arXiv:2302.05652v2 [math.CO] 8 Feb 2024

关于距离幻方图的结构与谱性质

Himadri Mukherjee[1],Ravindra Pawar[1], 和 Tarkeshwar Singh[1]

[1]数学系，BITS Pilani K K Birla Goa Campus，果阿，印度。

摘要

如果存在一个双射 f，将图 $G=(V,E)$ 的顶点集映射到前 $|V(G)|$ 个自然数，使得对于每个顶点 v，其权 $\sum_{u\in N(v)} f(u)$ 都是常数，其中 $N(v)$ 是顶点 v 的开邻域，则称图 $G=(V,E)$ 为距离幻方图。本文引入了 p-距离幻方标记的概念，并建立了图成为距离幻方图的充要条件。此外，我们还根据连通正则图的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的特征值，给出了该图具有距离幻方性质的充要条件。进一步地，我们研究了距离幻方图的谱，重点考察了奇异距离幻方图。同时，我们证明了一个图的距离幻方标记数至多等于其自同构群的大小。

关键词：距离幻方标记、拉普拉斯矩阵、Moore-Penrose逆、 p-距离幻方标记。

2021年美国数学学会主题分类：05C78。

1 引言

本文中，假设 $G=(V,E)$ 表示一个具有 n 个顶点的简单无向有限图。设 $N(u)=\{v\in V : uv\in E\}$ 为顶点 $u\in V(G)$ 的邻域。顶点 v 的度记为 $deg(v)$，其定义为 $deg(v)=|N(v)|$。设 K_n 表示一个具有 n 个顶点的完全图。

双射函数 $f : V(G)\to\{1,2,\ldots,n\}$ 称为图 G 的顶点标号。如果对于所有 $v\in V$，和 $\sum_{u\in N(v)} f(u)$ 都是常数 k，那么顶点标号 f 称为距离幻方标记， k 称为幻常数。任何容许距离幻方标记的图 G 都称为距离幻方图。已知图的幻常数

himadrim@goa.bits-pilani.ac.in
p20200020@goa.bits-pilani.ac.in
tksingh@goa.bits-pilani.ac.in

G（若存在）是唯一的，即与距离幻方标记 $[2,12]$ 无关。由于图为距离幻方图的一般刻画尚不明确，研究者已研究许多图族 $[5]$ 是否存在距离幻方标记。尽管已有许多关于图存在距离幻方标记的必要条件 $[2,12,15]$,，但这一现象所需的充分条件仍未被发现。本文给出图成为距离幻方图的若干充要条件。

多重集是允许元素重复出现的集合。我们正式定义所关注的多重集。

定义 1.1。给定一个整数 $p \geq 1$，$\{1,2,\ldots,n\}_p$表示将所有数对 p 取模，并将其中的 0（如果有）替换为 p 后得到的多重集 。

例如，对于 $p = 4$和 $n = 9$，将元素 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 对 4 取模，并将 0 替换为 4，可得到多重集 $\{1,2,3,4,1,2,3,4,1\}_4$。注意，对于 $p > n$，$\{1,2,\ldots,n\}_p = \{1,2,\ldots,n\}$。

我们引入 p-距离幻方标记的概念，作为图的距离幻方标记的推广。

定义 1.2。设 G 是一个有 n 个顶点的图，给定一个整数 $p \geq 1$。考虑多重集 $T = \{1、2、.....、n\}_p$。如果存在一个双射 f，将顶点集 V 映射到一个称为 p-距离幻方标记的多重集 T，使得每个顶点 $x \in V$的权（记作 $w(x)$）都等于同一个元素μ（模 p），其中 $w(x) = \sum_{y \in N(x)} f(y)$，则称图 G为 p-距离幻方。

例如，考虑图 1 中的图 G，它有 11 个顶点。当 $p = 2$时，我们有多重集 $\{1、2、1、2、1、2、1、2、1、2、1\}_2$。接着，采用下图所示的标记，$G$是一个幻常数为 0 的 2-幻方。

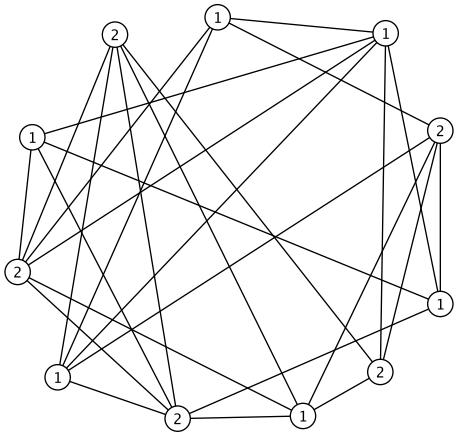


图 1：图的 2-距离幻方标记

p-距离幻方标记也构成一类无限的必要条件；当这些条件对所有 p 都成立时，它们也成为充分条件。对于具有 n 个顶点的图，我们通过将标号 $1,2,\ldots,n$ 对 p 取模来简化标记过程，从而构造一个允许元素重复的多重集，

