arXiv:2302.05579v1 [math.GT] 11 Feb 2023

交替纽结反向平行链环的辫指数

YUANAN DIAO[♯] 和 HUGH MORTON[♭]

Abstract. 大多数链环的辫指数仍然未知，因为目前还没有一种通用方法可以确定任意纽结的辫指数。交替纽结也是如此。本文证明，若 K 是一个交替纽结，则 K 的任意反向平行链环的辫指数都可以精确确定。更确切地说，若 D 是 K的约化图， $v_+(D)$ （$v_-(D)$）是 D 中所有交叉点均为正（负）的棋盘格染色区域数， $w(D)$是 D的扭率，那么 K框架为 f的反向平行链环的辫指数（记作 $\mathbb{K}_f$）可由以下精确公式给出

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)=\begin{cases} c(D)+2+a(D)-f, & \text{if } f<a(D),\\ c(D)+2, & \text{if } a(D)\le f\le b(D),\\ c(D)+2-b(D)+f, & \text{if } f>b(D),\end{cases}$$

其中 $a(D)=-v_-(D)+w(D)$，且 $b(D)=v_+(D)+w(D)$。

1. Introduction

众所周知，确定纽结或链环的辫指数是一项具有挑战性的问题。迄今为止，还没有已知的方法能够确定任意给定纽结/链环的精确辫指数。即使将范围限制在交替纽结和链环内，情况也是如此，尽管目前已经能够确定许多交替纽结和链环的辫指数，例如所有二桥链环和所有交替蒙特西诺斯链环 [6, 13]。然而，本文将证明一个颇为令人意外的结果，即任意交替纽结的反向平行链环的辫指数都可以被精确确定。此外，该公式可以从交替纽结的任意约化图中轻易推导出来。

本文将研究交替纽结的反向平行链环。一个纽结的反向平行链环由嵌入于 S^3 中的环带 A 的两个边界分支构成，其中所述纽结是这两个分支之一，并且两个分支被赋予相反定向。设 K 和 K' 是由环带 A所诱导的反向平行链环的两个分支。遵循文献中采用的惯例（例如 [15, 16]），我们将 f 与 K 在被赋予平行定向时的链接数 K' 称为 K的框架。注意， K 的框架为 f的反向平行链环在 [15] 中记作 $K*_f A$，在 [16]中记作 $\mathbf{Bd}_A(K, f)$。框架与

2020 数学学科分类。 主要分类：57K10、57K31。关键词和短语。 纽结、链环、交替纽结与链环、交替纽结的反向平行副本、辫指数。

K 的定向无关，而 S^3 中 A 的环境同痕类仅取决于 K 和框架。因此， K 的反向平行链环由框架 f刻画。由于我们的结果（及其证明）只取决于框架，而非实际的环带 A，我们将引入一种新记号 $\mathbb{K}_f$，表示框架为 f的 K 的反向平行链环。请注意，框架 f是 $\mathbb{K}_f$ 的两个分支在平行定向下的链接数，因此 $\mathbb{K}_f$ 本身的链接数为 $-f$。

对于给定的带有棋盘格染色的纽结图 D，如图1左侧所示，可根据该染色为一个交叉指定 $+$或 $-$ 交叉符号。这不要与纽结取向所确定的交叉符号混淆；后者用于定义纽结的扭率 D，如图1右侧所示。

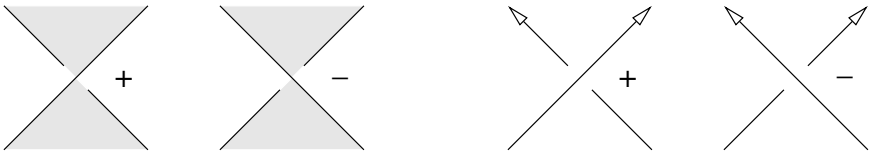


FIGURE 1. 左：相对于棋盘格染色的交叉；右：相对于纽结取向的交叉符号。

现在，设 K 是一个带有约化图 D的交替纽结。众所周知，在这种情况下， D 的所有交叉相对于 D 的一种棋盘格染色均为正，而相对于 D的另一种棋盘格染色均为负。此外，若令 $v_+(D)$表示所有交叉为正的染色中的区域数，并令 $v_-(D)$表示互补染色中所有交叉为负的区域数，则 $v_+(D) + v_-(D) - 2 = c(D)$，其中 $c(D)$是 D [8]中的交叉点数。由 D 还可以得到其所谓的黑板反向平行环带（框架），它可作为其他环带（框架）选择的良好参照，因为其他选择都可通过添加右手或左手扭转由此得到。若 D 的扭率为 $w(D)$，则黑板反向平行的框架也为 $w(D)$。若在两个分支之间添加 k 个右手（左手）扭转，则所得反向平行的框架为 $w(D) + k\,(w(D) - k)$。示意见图2。

