1. 设 M 是一个希尔伯特 C^*-模，且 $F \in \mathcal{M}\Phi(M)$。若 ImF 是闭的，则 F 的指标定义良好。

证明。 设

$$M = M_1 \tilde{\oplus} N_1 \xrightarrow{F} M_2 \tilde{\oplus} N_2 = M$$

是 $\mathcal{M}\Phi$ 的分解，其中 $F.$。由于 N_1 是有限生成的，因此它是自对偶的，故由 [14, 推论 2.5.3] 可知， $F_{|_{N_1}}$ 是可伴随的。不难看出，$F(N_1) = ImF \cap N_2$，因此 $F(N_1)$ 是闭的。由 [14, 定理 2.3.3] 可知， $F(N_1)\tilde{}$ 在 N_2 中正交可补，因此对于某个闭子模 $\tilde{}$，有 $N_2 = F(N_1) \oplus N_2 \quad N_2.$。此外，由 [14, 定理 2.3.3] 可知，$\ker F_{|_{N_1}}$ 在 N_1 中也是正交可补的。现在不难看出，$\ker F_{|_{N_1}} = \ker F$，因此我们

˜ ˜有 $N_1 = \ker F \oplus N_1$，其中 N_1. 是某个闭子模。显然， F 将 N_1 同构映射到 $F(N_1)$ 上。此外，由 [14, 定理 2.3.3] 可得

$$M = ImF \oplus ImF^{\perp} = M_2 \tilde{\oplus} F(N_1) \tilde{\oplus} \tilde{N}_2 = ImF \tilde{\oplus} \tilde{N}_2,$$

由此得到 $ImF^{\perp} \cong \tilde{N}_2$. 由于 $\tilde{N}_1 \cong F(N_1)$，我们得到

$$[N_1] - [N_2] = [\ker F] - [\tilde{N}_2] = [\ker F] - [ImF^{\perp}]$$

在 $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ 中，因此 $indexF$ 对于 F. 而言独立于 $\mathcal{M}\Phi$-分解

□

在 [8]中，定义作用在 $H_{\mathcal{A}}$ 上的 $\mathcal{A}$-B-Fredholm 算子 F 的指标为 $indexF :=$ $indexF_{|_{ImF^n}}$其中 n 满足：对所有 $m \geq n$， ImF^m 都是闭的，且 $F_{|_{ImF^n}}$ 是作用在 ImF^n. 上的 $\mathcal{A}$-Fredholm 算子。根据 [8, 命题 7]，若 $ImF^n \cong H_{\mathcal{A}}$，则 $indexF$ 定义良好。然而，通过应用 [8,命题 7] 证明中的引理 4.1，我们可以看出，当 F 是作用在任意 Hilbert $\mathcal{A}$-模 M 上的 $\mathcal{A}$-B-Fredholm 算子，且 ImF^n 与 $H_{\mathcal{A}}$. 不同构时， $indexF$ 也定义良好。下面我们给出 [2, 定理 3.2] 在 C^*-B-Fredholm 算子框架下的推广。

命题 4.1. 设 M 是一个 *Hilbert*-模，且 F， $D \in B^a(M)$ 满足 $FD = DF$.。假设存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得对所有 $m \geq n$， $Im(DF)^m$ 都是闭的，并且对每个 $m \geq n$， $ImF^{m+1}D^m$ 和 $ImD^{m+1}F^m$ 都是闭的。若 F 和 D 是上（下）半-$\mathcal{A}$-B-*Fredholm* 算子，则 DF 是上（下）半-$\mathcal{A}$-B-*Fredholm* 算子。若 F 和 D 是 $\mathcal{A}$-B-*Fredholm* 算子，则 DF 是 $\mathcal{A}$-B-*Fredholm* 算子，且 指标 $DF =$ 指标 D +指标 F.

证明。若 F 和 D 是上半-$\mathcal{A}$-B-Fredholm 算子，则由 [8, 命题 7] 我们可以选取一个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 n 满足假设该命题中的条件，并且还满足 ImD^m、ImF^m 是闭的，且 $F_{|_{ImF^m}}$、$D_{|_{ImF^m}}$ 对所有 $m \geq n$. 都是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 算子。由于 $ImF^{n+1}D^n = ImF(DF)^n$, $ImD^{n+1}F^n = ImD(DF)^n$, $Im(DF)^n$ 和 $Im(DF)^{n+1}$ 均为根据假设，它们是闭的，因此我们有 $F_{|_{Im(DF)^n}}, D_{|_{Im(DF)^n}}$ 以及 $DF_{|_{Im(DF)^n}}$ are 正则算子。这由 [14, 定理 2.3.3]得出。因此我们可以应用来自 [8, 引理 2]的正合列。 由于 $F_{|_{ImF^n}}$ 和 $D_{|_{ImD^n}}$ 是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm ，我们有

$$\ker F_{|_{ImF^n}} = \ker F \cap ImF^n \text{ and } \ker D_{|_{ImD^n}} = \ker D \cap ImD^n$$

均由 [8, 引理 12]有限生成。由于 $F_{|_{Im(DF)^n}}$ 和 $D_{|_{Im(DF)^n}}$ 是正则算子，因此可得

$$\ker F_{|_{Im(DF)^n}} = \ker F \cap Im(DF)^n \text{ and } \ker D_{|_{Im(DF)^n}} = \ker D \cap Im(DF)^n$$