然后按照通常方式计算模 p 的权重。这种方法减少了所用不同标签的数量，从而简化了计算。需要强调的是， p-距离幻方标记不同于群距离幻方标记或 Γ-距离幻方标记 [4], ，尤其是在 $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ 时。对于前者，放宽了不同标签的数量必须等于顶点数量这一要求。

众所周知，对于允许幻方标记的图，不存在子图规避准则（因为任意连通图都可以嵌入某个距离幻方图 [7]）。因此，幻方标记问题无法根据子图上的标记构造出幻方标记。可以说，距离幻方标记问题十分困难，在底层图的“构造”方面几乎没有施展空间，因为它不允许采用“剪切粘贴”类技巧。然而， p-距离幻方标记允许采用这类剪切粘贴技巧，应用中国剩余定理即可明白这一点（见定理 2.5）。通过存在 p-幻方标记来简化问题，并利用中国剩余定理将两个不同的此类标记拼接起来，为我们提供了一种构造性方法。这些可能性使我们有理由相信，要解决距离幻方标记问题，通过 p-距离幻方标记这一“构造”思路将会非常重要。当p的取值足够大时， p-距离幻方标记就成为距离幻方标记的情形；而当 $p = n$、p时，距离幻方标记就成为 $\mathbb{Z}_n$-距离幻方标记。

我们研究与距离幻方图相关的某些矩阵线性组合，以确立图为距离幻方图的充要条件。具体而言，我们证明，若图 G 具有距离幻方性质，且幻常数为 k，则 k 是与 G相关的某个线性变换的特征值。此外，连通的 r-正则图是距离幻方图，当且仅当 r^2 是 $L^2 + A^2$ 的特征值，其中 A 是 G的邻接矩阵，而 L 是其拉普拉斯矩阵。最后，我们证明了一个必要条件：若某个图是距离幻方图，则$AA^\dagger$ 是双随机矩阵，其中 A 是 G 的邻接矩阵，而 $A^\dagger$ 是 A的 Moore-Penrose逆。

我们根据图的自同构群，给出了距离幻方图的距离幻方标记数量的界。此外，我们给出了若干距离幻方图的例子，其中距离幻方标记的数量等于自同构群的基数。

如前所述，距离幻方图无法进行禁用子图刻画。然而，某些子图的存在是一个图成为距离幻方图的必要条件。利用以下定理可以很容易地证明这一点。

定理 1.1. *[7, 15]* 一个图 G 不是距离幻方图，若在 G 中存在顶点 x、 y ，使得 $|N(x) \triangle N(y)| = 1$ 或 2。

定理 1.2. 每个距离幻方图都包含 P_3 或 C_4 作为子图，或包含 P_3 作为诱导子图。

证明。 设 G 是一个距离幻方图。根据定理 1.1，对于G中的任意两个顶点 x和 y ，必有 $|N(x) \triangle N(y)| = 0$ 或 $|N(x) \triangle N(y)| \geq 3$。也就是说，对于任意两个顶点

在 G中，它们的邻域相同，或者它们的邻域的对称差至少为 3。考虑以下两种情况。

情形 *i.* 假设存在两个顶点 x, y，使得 $N(x) = N(y)$。若 $deg(x) = 1$ (因而 $deg(y) = 1$)，则存在唯一一个同时与 x 和 y 相邻的顶点 z。因此，由顶点 x, y 和 z 诱导出一条路径 P_3。

情形 ii. 假设对于 G 中任意两个顶点 x、y，都有 $N(x) \neq N(y)$。那么，对于 G 中任意一对顶点 x、y，有 $|N(x) \triangle N(y)| \geq 3$。也就是说，$|N(x) \cup N(y)| - |N(x) \cap N(y)| \geq 3$。注意，对于所有 x、$y \in V(G)$，$|N(x) \cap N(y)| = 0$ 是不可能的。否则，G 是若干个连通分量的不交并，而这并非距离幻方。因此，存在 G 中两个顶点x、y，使得 $|N(x) \cap N(y)| \geq 1$。令 $|N(x) \cap N(y)| = 1$。若 $N(x) \cap N(y) = \{z\}$，则 G 包含 P_3 作为子图。注意，P_3 不一定是由顶点x、y 和 z 诱导的子图。若 $|N(x) \cap N(y)| \geq 2$，则 G 包含一个 C_4(因而也包含 P_3) 作为子图。 ■