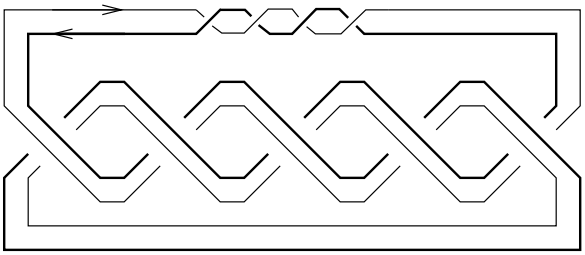


FIGURE 2. 加入两个左手扭转后的 (2，5) 环面结的黑板反向平行。因此，所得反向平行链环（含新增的扭转）的框架为 $5 + (-2) = 3$。

本文的主要结果是以下定理。

定理 1.1. 设 K 是一个交替纽结， D 是 K的一个约化图。设 $c(D)$、 $w(D)$、$v_+(D)$和 $v_-(D)$ 如上所定义，则 $\mathbb{K}_f$ 的辫指数记为 $\boldsymbol{b}(\mathbb{K}_f)$，由下式给出

$$\boldsymbol{b}(\mathbb{K}_f) = \begin{cases} c(D)+2+a(D)-f, & \text{if } f < a(D), \\ c(D)+2, & \text{if } a(D) \le f \le b(D), \\ c(D)+2-b(D)+f, & \text{if } f > b(D), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a(D) = -v_-(D) + w(D)$ 以及 $b(D) = v_+(D) + w(D)$。

我们可以用图示的方式，通过 D 的黑板反向平行来概括定理 1.1。

- 黑板反向平行的辫指数为 $c(D)+2$。
- 添加至多 $v_+(D)$ 个右手扭结，或至多 $v_-(D)$ 个左手扭结后，辫指数仍为 $c(D)+2$。
- 每增加一个右手或左手扭结，辫指数就增加 1。

例如，由于对于 (2，5) 环面结有 $v_-(D) = 2$ 和 $v_+(D) = 5$，图2所示反向平行链环的辫指数为 $c(D)+2 = 7$。再增加一个左手扭结，辫指数便会增至 8；而在黑板平行链环上增加最多 5 个右手扭结后，辫指数仍为 7。

我们将通过证明右侧表达式既是 $\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)$ 的下界，也是其上界，来确立 (1.1)。下界由 Morton-Franks-Williams不等式得到，而上界则通过直接构造得到。

2. The lower bound

本节将证明以下定理。

定理 2.1. 设 $\mathbb{K}_f$ 是交替纽结 K 的反向平行链环，其框架为 f，且D 是 K 的一个约化图示。那么

$$\boldsymbol{b}(\mathbb{K}_f) \ge \begin{cases} c(D)+2+a(D)-f, & \text{if } f < a(D), \\ c(D)+2, & \text{if } a(D) \le f \le b(D), \\ c(D)+2-b(D)+f, & \text{if } f > b(D). \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $a(D) = -v_-(D) + w(D)$ 并且 $b(D) = v_+(D) + w(D)$。

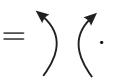
2.1. Homfly 多项式和 Kauffman 多项式。

在证明此定理之前，我们先介绍链环 L 的 Homfly 多项式和 Kauffman 多项式的一些性质。

定向链环的 *HOMFLY* 多项式 $P_L(v, z) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ 由 skein 关系 L 确定

$$v^{-1}P_{L^+} - vP_{L^-} = zP_{L^0}$$

其中 $L^{\pm}$, L^0 仅在一个交叉附近有所不同，如图所示，并且在平凡结上的取值为 1。

$L^+ =$ , $L^- =$ , $L^0 =$ .

Kauffman 多项式 $F_L(a,\ z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ 对无向链环 L 的定义见 [9]。同样，它在平凡结上的取值为 1。

在链环 L上附加一个额外的、彼此远离的平凡结分支 O，得到 $L \sqcup O$后，每个多项式都会以如下简单方式变化。

$$\begin{aligned} P_{L\sqcup O}(v,z) &= \frac{v^{-1}-v}{z} P_L(v,z) \\ F_{L\sqcup O}(a,z) &= \left(\frac{a+a^{-1}}{z} - 1\right) F_L(a,z). \end{aligned}$$

定义扩展 *Homfly* 多项式 EP 为

$$EP_L(v,z) = \frac{v^{-1}-v}{z} P_L(v,z) = P_{L\sqcup O}(v,z) \tag{2.2}$$

并定义扩展考夫曼多项式 EF 为

$$EF_L(a,z) = \left(\frac{a+a^{-1}}{z} - 1\right) F_L(a,z) = F_{L\sqcup O}(a,z). \tag{2.3}$$

注 1. 这种扩展归一化常用于量子不变量的研究，在此情境下，它使纽结多项式的特化形式更加自然。在这种情境下，使用 Kauffman 多项式的杜布罗夫尼克变体代替 F也更为实用。

将 $L = \phi$ 代入（2.2）和（2.3）两边后，扩展多项式在空链环 ϕ 上的取值可视为 1。

2.2. 由 HOMFLY 和 Kauffman 多项式得到的界。 Morton-Franks-Williams不等式 [7, 10] 根据 HOMFLY 多项式 $P_L(v,z)$ 的v跨度或其扩展形式，给出了链环 L 的辫指数$\mathbf{b}(L)$的下界。具体而言，

$$\mathbf{b}(L) \geq 1 + \frac{1}{2}\mathrm{spr}_v P_L(v,z) = \frac{1}{2}\mathrm{spr}_v EP_L(v,z). \tag{2.4}$$

