arXiv:2302.05570v1 [math.CA] 11 Feb 2023

多线性 θ型 Calder´ón–Zygmund 算子及其在加权 Morrey 空间乘积上的交换子

Xia Han 和 Hua Wang *

新疆大学数学与系统科学学院，中国乌鲁木齐 830046

摘要

本文研究了文献中近期引入的多线性θ型 Calder´ón–Zygmund 算子 T_θ 的有界性。首先，我们证明了带多重权的加权 Morrey 空间乘积上多线性 θ型 Calder´ón–Zygmund 算子的强型和弱型估计。随后，我们讨论了 T_θ 在这些带多重权空间乘积上的多线性交换子和迭代交换子的强型估计。此外，还建立了 T_θ 的交换子与有界平均振荡函数逐点乘积的弱端点估计。MSC（2020）：42B20；42B25；47B38；47G10 关键词：多线性 θ型 Calder´ón–Zygmund 算子；多线性交换子；迭代交换子；加权 Morrey 空间；多重权；Orlicz 空间

目录

1 引言 2 2 主要结果 10 3 记号与预备知识 11 3.1 多重权.11 3.2 Orlicz 空间与 Luxemburg 范数.13 4 定理 2.1 和 2.2 的证明 14 5 定理2.3和定理2.4的证明 22 6 附录 35

*谨以此文纪念 Li Xue。电子邮箱：1044381894@qq.com，wanghua@pku.edu.cn。

1 引言

本文中，符号 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示全体实数和自然数集。设 $\mathbb{R}^n$ 为 n维欧几里得空间，其欧几里得范数为 $|\cdot|$，勒贝格测度为 dx。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(\mathbb{R}^n)^m = \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{m}$ 表示 m 重乘积空间。我们用 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有施瓦茨函数组成的空间，用 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示其对偶空间，即 $\mathbb{R}^n$ 上所有缓增分布组成的集合。欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Calder´ón–Zygmund 奇异积分算子及其推广已得到广泛研究（例如参见 [4, 5, 6, 23] ）。特别地，Yabuta [27] 引入了某些 θ 型 Calder´ón–Zygmund 算子，以便研究某些类别的伪微分算子。遵循 Yabuta[27], 的术语，我们如下引入所谓的 θ 型 Calder´ón–Zygmund 算子。

定义 1.1. 设 θ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的一个非负非递减函数：$=(0,+\infty)$，满足 $0 < \theta(1) < +\infty$，并且

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\, dt < +\infty.$$

若存在常数 $A > 0$，使得可测函数 $K(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,y) : x = y\}$ 上满足下述条件，则称其为 θ 型 Calder´on–Zygmund 核:

1. $\big|K(x,y)\big| \leq \frac{A}{|x-y|^n}$, 对任意 $x \neq y$;

2. $\big|K(x,y)-K(z,y)\big|+\big|K(y,x)-K(y,z)\big| \leq \frac{A}{|x-y|^n}\cdot\theta\Big(\frac{|x-z|}{|x-y|}\Big)$, *for* $|x-z| < \frac{|x-y|}{2}$.

定义 1.2. 设 $\mathcal{T}_\theta$ 是从 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 到其对偶空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的线性算子。若 $\mathcal{T}_\theta$ 满足以下条件，则称其为带有相关核 K 的 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子:

1. $\mathcal{T}_\theta$ 可以扩张为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子;

2. 对于任意 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，以及所有 $x \notin \operatorname{supp} f$，存在一个 θ 型 Calder´on–Zygmund 核 $K(x,y)$，使得

$$\mathcal{T}_\theta f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy,$$

其中 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上所有具有紧支集的无穷可微函数构成的空间。

注意，具有标准核的经典 Calder´on–Zygmund 算子（见 [4, 5]）是 θ 型算子 $\mathcal{T}_\theta$ 的特例，其中 $\theta(t) = t^\delta$ 且 $0 < \delta \leq 1$。2009 年，Maldonado 和 Naibo [15] 研究了双线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子，它是线性情形的自然推广；他们

为定义在带有 Muckenhoupt 权的加权 Lebesgue 空间乘积上的双线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子建立了加权范数不等式。此外，他们将这些算子应用于某些抛物乘子以及具有温和正则性的双线性伪微分算子的研究。随后，2014年，Lu 和 Zhang [14] 引入了一般的 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子及其交换子（$m \geq 2$），并建立了这些多线性算子及多线性交换子在带有多重权的加权 Lebesgue 空间乘积上的有界性。此外，他们还将其应用于具有温和正则性的抛物乘子和双线性伪微分算子及其交换子的研究。接下来，我们沿用 [14]，给出多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的定义。

定义 1.3. 设 θ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的非负、非递减函数，且满足 $0 < \theta(1) < +\infty$，并且

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\, dt < +\infty. \tag{1.1}$$

若可测函数 $K(x, y_1, \ldots, y_m)$ 定义在对角线 $x = y_1 = \cdots = y_m$ 之外的 $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$ 上，且存在常数 $A > 0$ 使得

1.
$$\big|K(x, y_1, \ldots, y_m)\big| \leq \frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \tag{1.2}$$
对所有满足 $x \neq y_k$ 的 $(x, y_1, \ldots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^{m+1}$，其中某个 $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$，以及

2.
$$\begin{aligned}&\big|K(x, y_1, \ldots, y_m) - K(x', y_1, \ldots, y_m)\big| \\ \leq &\frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \cdot \theta\left(\frac{|x - x'|}{|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$
whenever $|x - x'| \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq m} |x - y_i|$, *and*

3. 对每个满足 $1 \leq k \leq m$ 的固定 k，
$$\begin{aligned}&\big|K(x, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m) - K(x, y_1, \ldots, y_k', \ldots, y_m)\big| \\ \leq &\frac{A}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn}} \cdot \theta\left(\frac{|y_k - y_k'|}{|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|}\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$
只要 $|y_k - y_k'| \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq m} |x - y_i|$,

定义 1.4. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 T_θ 是一个 m 重线性算子，最初定义在 Schwartz 空间的 m 重乘积上，取值于缓增分布空间，即

$$T_\theta : \overbrace{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}^{m} \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

如果满足以下条件，我们称 T_θ 是一个 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子:

1. T_θ 可以延拓为一个从 $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\times$的有界多线性算子 $\cdots\times L^{q_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$，其中某些 $q_1,\dots,q_m\in[1,+\infty)$ 和 $q\in[1/m,+\infty)$ 满足 $1/q=\sum_{k=1}^m 1/q_k$;

2. 对于任意给定的 m 元组 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$，存在一个 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 核 $K(x,y_1,\dots,y_m)$，使得

$$\begin{aligned}T_\theta(\vec{f})(x)&=T_\theta(f_1,\dots,f_m)(x)\\&:=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}K(x,y_1,\dots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\,dy_1\cdots dy_m\end{aligned}$$

只要 $x\notin\bigcap_{k=1}^m \operatorname{supp} f_k$，且每个 $f_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 对于 $k=1,2,\dots,m$ 均成立。

我们注意到，如果简单地取 $\theta(t)=t^\varepsilon$，其中某个 $0<\varepsilon\le 1$，那么多线性 θ 型算子 T_θ 恰好就是多线性 Calder´on–Zygmund 算子，许多作者对此进行了系统研究。这类结果的文献十分丰富，其研究由 Grafakos 和 Torres 的工作开创[8],，更多详情请参阅 [7, 11, 17] 及其中的参考文献。2014年，Lu 和 Zhang 在 [14] 中证明了以下关于乘积加权 Lebesgue 空间上多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的加权强型和弱型估计。

定理 1.1（[14]）。设 $m\in\mathbb{N}$ 和 T_θ 是一个带有 θ 且满足条件（1.1）的 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子。如果 $p_1,\dots,p_m\in(1,+\infty)$ 且 $p\in(1/m,+\infty)$，其中 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)$ 满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件，那么存在一个与 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\le C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 1.2（[14]）。设 $m\in\mathbb{N}$ 和 T_θ 是一个带有 θ 且满足条件（1.1）的 m 线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子。如果 $p_1,\dots,p_m\in[1,+\infty)$，$\min\{p_1,\dots,p_m\}=1$ 且 $p\in[1/m,+\infty)$，其中 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)$ 满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件，那么存在一个与 $f=(f_1,\dots,f_m)$ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\left\|T_\theta(\vec{f})\right\|_{WL^p(\nu_{\vec{w}})}\le C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

对于任意给定的 $p\in(0,+\infty)$ 和 w(权函数)，空间 $L^p(w)$ 定义为所有满足以下条件的可积函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的集合:

$$\|f\|_{L^p(w)}:=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}<+\infty,$$

弱空间 $WL^p(w)$ 定义为所有满足以下条件的可测函数 f在 $\mathbb{R}^n$ 上的集合:

$$\|f\|_{WL^p(w)} := \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot w\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\big)^{1/p} < +\infty,$$

其中，对于勒贝格可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$， $w(E) := \int_E w(x)\,dx$ 。当 $w \equiv 1$ 时，我们简记为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $WL^p(\mathbb{R}^n)$。

注 1.1. 对于线性情形 $m = 1$，上述加权结果由 Quek 和 Yang 在 *[19]* 中给出。对于双线性情形 $m = 2$，Maldonado 和 Naibo 在 *[15]* 中证明了定理1.1和1.2，其中对 θ 施加了一些附加条件。而当 $\theta(t) = t^\varepsilon$ 对某个 $0 < \varepsilon \leq 1$ 成立时，Lerner 等人在 *[11]* 中得到了定理1.1和1.2。

接下来，我们给出多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的交换子的定义。给定一组局部可积函数 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$， T_θ 关于 $\vec{b}$ 的 m-线性交换子定义为

$$\begin{aligned}\big[\Sigma\vec{b}, T_\theta\big](\vec{f})(x) &= \big[\Sigma\vec{b}, T_\theta\big](f_1, \ldots, f_m)(x)\\ &:= \sum_{k=1}^{m} \big[b_k, T_\theta\big]_k(f_1, \ldots, f_m)(x),\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中每一项都是 b_k 和 T_θ 在 T_θ的第 k个位置上的交换子；也就是说,

$$\begin{aligned}&\big[b_k, T_\theta\big]_k(f_1, \ldots, f_m)(x)\\ &= b_k(x) \cdot T_\theta(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_m)(x) - T_\theta(f_1, \ldots, b_k f_k, \ldots, f_m)(x).\end{aligned}$$

那么，从形式上看

$$\begin{aligned}&\big[\Sigma\vec{b}, T_\theta\big](\vec{f})(x) = \big[\Sigma\vec{b}, T_\theta\big](f_1, \ldots, f_m)(x)\\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \sum_{k=1}^{m} \big[b_k(x) - b_k(y_k)\big] K(x, y_1, \ldots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m)\,dy_1 \cdots dy_m.\end{aligned}$$

显然，当上述定义中 $m = 1$ 时，该算子与线性交换子 $[b, \mathcal{T}_\theta]$（见 [13, 29]）一致，其定义为

$$[b, \mathcal{T}_\theta](f) := b \cdot \mathcal{T}_\theta(f) - \mathcal{T}_\theta(bf).$$

现在回顾 BMO($\mathbb{R}^n$) 空间的定义（见 [4, 9]）。若局部可积函数 $b(x)$ 满足以下条件，则称其属于 BMO($\mathbb{R}^n$)

$$\|b\|_* := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B|\,dx < +\infty,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球， b_B 表示 b 在 B 上的平均值，即,

$$b_B := \frac{1}{|B|} \int_B b(y)\,dy.$$

在多线性情形下，若对于 $k = 1=2, \ldots, m$，每个 $b_k \in$ 都属于 BMO($\mathbb{R}^n$), 则称 $b = (b_1, \ldots, b_m)$ 属于 BMO^m。为方便起见，我们采用以下记号

$$\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m} := \max_{1\le k\le m} \|b_k\|_*, \quad \text{for } \vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{BMO}^m.$$

2014年，Lu 和 Zhang [14] 还证明了在假设 θ满足更强条件 (1.6) 时，若 $\vec{b} \in$ BMO^m, 则对于在 (1.5) 中定义的多线性交换子 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$，存在一些加权估计以及 $L\log L$型估计。

定理 1.3 ([14])。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 是由 θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 生成的 m线性交换子，且 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in$ BMO^m；令 θ 满足

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)\cdot(1+|\log t|)}{t}\,dt < +\infty. \tag{1.6}$$

若 $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty)$ 且 $p \in (1/m, +\infty)$，其中 $1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$，则存在一个与 $\vec{b}$和$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\big\|[\Sigma\vec{b}, T_\theta](\vec{f})\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C\cdot\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m}\prod_{k=1}^m \|f_k\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 1.4（[14]）。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 是由 θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ和 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ ∈有界平均振荡^{m}生成的 m线性交换子；设 θ满足条件 (1.6)。若 $p_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$和$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{(1,\ldots,1)}$，则对于任意给定的 $\lambda > 0$，存在一个与 $\vec{b}$, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 和 λ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}&\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^n : \big|[\Sigma\vec{b}, T_\theta](\vec{f})(x)\big| > \lambda^m\Big\}\Big)\\ &\le C\cdot\Phi\big(\|\vec{b}\|_{\mathrm{BMO}^m}\big)^{1/m}\prod_{k=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right)w_k(x)\,dx\right)^{1/m},\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$, $\Phi(t) := t\cdot(1+\log^+ t)$ 且 $\log^+ t := \max\{\log\ t, 0\}$。