对于集合 $D \subset \mathbf{N}$，令 $ND(v) = \{u \in V(G) : d(u, v) \in D\}$，其中 $d(u, v)$ 表示顶点 u 与 v 之间的距离。设 W 为一个实数多重集。若存在一个双射 $g : V(G) \to W$，使得对于所有 $v \in V(G)$，$\sum_{u \in N(v)} g(u)$ 均为常数 [12]，则称图 G为（D, W）-顶点幻方图。在 [14], 中，Slater 证明了判定一个图是否为（D, W）-顶点幻方图的问题是 NP-完全的。此外，已知该问题在某些特殊图类中也是 NP-完全的，例如 3-正则图，其中标记集合是由正整数集合 [6]中的元素构成的多重集。这表明，当标记集合是由正整数集合中的元素构成的多重集时，距离幻方标记问题是 NP-完全的。

论文结构：

在第 2 节中，我们给出关于 p-距离幻方标记的结果，以及根据 p-距离幻方标记判断一个图是否为距离幻方图的充要条件。在第 3 节中，我们证明存在无穷多个以 0 为特征值的距离幻方图。此外，我们还根据图的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的特征值，推导出判断一个图是否为距离幻方图的条件。在第 4 节中，我们分析图的自同构群在其距离幻方标记集合上的作用，并估计该图的距离幻方标记数量的下界。

关于图论中未定义的术语和记号，请参阅 [16], ；关于距离幻方标记的综述，请参阅 [1, 5]。

2 p-距离幻方图

对于一个距离幻方图，设 G 为其阶为 n 的图，距离幻方标记为 f，幻常数为 k，则所有顶点的权重之和为 nk（见 [11, 15]）。即 $\sum_{x \in V(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G)} f(x) deg(x) = nk$。$G$ 中的最大可能度为 $n - 1$。因此，我们得到$nk \leq (n-1) \sum_{x \in V(G)} f(x) = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$。这意味着，$k \leq \frac{n^2-1}{2}$。

定理 2.1. 图 G 是距离幻方图，当且仅当对于无穷多个 p 的取值，它是 p-距离幻方的。

证明。设 G 是一个阶为 n 、幻常数为 k ，且具有距离幻方标记 f 的距离幻方图。设 S 是那些使 G 为 p-距离幻方的自然数 p 中的一个无限子集。任取 $p \in S$。定义 $f_p : V \to \{1, 2, \ldots, n\}^p$，使得 $f_p(v) = f(v) (\mathrm{mod}\ p)$。因此， V 中每个顶点 x 的权 $w_{f_p}(x)$ 都等于同一个数 $k_p \equiv k (\mathrm{mod}\ p)$。这证明了必要部分。反过来，设对于所有 $p \in S$，G 都是 p-距离幻方。集合 S 为无限集，保证存在 q ，使得 $q > (n^2-1)\,2$，且 G 诱导出一个 q-距离幻方标记。于是，对于某个 $k' \in \mathbb{Z}_q$ ，有 $w(x) = k'$ ，且 $k' \le (n^2-1)_2 < q$。因此， q-距离幻方标记就是 G 所需的距离幻方标记。这证明了 G 是一个距离幻方图。 ■

推论 2.1.1. 图 G 在有 n 个顶点时是距离幻方图，当且仅当它对所有 $p \ge 1$ 都是 p-距离幻方图。

推论 2.1.2. 图 G 在有 n 个顶点时是距离幻方图，当且仅当它对所有素数 p 都是 p-距离幻方图。

由定理 2.1 可知，当 p 足够大时， p-距离幻方标记与距离幻方标记一致。这表明 p-距离幻方标记是距离幻方标记的一种推广。此外，利用 $p = 2$ 还可以得到一些结构刻画。由于 $p = 2$ 是可能的最小值，我们将重点讨论 2-距离幻和标号。

设 G 是一个图，其顶点采用标记 f ，并使用多重集 $T = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}^p$ 中的数进行标记，其中 $p \ge 1$。设 $V_i = \{v \in V : f(v) \equiv i (\text{模}\ p)\}$，对所有 $i = 1, 2, \ldots\ldots, p$ 均成立。 G_i 表示由 V_i 诱导的 G 的子图。