莫顿和贝尔特拉米 [11]指出，Kauffman 多项式的 a跨度可为弧指数 $\alpha(L)$提供一个界。具体而言，

$$\mathrm{spr}_a F_L(a,z) \leq \alpha(L) - 2.$$

Bae 和 Park [1] 证明，弧指数 $\alpha(L)$ 不超过 $c(L) - 2$，即$\alpha(L) \leq c(L) + 2$。结合这些结果可知

$$\mathrm{spr}_a F_L(a,z) \leq c(L). \tag{2.5}$$

2.3. **一个同余结果**。 Rudolph [16] 揭示了链环 L 的 Kauffman 多项式与其反向平行副本 L的 HOMFLY 多项式之间的关系。

记号 1. 对于劳朗多项式 $A = \sum a_{i,j}v^i z^j, B = \sum b_{i,j}v^i z^j \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$，我们记作$A \cong_{\mathbb{Z}_2} B$，当 $a_{i,j} \cong b_{i,j}$ 对所有 i, j 模 2 同余时。

对于纽结 K，Rudolph 关于反平行链 $\mathbb{K}_f$ 的定理可以用扩展多项式非常简洁地表述。

定理 2.2. [16,同余定理]

$$EP_{\mathbb{K}_f}(v,z) - 1 \cong_{\mathbb{Z}_2} v^{-2f} EF_K(v^{-2}, z^2)$$

2.4. **交替纽结**。 我们可以将这些界应用于交替纽结的情形，首先考察 Cromwell [3] 关于它们的 Kauffman 多项式的观察。

对于任意具有图示 D 的纽结 K，将 K 的 Kauffman 多项式 $F_K(a, z)$ 写作

$$F_K(a,z) = a^{-w(D)} \sum_{i,j} a_{i,j} a^i z^j. \tag{2.6}$$

In 因此，这种形式的系数 $a_{i,j}$ 仅在范围 $|i| + j \le c(D)$ 内非零 .

Cromwell 扩展了 Thistlethwaite [17] 的工作，确定了两个非零系数 $a_{i,j}$ 它们在 $F_K(a, z)$ 的情况下，对于具有约化图 D 的交替纽结 K，实现了最大可能的 a-展度 $c(D)$。

定理 2.3。 [3] 设 K 为一个交替纽结，D 为 K 的约化图。那么，在两种情形 $i = 1 - v_+(D)$ $j = c(D) + i$ 和 $i = v_-(D) - 1$ 中，$j = c(D) - i$。

由此可得，$\mathrm{spr}_a F_K(a, z) \ge v_-(D) - 1 - (1 - v_+(D)) = c(D)$。

推论 2.4。 因此，根据（*2.5*），$\mathrm{spr}_a F_K(a, z) = c(D)$。然后，除非 $1 - v_+(D) \le i \le v_-(D) - 1$, 在（*2.6*）中 $a_{i,j} = 0$。

现在令

$$B_D(a,z) = a^{w(D)} EF_K(a,z) = \left(\frac{a + a^{-1}}{z} - 1\right) \sum_{i,j} a_{i,j} a^i z^j. \tag{2.7}$$

则 $\mathrm{spr}_a B_D(a, z) = \mathrm{spr}_a F_K(a, z) + 2 = c(D) + 2$。此外，若我们写作

$$B_D(a,z) = \sum_{i,j} b_{i,j} a^i z^j, \tag{2.8}$$

那么 $b_{i,j} = 0$ 除非 $-v_+(D) \le i \le v_-(D)$，由推论 2.4 可知。

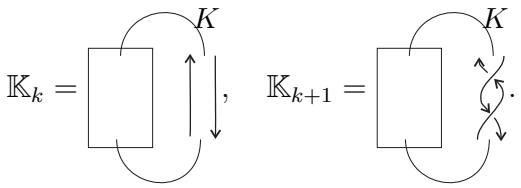
根据定理 2.3，$B_D(a, z)$ 中的两个临界单项式 $a^{-v_+(D)} z^{c(D) - v_+(D)}$ 和 $a^{v_-(D)} z^{c(D) - v_-(D)}$ 分别对应于 $i = -v_+(D)$ 和 $i = v_-(D)$，且二者的系数均为 $b_{i,j} = 1$。我们将利用这些临界单项式，为 D的反向平行副本的扩展 Homfly 多项式的 v-跨度求一个下界。

下面的定理 2.5 给出了一个简单公式，可用于根据 $\mathbb{K}_k$的多项式计算$\mathbb{K}_{k+f}$ 的扩展 Homfly 多项式。

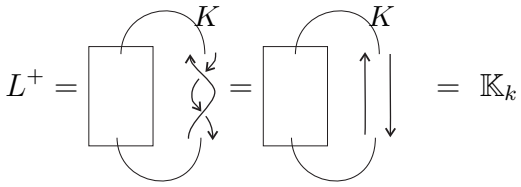
定理 2.5. 对于任意 f 和 k，我们有

$$v^{2f}(EP_{\mathbb{K}_{k+f}}(v,z)-1)=EP_{\mathbb{K}_k}(v,z)-1.$$

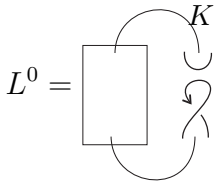
证明。 虽然 Rudolph 已在其命题 2(5) 中证明了这一点，但用辫子理论证明直接证明也很容易。只需证明 $f=1$的情形即可。现在， $\mathbb{K}_{k+1}$ 是由 $\mathbb{K}_k$ 在环带中增加一个额外的扭转得到的，如图所示。