众所周知，（多线性）交换子的奇异程度高于其底层的（多线性）θ型算子，因此对 $\theta(t)$施加更强的正则性条件是合理的。显然，我们的条件（1.6）略强于条件（1.1）。对于这类交换子，在线性情形下需要 $\theta(t)$满足（1.6）（详情参见 *[13, 29]* ），多线性情形下也同样如此。此外，容易验证，当 $\theta(t) = t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$时，

$$\int_0^1 \frac{t^\varepsilon\cdot(1+|\log t|)}{t}\,dt = \int_0^1 t^{\varepsilon-1}\cdot\left(1+\log\frac{1}{t}\right)dt < +\infty.$$

因此，多线性 Calder´on–Zygmund 算子也是一个 $\theta(t)$满足（1.6）的多线性 θ型算子 T_θ。

注 1.3. 当 $m=1$时，线性交换子 $[b,\mathcal{T}_\theta]$ 的上述加权端点估计由 Zhang 和 Xu 在 *[29]* 中给出（无权情形见 *[13]*）。如前所述，由于 $\mathcal{T}_\theta$ 在 $L^p(w)$ 上对 $1<p<+\infty$ 和 $w\in A_p$ 有界，根据 Alvarez 等人在 *[1],* 中得到的著名线性算子交换子的有界性判据，我们知道 $[b,\mathcal{T}_\theta]$ 对所有 $1<p<+\infty$ 和 $w\in A_p$ 在 $L^p(w)$ 上也有界，只要 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$。

注 1.4. 当 $m\geq 2$、 $w_1=\cdots=w_m\equiv 1$ 和 $\theta(t)=t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon>0$ 成立时，P´erez 和 Torres *[17]* 证明，若 $\vec{b}=(b_1,..,b_m)\in \mathrm{BMO}^m$，则

$$\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right]:L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$$

对于具有 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$ 的 $1<p_k<+\infty$ 和 $1<p<+\infty$，其中 $k=1$、2、.....、m。并且当 $m\geq 2$ 和 $\theta(t)=t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon>0$ 成立时，Lerner 等人于 *[11]* 得到了定理 1.3 和定理 1.4。也就是说，Lerner 等人*[11]* 证明了：若 $\vec{b}=$（b_1、.....、b_m）$\in$ 属于有界平均振荡^m，且 $\vec{w}=$（w_1、.....、w_m）$\in A_{\vec{P}}$，则

$$\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right]:L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(\nu_{\vec{w}})$$

对于具有 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$ 的 $1<p_k<+\infty$ 和 $1/m<p<+\infty$，其中 $k=1$、2、.....、m。

注 1.5. 我们将给出定理 1.3 的另一种证明，该证明表明，只要 θ（t）满足条件 (1.1)，定理 1.3 的结论仍然成立。更多详情请参见附录部分。

受 [18] 和 [14], 的启发，我们将考虑$\mathbb{R}^n$上的另一类交换子。假设 $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ 是一组局部可积函数，我们将迭代交换子 $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 定义为

$$\begin{aligned}\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)&=\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](f_1,\ldots,f_m)(x)\\&:=[b_1,[b_2,\ldots[b_{m-1},[b_m,T_\theta]_m]_{m-1}\ldots]_2]_1(f_1,\ldots,f_m)(x),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left[b_k,T_\theta\right]_k(f_1,\ldots,f_m)(x)\\&=b_k(x)\cdot T_\theta(f_1,\ldots,f_k,\ldots,f_m)(x)-T_\theta(f_1,\ldots,b_kf_k,\ldots,f_m)(x).\end{aligned}$$

那么，$\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 可以表示为以下形式

$$\begin{aligned}&\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)=\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](f_1,\ldots,f_m)(x)\\&=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{k=1}^m\left[b_k(x)-b_k(y_k)\right]K(x,y_1,\ldots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\,dy_1\cdots dy_m.\end{aligned}\tag{1.7}$$

沿用 [18] 和 [14] 中的论证并稍作修改，我们还可以得出多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的迭代交换子的相应结果（强型和弱端点估计）。

定理 1.5. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big]$ 为由 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 与 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in$ 有界平均振荡 ^{m} 生成的迭代交换子；设 θ 满足条件（1.1）。若 $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty)$ 且 $p \in (1/m, +\infty)$，其中$1/p = \sum_{k=1}^m 1/p_k$，并且 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$，则存在常数$C > 0$，其与 $\vec{b}$和 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ 无关，使得

$$\big\|\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big](\vec{f})\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \le C \cdot \prod_{k=1}^m \|b_k\|_* \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。

定理 1.6. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big]$ 为由 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 与 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in$ 有界平均振荡 ^{m} 生成的迭代交换子；设 θ 满足

$$\int_0^1 \frac{\theta(t) \cdot (1 + |\log t|^m)}{t}\, dt < +\infty. \tag{1.8}$$

若 $p_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, m$ 和 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{(1,\dots,1)}$，则对任意给定的$\lambda > 0$，存在常数 $C > 0$，其与 $f = (f_1, \dots, f_m)$ 及 λ无关，使得

$$\begin{aligned}
&\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \big|\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big](\vec{f})(x)\big| > \lambda^m\Big\}\Big) \\
&\le C \cdot \prod_{k=1}^m \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^{(m)}\bigg(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\bigg) w_k(x)\, dx\bigg)^{1/m},
\end{aligned}$$

$_m$其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{1/m}$, $\Phi(t) = t \cdot (1 + \log^+ t)$，且 $\Phi^{(m)} := \overbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}$。

注 1.6. 文献 *[18]* 证明，当 $\theta(t) = t^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$成立时，定理 1.6 中的估计是尖锐的，也就是说，对任意 $k < m$， $\Phi^{(m)}$ 都不能被$\Phi^{(k)}$ 取代。

另一方面，经典 Morrey 空间 $L^{p,\,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ 最初由 Morrey 于 [16] 提出，用于研究二阶椭圆型偏微分方程解的局部正则性。如今，这些空间已在文献中得到深入研究，并在调和分析、位势理论和非线性色散方程中得到广泛应用。2009年，Komori 和 Shirai [10] 定义并研究了 $1 \le p < +\infty$ 的加权 Morrey 空间 $L^{p,\,\kappa}(w)$，这类空间可视为加权 Lebesgue 空间的推广，并证明了若干经典

积分算子在这些加权空间上的有界性。为处理多线性情形 $m \geq 2$，我们在此考虑所有 $0 < p < +\infty$ 下的加权 Morrey 空间 $L^{p,\,\kappa}(w)$。我们将把 [14] 中关于 m-线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子的结果推广到带有多重权的加权 Morrey 空间的乘积上。此外，我们还将研究多线性交换子和迭代交换子相应的加权估计。首先回顾空间 $L^{p,\,\kappa}(w)$ 和 $WL^{p,\,\kappa}(w)$ 的定义。

定义1.5（[10]）。设 $0 < p < +\infty$, $0 \leq \kappa < 1$，且设 w 是定义在$\mathbb{R}^n$上的权。加权 Morrey 空间 $L^{p,\kappa}(w)$ 定义为满足下述条件的 $\mathbb{R}^n$ 上所有局部可积函数 f 的集合

$$\|f\|_{L^{p,\kappa}(w)} := \sup_B \left(\frac{1}{w(B)^{\kappa}} \int_B |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B。

定义1.6（[10]）。设 $0 < p < +\infty$, $0 \leq \kappa < 1$，且设 w 是定义在$\mathbb{R}^n$上的权。加权弱 Morrey空间 $WL^{p,\kappa}(w)$ 定义为满足下述条件的 $\mathbb{R}^n$ 上所有可测函数 f 的集合

$$\|f\|_{WL^{p,\kappa}(w)} := \sup_B \frac{1}{m(B)^{\kappa/p}} \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot w\big(\{x \in B : |f(x)| > \lambda\}\big)^{1/p} < +\infty,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B 以及所有 $\lambda > 0$。

注意，当 $w \in \Delta_2$ 时，根据相对于 w 的 Lebesgue微分定理，有 $L^{p,0}(w) = L^p(w)$、$WL^{p,0}(w) = WL^p(w)$ 且$L^{p,1}(w) = L^\infty(w)$。

为了处理交换子的端点情形，我们必须考虑以下 $L\log L$型空间，该空间由第二作者在 [25, 26] 中引入（关于无权情形，另见 [12] 和 [21]）。

定义1.7. 设 $p = 1$、 $0 \leq \kappa < 1$，且设 w 是 $\mathbb{R}^n$上的一个权。我们将$(L\log L)^{1,\kappa}(w)$ 记为 $L\log L$ 型加权Morrey空间，即定义在 $\mathbb{R}^n$上的所有局部可积函数 f所构成的、具有有限范数$\big\|f\big\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w)}$的空间。

$$(L\log L)^{1,\kappa}(w) := \Big\{ f : \big\|f\big\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w)} < \infty \Big\},$$

其中

$$\big\|f\big\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w)} := \sup_B w(B)^{1-\kappa} \big\|f\big\|_{L\log L(w),B}.$$

这里$\|\cdot\|_{L\log L(w)\,B}$表示加权 Luxemburg 范数，其定义将在下文第3节给出。注意，对任意 $t > 0$, $t \leq t\cdot(1+\log^+ t)$。根据定义，对任意球 B 属于 $\mathbb{R}^n$ 且 $w \in A_\infty$，我们有

$$\big\|f\big\|_{L(w),B} \leq \big\|f\big\|_{L\log L(w),B},$$

这意味着下面的不等式（可视为广义詹森不等式）

$$\|f\|_{L(w),B} = \frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)| w(x)\, dx \le \|f\|_{L\log L(w),B} \tag{1.9}$$

对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$均成立。因此，对于所有 $0 < \kappa < 1$ 和 $w \in A_\infty$，我们还可以由 (1.9) 得到以下包含关系：

$$(L\log L)^{1,\kappa}(w) \hookrightarrow L^{1,\kappa}(w).$$

众所周知，$L^{p,\kappa}$ 是 L^p 的推广，其意义在于 $L^{p,0} = L^p$。受 [10, 14, 15], 中相关工作的启发，本文旨在建立多重权下加权 Morrey 空间乘积上的多线性 θ 型 Calder´ón–Zygmund 算子及其交换子的有界性。

下文中，字母 C 始终表示一个与主要参数无关的正常数，但其取值不一定在每次出现时都相同。符号 X . Y 表示存在常数 $C > 0$，使得 X $\le C$Y。符号 X $\approx$Y 表示存在常数 $C > 0$，使得C^{-1}Y $\le$X $\le C$Y。

2 主要结果

关于多线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子有界性的前两个结果可表述如下。

定理 2.1. 设 $m \ge 2$ 和 T_θ 是一个满足条件（1.1）的 m-线性 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子，其中 θ。若 $1 < p_1, \dots, p_m < +\infty$ 和 $1/m < p < +\infty$ 满足 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$，且 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$ 满足 $w_1, \dots, w_m \in A_\infty$，则对任意 $0 < \kappa < 1$，多线性算子 T_θ 将 $L^{p_1,\kappa}(w_1) \times L^{p_2,\kappa}(w_2) \times \cdots \times L^{p_m,\kappa}(w_m)$ 有界映射到 $L^{p,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$，其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$ 。

定理 2.2. 设 $m \ge 2$ 和 T_θ 是一个满足条件（1.1）的 θ 的 m线性 θ型 Calder´on–Zygmund 算子。如果 $1 \le p_1, \dots, p_m < +\infty$, $\min\{p_1, \dots, p_m\} = 1$ 且 $1/m \le p < +\infty$ 满足 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$，并且 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$满足$w_1, \dots, w_m \in A_\infty$，那么对于任意 $0 < \kappa < 1$，多线性算子 T_θ是从 $L^{p_1,\kappa}(w_1) \times L^{p_2,\kappa}(w_2) \times \cdots \times L^{p_m,\kappa}(w_m)$ 到 $WL^{p,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$ 的有界算子，且$\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。

我们的下一个定理讨论了带有 $\vec{b} \in$ 有界平均振荡^m 的多线性交换子 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 的范数不等式。

定理 2.3. 设 $m \ge 2$ 和 $[\Sigma\vec{b}, T_\theta]$ 是 m-线性交换子，θ型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 满足条件（1.1），且 $\vec{b}$ ∈属于有界平均振荡^m。若 $1 < p_1, \dots, p_m < +\infty$ 和 $1/m < p < +\infty$ 满足 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$，且 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{\vec{P}}$满足 $w_1, \dots, w_m \in A_\infty$，则对任意 $0 < \kappa < 1$,