在 $Im(DF)^n$. 中均为正交可补。然而，根据 [14, 定理 2.3， $Im(DF)^n$ 在 M 中正交可补。3], 因此， ker $F \cap Im(DF)^n$ 和 ker $D \cap Im(DF)^n$ 在 M. 中正交可补。由于

$$Im(DF)^n = ImD^nF^n = ImF^nD^n \subseteq ImF^n \cap ImD^n,$$

我们得到

$$\text{ker } D \cap Im(DF)^n \subseteq \text{ker } D \cap ImD^n, \text{ 且 ker } F \cap Im(DF)^n \subseteq \text{ker } F \cap ImF^n.$$

由引理 2.1 可得，ker $F \cap Im(DF)^n$ 和 ker $D \cap Im(DF)^n$ 分别在 ker $F \cap ImF^n$ 和 ker $D \cap ImD^n$ 中正交可补。由于 ker $F \cap ImF^n$ 和 ker $D \cap ImD^n$ 是有限生成的，因此 ker $F \cap Im(DF)^n$ 和 ker $D \cap Im(DF)^n$ 也都是有限生成的。通过对算子 $F|_{Im(DF)^n}$、$D|_{Im(DF)^n}$ 和 $DF|_{Im(DF)^n}$ 应用来自 [8, 引理 2] 的正合列，我们推得 ker $DF|_{Im(DF)^n}$ 是有限生成的。因此，$DF|_{Im(DF)^n}$ 通过 [8, 引理 12] 可知是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 的。以归纳方式继续进行，我们得到对于所有 $m \geq n.$，$DF|_{Im(DF)^m}$ 都是上半-$\mathcal{A}$-Fredholm 的

接下来，假设 $F|_{ImF^n}$ 和 $D|_{ImD^n}$ 是下半-$\mathcal{A}$-Fredholm。于是，由 [8,引理 12],

$$ImF^n = ImF^{n+1} \oplus N \text{ and } ImD^n = ImD^{n+1} \oplus N'$$

对于某些有限生成希尔伯特子模 N 和 N'。由此可得

$$ImD^nF^n = ImD^nF^{n+1} + D^n(N) \text{ and } ImF^nD^n = ImF^nD^{n+1} + F^n(N').$$

由于根据假设，$ImF^{n+1}D^n = ImF(DF)^n$ 和 $ImD^{n+1}F^n = ImD(DF)^n$ 都是闭的，由 [14, 定理 2.3.3] 可知，$ImF^{n+1}D^n$ 和 $ImD^{n+1}F^n$ 在

$$ImF^nD^n = ImD^nF^n = Im(DF)^n,$$

so

$$Im(DF)^n = ImF(DF)^n \oplus \tilde{N} \text{ and } Im(DF)^n = ImD(DF)^n \oplus \tilde{N}'$$

~ ~对于某些希尔伯特子模 N和 N'.。令 P和 P'分别表示到 $\tilde{N}$和 $\tilde{N}'$ 上的正交投影。由于 $ImF^{n+1}D^n = ImD^nF^{n+1}$和$ImD^{n+1}F^n = ImF^nD^{n+1}$，可得 $\tilde{N} = PD^n(N)$ 和 $\tilde{N}' = P'F^n(N')$，~ ~因此 N和 N'是有限生成的，因为 N和 N'是有限生成的。因此，$ImF(DF)^n$ 在 $Im(DF)^n$ 中的正交补，以及 $ImD(DF)^n$在 $Im(DF)^n$ 中的正交补，都是有限生成的。再次将 [8, 引理 2] 中的正合列应用于算子 $F|_{Im(DF)^n}$、$D|_{Im(DF)^n}$ 和 $DF|_{Im(DF)^n}$，由 [8, 引理 12] 可得 $DF|_{Im(DF)^n}$ 是下半-$\mathcal{A}$-Fredholm。继续归纳可得，对于所有 $m \geq n.$，$DF|_{Im(DF)^m}$ 都是下半-$\mathcal{A}$-Fredholm

当 F 和 D 是 $\mathcal{A}$-B-Fredholm 时，证明与前述情形类似；更确切地说，它结合了前面关于 D 和 F 是上半或下半 $\mathcal{A}$-B-Fredholm 的证明。此外，在此情形下应用 [8, 引理 2] 中的正合列，我们还可以推得

$$\text{index } DF = \text{index } D + \text{index } F.$$

□

在命题 4.1 中，我们讨论了闭值域C^*-算子的各种复合，并附加假设这些复合也具有闭像。由此自然产生的问题是，两个闭值域 C^*-算子的复合具有闭像的充要条件是什么。为回答这个问题，我们先给出以下引理。

引理 4.2. 设 M 和 N 是 *Hilbert* C^*-模 M 上的两个闭子模，其中底层代数为 C^*-代数 $\mathcal{A}$。假设 M 在 M中正交可补，且 $M \cap N = \{0\}$. 。那么， $M + N$ 是闭的，当且仅当 $P_{|_N}$ 有界下方，其中 P 表示到 $M^{\perp}$上的正交投影。