对这些股线采用反向平行定向，并在 $\mathbb{K}_{k+1}$的图示中的一个交叉点处应用 Homfly 辫子关系。由于这是一个负交叉， $\mathbb{K}_{k+1}$ 起到L^-的作用。交换交叉后得到



而平滑后的图示



只是一个平凡结曲线。

纽结 skein 关系的形式为

$$EP_{L^+}=vzEP_{L^0}+v^2EP_{L^-},$$

于是得到

$$\begin{aligned} EP_{\mathbb{K}_k} &= vz\frac{v^{-1}-v}{z}+v^2EP_{\mathbb{K}_{k+1}} \\ &= 1-v^2+v^2EP_{\mathbb{K}_{k+1}} \end{aligned}$$

Thus

$$v^2(EP_{\mathbb{K}_{k+1}}-1)=EP_{\mathbb{K}_k}-1.$$

□

现在可以给出平行副本 $\mathbb{K}_{w(D)+f}$ 的扩展 Homfly 多项式关于 v的跨度的下界，其中 f 变化。

定理 2.6。 设 K 是一个交替纽结，其约化图为 D。带框架的反向平行副本 $\mathbb{K}_{w(D)+f}$ 的扩展 *Homfly* 多项式关于 v的跨度具有以下下界。

$$\mathrm{spr}_v EP_{\mathbb{K}_{w(D)+f}}(v,z) \geq \begin{cases} 2(v_+(D)-f), & \text{if } f < -v_-(D), \\ 2(v_+(D)+v_-(D)), & \text{if } -v_-(D) \leq f \leq v_+(D), \\ 2(f+v_-(D)), & \text{if } f > v_+(D). \end{cases}$$

证明。 其中 K 是一个交替纽结，其约化图为 D； 定理 2.2 表明

$$B_D(v^{-2},z^2) = v^{-2w(D)} EF_K(v^{-2},z^2) \cong_{\mathbb{Z}_2} EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z) - 1. \tag{2.9}$$

现在，在 $B_D(v^{-2},z^2) = \sum b_{i,j} v^{-2i} z^{2j}$ 中有两个临界单项式 $v^{-2i}z^{2j}$，其中一个为 $i = -v_+(D)$ $j = c(D) - v_+(D)$，另一个为 $i = v_-(D)$ $j = c(D) - v_-(D)$，其中 $b_{i,j} = 1$。由方程 (2.9)，在 $EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z) - 1$中有两个对应的临界单项式 $v^{-2i}z^{2j}$，其系数同余于 $b_{i,j}$，因此均为奇数。一项的 v 次数为 $-2v_-(D)$，另一项的 v 次数为 $2v_+(D)$。

根据定理 2.5，我们有

$$v^{2f} EP_{\mathbb{K}_{w(D)+f}}(v,z) = (EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z) - 1) + v^{2f}.$$

$EP_{\mathbb{K}_{w(D)+f}}(v,z)$ 的 v-跨度与 $(EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z)-1)+v^{2f}$ 的 v-跨度相同。在这个劳朗多项式中，考察两个临界单项式以及单项式 v^{2f} 的出现。除非 $B_D(v^{-2},z^2)$ 中的两个临界单项式 $v^{2v_+(D)}z^{2c(D)-2v_+(D)}$ 和 $v^{-2v_-(D)}z^{2c(D)-2v_-(D)}$之一是 v^{2f}，它们的系数仍都会是奇数，而 v-跨度至少为 $2(v_+(D)+v_-(D))$。

如果 $f < -v_-(D)$ 或 $f > v_+(D)$，那么单项式 v^{2f} 在 $EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z)$ 中的系数为偶数，因为它在 $B_D(v^{-2},z^2)$ 中的系数为 0。在 f 的这个范围内，它在 $(EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v,z) - 1) + v^{2f}$ 中的系数非零。因此，当 $f < -v_-(D)$ 时，$\mathrm{spr}_v EP_{\mathbb{K}_{w(D)+f}}(v,z)$ 的下界为 $2(v_+(D) - f)$；当 $f > v^+(D)$ 时，下界为 $2(v_-(D) + f)$。

要完成定理 2.6 的证明，还需处理 v^{2f} 是 $B_D(v^{-2},z^2)$ 中两个临界单项式 $v^{2v_+(D)}z^{2c(D)-2v_+(D)}$ 和 $v^{-2v_-(D)}z^{2c(D)-2v_-(D)}$ 之一的情形。在第一种情形下，这意味着 $f = v_+(D)$ 和 $0 = c(D) - v_+(D)$。于是 $f = c(D) = v_+(D) = n$ 和 D 是 $(2,n)$ 环面结的约化图。在另一种情形下，$-f = c(D) = v_-(D) = n$，因此 D 是 $(2,-n)$ 环面结的约化图。

在 D 是 $(2, n)$ 环面结的情形下，我们需要证明 v^{2n} 在 $(EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v, z)-1)+v^{2n}$ 中的系数非零。在定理 2.7 中，我们通过证明 v^{2n} 在 $EP_{\mathbb{K}_{w(D)}}(v, z)$ 中的系数为 1，说明该系数为 2，其中 $\mathbb{K}_{w(D)}$ 是 D 的黑板反向平行。