多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 是从 $L^{p_1,\kappa}(w_1) \times L^{p_2,\kappa}(w_2) \times$到

$\cdots \times L^{p_m,\kappa}(w_m)$ 到 $L^{p,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$，其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。

对于端点情形 $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1$，我们还将证明加权 Morrey 空间中带多重权的多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 的弱型 $L\log L$ 估计。

定理 2.4. 设 $m \geq 2$ 和 $\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 为满足条件 (1.6) 且 $\vec{b} \in \mathrm{BMO}^m$ 的 m 线性交换子，其中 θ 为 ´on–Zygmund 算子，T_θ 为 Calder ´ 型，且 θ 。假设 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{(1,\ldots,1)}$，其中 $w_1, \ldots, w_m \in A_\infty$。若 $p_i = 1, i = 1, 2, \ldots, m$ 且 $p = 1/m$，则对于任意给定的 $\lambda > 0$ 和任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \cdot \left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x \in B : \left|\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right](\vec{f})(x)\right| > \lambda^m\right\}\right)\right]^m \\ &\leq C \cdot \Phi\left(\left\|\vec{b}\right\|_{\mathrm{BMO}^m}\right) \prod_{i=1}^m \left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)},\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{1/m}$ 和 $\Phi(t) = t \cdot (1 + \log^+ t)$。

注 2.1. 根据上述定义和定理 2.4，我们可以粗略地说，多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b}, T_\theta\right]$ 从 $(L\log L)^{1,\kappa}(w_1) \times (L\log L)^{1,\kappa}(w_2) \times \cdots \times (L\log L)^{1,\kappa}(w_m)$ 有界映射到 $WL^{1/m,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$，其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{1/m}$。

3 记号与预备知识

3.1 多重权

对于任意 $r > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $B(x, r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\right\}$ 表示以 x 为中心、半径为 r的开球，$B(x, r)^\complement = \mathbb{R}^n \backslash B(x, r)$ 表示其补集，$|B(x, r)|$ 表示球 $B(x, r)$ 的勒贝格测度。我们还用记号 $\chi_{B(x,r)}$ 表示 $B(x, r)$ 的特征函数。对于某个 $t > 0$，记号 tB 表示一个与 B 中心相同、半径为其 t 倍的球。

若存在常数 $C > 0$，使得权 w 属于 Muckenhoupt 类 A_p（$1 < p < +\infty$），则称其属于该类。

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-p'/p}\,dx\right)^{1/p'} \leq C$$

对每个球 B 属于 $\mathbb{R}^n$，其中 p' 是 p 的共轭指数，且满足 $1/p + 1/p' = 1$。类 A_1 的定义是将上述不等式替换为

$$\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx \leq C \cdot \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} w(x)$$

对每个球 B 属于 $\mathbb{R}^n$。由于 A_p 类随 p递增，因此权重的 A_∞ 类可自然地定义为

$$A_\infty := \bigcup_{1\le p<+\infty} A_p.$$

此外，以下刻画将在后文中经常用到。存在正常数 C 和 δ，使得对于任意球 B 以及包含在 B中的任意可测集E，

$$\frac{w(E)}{w(B)} \le C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\delta}. \tag{3.1}$$

给定一个勒贝格可测集 E，我们用 χ_E表示 E的特征函数。若一个权重 w 满足倍增条件（简记为 $w\in\Delta_2$），则称其满足该条件；也就是说，存在一个绝对常数 $C>0$ 使得

$$w(2B) \le C\, w(B) \tag{3.2}$$

该关系对 $\mathbb{R}^n$中的任意球 B 都成立。若 $w\in A_p$ 且 $1\le p<+\infty$ （或 $w\in A_\infty$），则有 $w\in\Delta_2$。

近年来，Lerner 等人在 [11]中发展了适用于多线性 Calder´on–Zygmund 算子的多重权理论。文献 [11] 定义并使用了一种新的、更精细的多线性极大函数，以刻画多重 $A_{\vec{P}}$ 权类，并为多线性 Calder´on–Zygmund 算子获得了一些加权估计。现在我们回顾多重权的定义。对于 m 个指数 p_1，……，$p_m\in[1,+\infty)$，我们常用 $\vec{P}$表示向量 $\vec{P}=(p_1,\ \ldots\ldots,\ p_m)$，用 p 表示由 $1/p=\sum_{k=1}^m 1/p_k$ 确定的数，其中 $p\in[1/m,+\infty)$。给定 $\vec{w}=(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_m)$，令

$$\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}.$$

如果 $\vec{w}$ 满足以下条件，我们就称其满足多线性 $A_{\vec{P}}$ 条件：

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \nu_{\vec{w}}(x)\,dx\right)^{1/p} \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{|B|}\int_B w_k(x)^{-p_k'/p_k}\,dx\right)^{1/p_k'} < +\infty. \tag{3.3}$$

当 $p_k=1$ 对某个 $k\in\{1,2,\ldots,m\}$成立时，条件 $\left(\frac{1}{|B|}\int_B w_k(x)^{-p_k'/p_k}\,dx\right)^{1/p_k'}$应理解为 $\left(\inf_{x\in B} w_k(x)\right)^{-1}$。特别地，当每个 $p_k=1$，$k=1,2,\ldots,m$时，我们记作 $A_{\vec{1}}=A_{(1,\ldots,1)}$。容易验证，对于每个 P，$A_{(1,\ldots,1)}$ 包含于 $A_{\vec{P}}$中；然而，权重类 $A_{\vec{P}}$并不按照自然偏序递增（见备注 7.3]）。文献 [11] 证明，这些是使所有多线性 Calder´on–Zygmund 算子在加权 Lebesgue 空间上有界的最大权重类。此外，一般而言，条件 $\vec{w}\in A_{\vec{P}}$ 并不蕴含 $w_k\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 对任意 $1\le k\le m$ 成立（见备注 7.2]），而是

引理 3.1（[11]）。设 $p_1, .., p_m \in [1, +\infty)$ 且 $1/p = \sum_{k=1}^{m} 1/p_k$。那么 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in A_{\vec{P}}$ 当且仅当

$$\begin{cases} \nu_{\vec{w}} \in A_{mp}, \\ w_k^{1-p_k'} \in A_{mp_k'}, \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中，在 $p_k = 1$ 的情形下，$\nu_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^{m} w_k^{p/p_k}$ 和条件 $w_k^{1-p_k'} \in A_{mp_k'}$ 被理解为 $w_k^{1/m} \in A_1$。

注意，在线性情形 $m = 1$ 中，(3.4) 所包含的两个条件实际上表示相同的 A_p 条件。然而，在多线性情形 $m \geq 2$ 中，(3.4) 中的两个条件互不蕴含。更多细节请参见 [11]。

3.2 Orlicz 空间与 Luxemburg 范数

下面我们回顾 Orlicz 空间理论中的一些基本定义和事实。关于这些空间的更多信息，读者可参阅著作 [20]。设 $\mathcal{A}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是一个杨函数。也就是说，它是一个连续、凸且严格递增的函数，满足 $\mathcal{A}(0) = 0$，并且 $\mathcal{A}(t) \to +\infty$ 当 $t \to +\infty$ 时成立。给定一个杨函数 $\mathcal{A}$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球 B，我们考虑函数 f 在球 B 上的 $\mathcal{A}$-平均值，其由下面的 Luxemburg 范数给出：

$$\|f\|_{\mathcal{A},B} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|} \int_B \mathcal{A}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

当 $\mathcal{A}(t) = t^p$ 满足 $1 \leq p < +\infty$ 时，很容易看出

$$\|f\|_{\mathcal{A},B} = \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p};$$

也就是说，Luxemburg 范数与归一化的 L^p 范数一致。对于每个杨函数 $\mathcal{A}$，都可以定义其互补函数 $\bar{\mathcal{A}}$：

$$\bar{\mathcal{A}}(s) := \sup_{0 \leq t < +\infty} \big[st - \mathcal{A}(t) \big], \quad 0 \leq s < +\infty.$$

¯不难验证，这样的 $\bar{\mathcal{A}}$ 也是一个杨函数。通过标准计算可知，对所有 $t > 0$,

$$t \leq \mathcal{A}^{-1}(t) \bar{\mathcal{A}}^{-1}(t) \leq 2t.$$

由此可得，对于任意给定的球 B in $\mathbb{R}^n$，Orlicz 空间中成立以下广义 H¨older 不等式。

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) \cdot g(x)| \, dx \leq 2 \|f\|_{\mathcal{A},B} \|g\|_{\bar{\mathcal{A}},B}.$$

一个值得关注的特例，尤其是本文所研究的情形，是杨函数$\Phi(t) = t \cdot (1 + \log^+ t)$。我们知道，其互补杨函数$\bar{}$由 $\Phi(t) \approx \exp(t) - 1$给出。相应的平均值记为

$$\|f\|_{\Phi,B} = \|f\|_{L\log L,B} \qquad \text{and} \qquad \|g\|_{\bar{\Phi},B} = \|g\|_{\exp L,B}.$$

因此，由上述 Orlicz 空间中的广义 H¨older 不等式，我们还可得到

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)\cdot g(x)|\,dx \le 2\|f\|_{L\log L,B}\|g\|_{\exp L,B}. \tag{3.5}$$

为获得加权 Morrey 空间的乘积上多线性交换子及迭代交换子的端点弱型估计，我们需要借助加权 Luxemburg 范数来定义函数 f 在球 B 上的$\mathcal{A}$-平均值；也就是说，给定一个杨函数 $\mathcal{A}$ 和 $w \in A_\infty$，我们定义（见 [20, 28]）

$$\|f\|_{\mathcal{A}(w),B} := \inf\left\{\sigma > 0 : \frac{1}{w(B)}\int_B \mathcal{A}\left(\frac{|f(x)|}{\sigma}\right)\cdot w(x)\,dx \le 1\right\}.$$

当 $\mathcal{A}(t) = t$时，此范数记作$\|\cdot\|_{L(w),\,B}$；当 $\Phi(t) = t\cdot(1+\log^+ t)$时，此范数也记作$\|\cdot\|_{L\log L(w)\,B}$。$\Phi(t)$的互补杨函数$\bar{}$为 $\Phi(t) \approx \exp(t) - 1$，相应的 Luxemburg 范数记作$\|\cdot\|_{\exp L(w),\,B}$。对于 $w \in A_\infty$以及 $\mathbb{R}^n$中的任意球 B，我们还可以证明（3.5）的加权版本。也就是说，对于 f、g，以下加权情形下的广义 H¨older 不等式成立（例如见 [28] ）。

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)\cdot g(x)|w(x)\,dx \le C\|f\|_{L\log L(w),B}\|g\|_{\exp L(w),B}. \tag{3.6}$$

该估计将在定理 2.4 的证明中发挥重要作用。

4 定理 2.1 和 2.2 的证明

本节主要讨论定理 2.1 和 2.2 的证明。在证明本节的主要定理之前，我们先陈述以下重要结果而不予证明（见 [4] 和 [6]）。

引理 4.1（[6]）。设 $\{f_k\}_{k=1}^N$ 是一列 $L^p(\nu)$ 函数，满足 $0 < p <+\infty$ 和 $\nu \in A_\infty$。则有

$$\Big\|\sum_{k=1}^N f_k\Big\|_{L^p(\nu)} \le \mathcal{C}(p,N)\sum_{k=1}^N \|f_k\|_{L^p(\nu)},$$

其中 $\mathcal{C}(p,N)$ =取最大值 $\{1, N^{\frac{1-p}{p}}\}$。更具体地说，对于 $1 \le p <+\infty$， $\mathcal{C}(p,N) = 1$；对于 $0 < p < 1$， $\mathcal{C}(p,N) = N^{\frac{1-p}{p}}$。

引理 4.2（[6]）。设 $\{f_k\}_{k=1}^N$ 是一列 $WL^p(\nu)$ 函数，满足 $0<p<+\infty$ 和 $\nu\in A_\infty$。则有

$$\Big\|\sum_{k=1}^N f_k\Big\|_{WL^p(\nu)}\le \mathcal{C}'(p,N)\sum_{k=1}^N \|f_k\|_{WL^p(\nu)},$$

其中 $\mathcal{C}'(p,N)$ =最大值 $\{N,N^{\frac{1}{p}}\}$。更具体地说，$\mathcal{C}'(p,N)=N$当 $1\le p<+\infty$时成立，而 $\mathcal{C}'(p,N)=N^{\frac{1}{p}}$当 $0<p<1$时成立。

引理 4.3（[4]）。设 $w\in A_\infty$。那么对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个球 B，以下反向 Jensen 不等式成立。

$$\int_B w(x)\,dx\le C|B|\cdot\exp\left(\frac{1}{|B|}\int_B \log w(x)\,dx\right).$$

现在我们可以证明定理 2.1 和 2.2。

定理 2.1 的证明。设 $1<p_1,..,p_m<+\infty$ 和 $f=(f_1,..,f_m)$ 属于 $L^{p_1,\,\kappa}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m,\,\kappa}(w_m)$，其中 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 且 $0<\kappa<1$。对于任意给定的球 B（属于 $\mathbb{R}^n$）（记 x_0 为 B 的中心，$r>0$ 为 B 的半径），我们只需证明

$$\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\left(\int_B \big|T_\theta(f_1,\dots,f_m)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\right)^{1/p}\lesssim\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.\tag{4.1}$$