证明. 首先假设 $P_{|_N}$ 有界下方，并设 $\delta = m(P_{|_N})$。如同引理 [6, Lemma 3.2] 的证明，我们希望说明，在这种情况下，存在常数 $C > 0$，使得若 $x \in M$ 和 $y \in N$ 满足 $\| x + y \| \leq 1$，则 $\| x \| \leq C$. 。现在，由于 M 正交可补，对给定的 $y \in N$，可将 y写成 $y = y' + y''$，其中 $y' \in M$，$y'' \in M^{\perp}$. 。注意到 $\langle y,\ y\rangle = \langle y',\ y'\rangle + \langle y'',\ y''\rangle$. 。对 $\mathcal{A}$ 上的所有状态取上确界，可得 $\| y \| \geq \max\{\| y' \|, \| y'' \|\}$. 。因此 $\| y'' \| = \| P_{|_N}(y) \| \geq \delta \| y \| \geq \delta \| y' \|$ 。然后，按照引理 [6, Lemma 3.2]，证明中的相同论证可得，若 $\| x + y \| \leq 1$ 且 $x \in M$，则 $\| x \| \leq 1 + \frac{1}{\delta} = \frac{\delta + 1}{\delta}$. 。由此可知， $M + N$是闭的。

反之，若 $M + N$ 是闭的，则由引理 2.1 可知， $M + N = M \oplus M'$，其中 $M' = M^{\perp} \cap (M + N)$。因此， $P(M + N) = M'$是闭的。然而，$P(M+N) = P(N)$。此外，由于 $M \cap N = \{0\}$，我们有 $P_{|_N}$是单射。根据 Banach开映射定理可知， $P_{|_N}$ 是到 M'上的同构，因此 $P_{|_N}$ 有界下方。 □

最后，我们可以给出两个闭值域算子的复合具有闭像的充要条件。

推论 4.1。 设 M 是一个 *Hilbert* C^*-模， F， $D \in B^a(M)$ 且假设 ImF， ImD 是闭的。那么， $ImDF$ 是闭的，当且仅当核 $D \cap ImF$正交可补，且 $P_{|_{ImF \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp}}}$ 有界下方（或者等价地，$Q_{|_{\ker D \cap (\text{核 } D \cap ImF)^{\perp}}}$ 有界下方），其中 P和 Q分别表示到核 $D^{\perp}$ 和 $ImF^{\perp}$，上的正交投影。

证明。 如果 $\ker D \cap ImF$ 正交可补，那么由引理 2.1 可得

$$\ker D = (\ker D \cap ImF) \oplus (\ker D \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp})$$

and

$$ImF = (\ker D \cap ImF) \oplus (ImF \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp}).$$

因此

$$\ker D + ImF = \ker D + (ImF \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp})$$

$$= ImF + (\ker\ D \cap (\ker\ D \cap ImF)^{\perp})】【。$$

此外，若 $P_{ImF\cap(\ker D\cap ImF)^{\perp}}$ 或 $Q_{|_{\ker D\cap(\ker D\cap ImF)^{\perp}}}$ 有界下方，由引理 4.2（因为 $\ker D$ 和 ImF 根据定理 2.3.3] 正交可补 [14,）可推得 $\ker\ D + ImF$ 是闭的。然后，由 [16, 推论 1] 可知， $ImDF$ 是闭的。

反之，若 $ImDF$ 是闭的，则 $D_{|_{ImF}}$ 是像闭的可伴算子。事实上，由于 ImF 是闭的，根据 [14, 定理 2.3，3] ImF 是正交可补的，因此 $D_{|_{ImF}}$ 是可伴的。由 [14, 定理 2.3，3] 可知，$\ker D_{|_{ImF}}$ 在 $ImF.$ 中是正交可补的。然而，$\ker D_{|_{ImF}} = \ker\ D \cap ImF.$ 由于 ImF 在 $\backsim M$ 和 $\ker\ D \cap ImF \subseteq ImF$ 中是正交可补的，因此 $\ker D \cap ImF$ 在 $M.$ 中是正交可补的。此外，根据 [16, 推论 1]，$\ker\ D + ImF$ 是闭的，因为 $ImDF$ 是闭的。由前面的论证可知

$$\ker D = (\ker D \cap ImF) \oplus (\ker D \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp}),$$

$$ImF = (\ker D \cap ImF) \oplus (ImF \cap (\ker D \cap ImF)^{\perp}),$$

因此，我们现在可以应用引理 4.2，从而得到反方向的蕴含。

□

注 4.1。若 H 是希尔伯特空间，且 M、N 是 H 的闭子空间，并满足 $M \cap N = \{0\}$，不难看出，若 P 表示到 $M^{\perp}$ 上的正交投影，则 $P_{|_N}$ 有界下方，当且仅当 M 与 N 之间的迪克斯米耶角为正。因此，推论 4.1 是对 [3] 中 Bouldin 的结果的恰当推广。事实上，由于 H 是希尔伯特空间，对每个 $y \in N$，我们有 $\| y \|^2 = \| P_{|_N} y \|^2 + \| (I - P_{|_N}) y \|^2$.因此，对每个 $y \in N$，都有 $\|(I-P_{|_N})y\| = \sqrt{\| y \|^2 - \| P_{|_N} y \|^2}$，特别是 $\|(I-P_{|_N})y\| = \sqrt{1- \| P_{|_N} y \|^2}$ 对每个满足 $\| y \| = 1.$ 的 $y \in N$ 都成立。接下来，对每个 $y \in N$，我们有 $sup\{| \langle x, y\rangle | \mid x \in M$，并且 $\| x \| \leq 1\} = \| (I - P_{|_N}) y \|$.