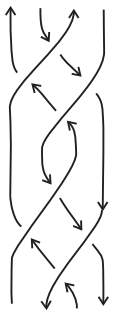
对于 $(2, -n)$ 环面结的情形，只需考察其镜像的多项式即可直接得出结论，由此完成定理 2.6 的证明。□

现在给出 $(2, n)$ 环面结这一特殊情形的详细计算。

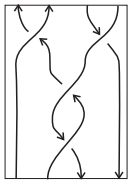
定理 2.7。 环面结 $(2,\ n)$ 的黑板反向平行 $\mathbb{K}_n$ K 满足

$$EP_{\mathbb{K}_n}(v,z) = v^{2n} + \sum_{i<2n,j} a_{i,j} v^i z^j.$$

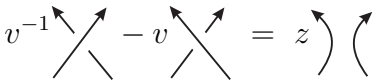
证明。 我们可以将 $\mathbb{K}_n$ 画成一个四股辫缠结的闭合，其中有两条向上的弦和两条向下的弦，如图所示。



将向上的两条弦分别置于左侧的顶部和底部会更方便，并将 $\mathbb{K}_n$ 写作缠结 T^n的闭合，其中

$T =$ 

我们采用如下形式的 skein 关系

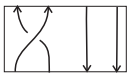
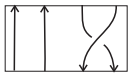
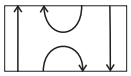
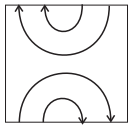


将 T^n 的闭合写成较简单缠结的闭合的线性组合。

记号 2。 我们称四股辫缠结 U 的取值为其闭合的扩展 Homfly 多项式，并将其记作 ev(U) $\in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。

注 2. 求值对切络是线性的，并且满足 skein 关系。它有点像迹函数，因为 ev(AB) =ev(BA)。

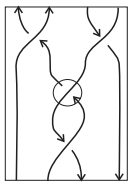
我们的第一步是将 T 展开为以下切络的线性组合

$\sigma_1 =$ , $\sigma_3 =$ , $h =$ , $H =$ ,

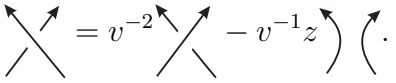
以及将它们上下叠放时得到的乘积。

注 3。 通过使用 skein 关系，我们实际上是在一个混合 Hecke 代数 $H_{2,2}(v, z)$ 的某个版本中进行运算，该代数由具有两条向上弦和两条向下弦的缠结张成 [12]。

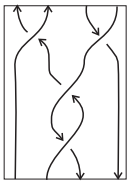
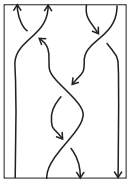
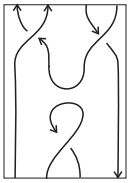
这里圈出的交叉位于

$T \quad =$ 

这是一个负交叉，因此我们可以在此交叉处使用纽结 skein 关系，形式如下



于是我们得到

$T =$  $=\ v^{-2}$  $-\ v^{-1}z$ 

$$= \ v^{-2}\sigma_1\sigma_3 - v^{-1}z\sigma_1\sigma_3 h$$
$$= \ C + C\tau,$$

此处为方便起见，我们令 $C = c_1c_3 = (v^{-1}\sigma_1)(v^{-1}\sigma_3)$，并令 $\tau = (-zv)h$。

于是 $T^n = (C + C\tau)^n$。现在 C 和 τ 不可交换，因此我们写成

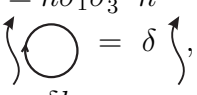
$$T^n = C^n + (C\tau)^n + \sum_{0<k<n} C^{r_1}\tau C^{r_2}\tau \cdots C^{r_k}\tau C^r, \tag{2.10}$$

其中 $r_i \geq 1$，$r \geq 0$ 和 $r + \sum r_i = n$。

我们可以估计这些项对 T^n 的求值的贡献。

- C^n 的求值只产生最高为 v 次 4 次的项。
- 大和式中在 τ 里权重为 k 的项，求值后得到的项的 v 次数至多为 $2k$。在不改变求值的情况下，我们可以假设 $r = 0$，因为可以将 C^r 从乘积末尾循环移到开头，并与 C^{r_1} 合并。命题 2.9 表明，这些含有 $k < n$ 的项对 T^n 的求值的贡献在 v 中的次数不超过 $2n - 2$。
- 最重要的贡献来自 $(C\tau)^n$ 的求值，它给出 v^{2n}；如命题 2.8 所述，不会有其他 v 次数为 $2n$ 或更大的项。

在进行详细计算之前，我们先指出一些有用的性质，这些性质可以通过图示快速验证。

- $\sigma_1 H = \sigma_3 H, \quad H\sigma_1 = H\sigma_3$
- $H = h\sigma_1\sigma_3^{-1}h$
-  $= \ \delta$ , 其中 $\delta = \frac{v^{-1}-v}{z}$
- $h^2 = \delta h$

- $h\sigma_1 h = h$

以下是一些可供我们使用的推论，它们可由代数方法推出： $c_1 = v^{-1}\sigma_1$， $c_3 = v^{-1}\sigma_3$， $C = c_1c_3$，$\tau = (-zv)h$。