为此，对于任意 $1\le i\le m$，我们将 f_i 表示为

$$f_i=f_i\cdot\chi_{2B}+f_i\cdot\chi_{(2B)^\complement}:=f_i^0+f_i^\infty;$$

以及 $2B=B(x_0,2r)$。然后我们写作

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^m f_i(y_i)&=\prod_{i=1}^m\Big(f_i^0(y_i)+f_i^\infty(y_i)\Big)\\&=\sum_{\beta_1,\dots,\beta_m\in\{0,\infty\}} f_1^{\beta_1}(y_1)\cdots f_m^{\beta_m}(y_m)\\&=\prod_{i=1}^m f_i^0(y_i)+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} f_1^{\beta_1}(y_1)\cdots f_m^{\beta_m}(y_m),\end{aligned}$$

其中

$$\mathfrak{L}:=\big\{(\beta_1,\dots,\beta_m):\beta_k\in\{0,\infty\},\text{there is at least one }\beta_k\ne 0,1\le k\le m\big\};$$

也就是说，$\sum$ 的每一项都至少包含一个 $\beta_k\ne 0$。由于 T_θ 是一个 m线性

算子，因此由引理 4.1($N=2^m$)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\bigg(\int_B \big|T_\theta(f_1,\dots,f_m)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\
&\le \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\bigg(\int_B \big|T_\theta(f_1^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\
&+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\bigg(\int_B \big|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\
&:= I^{0,\dots,0}+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} I^{\beta_1,\dots,\beta_m}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

根据 T_θ 的加权强型估计（见定理 1.1），我们有

$$\begin{aligned}
I^{0,\dots,0}&\le C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\prod_{i=1}^m\bigg(\int_{2B}|f_i(x)|^{p_i}w_i(x)\,dx\bigg)^{1/p_i}\\
&\le C\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\prod_{i=1}^m w_i(2B)^{\kappa/p_i}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

设 $p_1,\dots,p_m\in[1,+\infty)$ 和 $p\in[1/m,+\infty)$ 满足 $1/p=\sum_{i=1}^m 1/p_i$。我们首先断言，在定理 2.1（或定理 2.2）的假设下，对任意球 $\mathcal{B}$， $\mathbb{R}^n$ 中都有如下结果成立:

$$\prod_{i=1}^m\bigg(\int_{\mathcal{B}}w_i(x)\,dx\bigg)^{p/p_i}\lesssim\int_{\mathcal{B}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx, \qquad (4.4)$$

假设 $w_1,\dots,w_m\in A_\infty$ 和 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。事实上，由于 $w_1,\dots,w_m\in A_\infty$, 利用引理 4.3 可得

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^m\bigg(\int_{\mathcal{B}}w_i(x)\,dx\bigg)^{p/p_i}&\le C\prod_{i=1}^m\bigg[|\mathcal{B}|\cdot\exp\bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\log w_i(x)\,dx\bigg)\bigg]^{p/p_i}\\
&=C\prod_{i=1}^m\bigg[|\mathcal{B}|^{p/p_i}\cdot\exp\bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\log w_i(x)^{p/p_i}\,dx\bigg)\bigg]\\
&=C\cdot\big(|\mathcal{B}|\big)^{\sum_{i=1}^m p/p_i}\cdot\exp\bigg(\sum_{i=1}^m\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\log w_i(x)^{p/p_i}\,dx\bigg).
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^m p/p_i=1\quad\text{and}\quad\nu_{\vec{w}}(x)=\prod_{i=1}^m w_i(x)^{p/p_i}.$$

因此，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m}\bigg(\int_{\mathcal{B}} w_i(x)\,dx\bigg)^{p/p_i} &\le C\cdot|\mathcal{B}|\cdot\exp\bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\log\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)\\ &\le C\int_{\mathcal{B}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx.\end{aligned}$$

由此得到（4.4）。此外，由引理 3.1 可知， $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$ 满足$1/m<p<+\infty$。这一事实结合（4.4）和（3.2）可推出

$$\begin{aligned}I^{0,\dots,0} &\le C\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(2B)^{\kappa/p}}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\\ &\le C\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

为了估计（4.2）中的其余项，我们先考虑$\beta_1=\cdots=\beta_m=\infty$的情形。根据一个简单的几何观察，我们知道

$$\overbrace{\big(\mathbb{R}^n\backslash 2B\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{R}^n\backslash 2B\big)}^{m}\subset(\mathbb{R}^n)^m\backslash(2B)^m,$$

and

$$(\mathbb{R}^n)^m\backslash(2B)^m=\bigcup_{j=1}^{\infty}(2^{j+1}B)^m\backslash(2^jB)^m,$$

其中我们使用了记号 $\overbrace{E\times\cdots\times E}^{m}=E^m$。根据 θ型 Calder´on–Zygmund 核 K的大小条件 (1.2)，对于任意 $x\in B$，我们得到

$$\begin{aligned}&\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|\\ &\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^m\backslash(2B)^m}\frac{|f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\,dy_1\cdots dy_m\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{(2^{j+1}B)^m\backslash(2^jB)^m}\frac{|f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\,dy_1\cdots dy_m\\ &\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{(2^{j+1}B)^m\backslash(2^jB)^m}\big|f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\big|\,dy_1\cdots dy_m\bigg)\\ &\le\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\prod_{i=1}^{m}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg)\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg),\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中，我们使用了以下事实：当 $x \in B$时，
$|x-y_1|+\cdots+|x-y_m| \approx 2^{j+1}r \approx |2^{j+1}B|^{1/n}$，且 $(y_1,\dots,y_m) \in (2^{j+1}B)^m \backslash (2^jB)^m$。
此外，利用 H¨older 不等式以及关于 $\vec{w}$的多重 $A_{\vec{P}}$ 条件，我们可以推得

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big| \\
\lesssim &\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\Big(\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|^{p_i}w_i(y_i)\,dy_i\Big)^{1/p_i}\Big(\int_{2^{j+1}B}w_i(y_i)^{-p_i'/p_i}\,dy_i\Big)^{1/p_i'}\Big\} \\
\le &\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\cdot\frac{|2^{j+1}B|^{1/p+\sum_{i=1}^m(1-1/p_i)}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{1/p}}\prod_{i=1}^{m}\Big(\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}w_i(2^{j+1}B)^{\kappa/p_i}\Big)\Big\} \\
= &\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{1/p}}\cdot\prod_{i=1}^{m}w_i(2^{j+1}B)^{\kappa/p_i}\Big\},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步用到了 $1/p+\sum_{i=1}^m(1-1/p_i) = m$ 这一事实。因此，由上述逐点估计和 (4.4)，可得

$$
\begin{aligned}
I^{\infty,\dots,\infty} &\lesssim \frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{1/p}}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\cdot\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{\kappa/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{1/p}} \\
&= \prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}.
\end{aligned}
$$

由于根据引理 3.1 有 $\nu_{\vec{w}} \in A_{mp} \subset A_\infty$，由指数为 $\delta>0$ 的不等式 (3.1) 可直接推出

$$
\frac{\nu_{\vec{w}}(B)}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)} \lesssim \left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\delta}, \tag{4.7}
$$

这进一步意味着

$$
\begin{aligned}
I^{\infty,\dots,\infty} &\lesssim \prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\delta(1-\kappa)/p} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)},
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

其中，在最后一个估计中，我们用到了 $0<\kappa<1$ 和 $\delta>0$这一事实。现在考虑恰有 ℓ 个 β_i 在某个 $1\le\ell<m$下为 ∞ 的情形。我们只给出其中一种情形的论证，其余情形类似，通过对指标重新排列即可由下述论证轻易得到。在这种情形下，出于与上述相同的原因，我们也有

$$
\overbrace{\big(\mathbb{R}^n\backslash 2B\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{R}^n\backslash 2B\big)}^{\ell} \subset (\mathbb{R}^n)^\ell\backslash(2B)^\ell,
$$

and

$$(\mathbb{R}^n)^\ell\backslash(2B)^\ell=\bigcup_{j=1}^{\infty}(2^{j+1}B)^\ell\backslash(2^jB)^\ell,\quad 1\le\ell<m.$$

再次利用大小条件（1.2），我们可推出，对于任意 $x\in B$,

$$\begin{aligned}
&\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|\\
&\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^\ell\backslash(2B)^\ell}\int_{(2B)^{m-\ell}}\frac{|f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}dy_1\cdots dy_m\\
&\lesssim\prod_{i=\ell+1}^{m}\int_{2B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{(2^{j+1}B)^\ell\backslash(2^jB)^\ell}\big|f_1(y_1)\cdots f_\ell(y_\ell)\big|\,dy_1\cdots dy_\ell\\
&\le\prod_{i=\ell+1}^{m}\int_{2B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\prod_{i=1}^{\ell}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\Big),
\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了包含关系 $2B\subseteq 2^{j+1}B\,\text{with}j\in\mathbb{N}$，因此得到了与前一种情形中相同的表达式。于是，现在我们可以完全按照估计 $I^{\infty,\dots,\infty}$时的做法进行论证，从而得到对于所有 m-元组 $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}$,

$$\begin{aligned}
I^{\beta_1,\dots,\beta_m}&\lesssim\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}\\
&\lesssim\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\Big)^{\delta(1-\kappa)/p}\\
&\lesssim\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

结合这些估计 (4.5)、(4.8) 和 (4.10)，可得 (4.1) 成立，从而完成定理的证明。□

定理 2.2 的证明。设 $1\le p_1,\dots,p_m<+\infty$、$\min\{p_1,\dots,p_m\}=1$ 和 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$ 属于 $L^{p_1,\kappa}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m,\kappa}(w_m)$，且 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 和 $0<\kappa<1$。对于任意球 $B=B(x_0,r)\subset\mathbb{R}^n$，满足 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$，我们需要证明以下估计成立。

$$\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\lambda\cdot\nu_{\vec{w}}\big(\{x\in B:\big|T_\theta(f_1,\dots,f_m)\big|>\lambda\}\big)^{1/p}\lesssim\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.\tag{4.11}$$

为此，我们将 f_i 表示为

$$f_i=f_i\cdot\chi_{2B}+f_i\cdot\chi_{(2B)^\complement}:=f_i^0+f_i^\infty,\quad\text{for}\ \ i=1,2,\dots,m.$$

利用引理 4.2（$N=2^m$），可写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\lambda\cdot\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|T_\theta(f_1,\dots,f_m)\big|>\lambda\big\}\big)^{1/p}\\
&\le\frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\lambda\cdot\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|T_\theta(f_1^0,\dots,f_m^0)\big|>\lambda/2^m\big\}\big)^{1/p}\\
&+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\lambda\cdot\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})\big|>\lambda/2^m\big\}\big)^{1/p}\\
&:=I_*^{0,\dots,0}+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

其中

$$
\mathfrak{L}=\big\{(\beta_1,\dots,\beta_m):\beta_k\in\{0,\infty\},\text{there is at least one }\beta_k\neq0,1\le k\le m\big\}.
$$

根据 T_θ 的加权弱型估计（见定理 1.2），我们可以对 (4.12) 右端的第一项作如下估计。

$$
\begin{aligned}
I_*^{0,\dots,0}&\le C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\prod_{i=1}^m\bigg(\int_{2B}|f_i(x)|^{p_i}w_i(x)\,dx\bigg)^{1/p_i}\\
&\le C\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\cdot\prod_{i=1}^m w_i(2B)^{\kappa/p_i}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

此外，再次由引理 3.1 可得 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$，其中 $1/m\le p<+\infty$。然后应用不等式 (3.2) 和 (4.4)，得到

$$
\begin{aligned}
I_*^{0,\dots,0}&\le C\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\frac{\nu_{\vec{w}}(2B)^{\kappa/p}}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\\
&\le C\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

在定理 2.1 的证明中，我们已经证明了对所有 m-元组 $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}$，以下逐点估计成立（见 (4.6) 和 (4.9)）。

$$
\big|T_\theta(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).
\tag{4.15}
$$

不失一般性，我们可以假设

$$
p_1=\cdots=p_\ell=\min\{p_1,\dots,p_m\}=1\quad\text{and}\quad p_{\ell+1},\dots,p_m>1
$$

其中 $1\le\ell<m$。$p_1=\cdots=p_m=1$ 的情形也可以用类似且更简单的方法处理。利用 H¨older 不等式，多重 $A_{\vec{P}}$ 条件