这是因为 $| \langle x, y\rangle | = | \langle x, (I - P_{|_N}) y\rangle | \leq \| (I - P_{|_N}) y \|$ 当 $x \in M$ 且 $\| x \| \leq 1$ 时；另一方面，$|\langle y', y\rangle| = \| (I - P_{|_N})(y) \|$，其中

$$y' = \begin{cases} \frac{(I-P_{|_N})y}{\|(I-P_{|_N})y\|} & \text{if } (I - P_{|_N}) y \neq 0, \\ 0 & \text{if } (I - P_{|_N}) y = 0. \end{cases}$$

因此，$\| y' \| \leq 1$ 且 $y' \in M.$ 因此，

$$\sup \{| \langle x, y\rangle | \mid x \in M, \| y' \| \leq 1\} = \| (I - P_{|_N}) y \|$$

对于每个 $y \in N$. 综合以上所有结果，我们推得

$$c_0(M,N) = \sup\{\sqrt{1- \parallel P_{|_N} y \parallel^2} \mid y \in N, \parallel y \parallel = 1\},$$

因此， $c_0(M,N) < 1$ 当且仅当 $P_{|_N}$ 有界下方。

现在我们给出一些像不闭的 $\mathcal{A}$-Fredholm 算子的例子。例 4.1. 令 $\mathcal{A} = L^\infty((0,1),\mu)$，并考虑算子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，其定义为 $F(f) = f \cdot id$（其中 $id(x) = x$ 对所有 $x \in (0,1)$ 均成立）。那么， F 是 $\mathcal{A}$- 线性有界算子，且由于 $\mathcal{A}$作为其自身上的 Hilbert$\mathcal{A}$-模是有限生成的，因此 F 是 $\mathcal{A}$-Fredholm。然而， ImF 不是闭的。事实上，对于所有 n， $\parallel F(\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}) \parallel_\infty = \frac{1}{n}$；而对于所有 n， $\parallel (\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}) \parallel_\infty = 1$，所以 F 不是有界下方。

现在考虑算子 $F \in B^a(H_\mathcal{A})$，其定义为 $F = Q + JFP$，其中 Q表示到 $L_1^\perp, P = I - Q$ 上的正交投影，并且对所有 $\alpha \in \mathcal{A}.$， $J(\alpha) = (\alpha, 0, 0, 0, \dots)$。容易看出 $F \in \mathcal{M}\Phi(H_\mathcal{A})$，且 ImF 不是闭的。

例 4.2. 设 $\mathcal{A} = B(H)$，其中 H 是一个希尔伯特空间。选取一个 $S \in B(H)$，使得 ImS 不是闭的。于是 S 不是有界下方的，因此存在一列单位向量 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 H，使得当 $n \to \infty$.时， $\parallel Sx_n \parallel \to 0$。选取一个 $x \in H$，使得 $\parallel x \parallel = 1$, 并定义算子 $B_n \in B(H)$ 如下： $B_n x = x_n$，且对所有 $n.$， $B_{n|Span\{x\}^\perp} = 0$。于是，对所有 $n.$，有 $\parallel B_n \parallel = \parallel B_n x \parallel = \parallel x_n \parallel = 1$。然而，由于对所有 n， $SB_{n|Span\{x\}^\perp} = 0$，且 $\parallel x \parallel = 1$，可知对所有 $n.$, $\parallel SB_n \parallel = \parallel SB_n x \parallel = \parallel Sx_n \parallel$。因此，当 $n \to \infty.$ 时， $\parallel SB_n \parallel \to 0$。若考虑算子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，其定义为 $F(T) = ST$，对所有 $T \in B(H)$ 均成立，则 F是作用在 $\mathcal{A}$上的一个 $\mathcal{A}$-线性有界算子（当将 $\mathcal{A}$ 视为其自身上的希尔伯特 $\mathcal{A}$-模时），但 ImF 不是闭的。这也可由定理 7] 得出。利用算子 F，很容易以与前一个例子相同的方式构造一个算子 $F \in \mathcal{M}\Phi(H_\mathcal{A})$，使得 ImF 不是闭的。

注意，如果 $S \in B(H)$ 满足 ImS 闭，但 ImS^2 不闭，那么 $Im\tilde{F}$ 将是闭的，而 $Im\tilde{F}^2$ 将不是闭的。现在我们将给出另一个具有以下性质的 $\mathcal{A}$-弗雷德霍姆算子 F： ImF 是闭的，但 ImF^2 不是闭的。

例 4.3. 设 H 为无限维希尔伯特空间， M 和 N 为 H 的闭无限维子空间，且 $M+N$ 不是闭的。分别用 p 和 q 表示到 M 和 N上的正交投影。令 $\mathcal{A} = B(H)$，则 $M = Span_\mathcal{A}\{(p,0,0,0,\dots)\}$ 和 $N = Span_\mathcal{A}\{(q,0,0,0,\dots)\}$ 是 $H_\mathcal{A}$. 的有限生成希尔伯特子模。此外， $M+N$ 不是闭的。事实上，由于 $M+N$不是闭的，存在一个 H中的序列 $\{x_n + y_n\}$，使得 $x_n \in M, y_n \in N$对所有 n都成立，且对于某个 $z \in H\backslash(M+N)$，有 $x_n + y_n \to z$。选取一个 $x \in H$ 使得 $\parallel x \parallel = 1$，并令对每个 n， T_n 和 S_n 为 $B(H)$中由 $T_n x = x_n$, $S_n x = y_n$ 和 $T_{n|Span\{x\}^\perp} = S_{n|Span\{x\}^\perp} = 0$.定义的算子。由于对所有 n， $x_n \in M$ 且 $y_n \in N$，可得 $T_n \in p\mathcal{A}$，并且对所有 $n.$， $S_n \in q\mathcal{A}$。此外， $\parallel S_n + T_n - S_m - T_m \parallel = \parallel (S_n + T_n - S_m - T_m)x \parallel$ 对于