- $c_1 = c_1^{-1} + z, \quad c_3 = c_3^{-1} + z,$ （纽结 skein 关系）
- $\tau c_1 c_3^{-1}\tau = (-zv)^2 h c_1 c_3^{-1} h = (zv)^2 H$
- $\tau^2 = (-zv)\delta\tau = (v^2 - 1)\tau$
- $\tau c_1 \tau = v^{-1}(-zv)^2 h\sigma_1 h = -z\tau$
- $\tau C\tau = \tau(c_1c_3^{-1} + zc_1)\tau = (zv)^2 H - z^2\tau$

命题 2.8。 $C\tau$的闭合的扩展多项式$(C\tau)^n$ 为 $v^{2n}+$，其中含有关于 v 的低次项，对于 $n > 1$，且当 $n = 1$ 时为 $1 - v^{-2}$。

命题的证明。当 $n = 1$ 时，我们有 $C\tau = (-zv^{-1})\sigma_1\sigma_3 h$。现在， $\sigma_1\sigma_3 h$ 闭合后成为一条平凡结曲线，因此 $C\tau$的求值为 $-zv^{-1}\delta = 1 - v^{-2}$。

对于 $n > 1$，记作

$$\begin{aligned}(C\tau)^n &= C(\tau C\tau)(C\tau)^{n-2}\\ &= (zv)^2 CH(C\tau)^{n-2} - z^2 C\tau(C\tau)^{n-2}\end{aligned}$$

第二项的求值关于 v 的次数至多为 $2n - 2$，这是由对 n 作归纳法得出的，因此次数高于 v 的单项式必定来自第一项。

现在 $Hh = \delta H$ 和 $H\sigma_1 h = H$。于是我们可以写成

$$\begin{aligned}HC\tau &= H(c_1c_3^{-1} + zc_1)\tau\\ &= H\tau + zHc_1\tau\\ &= (-zv)(\delta + zv^{-1})H\\ &= (v^2 - 1 - z^2)H.\end{aligned}$$

因此，第一项展开为

$$(zv)^2 CH(C\tau)^{n-2} = (zv)^2(v^2 - 1 - z^2)^{n-2}CH.$$

现在， $CH = c_1c_3^{-1}H + zc_1H = H + zv^{-1}\sigma_1 H$。 H的闭合是两条互不相交的平凡曲线，而 $\sigma_1 H$ 闭合为一条平凡结曲线，分别计算得 δ^2 和 δ。因此，第一项的计算结果为

$$(v^2 - 1 - z^2)^{n-2}(\delta^2(-zv)^2 - z^2(-zv\delta)) = (v^2 - 1 - z^2)^{n-1}(v^2 - 1).$$

这贡献了一项 v^{2n}，且不存在 v次数高于 $2n - 2$的其他项。 □

现在我们证明，当 $n \geq 3$ 时， T^n 在 (2.10) 中展开的其余项对 v 的贡献是次数为 $\leq 2n - 2$ 的项。

纽结 skein 关系的形式为 $c_1^2 = 1 + zc_1$，这使我们能够将 c_1^r 递归地写成 c_1 与恒等辫子的线性组合

$$c_1^r = a_r(z) + b_r(z)c_1$$

其系数仅为关于 z 的多项式。

然后，我们可以将 C^r 展开为 C、c_1、c_3 和恒等辫子的线性组合，其系数属于 $\mathbb{Z}[z]$。具体而言，

$$C^r = (a_r + b_r c_1)(a_r + b_r c_3) = a_r^2 + a_r b_r(c_1 + c_3) + b_r^2 C.$$

现在，$\sigma_1\sigma_3$ 闭合为两条平凡结曲线，其求值为 δ^2；σ_1 和 σ_3 闭合为三个平凡结，而恒等辫子闭合为四个平凡结。

于是，T^n 的展开式中的项 C^n 对求值贡献了 $(a_n\delta^2 + b_n v^{-1}\delta)^2$。这给出了 v 中次数至多为 4 的项。

为完成定理 2.7 的证明，我们证明式（2.10）中其余各项的求值关于 v 的次数至多为 $2n-2$。

这由

命题 2.9。求值

$$C^{r_1}\tau \cdots C^{r_i}\tau \cdots C^{r_k}\tau$$

其中 $r_i \geq 1$ 的次数不超过 $2k$ （关于 v）。

证明。对满足 $r_i > 1$的 r_i 的指数个数作归纳。

当所有 i 都满足 $r_i = 1$ 时，由命题 2.8 可得。

否则，我们可以循环乘积中的各项而不改变其求值，并将其排列成 $r_k = r > 1$。于是

$$\begin{aligned} \tau C^r \tau &= a_r^2\tau^2 + a_r b_r \tau(c_1 + c_3)\tau + b_r^2 \tau C \tau \\ &= a_r^2(v^2 - 1)\tau - 2z a_r b_r \tau + b_r^2 \tau C \tau. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} C^{r_1}\tau \cdots C^{r_k}\tau &= \left(a_r^2(v^2-1) - 2z a_r b_r\right) C^{r_1}\tau \cdots C^{r_{k-1}}\tau \\ &\quad + b_r^2\, C^{r_1}\tau \cdots C^{r_{k-1}}\tau C\tau \end{aligned}$$