在 $\vec{w}$ 上，我们得到对任意 $x \in B$,

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta(f_1^{\beta_1}, \dots, f_m^{\beta_m})(x)\big| \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \bigg(\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} \big|f_i(y_i)\big|\, dy_i \bigg) \times \bigg(\prod_{i=\ell+1}^{m} \frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} \big|f_i(y_i)\big|\, dy_i \bigg) \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{|2^{j+1}B|} \bigg(\int_{2^{j+1}B} \big|f_i(y_i)\big| w_i(y_i)\, dy_i \bigg) \bigg(\inf_{y_i \in 2^{j+1}B} w_i(y_i) \bigg)^{-1} \\
&\times \prod_{i=\ell+1}^{m} \frac{1}{|2^{j+1}B|} \bigg(\int_{2^{j+1}B} \big|f_i(y_i)\big|^{p_i} w_i(y_i)\, dy_i \bigg)^{1/p_i} \bigg(\int_{2^{j+1}B} w_i(y_i)^{-p_i'/p_i}\, dy_i \bigg)^{1/p_i'} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \sum_{j=1}^{\infty} \bigg\{ \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{1/p}} \cdot \prod_{i=1}^{m} w_i(2^{j+1}B)^{\kappa/p_i} \bigg\} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}},
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中我们应用了 (4.4)。注意， $\nu_{\vec{w}} \in A_{mp}$ 与 $1 \le mp < \infty$。因此，由切比雪夫不等式和上述逐点估计可直接得到

$$
\begin{aligned}
I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m} &\le \cdot \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \bigg(\int_B \big|T_\theta(f_1^{\beta_1}, \dots, f_m^{\beta_m})(x)\big|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^{1/p} \\
&\le C \prod_{i=1}^{m} \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}.
\end{aligned}
$$

此外，由（4.7）可知，对于所有 m-元组 $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathfrak{L}$,

$$
\begin{aligned}
I_*^{\beta_1,\dots,\beta_m} &\lesssim \prod_{i=1}^{m} \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \sum_{j=1}^{\infty} \bigg(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|} \bigg)^{\delta(1-\kappa)/p} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)},
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

其中，在最后一步中我们使用了 $\delta > 0$ 和 $0 < \kappa < 1$ 这一事实。将估计（4.14）和（4.16）结合起来，即得到所需的不等式（4.11）。因此，通过对所有 $\lambda > 0$ 取上确界，我们完成了定理 2.2 的证明。 □

令 $1 \le p_1, \dots, p_m \le +\infty$。若每个 w_i 都属于 $A_{p_i}, i = 1, 2, \dots, m$，我们称 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$ 为 $\in \prod_{i=1}^m A_{p_i}$。利用 H¨older 不等式，不难验证

$$
\prod_{i=1}^{m} A_{p_i} \subset A_{\vec{P}}.
$$

此外， [11, Remark 7.2]中已证明该包含关系是严格的。显然，
$\prod_{i=1}^m A_{p_i} \subset \prod_{i=1}^m A_\infty$。因此我们有

$$\prod_{i=1}^m A_{p_i} \subset A_{\vec{P}} \bigcap \prod_{i=1}^m A_\infty. \tag{4.17}$$

这里自然会产生一个问题：上述包含关系是否也是严格的？因此，作为定理 2.1 和 2.2 的直接推论，我们立即得到以下结果。

推论4.1. 设 $m \geq 2$ 和 T_θ 是满足条件（1.1）的、具有 θ的 m-线性 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子。若 $1 < p_1, \ldots, p_m < +\infty$和$1/m < p < +\infty$满足 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$，且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in \prod_{i=1}^m A_{p_i}$，则对任意 $0 < \kappa < 1$，多线性算子 T_θ 从 $L^{p_1,\,\kappa}(w_1) \times L^{p_2,\,\kappa}(w_2) \times \cdots \times L^{p_m,\,\kappa}(w_m)$ 有界映射到 $L^{p,\,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$，其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。

推论4.2. 设 $m \geq 2$ 和 T_θ 是一个 m-线性 θ型 Calder´on–Zygmund 算子，其 θ 满足条件（1.1）。若 $1 \leq p_1, \ldots, p_m < +\infty$, $\min\{p_1, \ldots, p_m\} =1$ 且 $1/m \leq p < +\infty$ 满足 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$，并且 $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in \prod_{i=1}^m A_{p_i}$，则对于任意 $0 < \kappa < 1$，多线性算子 T_θ 从$L^{p_1,\,\kappa}(w_1) \times L^{p_2,\,\kappa}(w_2) \times \cdots \times L^{p_m,\,\kappa}(w_m)$到 $WL^{p,\,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$有界，且 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。

5 定理2.3和2.4的证明

为证明本节关于多线性交换子的主要定理，我们需要以下关于BMO函数的引理。

引理 5.1. 设 b 是$\mathbb{R}^n$中的一个BMO函数。则

1. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B 以及所有 $j \in \mathbb{N}$,

$$\left|b_{2^{j+1}B} - b_B\right| \leq C \cdot (j+1)\|b\|_*.$$

2. 设 $1 \leq p < +\infty$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 B 以及所有 $\omega \in A_\infty$,

$$\left(\int_B \left|b(x) - b_B\right|^p \omega(x)\,dx\right)^{1/p} \leq C\|b\|_* \cdot \omega(B)^{1/p}.$$

证明。关于上述结果的证明，请参阅 [24]。 □

基于引理 5.1，我们现在断言，对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in A_\infty$，估计

$$\left(\int_{2^{j+1}B} \left|b(x) - b_B\right|^p \omega(x)\,dx\right)^{1/p} \leq C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} \tag{5.1}$$

当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 且 $1 \le p < +\infty$ 时，该结论成立。事实上，利用引理 5.1 (1) 和 (2)，我们可以轻易得到

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{2^{j+1}B} |b(x) - b_B|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_{2^{j+1}B} |b(x) - b_{2^{j+1}B}|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{2^{j+1}B} |b_{2^{j+1}B} - b_B|^p \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&\le C\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} + C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p} \\
&\le C(j+1)\|b\|_* \cdot \omega(2^{j+1}B)^{1/p},
\end{aligned}$$

如所期望的那样。接下来，我们建立以下结果。

引理 5.2. 设 b 是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数。那么对于任意球 $B \in \mathbb{R}^n$ 以及任意 $\omega \in A_\infty$，有

$$\|b - b_B\|_{\exp L(\omega), B} \le C\|b\|_*. \tag{5.2}$$

证明。由众所周知的约翰–尼伦伯格不等式（见 [9]），可知存在两个正常数 C_1 和 C_2，它们仅依赖于维数 n，使得对于任意 $\lambda > 0$,

$$\big|\{x \in B : |b(x) - b_B| > \lambda\}\big| \le C_1 |B| \exp\left\{ - \frac{C_2 \lambda}{\|b\|_*} \right\}.$$

该结果表明，从某种意义上说，对数增长是 BMO 函数可能达到的最大增长（更确切地说，可取 $C_1 = \sqrt{2}$、 $C_2 = \log 2/2^{n+2}$，见 [4, 第 123–125] 页）。应用 A_∞ 权重的比较性质 (3.1)，存在一个正常数 $\delta > 0$，使得

$$\omega\big(\{x \in B : |b(x) - b_B| > \lambda\}\big) \le C_1 \omega(B) \exp\left\{ - \frac{C_2 \delta \lambda}{\|b\|_*} \right\}.$$

由此可得（c_0 和 C 是两个常数）

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B \exp\left(\frac{|b(y) - b_B|}{c_0 \|b\|_*} \right) \omega(y)\, dy \le C,$$

这就得到了 (5.2)。 □

此外，由式（5.2）和引理 5.1(1)可知，容易验证，对于每个 $\omega \in A_\infty$ 以及任意球 $B \in \mathbb{R}^n$,

$$\|b - b_B\|_{\exp L(\omega), 2^{j+1}B} \le C(j+1)\|b\|_*, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

现在我们可以给出定理2.3和定理2.4的证明。

¯定理 2.3 的证明。设 $1 < p_1$、...、$p_m < +\infty$ 和 $f = (f_1$、...、$f_m)$ 属于$L^{p_1,\,\kappa}(w_1) \times \cdots \times L^{p_m,\,\kappa}(w_m)$，其中 $\vec{w} = (w_1$、...、$w_m) \in A_{\vec{P}}$ 且 $0 < \kappa < 1$。正如 [11], 中所指出的，根据线性性，只需考虑仅含一个符号的多线性交换子 $[\Sigma b, T_\theta]$。不失一般性，固定$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，然后考虑算子

$$\big[b, T_\theta\big]_1(\vec{f})(x) = b(x) \cdot T_\theta(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) - T_\theta(bf_1, f_2, \ldots, f_m)(x).$$

对于每个固定的球 $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$，只需证明

$$\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \bigg(\int_B \big|\big[b, T_\theta\big]_1(f_1, \ldots, f_m)(x)\big|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^{1/p} \lesssim \|b\|_* \prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}. \tag{5.4}$$

与之前一样，我们将 f_i 分解为 $f_i = f_i^0 + f_0^\infty$，其中 $f_0^i = f_i \cdot \chi_{2B}$ 和 $f_i^\infty = f_i \cdot \chi_{(2B)^\complement}$，$i = 1, 2, \ldots, m$。对于任意 $t > 0$，令 $tB = B(x_0, tr)$。令 $\mathfrak{L}$ 与之前相同。利用引理 4.1($N = 2^m$)，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \bigg(\int_B \big|\big[b, T_\theta\big]_1(f_1, \ldots, f_m)(x)\big|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^{1/p} \\
&\le C \cdot \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \bigg(\int_B \big|\big[b, T_\theta\big]_1(f_1^0, \ldots, f_m^0)(x)\big|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^{1/p} \\
&+ C \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \bigg(\int_B \big|\big[b, T_\theta\big]_1(f_1^{\beta_1}, \ldots, f_m^{\beta_m})(x)\big|^p \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^{1/p} \\
&:= J^{0,\ldots,0} + \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathfrak{L}} J^{\beta_1,\ldots,\beta_m}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

为了估计 (5.5) 的第一项，结合 (3.2) 和 (4.4) 应用定理 1.3，可得

$$\begin{aligned}
J^{0,\ldots,0} &\le C \cdot \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \prod_{i=1}^m \bigg(\int_{2B} |f_i(x)|^{p_i} w_i(x)\, dx \bigg)^{1/p_i} \\
&\le C \prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \cdot \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \prod_{i=1}^m w_i(2B)^{\kappa/p_i} \\
&\le C \prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)} \cdot \frac{\nu_{\vec{w}}(2B)^{\kappa/p}}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}} \\
&\le C \prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

为估计（5.5）中的其余项，我们首先考虑$\beta_1 = \cdots = \beta_m = \infty$的情形。容易看出，对于任意 $x \in B$,

$$\big[b, T_\theta\big]_1(\vec{f})(x) = [b(x) - b_B] \cdot T_\theta(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) - T_\theta((b - b_B)f_1, f_2, \ldots, f_m)(x).$$

因此，我们将项 $J^{\infty,\dots,\infty}$ 分成以下两部分。

$$\begin{aligned}J^{\infty,\dots,\infty} &\le C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\bigg(\int_B\big|[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&\quad+C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\bigg(\int_B\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&:=J_\star^{\infty,\dots,\infty}+J_{\star\star}^{\infty,\dots,\infty}.\end{aligned}$$

接下来，我们分别估计每一项。在定理 2.1 的证明中，我们已经证明（见（4.6））

$$\big|T_\theta(f_1^\infty,f_2^\infty,\dots,f_m^\infty)(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).$$

注意， $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}\subset A_{\infty\infty}$ 由引理 5.1(2)可知

$$\begin{aligned}J_\star^{\infty,\dots,\infty}&\lesssim\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg)\\&\quad\times\bigg(\int_B\big|b(x)-b_B\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{1/p-\kappa/p}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).\end{aligned}$$

接着，我们沿用定理 2.1 证明中的相同论证，得到

$$\begin{aligned}J_\star^{\infty,\dots,\infty}&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^\infty\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}\\&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

使用定理 2.1 中的相同方法，我们还可以推出

$$
\begin{aligned}
&\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty, f_2^\infty, \dots, f_m^\infty)(x)\big| \\
&\lesssim \int_{(\mathbb{R}^n)^m\setminus(2B)^m} \frac{|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\cdot|f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\,dy_1\cdots dy_m \\
&= \sum_{j=1}^\infty \int_{(2^{j+1}B)^m\setminus(2^jB)^m} \frac{|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\cdot|f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\,dy_1\cdots dy_m \\
&\lesssim \sum_{j=1}^\infty \bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{(2^{j+1}B)^m\setminus(2^jB)^m} |(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\cdot\big|f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)\big|\,dy_1\cdots dy_m\bigg) \\
&\le \sum_{j=1}^\infty \bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{2^{j+1}B} |(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1 \prod_{i=2}^m \int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg) \\
&= \sum_{j=1}^\infty \bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B} |(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1\bigg)\bigg(\prod_{i=2}^m \frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
J_{\star\star}^{\infty,\dots,\infty} &\lesssim \nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p} \\
&\quad\times \sum_{j=1}^\infty \bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B} |(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1\bigg)\bigg(\prod_{i=2}^m \frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