所有 $m,n.$。由于对所有 n，$(S_n+T_n)x=x_n+y_n$，可知 $\{S_n+T_n\}_n$ 是 $B(H)$中的柯西序列，因此对于某个 $T\in B(H)$，有 $S_n+T_n\to T$。于是 $x_n+y_n=S_nx+T_nx\to Tx=z$当 $n\to\infty.$时。现在，对所有 $n.$，$S_n+T_n\in p\mathcal{A}+q\mathcal{A}$。若还有 $T\in p\mathcal{A}+q\mathcal{A}$，则 $Tx\in M+N.$。然而，此时 $z\in M+N$，这就产生了矛盾。因此，$T\notin p\mathcal{A}+q\mathcal{A}$，所以 $p\mathcal{A}+q\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}.$中不是闭的。由此容易得出，$\tilde{M}+\tilde{N}$ 不是闭的。此外，$(L_1^{\perp}\oplus\tilde{M})+\tilde{N}$ 不是闭的。由于$\sim N$是有限生成的，根据 Dupre-Filmore 定理 [14, 定理 1.4.5]，我们有 $\tilde{N}^{\perp}\cong H_{\mathcal{A}}.$。此外，$L_1^{\perp}\oplus\tilde{M}\cong H_{\mathcal{A}}$，因此 $L_1^{\perp}\oplus\tilde{M}\cong\tilde{N}^{\perp}.$。令$U\colon\tilde{N}^{\perp}\to L_1^{\perp}\oplus\tilde{M}$为一个同构，设 $F=JUP$，其中 P是到 $\tilde{N}^{\perp}$ 上的正交投影，J 是从 $L_1^{\perp}\oplus\tilde{M}$ 到 $H_{\mathcal{A}}.$ 的包含映射。于是 ker $F=\tilde{N}$且 $ImF=L_1^{\perp}\oplus\tilde{M}$，因此 F是 $\mathcal{A}$-Fredholm。现在，由于 $ImF+$ ker F不是闭的，由 [16, 推论 1] 可知，ImF^2 不是闭的。

这些例子表明，半-$\mathcal{A}$-Fredholm算子的行为可能不同于希尔伯特空间上的经典半弗雷德霍姆算子。事实上，经典半弗雷德霍姆算子总是具有闭像，因此是希尔伯特空间上的正则算子。

5 Drazin可逆 C^*-算子与C^*-Browder算子

本节中，我们将 Drazin可逆 C^*-算子与 C^*-Browder算子视为希尔伯特空间上 Drazin可逆算子和 Browder算子的推广。

设 M 为希尔伯特 C^*-模。回顾一下，若存在某个 p，使得对所有 $k\geq p$和 $ImF^k=ImF^p$，ImF^k 都是闭的；并且对所有 $k\geq p$，ker F^k =ker F^p，则称算子 $F\in B^a(M)$ 为 Drazin可逆，即 $ascF=dscF=p.$ 在这种情况下，关于分解 $M=ImF^p\oplus$ker F^p，F 具有矩阵 $\begin{bmatrix}F_1&0\\0&F_4\end{bmatrix}$，其中 F_1是一个同构。

首先，我们给出以下引理。

引理 5.1. 设 M 是一个希尔伯特 C^*-模，且 $F\in B^a(M).$ 那么，当且仅当 F^* 是 *Drazin*可逆时，F 是 *Drazin*可逆。

证明. 若 F 是 Drazin可逆，则存在某个 p 使得 $ImF^k=ImF^p$，且对所有 $k\geq p$都有 ker F^k =ker F^p；此外，对所有$k\geq p.$，ImF^k都是闭的。由 [14, 定理 2.3.3] 的证明可知，对所有 $k\geq p.$，ImF^{*k} 也都是闭的。由于根据 [14, 定理 2.3.3]，对所有 $k\geq p$都有 $M=ImF^k\oplus$ker F^{*k} =$ImF^{*k}\oplus$ker F^k，因此 ker F^{*k} =ker F^{*p}，且对所有 $k\geq p$都有 ImF^{*k} =ImF^{*p}，因为 $ImF^k=ImF^p$，并且对所有 $k\geq p.$ 都有 ker F^k =ker F^p。因此 F^*是 Drazin可逆。对 F =(F^*)*应用相同的论证，可推出若 F^* 是 Drazin可逆，则 F 也是 Drazin可逆。 □

现在给出本节的主要结果。

命题 *5.1.* 设 $F, D \in B^a(M)$ 满足 $FD = DF.$。假设 FD 是 *Drazin*可逆的，并设 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $Im(FD)^n = Im(FD)^p$，*ker*$(FD)^n$ =*ker*$(FD)^p$ 对所有 $n \geq p.$ 均成立。那么，当且仅当存在某些 $s, t, k, k' \in \mathbb{N}$，使得 $p \leq k \leq k'$，ImF^k和 ImF^{k+s}是闭的，$ImF^k \cap$*ker* $D^p = ImF^{k+s} \cap$*ker* D^p且 $ImF^{*k'} \cap$*ker* $D^{*p} = ImF^{*k'+t} \cap$*ker* D^{*p}.时， F 才是 *Drazin*可逆的。