这两个表达式都少了一项 C^{r_i}，因此根据我们的归纳法假设，$C^{r_1}\tau \cdots C^{r_{k-1}}\tau C\tau$的求值中的各项关于 v的次数至多为 $2k$，而 $C^{r_1}\tau \cdots C^{r_{k-1}}\tau$中的各项次数至多为 $2k-2$。在这种情况下，系数$a_r^2(v^2-1) - 2z a_r b_r$ 增加了 2，因此最终求值中的所有项关于 v的次数至多为 $2k$ 。这就证明了该命题。□

现在，(2, n) 环面结的反向黑板平行的求值在 (2.10) 中的所有项都已处理完毕，于是定理 2.7 随之成立。□

定理 2.6 的证明至此完成。现在我们可以证明定理 2.1，这正是本节的目标。

定理 *2.1* 的证明。在定理 2.6 中使用 Morton-Franks-Williams 界 (2.4)，立即得到 $\mathbb{K}_{w(D)+f}$ 的辫指数下界：

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_{w(D)+f}) \geq \begin{cases} v_+(D) - f, & \text{if } f < -v_-(D), \\ v_+(D) + v_-(D), & \text{if } -v_-(D) \leq f \leq v_+(D), \\ f + v_-(D), & \text{if } f > v_+(D). \end{cases}$$

将 f 替换为 $f - w(D)$，便得到

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f) \geq \begin{cases} v_+(D) - f + w(D), & \text{if } f - w(D) < -v_-(D), \\ v_+(D) + v_-(D), & \text{if } -v_-(D) \leq f - w(D) \leq v_+(D), \\ f - w(D) + v_-(D), & \text{if } f - w(D) > v_+(D). \end{cases}$$

现在 $v_+(D)+v_-(D) = c(D)+2$，因此令 $a(D) = w(D)-v_-(D)$ 和 $b(D) = w(D)+v_+(D)$ 后，这个下界变为

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f) \geq \begin{cases} c(D) + 2 + a(D) - f, & \text{if } f < a(D), \\ c(D) + 2, & \text{if } a(D) \leq f \leq b(D), \\ c(D) + 2 - b(D) + f, & \text{if } f > b(D). \end{cases}$$

这就是定理 2.1 中所述的公式 (2.1) □

3. The upper bound

本节将证明以下定理，它为 $\mathbb{K}_f$ 的辫指数给出了所需的上界。

定理 3.1. 若 $\mathbb{K}_f$ 是交替纽结 K 的反向平行链环，其框架为 f，且 D 是 K 的约化图，则有

$$\boldsymbol{b}(\mathbb{K}_f) \leq \begin{cases} c(D) + 2 + a(D) - f, & \text{if } f < a(D), \\ c(D) + 2, & \text{if } a(D) \leq f \leq b(D), \\ c(D) + 2 - b(D) + f, & \text{if } f > b(D). \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $a(D) = -v_-(D) + w(D)$ 且 $b(D) = v_+(D) + w(D)$。

证明。只需证明，可以构造出满足定理所给弦数的 $\mathbb{K}_f$ 辫表示。该构造依赖于使用 K 的弧表示。对于具有 α 条弧的 K 的弧表示，Nutt [15] 给出了 $\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)$ 的如下上界

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f) \leq \begin{cases} \alpha + a' - f, & \text{if } f < a', \\ \alpha, & \text{if } a' \leq f \leq b', \\ \alpha + f - b', & \text{if } f > b', \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 a'、 b' 是一些整数。我们需要针对本研究目的改进 (3.2)。首先作如下观察。在证明 [15, 定理 3.1], 的过程中，Nutt 为 $\mathbb{K}_f$ 构造了一个闭辫模板。该模板中有 $\alpha-1$ 个把手。在每个把手中放置一个交叉点，就会得到 $\mathbb{K}_f$ 的某种框架 f 下的闭辫表示，其中有 α 股。先从每个把手中都放置一个正交叉的模板开始，然后逐个改变正交叉的符号，直至所有交叉点都为负，由此得到一列 α 个闭辫表示 β_1、 β_2、...、 β_α （每个均有 α 股），它们分别表示某些框架 f_1、 f_2、...、 f_α 下的反向平行链环 $\mathbb{K}_{f_1}$、 $\mathbb{K}_{f_2}$、...、 $\mathbb{K}_{f_\alpha}$ ，并满足性质 $f_{j+1}=f_j-1$、 $j=1,\ ...\ \alpha-1$。结合 K 具有含 $c(D)+2$ 条弧的弧表示这一事实，便可将 (3.2) 改进为如下不等式。

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)\le\begin{cases} c(D)+2+a'-f, & \text{if } f<a',\\ c(D)+2, & \text{if } a'\le f\le b',\\ c(D)+2-b'+f, & \text{if } f>b', \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $b'=c(D)+2+a'$。

现在我们断言必有 $a'=a(D)$ 且 $b'=b(D)$。设 $a'>a(D)$。那么

$$b'=a'+c(D)+2>a(D)+c(D)+2=b(D).$$

因此，对于 $f=b'>b(D)$，我们有

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)\ge c(D)+2+b'-b(D)>c(D)+2$$

由 (3.1) 和 $\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)\le c(D)+2$ ，根据 (3.3)，这就产生了矛盾。另一方面，若$a'<a(D)$，则对于 $f=a'<a(D)$，我们有