对于每个 $2\le i\le m$，利用指数为 p_i 的 Hölder 不等式，我们得到

$$
\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i \le \bigg(\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|^{p_i} w_i(y_i)\,dy_i\bigg)^{1/p_i}\bigg(\int_{2^{j+1}B} w_i(y_i)^{-p_i'/p_i}\,dy_i\bigg)^{1/p_i'}.
$$

根据引理 3.1，$w_i^{1-p_i'} = w_i^{-p_i'/p_i} \in A_{mp_i'} \subset A_\infty$，$i=2,\dots,m$。再次利用指数为 p_1 的 Hölder 不等式以及（5.1），可推得

$$
\begin{aligned}
&\int_{2^{j+1}B} |(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1 \\
&\le \bigg(\int_{2^{j+1}B}\big|f_1(y_1)\big|^{p_1} w_1(y_1)\,dy_1\bigg)^{1/p_1}\bigg(\int_{2^{j+1}B}|b(y_1)-b_B|^{p_1'} w_1(y_1)^{-p_1'/p_1}\,dy_1\bigg)^{1/p_1'} \\
&\lesssim \bigg(\int_{2^{j+1}B}\big|f_1(y_1)\big|^{p_1} w_1(y_1)\,dy_1\bigg)^{1/p_1}(j+1)\|b\|_*\cdot\bigg(\int_{2^{j+1}B} w_1(y_1)^{-p_1'/p_1}\,dy_1\bigg)^{1/p_1'},
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式由以下事实成立：$w_1^{-p_1'/p_1}\in A_\infty$。代入

将上述两个估计代入公式 (5.8)，得到

$$J^{\infty,\dots,\infty}_{\star\star\cdots\star} \lesssim \|b\|_* \cdot \nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Big\{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\Big(\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|^{p_i}w_i(y_i)\,dy_i\Big)^{1/p_i}\Big(\int_{2^{j+1}B}w_i(y_i)^{-p_i'/p_i}\,dy_i\Big)^{1/p_i'}\Big\}\\
&\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Big\{\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{1/p}}\prod_{i=1}^{m}\Big(\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}w_i(2^{j+1}B)^{\kappa/p_i}\Big)\Big\}\\
&\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}},
\end{aligned}$$

其中，在最后两个不等式中，我们使用了 $A_{\vec{P}}$ 条件和 (4.4)。此外，由 (4.7)（因为 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$ 且 $1<mp<+\infty$），最后一个表达式可由以下式子控制

$$\begin{aligned}
&\|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\cdot\Big(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\Big)^{\delta(1-\kappa)/p}\\
\lesssim&\|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)},
\end{aligned}\tag{5.9}$$

其中，最后一个级数收敛，因为指数 $\delta(1-\kappa)/p$ 为正。因此，结合不等式 (5.9) 和 (5.7)，可得

$$J^{\infty,\dots,\infty}\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.$$

现在考虑恰有 ℓ 个 β_i 为 ∞ 的情形，其中某个 $1\le\ell<m$。我们仅给出其中一种情形的论证，其余情形类似，也可通过置换指标，利用下述论证轻易得到。同时，这里我们只考虑 $\beta_1=\infty$ 的情形，因为另一种情形可用同样的方法证明。现在，当 $\big|\big[b,T_\theta\big]_1(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|$ 时，我们来估计这一项

$$\beta_1=\cdots=\beta_\ell=\infty\quad\&\quad\beta_{\ell+1}=\cdots=\beta_m=0.$$

在当前情形下，我们首先将项 $J^{\beta_1,\dots,\beta_m}$ 分成以下两部分。

$$\begin{aligned}
J^{\beta_1,\dots,\beta_m}&\le C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\Big(\int_B\big|[b(x)-b_B]\cdot T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p}\\
&\quad+C\cdot\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{\kappa/p}}\Big(\int_B\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|^p\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\Big)^{1/p}\\
&:=J_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}+J_{\star\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m}.
\end{aligned}$$

接下来，我们分别估计各项。回顾一下，以下结果已在定理 2.1 中得到证明（见（4.9））。

$$\big|T_\theta(f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|\lesssim\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).$$

由引理 5.1(2)，可得

$$\begin{aligned}J_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}&\lesssim\frac{1}{\nu_{\vec w}(B)^{\kappa/p}}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg)\\&\quad\times\bigg(\int_B\big|b(x)-b_B\big|^p\nu_{\vec w}(x)\,dx\bigg)^{1/p}\\&\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec w}(B)^{1/p-\kappa/p}\sum_{j=1}^\infty\bigg(\prod_{i=1}^m\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg).\end{aligned}$$

现在我们完全按照定理 2.1 的证明进行推导，得到

$$\begin{aligned}J_\star^{\beta_1,\dots,\beta_m}&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^\infty\frac{\nu_{\vec w}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec w}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}\\&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^m\big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

另一方面，采用定理 2.1 中给出的方法，我们可以看到

$$\begin{aligned}&\big|T_\theta((b-b_B)f_1^\infty,\dots,f_\ell^\infty,f_{\ell+1}^0,\dots,f_m^0)(x)\big|\qquad(5.11)\\&\lesssim\int_{(\mathbb{R}^n)^\ell\setminus(2B)^\ell}\int_{(2B)^{m-\ell}}\frac{|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\cdot|f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)|}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}dy_1\cdots dy_m\\&\lesssim\prod_{i=\ell+1}^m\int_{2B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\\&\times\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{(2^{j+1}B)^\ell\setminus(2^jB)^\ell}|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\cdot\big|f_2(y_2)\cdots f_\ell(y_\ell)\big|\,dy_1\cdots dy_\ell\\&\le\prod_{i=\ell+1}^m\int_{2B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\\&\times\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{2^{j+1}B}|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1\prod_{i=2}^\ell\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\\&\le\sum_{j=1}^\infty\bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|^m}\int_{2^{j+1}B}|(b(y_1)-b_B)f_1(y_1)|\,dy_1\prod_{i=2}^m\int_{2^{j+1}B}\big|f_i(y_i)\big|\,dy_i\bigg),\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了与 $j\in\mathbb{N}$ 的包含关系 $2B\subseteq 2^{j+1}B$。出于与上文相同的原因，我们得到所需的估计。

$$\begin{aligned} J_{\star\star}^{\beta_1,\dots,\beta_m} &\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\cdot\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{(1-\kappa)/p}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{(1-\kappa)/p}}\\ &\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}. \end{aligned}\tag{5.12}$$

结合（5.10）和（5.12），我们得到

$$J^{\beta_1,\dots,\beta_m}\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^m \big\|f_i\big\|_{L^{p_i,\kappa}(w_i)}.$$

综上所述上述估计，则（5.4）成立，从而定理 2.3 的证明完成。

□

定理 2.4 的证明。给定 $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意固定的球 $B=B(x_0,r)$，如前所述，我们将每个 f_i 分解为

$$f_i=f_i^0+f_i^\infty,\quad i=1,2,\dots,m,$$

其中 $f_i^0=f_i\cdot\chi_{2B}$、$f_i^\infty=f_i\cdot\chi_{(2B)^\complement}$和 $2B=B(x,2r)\subset\mathbb{R}^n$。由线性性，同样地，这里我们只考虑仅含一个符号的多线性交换子；也就是说，固定 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，并考虑算子

$$\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)=b(x)\cdot T_\theta(f_1,f_2,\dots,f_m)(x)-T_\theta(bf_1,f_2,\dots,f_m)(x).$$

令 $\mathfrak{L}$ 与之前相同。那么对于任意给定的 $\lambda>0$，利用引理 4.2($N=2^m$)，可写为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|\big[b,T_\theta\big]_1(\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\big\}\big)\Big]^m\\ &\le\frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|\big[b,T_\theta\big]_1(f_1^0,\dots,f_m^0)(x)\big|>\lambda^m/2^m\big\}\big)\Big]^m\\ &+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}\frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\big(\big\{x\in B:\big|\big[b,T_\theta\big]_1(f_1^{\beta_1},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|>\lambda^m/2^m\big\}\big)\Big]^m\\ &:=J_*^{0,\dots,0}+\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathfrak{L}}J_*^{\beta_1,\dots,\beta_m}. \end{aligned}$$

注意，杨函数 $\Phi(t)=t\cdot(1+\log^+t)$ 满足倍增条件，也就是说，存在常数 $C_\Phi>0$，使得对任意 $t>0$,

$$\Phi(2t)\le C_\Phi\,\Phi(t).$$

由此事实结合定理 1.4 可得

$$\begin{aligned} J_*^{0,\dots,0} &\le \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \prod_{i=1}^m \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\bigg(\frac{2|f_i^0(x)|}{\lambda} \bigg) \cdot w_i(x)\,dx \bigg) \\ &\le \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \prod_{i=1}^m \bigg(\int_{2B} \Phi\bigg(\frac{|f_i(x)|}{\lambda} \bigg) \cdot w_i(x)\,dx \bigg) \\ &= \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \prod_{i=1}^m w_i(2B) \bigg(\frac{1}{w_i(2B)} \int_{2B} \Phi\bigg(\frac{|f_i(x)|}{\lambda} \bigg) \cdot w_i(x)\,dx \bigg) \\ &\le \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \prod_{i=1}^m w_i(2B) \cdot \Big\| \Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda} \bigg) \Big\|_{L\log L(w_i),2B}, \end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了估计式（1.9）。由于 $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m) \in A_{(1,\dots,1)}$，根据定义，我们知道

$$\bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \nu_{\vec{w}}(x)\,dx \bigg)^m \le C \prod_{i=1}^m \inf_{x\in\mathcal{B}} w_i(x) \tag{5.13}$$

对任意球 $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^n$ 均成立，其中 $\nu_{\vec{w}} = \prod_{i=1}^m w_i^{1/m}$。我们可以将这个不等式改写为

$$\begin{aligned} \bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \nu_{\vec{w}}(x)\,dx \bigg) &\le C \bigg(\prod_{i=1}^m \inf_{x\in\mathcal{B}} w_i(x) \bigg)^{1/m} = C \bigg(\prod_{i=1}^m \inf_{x\in\mathcal{B}} w_i(x)^{1/m} \bigg) \\ &\le C \bigg(\inf_{x\in\mathcal{B}} \prod_{i=1}^m w_i(x)^{1/m} \bigg) = C \cdot \inf_{x\in\mathcal{B}} \nu_{\vec{w}}(x), \end{aligned}$$

这意味着 $\nu_{\vec{w}} \in A_1$。此外，对于每个 w_i, $i = 1, 2, \dots, m$，不难看出

$$\begin{aligned} \bigg(\prod_{j\ne i} \inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x)^{1/m} \bigg)^m \bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} w_i(x)^{1/m}\,dx \bigg)^m &\le \bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} w_i(x)^{1/m} \cdot \prod_{j\ne i} w_j(x)^{1/m}\,dx \bigg)^m \\ &\le C \prod_{j=1}^m \inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x). \end{aligned}$$

另请注意

$$\bigg(\prod_{j\ne i} \inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x)^{1/m} \bigg)^m = \prod_{j\ne i} \inf_{x\in\mathcal{B}} w_j(x).$$

由此可得

$$\bigg(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} w_i(x)^{1/m}\,dx \bigg)^m \le C \cdot \inf_{x\in\mathcal{B}} w_i(x),$$

这意味着 $w_i^{1/m} \in A_1 (i = 1, 2, \ldots, m)$。因此，由不等式 (3.2) 和 (4.4)（取 $p_1 = \cdots = p_m = 1$ 和 $p = 1/m$），可得

$$\begin{aligned} J_*^{0,\ldots,0} &\lesssim \prod_{i=1}^m \left\| \Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right) \right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)} \frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \cdot \prod_{i=1}^m w_i(2B)^{\kappa} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \left\| \Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right) \right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)} \cdot \frac{\nu_{\vec{w}}(2B)^{m\kappa}}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \left\| \Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right) \right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}. \end{aligned}$$

剩下的工作是估计项 $J^{\beta_1,\ldots,*}{}^{\beta_m}$，其中 $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathfrak{L}$。回顾一下，对于任意 $x \in B$,

$$\big[b, T_\theta\big]_1(\vec{f})(x) = [b(x) - b_B] \cdot T_\theta(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) - T_\theta((b - b_B)f_1, f_2, \ldots, f_m)(x).$$

因此，我们可以进一步将 $J^{\beta_1,\ldots,*}{}^{\beta_m}$ 分解为

$$\begin{aligned} J_*^{\beta_1,\ldots,\beta_m} \leq & \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \Big[\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{ x \in B : \big|[b(x) - b_B] \cdot T_\theta(f_1^{\beta_1}, f_2^{\beta_2}, \ldots, f_m^{\beta_m})(x)\big| > \lambda^m / 2^{m+1} \Big\} \Big) \Big]^m \\ & + \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \Big[\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{ x \in B : \big|T_\theta((b - b_B)f_1^{\beta_1}, f_2^{\beta_2}, \ldots, f_m^{\beta_m})(x)\big| > \lambda^m / 2^{m+1} \Big\} \Big) \Big]^m \\ := & \widetilde{J}_\star^{\beta_1,\ldots,\beta_m} + \widetilde{J}_{\star\star}^{\beta_1,\ldots,\beta_m}. \end{aligned}$$