证明。我们首先注意到，如果 $k \geq p$，那么 $ImD^kF^k \subseteq ImD^pF^k \subseteq ImD^pF^p$。由于 $ImD^kF^k = ImD^pF^p$，我们得到 $ImD^pF^k = ImD^pF^p.$。类似地，有 $ImD^pF^{k+s} = ImD^pF^p$，因此 $ImD^pF^k = ImD^pF^{k+s}.$。由于根据假设， ImF^{k+s} 是闭的，由 [14, 定理 2.3.3] ImF^{k+s} 在 $M.$ 中正交可补。因此 $D^p_{|_{ImF^{k+s}}}$ 是可伴随的。现在将 [14, 定理 2.3.3] 应用于算子 $D^p_{|_{ImF^{k+s}}}$，我们推得 $ImF^{k+s} \cap$ker D^p(=ker $D^p_{|_{ImF^{k+s}}}$) 在 $ImF^{k+s}.$中正交可补。因此 ImF^{k+s} =(ker $D^p \cap ImF^{k+s}$) $\oplus Y$，其中 $Y.$ 是某个闭子模。现在，由于 ImF^{k+s} 在 M中正交可补，根据 [7, 引理 2.6]，我们推得 $ImF^{k+s} \oplus Z = ImF^k$，其中 $Z.$是某个闭子模。因此得到 ImF^k =(ker $D^p \cap ImF^{k+s}$) $\oplus Y \oplus Z.$。此外， $ImD^pF^{k+s} = D^p(Y)$ $= ImD^pF^k = D^p(Y) \dot{\oplus} D^p(Z)$。由此可知，对于给定的 $z \in Z$，存在某个 $y \in Y$ 使得 $D^p(y) = D^p(z)$，因此$y - z \in$ker $D^p \cap ImF^k.$。若 ker $D^p \cap ImF^k =$ ker $D^p \cap ImF^{k+s}$，则得到$y - z \in$ker $D^p \cap ImF^{k+s}.$。特别地，$y - z \in ImF^{k+s}.$。由于 $y \in ImF^{k+s}$，我们必有 $z \in ImF^{k+s}$。由于 $ImF^{k+s} \cap Z = \{0\}$，得到$z = 0.$ 。因此 $Z = \{0\}$ ，因为 $z \in Z$ 是任意选取的。于是我们得到 $ImF^{k+s} = ImF^k.$。因此，对所有 $n \geq k.$，都有 $ImF^n = ImF^k$。特别地，对所有 $n \geq k.$ ， ImF^n 都是闭的。由 [14, 定理 2.3.3], 的证明可知，对所有 $n \geq k.$ ， ImF^{*n} 也都是闭的。由于 $k' \geq k$，我们得到 $ImF^{*k'}$和 $ImF^{*k'+t}$都是闭的。此外，由引理 5.1 的证明可知，$(FD)^*$ 是 Drazin可逆的，因为 FD 是如此；并且$Im(FD)^{*n}$ =ker$(FD)^{n^\perp}$ =ker$(FD)^{p^\perp} = Im(FD)^{*p}$，对所有 $n \geq p.$均成立。最后， F^*与 D^* 彼此交换，因为 $FD = DF.$。因此，我们可以将前面的论证应用于算子 F^* 和 D^* ，分别代替算子 F 和 D，从而推得对所有 $n \geq k'.$ ， $ImF^{*n} = ImF^{*k'}$ 成立。这给出对所有 $n \geq k'.$，ker F^n =$(ImF^{*n})^\perp$ =$(ImF^{*k'})^\perp$ =ker $F^{k'}$。因此， F是 Drazin可逆的。

反过来，如果 F 是Drazin可逆的，那么存在某个 k ，使得ImF^k是闭的，并且对所有$n \geq k.$， $ImF^n = ImF^k$和ker F^n =ker F^k。如前所述，这也意味着对所有 $n \geq k.$， $ImF^{*n} = ImF^{*k}$是闭的

□

推论 5.1. 设 H是希尔伯特空间，且 $F, D \in B(H)$ 满足 $FD = DF.$。如果 DF 是 *Drazin*可逆的，且 D 是*Fredholm*，那么若对所有 $k \geq p$，ImF^k都是闭的，则 F 是 *Drazin*可逆的，其中 $asc(FD) = dsc(FD) = p.$

证明。 由于 D是 Fredholm，因此 ker D^p和 ker D^{*p} 均为有限维。因此，存在某个 $k_0' \geq k_0 \geq p$ $ImF^k \cap D^p =$，使得 $ImF^{k_0} \cap D^p$ $k \geq k_0$ $ImF^{*k} \cap D^{*p} = ImF^{*k_0'} \cap D^{*p}$ 对所有……，ker ker；并且对所有$k \geq k_0'$·，ker ker

□

注 5.1。实际上，只需假设存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$，使得对所有 $k.$，ImF^{n_k} 都是闭的

接下来，我们给出两个相互交换的 C^*-算子的例子：它们的复合是 Drazin可逆的，但它们本身并非 Drazin可逆。

例 5.1。设 H 是一个可分无限维 Hilbert 空间，S是其上的单边移位算子。那么 $\ker S^* \subsetneqq \ker S^{*^2} \subsetneqq \ker S^{*^3} \subsetneqq \ldots$.此外，对于所有 $k.$，ImS^k和 ImS^{*^k} 都是闭的。