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)\ge c(D)+2+a(D)-a'>c(D)+2$$

由 (3.1) 和 $\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)\le c(D)+2$ ，根据 (3.3)，这再次产生了矛盾。这表明$a'=a(D)$。类似地，我们可以证明 $b'=b(D)$。定理 3.1 的证明至此完成。□

本文最后给出以下几点说明。

注 4. 若希望在 $\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)$ 的表达式中使用 $\mathbb{K}_f$ 的链接数 ℓ ，而不是框架 f，则只需在 (1.1) 中用 $-\ell$ 替换 f ，即可轻松得到相应表达式。具体而言，(1.1) 变为

$$\mathbf{b}(\mathbb{K}_f)=\begin{cases} c(D)+2+a'(D)-\ell, & \text{if } \ell<a'(D),\\ c(D)+2, & \text{if } a'(D)\le\ell\le b'(D),\\ c(D)+2-b'(D)+\ell, & \text{if } \ell>b'(D), \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $a'(D)=-v_+(D)-w(D)$， $b'(D)=v_-(D)-w(D)$，而 $\ell=-f$ 是 $\mathbb{K}_f$的链接数。(2.1) 的相应表述与 [5]中给出的表述一致。需要指出的是， [5] 中推导出的下界公式，采用图论方法研究由 D的黑板反向平行副本构造的 D 和 $\mathbb{K}_f$ 的 Seifert 图。然而，这种方法仅适用于特殊的交替纽结，即那些存在约化交替图、且其中的交叉点全为正或全为负的交替纽结。

注 5。Birman 和 Menasco [2]曾研究一般问题：如何求具有某种反向弦模式的纽结 K 的卫星的辫指数。我们的反向平行副本与怀特海德双绕是这类卫星中最简单的例子。Nutt [15]借助 [2]，根据 K的弧指数给出辫指数的下界，以及我们所采用的上界。结合 Bae 和 Park [1]后，无需使用 Rudolph 同余式即可得到我们的结果。

[2] 给出的一些描述后来被发现并不完整，Ka Yi Ng [14] 补充了缺失情形的详细内容。Nutt 的下界论证需要借助 [2]中的分析，该分析表明，K 的弧指数是任何 K的反向弦卫星的辫指数下界。我们无法确认原论文中的弧指数分析在多大程度上适用于 Ng 补充的情形。

注 6。定理 1.1 使我们得以解决一个关于交替纽结绳长的长期猜想。该猜想指出，交替纽结 K 的绳长至少与其交叉数成正比。如今，这一结论可由 [4, 定理 31] 以及以下事实推出：对于某个 f，K 的绳长有一个下界，该下界是 $\mathbb{K}_f$ 绳长的某个（固定）常数倍。关于含有两个或更多分支的交替链环这一更一般的情形，仍有待解决。

References

[1] Y. Bae 和 C-Y. Park, 《链环弧指数的上界》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129 (2000), 491–500.[2] J. S. Birman 和 W. W. Menasco, 《链环补空间中本质环面的特殊位置》, Topology 33 (1994), 525–556.[3] P. R. Cromwell, 《纽结与链环的弧表示》, 《纽结理论》（1995 年华沙会议论文集）, V. F. R. Jones 等编, Banach 中心出版物 42 (1998), 57–64.[4] Y. Diao, 《辫指数对绳长的下界约束》, J. Knot Theory Ramif. 29 (4) (2020), 2050019.[5] Y. Diao, 《反平行链环作为打结带的边界》, 预印本, https://arxiv.org/pdf/2011. 06200.pdf, 2021.[6] Y. Diao、C. Ernst、G. Hetyei 和 P. Liu, 《交替链环辫指数的图示方法》, J. Knot Theory Ramif. 30(5) (2021), 2150035.[7] J. Franks 和 R. F. Williams, 《辫子与琼斯多项式》, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 97–108.[8] L. H. Kauffman, 《状态模型与琼斯多项式》, Topology 26(3) (1987), 395–407.[9] L. H. Kauffman, 《正则同痕的不变量》, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 417–471.[10] H. R. Morton, 《Seifert 圆与纽结多项式》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), 107–109.[11] H. R. Morton 和 E. Beltrami, 《弧指数与 Kauffman 多项式》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 123(1) (1998), 41–48.[12] R. J. Hadji 和 H. R. Morton, 《环带完整 Homfly skein 的一组基》, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 141 (2006), 81–100.[13] K. Murasugi, 《交替链环的辫指数》, Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), 237–260.[14] K. Y. Ng, 《链环补空间中的本质环面》, J. Knot Theory Ramif. 7(2) (1998), 205–216.[15] I. J. Nutt, 《在开书中嵌入纽结与链环 III：卫星链环的辫指数》, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 126 (1999), 77–98.[16] L. Rudolph, 《链环多项式之间的一个同余关系》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 107 (1990), 319–327.[17] M. B. Thistlethwaite, 《充分链环的 Kauffman 多项式》, Invent. Math. 93 (1988), 285–296.

♯ Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina Charlotte, Charlotte, NC 28223, USA, ♭ Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Peach Street, Liverpool. L69 7ZL, United Kingdom

电子邮箱地址：ydiao@uncc.edu, morton@liverpool.ac.uk