利用前面的点态估计 (4.6) 和 (4.9)，以及切比雪夫不等式，我们可以推出

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\star^{\beta_1,\ldots,\beta_m} &\leq \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \times \frac{2^{m+1}}{\lambda^m} \bigg(\int_B \big|[b(x) - b_B] \cdot T_\theta(f_1^{\beta_1}, f_2^{\beta_2}, \ldots, f_m^{\beta_m})(x)\big|^{\frac{1}{m}} \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^m \\ &\leq \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \sum_{j=1}^\infty \bigg(\prod_{i=1}^m \frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} \frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\, dy_i \bigg) \\ &\quad \times \bigg(\int_B \big|b(x) - b_B\big|^{\frac{1}{m}} \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^m. \end{aligned}$$

我们声称，对于 $2 \leq m \in \mathbb{N}$ 和 $\nu_{\vec{w}} \in A_1$,

$$\bigg(\int_B \big|b(x) - b_B\big|^{\frac{1}{m}} \nu_{\vec{w}}(x)\, dx \bigg)^m \lesssim \|b\|_* \cdot \nu_{\vec{w}}(B)^m. \tag{5.14}$$

暂且假设结论 (5.14) 成立，则有

$$\widetilde{J}_\star^{\beta_1,\ldots,\beta_m} \lesssim \|b\|_* \cdot \nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)} \sum_{j=1}^\infty \bigg(\prod_{i=1}^m \frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} \frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\, dy_i \bigg).$$

此外，注意到对于任意 $t>0,\quad t\le \Phi(t)=t\cdot(1+\log^+ t)$。结合这一事实与多重 $A_{(1,\dots,1)}$ 条件 (5.13)，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star} &\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\\ &\quad\times\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\cdot w_i(y_i)\,dy_i\right)\left(\inf_{y_i\in 2^{j+1}B}w_i(y_i)\right)^{-1}\\ &\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\prod_{i=1}^{m}\int_{2^{j+1}B}\Phi\left(\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\right)\cdot w_i(y_i)\,dy_i\\ &\lesssim \|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\prod_{i=1}^{m}w_i\big(2^{j+1}B\big)\left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{L\log L(w_i),2^{j+1}B},\end{aligned}$$

最后一个不等式由前面的估计式（1.9）得出。根据（4.4）和（4.7），最后一个表达式有界于

$$\begin{aligned}&\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\prod_{i=1}^{m}\left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}\prod_{i=1}^{m}w_i(2^{j+1}B)^{\kappa}\\ &\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{m(1-\kappa)}}\\ &\lesssim \|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}.\end{aligned}$$

现在回到（5.14）的证明。由于 $\nu_{\vec{w}}\in A_1$，我们知道 $\nu_{\vec{w}}$ 属于某个 $1<s<+\infty$ 的反向 H¨older 类 RH_s （见 [4] 和 [7]）。这里，反向 H¨older 类定义如下：$\omega\in RH_s$，如果存在常数 $C>0$ 使得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^s\,dx\right)^{1/s}\le C\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\,dx\right).$$

进一步应用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_B\big|b(x)-b_B\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx &\le |B|\left(\frac{1}{|B|}\int_B\big|b(x)-b_B\big|^{s'/m}\,dx\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\nu_{\vec{w}}(x)^s\,dx\right)^{1/s}\\ &\le C\nu_{\vec{w}}(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\big|b(x)-b_B\big|^{s'/m}\,dx\right)^{1/s'}.\end{aligned}$$

因此，需要考虑两种情形。若 $s'/m<1$，则再次利用 Hölder 不等式可得 (5.14)。若 $s'/m\ge 1$，则利用引理 5.1(2)可得 (5.14)。另一方面，应用逐点估计 (5.8)、(5.11) 以及

由切比雪夫不等式可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}^{\beta_1,\dots,\beta_m}_{\star\star} &\le \frac{C}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}} \times \frac{2^{m+1}}{\lambda^m}\bigg(\int_B \big|T_\theta((b-b_B)f_1^{\beta_1}, f_2^{\beta_2},\dots,f_m^{\beta_m})(x)\big|^{\frac{1}{m}}\nu_{\vec{w}}(x)\,dx\bigg)^m\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{i=2}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\,dy_i\bigg)\\
&\times\bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}\,dy_1\bigg)\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\sum_{j=1}^{\infty}\bigg(\prod_{i=2}^{m}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}w_i(y_i)\,dy_i\bigg)\\
&\times\bigg(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}w_1(y_1)\,dy_1\bigg)\\
&\times\prod_{i=1}^{m}\bigg(\inf_{y_i\in 2^{j+1}B}w_i(y_i)\bigg)^{-1}\\
&\le C\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\bigg(\prod_{i=2}^{m}\int_{2^{j+1}B}\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}w_i(y_i)\,dy_i\bigg)\\
&\times\bigg(\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}w_1(y_1)\,dy_1\bigg),
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $A_{(1,\dots,1)}$ 条件 (5.13)。此外，利用 $t\le\Phi(t)$ 这一事实以及 (1.9)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{2^{j+1}B}\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}w_i(y_i)\,dy_i\\
&\le\int_{2^{j+1}B}\Phi\bigg(\frac{|f_i(y_i)|}{\lambda}\bigg)\cdot w_i(y_i)\,dy_i\\
&\le w_i\big(2^{j+1}B\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_i),2^{j+1}B}.
\end{aligned}
$$

利用 $t\le\Phi(t)$ 这一事实及前面的估计 (3.6)，因此可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}w_1(y_1)\,dy_1\\
&\le\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\Phi\bigg(\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}\bigg)w_1(y_1)\,dy_1\\
&\le C\cdot w_1\big(2^{j+1}B\big)\big\|b-b_B\big\|_{\exp L(w_1),2^{j+1}B}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_1|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_1),2^{j+1}B}.
\end{aligned}
$$

此外，由不等式 (5.3) 可得，

$$\begin{aligned}&\int_{2^{j+1}B}\big|b(y_1)-b_B\big|\cdot\frac{|f_1(y_1)|}{\lambda}w_1(y_1)\,dy_1\\&\le C(j+1)\|b\|_*\cdot w_1\big(2^{j+1}B\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_1|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_1),2^{j+1}B}.\end{aligned}$$

因此，由上述两个估计可得

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{\beta_1,\dots,}{}_{\star\star}{}^{\beta_m}&\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\\&\times\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\prod_{i=1}^{m}w_i\big(2^{j+1}B\big)\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{L\log L(w_i),2^{j+1}B}\\&\lesssim\|b\|_*\cdot\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}\\&\times\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^m}\prod_{i=1}^{m}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}\prod_{i=1}^{m}w_i(2^{j+1}B)^{\kappa}\\&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}\times\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\frac{\nu_{\vec{w}}(B)^{m(1-\kappa)}}{\nu_{\vec{w}}(2^{j+1}B)^{m(1-\kappa)}}\\&\lesssim\|b\|_*\prod_{i=1}^{m}\bigg\|\Phi\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

其中，最后两个不等式分别由（4.4）和（3.1）推出。定理 2.4 的证明至此完成。□

对于迭代交换子 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$，我们也可以用与定理 2.3 和 2.4 相同的方法得到以下结果。证明只需进行适当但细微的修改，具体细节留给读者。

定理 5.1. 设 $m\ge 2$ 和 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 的迭代交换子，其中 θ 满足条件（1.1），且 $\vec{b}\in$ 属于有界平均振荡 ^{m}。若 $1<p_1,\dots,p_m<+\infty$ 且 $1/m<p<+\infty$ 满足 $1/p=\sum_{i=1}^m 1/p_i$，并且 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$ 满足 $w_1,\dots,w_m\in A_\infty$，则对于任意 $0<\kappa<1$，迭代交换子 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是从 $L^{p_1,\kappa}(w_1)\times L^{p_2,\kappa}(w_2)\times\cdots\times L^{p_m,\kappa}(w_m)$ 到 $L^{p,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$ 的有界算子，且 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$。

定理 5.2. 设 $m\ge 2$ 和 $\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big]$ 是满足条件 (1.8) 且带有 θ BMO^m 的 θ 型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 的迭代交换子。假设 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{(1,\dots,1)}$，其中 $w_1,\dots,w_m\in A_\infty$。若 $p_i=1$, $i=1,2,\dots,m$ 且 $p=1/m$，则对于任意给定的 $\lambda>0$ 和任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\Big[\nu_{\vec{w}}\Big(\Big\{x\in B:\big|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})(x)\big|>\lambda^m\Big\}\Big)\Big]^m\\&\le C\cdot\prod_{i=1}^{m}\bigg\|\Phi^{(m)}\bigg(\frac{|f_i|}{\lambda}\bigg)\bigg\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)},\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{i=1}^m w_i^{1/m}$， $\Phi(t)=t\cdot(1+\log^+ t)$ 且 $\Phi^{(m)}=\overbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}^{m}$.

最后，根据关系式（4.17），我们得到以下结果。

推论 5.1。设 $m\geq 2$ 和 $b\in$ 有界平均振荡^m。若 $1<p_1,\ \ldots\ldots,\ p_m<+\infty$ 和$1/m<p<+\infty$ 满足 $1/p=\sum_{i=1}^m 1/p_i$，且 $\vec{w}=(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_m)\in\prod_{i=1}^m A_{p_i}$，则对任意 $0<\kappa<1$，多线性交换子 $\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right]$ 和迭代交换子 $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 均为有界算子，其映射关系为 $L^{p_1,\kappa}(w_1)\times L^{p_2,\kappa}(w_2)\times\cdots\times L^{p_m,\kappa}(w_m)$ 到 $L^{p,\kappa}(\nu_{\vec{w}})$，且 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{i=1}^m w_i^{p/p_i}$，前提是 θ 满足条件（1.1）。

推论 5.2. 设 $m\geq 2$ and $b\in$ 有界平均振荡^m. 假设 $\vec{w}=(w_1,\ldots,w_m)\in\prod_{i=1}^m A_1$. 若 $p_i=1,\ i=1,2,\ldots,m$ and $p=1/m$, 则对任意给定的 $\lambda>0$ 和任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$，存在常数 $C>0$ 使得 ($\nu_{\vec{w}}=\prod_{i=1}^m w_i^{1/m}$)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B:\left|\left[\Sigma\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\\&\leq C\cdot\prod_{i=1}^m\left\|\Phi\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)},\end{aligned}$$

前提是 θ 满足条件（1.6），且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\nu_{\vec{w}}(B)^{m\kappa}}\cdot\left[\nu_{\vec{w}}\left(\left\{x\in B:\left|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})(x)\right|>\lambda^m\right\}\right)\right]^m\\&\leq C\cdot\prod_{i=1}^m\left\|\Phi^{(m)}\left(\frac{|f_i|}{\lambda}\right)\right\|_{(L\log L)^{1,\kappa}(w_i)},\end{aligned}$$

前提是 θ 满足条件（1.8）。

6 附录

如注 1.6 所指出的，定理 1.3 的结论在将（1.6）替换为较弱的条件（1.1）后仍然成立。在最后一节中，我们将给出定理 1.5 的证明，因为定理 1.3 的证明与之非常相似且更简单。设 $\vec{b}\in$ 有界平均振荡^m and $\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right]$ 为 θ-型 Calder´on–Zygmund 算子 T_θ 的迭代交换子，其中 θ 满足条件（1.1）。我们证明，若$\vec{w}=(w_1,\ldots,w_m)\in A_{\vec{P}}$，则存在一个与 $\vec{f}$无关的常数 $C>0$ 使得

$$\left\|\left[\Pi\vec{b},T_\theta\right](\vec{f})\right\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\leq C\prod_{k=1}^m\left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(w_k)},$$

其中 $\nu_{\vec{w}}=\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}$。这里所用的方法不同于 [14] 中的方法。证明的基本思路取自 [1, 3] 和 [17, 命题 3.1]。

对于满足 $1 \le k \le m$ 的 $b_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，记 $F_k(\xi) = e^{\xi[b_k(x) - b_k(y)]}$, $\xi \in \mathbb{C}$。
由 $F_k(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的解析性以及柯西积分公式，得到

$$\begin{aligned} b_k(x) - b_k(y) = F_k'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{F_k(\xi)}{\xi^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\varphi_k}[b_k(x)-b_k(y)]}\cdot e^{-i\varphi_k} d\varphi_k. \end{aligned} \tag{6.1}$$