考虑 $H_{\mathcal{A}}$，其中 $\mathcal{A} = B(H)$。设 L_S 和 L_{S^*} 分别为由 S 和 S^*给出的左乘子，并令 F 为作用在 $H_{\mathcal{A}}$ 上的算子，其相对于分解 $L_1(\mathcal{A})^{\perp} \oplus L_1(\mathcal{A})$的矩阵为 $\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & L_S \end{bmatrix}$，其中 F_1 是一个同构。若 P表示到 $L_1(\mathcal{A})^{\perp}$上的正交投影，则 FP显然是 Drazin可逆的。然而，$ImF \supsetneqq ImF^2 \supsetneqq ImF^3 \supsetneqq \ldots$.类似地，由于 F^*相对于同一分解的矩阵为 $\begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & L_{S^*} \end{bmatrix}$（且由于 F_1是同构，F_1^*也是同构），容易得到 F^*P也是 Drazin可逆的；然而，$\ker F^* \subsetneqq \ker F^{*^2} \subsetneqq \ker F^{*^3} \subsetneqq \ldots$.另一方面，$FP = PF$和 $F^*P = PF^*$，然而，我们还有 $(ImF \cap \ker P) \supsetneqq ($ $ImF^2 \cap P \supsetneqq ImF^3 \cap P \supsetneqq \ldots ImF^k \cap P = \{ G\ 0\ 0 \ldots \mid \ker)$ $G \in ImL_{S^k} \quad k \in \mathbb{N}\}. \quad T \in B\ H = \mathcal{A} \quad ImT^k$ $(\ker)$，因为对于所有 , , , , $\ker ($, , , $)$。接下来，令 $( )$ 满足：对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都不是闭的。那么，如果 F 相对于分解 $L_1(\mathcal{A})^{\perp} \oplus L_1(\mathcal{A})$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & L_T \end{bmatrix}$，容易看出 $FP = PF$，且当 F_1 是同构时，FP是 Drazin可逆的；然而，对于所有k，ImF^k 都不是闭的，因此 F 不是 Drazin可逆的。

例 5.2。设 H、S 和 T 如前一例所示，H_1 为另一个希尔伯特空间。考虑希尔伯特空间 $H_2 : = H_1 \oplus H.$ 若 F 相对于分解 $H_1 \oplus H$ 具有矩阵 $\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$，且 P 现在表示到 H_1 上的正交投影，则 $FP = PF$、FP 在 F_1 为同构时是 Drazin可逆的，然而，$ImF \supsetneqq ImF^2 \supsetneqq ImF^3 \supsetneqq \ldots$.。此外，$F^*P$ 是 Drazin可逆的，且 $F^*P = PF^*$，然而，$\ker F^* \subsetneqq \ker F^{*^2} \subsetneqq \ker F^{*^3} \subsetneqq \ldots$.。最后，若 D 相对于同一分解具有矩阵 $\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$，则 $DP = PD$，且 DP 在 D_1 为同构时是 Drazin可逆的，然而，ImD^k 对所有 $k.$ 都不是闭的

定义 5.1. 设 $F \in B^a(H_{\mathcal{A}})$。如果存在一个针对 F、形式为 $H_{\mathcal{A}} = M\tilde{\oplus}N \xrightarrow{F} M\tilde{\oplus}N = H_{\mathcal{A}}$.的 $\mathcal{A}$–Fredholm 分解，则称 F 为 $\mathcal{A}$–Browder。

引理 5.2. 设 $F, D \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ 使得 $FD = DF.$ 若 DF是 *Drazin*可逆且 $\mathcal{A}$–是 *Fredholm*，则 F 和 D 都是 $\mathcal{A}$–*Browder*算子。

证明. 若 DF 是 Drazin可逆，则存在某个 $p \in \mathbb{N}$，使得 DF相对于该分解的矩阵为 $\begin{bmatrix} (DF)_1 & 0 \\ 0 & (DF)_4 \end{bmatrix}$

$$H_{\mathcal{A}} = Im(DF)^p \tilde{\oplus} \ker(DF)^p \xrightarrow{DF} Im(DF)^p \tilde{\oplus} \ker(DF)^p = H_{\mathcal{A}}$$

其中 $(DF)_1$ 是一个同构。由于 DF将 $Im(DF)^p$同构地映射到自身，不难看出，$F_{|_{Im(DF)^p}}$ 是映射到$ImF(DF)^p$上的同构，而 $D_{|_{ImF(DF)^p}}$是映射到 $Im(DF)^p$.上的同构。然而，正如我们先前所观察到的，$ImF^{p+1}D^{p+1} = ImF^{p+1}D^p = ImF^pD^{p+1}$，因此，$F$和$D$ 将 $Im(FD)^p$ 同构地映射到自身。接下来，由于

$$\ker F^pD^p \subseteq \ker F^{p+1}D^p \subseteq \ker DF^{p+1}D^p = \ker D^{p+1}F^{p+1},$$

我们必有

$$\ker F^pD^p = \ker F^{p+1}D^p = \ker F^{p+1}D^{p+1}.$$

因此，相对于分解 $H_{\mathcal{A}} = Im(FD)^p \tilde{\oplus} \ker(FD)^p$，$F$ 和 D 的矩阵分别为 $\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix}$，其中 F_1和D_1 是同构。

最后，由 [14, 引理 2.7.11], $(FD)^p$ 是 $\mathcal{A}$–Fredholm的，因为 FD 是 $\mathcal{A}$–Fredholm的。由于 $Im(FD)^p$是闭的，根据 [8, 引理 12] 可知，$\ker(FD)^p$是有限生成的。

□

注 5.2。回想一下，若 H 是希尔伯特空间且 $F \in B(H)$，则当 F 是Fredholm且Drazin可逆时，F 是 H 上的Browder算子。由于有限生成的希尔伯特子空间就是有限维子空间，不难看出，在希尔伯特空间的情形下，定义 5.1 与经典 Browder 算子的定义相对应。

推论 5.2。 *[20, 定理 2.8.2]* 设 H 为希尔伯特空间，且 F，$D \in B(H)$满足 $FD = DF$。若 DF是*Browder*算子，则 F和 D都是*Browder*算子。

证明。如果 $FD = DF$ 是 Browder算子，那么它是 Fredholm 且 Drazin可逆，因此结论由引理 5.2 得出。 □

参考文献

[1] [BS] M. Berkani 和 M. Sarih，关于半*B-Fredholm*算子，《格拉斯哥数学杂志》。剑桥大学出版社，剑桥。ISSN 0017-0895，第43卷，第3期。2001年5月，第457-465页，DOI：https://doi.org/10.1017/S0017089501030075

[2] [BM]M. Berkani，B-Fredholm 算子的指标与 Weyl 定理的推广，《美国数学会会刊》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0002-9939，第130卷，第6期，第1717-1723页，S 0002-9939(01)06291-8，文章于2001年10月17日在线发表[3] [Bld] R. Bouldin，闭值域算子的乘积，《东北数学杂志》第二辑。东北大学，仙台。ISSN 0040-8735，25 (1973年)，359-363。[4] [DDj2]D. S. Đorđević，关于广义 Weyl 算子，《美国数学会会刊》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0002-9939，第130卷，第1期，第81 ll4页，s 002-9939(01)0608r-6，2001年4月26日[5] [H] R.E. Harte，指标定理的幽灵，《美国数学会会刊》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0002-9939，106 (1989年)，1031-1033。MR 92j:47029[6] [IS1] S. Ivković，Hilbert C*-模上的半弗雷德霍姆理论，《Banach 数学分析杂志》。Tusi 数学研究组 (TMRG)，马什哈德。ISSN 1735-8787，第13卷 (2019年) 第4期，2019年，989-1016，doi:10.1215/17358787-2019-0022。https://projecteuclid.org/euclid.bjma/1570608171[7] [IS3] S. Ivković，W*-代数上的闭值域算子与半弗雷德霍姆算子，《俄罗斯数学物理杂志》。MAIK Nauka/Interperiod. Publ.，莫斯科。ISSN 1061-9208，27，4860 (2020年) http://link.springer.com/article/10.1134/S1061920820010057[8] [IS5] S. Ivković，关于半 A-Fredholm 算子的各种推广，《复分析与算子理论》。Birkhäuser，巴塞尔。ISSN 1661-8254。14，41 (2020年)。https://doi.org/10.1007/s11785-020-00995-3[9] [IS9] S. Ivković，Hilbert C*-模上的半弗雷德霍姆算子，博士论文，贝尔格莱德大学数学系 (2022年)，[10] [IS11] S. Ivković，关于 Drazin 可逆 C*-算子与广义 C*-Weyl 算子，《泛函分析年刊》14，36 (2023年)。https://doi.org/10.1007/s43034-023-00258-0[11] [JS] P. S. Johnson，算子代数中的闭值域乘法算子，《分析与数论杂志》，ISSN 2375-2785（印刷版），ISSN 2375-2807（在线版），第1期，1-5 (2013年)[12] [KM] M. Karubi，K-理论：导论，《数学科学基础原理》。 [数学科学基础原理]Springer，海德堡。ISSN 0072-7830，第226卷，Springer-Verlag，柏林-海德堡-纽约，1978年[13] [KY] K. W. Yang，广义 Fredholm 算子，《美国数学会会刊》，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0002-9947，第216卷 (1976年2月)，第313-326页

[14] [MT] V. M. Manuilov，E. V. Troitsky，《Hilbert C*-模》，载于：《数学专著译丛》第226卷，《美国数学会杂志》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0894-0347，罗得岛州普罗维登斯，2005年。[15] [MF] A. S. Mishchenko，A.T. Fomenko，《C*-代数上的椭圆算子的指标》，《苏联科学院通报·数学系列》43（1979年），831–859；英文译本：《苏联数学科学院通报》15（1980年），87–112。[16] [N] G. Nikaido，《关于线性算子下界的评注》，日本学士院，《学术会议录·A辑·数学科学》。日本学士院，东京。ISSN 0386-2194，第56卷，第7期（1980年），321–323。[17] [P] W. L. Paschke，《关于内积模的 B^*C*—代数》，《美国数学会会刊》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。ISSN 0002-9947，182（1973年），443–468。[18] [RW] W. Rudin，《泛函分析——第2版》，纯粹与应用数学国际丛书，ISBN 0-07-054236-8[19] [W] N. E. Wegge Olsen，《K-理论与C*-代数》，牛津科学出版物，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，ISSN 0017 3835，纽约，1993年。[20] [ZZRD] S. Živković Zlatanović，V. Rakočević，D.S. Đorđević，《Fredholm理论》，尼什大学科学与数学学院，尼什，即将出版（2022年）。