因此，由 (1.7) 和 (6.1) 可知，

$$\begin{aligned} &\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big](f_1,\dots,f_m)(x) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \prod_{k=1}^m \big[b_k(x) - b_k(y_k)\big] K(x,y_1,\dots,y_m) f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\, dy_1\cdots dy_m \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\varphi_k}[b_k(x)-b_k(y_k)]}\cdot e^{-i\varphi_k} d\varphi_k\right) \\ &\times K(x,y_1,\dots,y_m) f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\, dy_1\cdots dy_m \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \left[\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m} \left(\prod_{k=1}^m e^{e^{i\varphi_k} b_k(x)}\cdot e^{-i\varphi_k}\right) d\varphi_1\cdots d\varphi_m\right] \\ &\times K(x,y_1,\dots,y_m) \prod_{k=1}^m e^{-e^{i\varphi_k} b_k(y_k)}\cdot f_k(y_k)\, dy_1\cdots dy_m \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m} T_\theta\Big(e^{-e^{i\varphi_1}b_1}\cdot f_1,\dots,e^{-e^{i\varphi_m}b_m}\cdot f_m\Big)(x)\left(\prod_{k=1}^m e^{e^{i\varphi_k}b_k(x)}\cdot e^{-i\varphi_k}\right) d\varphi_1\cdots d\varphi_m. \end{aligned}$$

由此可得，

$$\begin{aligned} &\big|\big[\Pi\vec{b}, T_\theta\big](f_1,\dots,f_m)(x)\big| \\ \le &\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m} \Big|T_\theta\Big(e^{-e^{i\varphi_1}b_1}\cdot f_1,\dots,e^{-e^{i\varphi_m}b_m}\cdot f_m\Big)(x)\Big| \left(\prod_{k=1}^m e^{\cos\varphi_k b_k(x)}\right) d\varphi_1\cdots d\varphi_m. \end{aligned}$$

对于任意 $(\varphi_1,\dots,\varphi_m) \in [0,2\pi]^m$，定义 m-元组

$$\vec{g}_\varphi = \big(g^1_{\varphi_1},\dots,g^m_{\varphi_m}\big), \quad \text{where } g^k_{\varphi_k} = e^{-e^{i\varphi_k}b_k}\cdot f_k, \ \ k = 1,2,\dots,m,$$

并定义

$$\vec{w}_\varphi = \big(w^1_{\varphi_1},\dots,w^m_{\varphi_m}\big), \quad \text{where } w^k_{\varphi_k} = w_k\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k}, \ \ k = 1,2,\dots,m.$$

Set

$$\nu^*_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m \big(w^k_{\varphi_k}\big)^{p/p_k}.$$

于是我们有

$$\nu^*_{\vec{w}} = \prod_{k=1}^m \big(w_k\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k}\big)^{p/p_k} = \nu_{\vec{w}}\cdot\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}.$$

由闵可夫斯基不等式，得到

$$\begin{aligned}\Big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f}\,)\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} &\le \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\Big\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\prod_{k=1}^m e^{\cos\varphi_k b_k}\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\big\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}}^*)}d\varphi_1\cdots d\varphi_m.\end{aligned}$$

由于 $\vec{w}=(w_1,\dots,w_m)\in A_{\vec{P}}$，由引理 3.1可知，我们有 $\nu_{\vec{w}}\in A_{mp}$和 $w_k^{1-p_k'}\in A_{mp_k'},k=1,2,\dots,m$。因此，根据$A_p$权重的自提升性质（见 [4, 5]），存在一些正数 $\varepsilon',\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m>0$，使得

$$\nu_{\vec{w}}^{1+\varepsilon'}\in A_{mp}\quad\&\quad\big(w_k^{1-p_k'}\big)^{1+\varepsilon_k}\in A_{mp_k'},\ k=1,2,\dots,m.$$

现在取

$$\varepsilon:=\min\big\{\varepsilon',\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\big\}.$$

于是有

$$\nu_{\vec{w}}^{1+\varepsilon}\in A_{mp}\quad\&\quad\big(w_k^{1-p_k'}\big)^{1+\varepsilon}=\big(w_k^{1+\varepsilon}\big)^{1-p_k'}\in A_{mp_k'},\ k=1,2,\dots,m,$$

这意味着 $(\vec{w})^{1+\varepsilon}:=(w_1^{1+\varepsilon},\dots,w_m^{1+\varepsilon})\in A_{\vec{P}}$，再次利用引理 3.1 可得。注意到

$$\prod_{k=1}^m\big(w_k^{1+\varepsilon}\big)^{p/p_k}=\bigg(\prod_{k=1}^m w_k^{p/p_k}\bigg)^{1+\varepsilon}=(\nu_{\vec{w}})^{1+\varepsilon}.$$

因此，由定理 1.1，

$$T_\theta:L^{p_1}(w_1^{1+\varepsilon})\times\cdots\times L^{p_m}(w_m^{1+\varepsilon})\longrightarrow L^p((\nu_{\vec{w}})^{1+\varepsilon}).\tag{6.2}$$

另一方面，对于任意固定的 $\eta>0$，众所周知，当 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|b\|_*<\min\{C_2/\eta,C_2(p-1)/\eta\}$ 时，其中 C_2 是上文提及的约翰–尼伦伯格不等式中的常数，我们有 $e^{\eta b(x)}\in A_p$，其中 $1<p<+\infty$（见 [3, 引理 1]）。对于 $b_k\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)(1\le k\le m)$，现在取

$$\eta_k:=\frac{p_k(1+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

对于这样的 $\eta_k>0$，我们可以假设 $\|b_k\|_*<\min\{C_2/\eta_k,C_2(p_k-1)/\eta_k\}$。一般情形同样可以利用 T_θ 的线性性证明。于是，对于任意 $\varphi_k\in[0,2\pi]$，我们有 $\cos\varphi_k\cdot b_k(x)\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|\cos\varphi_k\cdot b_k\|_*\le\|b_k\|_*<\min\big\{C_2/\eta_k,C_2(p_k-1)/\eta_k\big\},$$

这意味着，对每个 $\nu_k(x):=e^{\eta_k\,\text{余弦}\,\varphi_k b_k(x)}\in A_{p_k}$，当 $1<p_k<+\infty$, $k=1,2,\dots,m$ 时均成立。注意，

$$\prod_{k=1}^m\big(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p_k\cos\varphi_k b_k}\big)^{p/p_k}=\prod_{k=1}^m\big(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p\cos\varphi_k b_k}\big)=\bigg(\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\bigg)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

结合这一事实、(4.17) 和定理 1.1，可得

$$T_\theta : L^{p_1}\big(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p_1\cos\varphi_1 b_1}\big)\times\cdots\times L^{p_m}\big(e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p_m\cos\varphi_m b_m}\big)\longrightarrow L^p\Big(\big(\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\big)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\Big). \tag{6.3}$$

在（6.2）和（6.3）（见 [2, 22]）之间进行插值，我们得到

$$T_\theta : L^{p_1}\big(w_1 e^{p_1\cos\varphi_1 b_1}\big)\times\cdots\times L^{p_m}\big(w_m e^{p_m\cos\varphi_m b_m}\big)\longrightarrow L^p\Big(\nu_{\vec{w}}\prod_{k=1}^m e^{p\cos\varphi_k b_k}\Big),$$

即

$$T_\theta : L^{p_1}\big(w^1_{\varphi_1}\big)\times\cdots\times L^{p_m}\big(w^m_{\varphi_m}\big)\longrightarrow L^p\big(\nu^*_{\vec{w}}\big). \tag{6.4}$$

由（6.4）可得

$$\big\|T_\theta(\vec{g}_\varphi)\big\|_{L^p(\nu^*_{\vec{w}})}\le C\prod_{k=1}^m\big\|g^k_{\varphi_k}\big\|_{L^{p_k}(w^k_{\varphi_k})}. \tag{6.5}$$

由于 $f_k\in L^{p_k}(w_k)$，容易验证，对于任意 $\varphi_k\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}\big\|g^k_{\varphi_k}\big\|_{L^{p_k}(w^k_{\varphi_k})}&=\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\big|g^k_{\varphi_k}(x)\big|^{p_k}w_k(x)\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k(x)}dx\bigg)^{1/p_k}\\&=\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f_k(x)\big|^{p_k}e^{-p_k\cos\varphi_k b_k(x)}\cdot w_k(x)\cdot e^{p_k\cos\varphi_k b_k(x)}dx\bigg)^{1/p_k}\\&=\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f_k(x)\big|^{p_k}w_k(x)dx\bigg)^{1/p_k}=\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Big\|\big[\Pi\vec{b},T_\theta\big](\vec{f})\Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}&\le C\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\prod_{k=1}^m\big\|g^k_{\varphi_k}\big\|_{L^{p_k}(w^k_{\varphi_k})}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\&=C\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m}\prod_{k=1}^m\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)}d\varphi_1\cdots d\varphi_m\\&\le C\prod_{k=1}^m\big\|f_k\big\|_{L^{p_k}(w_k)},\end{aligned}$$

这就是我们所需的估计。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金资助（项目编号：XJEDU2020Y002and 2022D01C407）。

参考文献

[1] J. Alvarez, R. J. Bagby, D. S. Kurtz 和 C. P´erez, 《线性算子交换子的加权估计》, Studia Math, 104(1993年), 195–209.[2] J. Berghand J. L¨ofstr¨om, 《插值空间：引言》, Springer– Verlag, 1976.[3] Y. Ding, S. Z. Lu 和 K. Yabuta, 《粗糙核 Marcinkiewicz 积分的交换子》, J. Math. Anal. Appl, 275(2002), 60–68.[4]J. Duoandikoetxea, 《傅里叶分析》, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2000年.[5] J. Garcia-Cuerva 和 J. L. Rubio de Francia, 《加权范数不等式及相关主题》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1985年.[6] L. Grafakos, 《经典傅里叶分析》, 第三版, Springer-Verlag, 2014年[7]L. Grafakos, 《现代傅里叶分析》, 第三版, Springer-Verlag, 2014年.[8] L. Grafakos 和 R. H. Torres, 《多线性 Calder´on–Zygmund 理论》, Adv. Math., 165(2002), 124–164.[9]F. John 和 L. Nirenberg, 《有界平均振荡函数》, Comm. Pure Appl. Math, 14(1961), 415–426.[10] Y. Komori 和 S. Shirai, 《加权 Morrey 空间与奇异积分算子》, Math. Nachr, 282(2009年), 219–231.[11] A. K. Lerner, S. Ombrosi, C. P´erez, R. H. Torres 和 R. Trujillo-Gonz´alez, 《多线性 Calder´on– Zygmund 理论中的新极大函数与多重权》, Adv. Math., 220(2009年), 1222–1264.[12] T. Iida, E. Sato, Y. Sawano 和 H. Tanaka, 《Morrey 空间上的多线性分数阶积分》, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 28(2012年), 1375–1384.[13] Z. G. Liu 和 S. Z. Lu, 《Calder´on– Zygmund 型算子交换子的端点估计》, Kodai Math. J., 25(2002), 79–88.[14] G. Z. Lu 和 P. Zhang, 《具有 Dini 型核的多线性 Calder´on–Zygmund 算子及其应用》, Nonlinear Anal., 107(2014年), 92–117.[15] D. Maldonado 和 V. Naibo, 《具有温和正则性的抛物乘子和双线性伪微分算子的加权范数不等式》, J. Fourier Anal. Appl., 15(2009年), 218–261.[16] C. B. Morrey, 《拟线性椭圆偏微分方程解》, Trans. Amer. Math. Soc, 43(1938), 126–166.

[17] C. P´erez和R. H. Torres, 《多线性奇异积分的尖锐极大函数估计》, 《当代数学》, 320（2003年）, 323–331。[18] C. P´erez、G. Pradolini、R. H. Torres和R. Trujillo-Gonz´alez, 《多线性奇异积分迭代交换子的端点估计》, 《伦敦数学学会通报》, 46（2014年）, 26–42。[19] T. S. Quek和D. C. Yang, 《$\mathbb{R}^n$上的加权弱Hardy空间中的Calder´on–Zygmund型算子》, 《数学学报（英文版）》, 16（2000年）, 141–160。[20] M. M. Rao和Z. D. Ren, 《Orlicz 空间理论》, Marcel Dekker, 纽约, 1991年。[21] Y. Sawano、S. Sugano和H. Tanaka, 《Orlicz–Morrey空间与分数阶算子》, 《势分析》, 36（2012年）, 517–556。[22] E. M. Stein和G. Weiss, 《测度变换下的算子插值》, Trans. Amer. Math. Soc, 87（1958年）, 159–172。[23] E. M. Stein, 《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1993年。[24]H. Wang, 《加权 Morrey 空间上的内禀平方函数》, J. Math. Anal. Appl, 396（2012年）, 302–314。[25] H. Wang, 《Morrey型空间中分数阶积分算子与线性交换子的加权不等式》, J. Inequal. Appl, 2017年, 论文编号6, 33页。[26] H. Wang, 《广义加权Morrey空间中 θ型Calder´on–Zygmund算子及交换子的有界性》, 《函数空间》, 2016年, 文章编号1309348, 18页。[27] K. Yabuta, 《Calder´on–Zygmund算子的推广》, Studia Math, 82（1985年）, 17–31。[28] P. Zhang, 《Marcinkiewicz积分交换子的加权端点估计》, 《数学学报（英文版）》, 26（2010年）, 1709–1722。[29] P.Zhang和H.Xu, 《Calder´on–Zygmund型算子交换子的尖锐加权估计》, Acta Math. Sinica（中文版）, 48（2005年）, 625–636。