回顾一下，图 G 是欧拉图，当且仅当它至多有一个非平凡连通分量，且其所有顶点的度都是偶数；图中的匹配是边集的一个独立子集。

定理 2.2。 设 G 是一个有 n 个顶点的图，并且允许存在2-距离幻方标记。若

1. 幻常数为0，则子图 G_1 是欧拉连通分量的并。

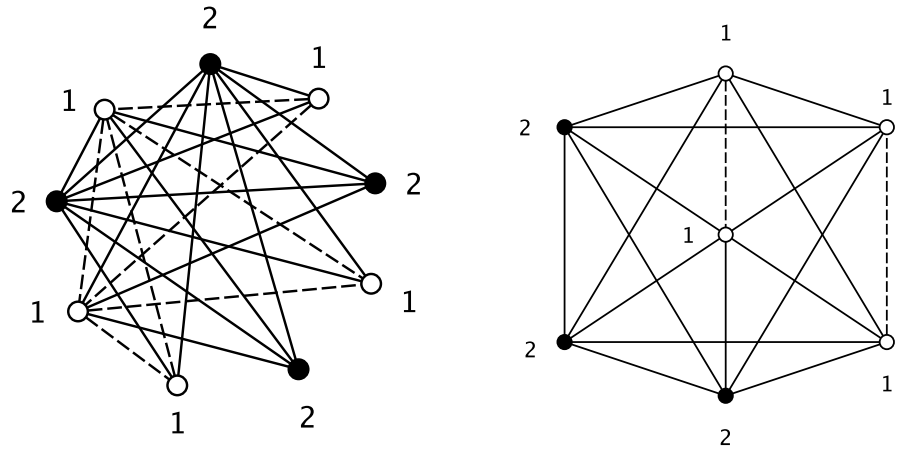
2. 幻常数为1 ，则子图 G_1 含有一个匹配。

证明。 假设图 G 是 2-距离幻方图。我们分以下两种情况证明该定理。

情况 i。设幻常数为 0。若 G 本身是欧拉图，则无需证明。假设 G 不是欧拉图。要使幻常数为 0， G_1 中的每个顶点在 V_1 中都必须有偶数个邻点，在 V_2 中则可以有任意个邻点。因此， G_1 中的每个顶点的度都是偶数。因此， G_1 是欧拉连通分量的并。

情况 ii。设幻常数为 1。设 $v \in V_1$。对于 $w(v) = 1$， v 必须与 V_1 中奇数个顶点相邻。现在，我们构造一个匹配，记为 M。设 $v_1 \in V_1$ 满足 $vv_1 \in E(G_1)$。我们将这条边 vv_1 加入匹配 M。重复这一过程；由于 G_1 是有限图，该过程必定会在有限步后结束。因此，我们得到一个极大匹配 M。这就证明了该定理。 ■

图2展示了两个图的2-距离幻方标记。图2(a)中的图的幻常数为0，由 V_1 诱导的子图 G_1 以虚线边和空心



(a) G_1 是欧拉的　　(b) G_1 带有匹配

图2：带有欧拉子图或匹配的2-幻方图。

顶点表示，是一个欧拉子图。图2(b)中的图的幻常数为1，并且 G_1包含一个以虚线边表示的匹配。请注意，在图2(b)中， G_1 中的匹配并非唯一，但它是一个完美匹配。然而，我们并非总能得到完美匹配。此外，在图2(b)中， G_1 中没有顶点的度为偶数。因此，不可能得到欧拉回路。

现在我们引入图的模正则性概念，并利用它从给定图的 p-距离幻方标记构造不同的p-距离幻方标记。

定义 2.1。如果 G 是 r-模 p 正则的，且 $deg(u) \equiv r$(模 p)，则称图 G 为 r-模 p 正则的，并记作 G是 r(模 p)-正则。

定理 2.3。若 G是 r(模 p)-正则的，且为一个有 n 个顶点、幻常数为 k的 p-距离幻方图，其 p-距离幻方标记为 f，则对每个正整数 i，映射 $f_i = f + i$也是一个 p-距离幻方标记，其幻常数为 $k' = (k + ir)$(模 n)。

证明。设 G 是 r（模 p）正则的 p-距离幻方图，其幻常数为 k，标记为 f，且设 $i \in \mathbb{Z}^+$。定义 p-距离幻方标记 g，使得 $g(u) = i + f(u)$。那么，对于$u \in V$，

$$\begin{aligned} w(u) &= \sum_{uv \in E} g(v) \\ &= \sum_{uv \in E} (i + f(v)) \\ &= i\ deg(u) + \sum_{uv \in E} f(v) \\ &\equiv (ir + k) (\mathrm{mod}\ p). \end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

定理 2.3 表明，a p-幻常数不一定是唯一的。然而，在某些情况下，可以获得如下定理所述的唯一性。（环 $\mathbb{Z}_n$ 配备模 n 意义下通常的加法和乘法。）

定理 2.4. 设 G 是一个有 n 个顶点的图。若图 G 是一个幻常数为 k 的 p-距离幻方，且 $^{n}_{(n+1)\ 2}$ 是环$\mathbb{Z}_p$中的单位，则k 是唯一的。

证明。设 G是一个有 n个顶点$\{x_1, x_2, \ldots, x_n$的图，它有两个 p-距离幻方标记f 和 g ，对应的幻常数分别为 k 和 l。令1为所有n个分量均为1的列向量。设 A是 G的邻接矩阵，并令 $X = (f(x_1) \ldots, f(x_n))^\top$和$Y = (g(x_1) \ldots, g(x_n))^\top$。由于 f和 g是幻常数分别为k 和 l的距离幻方标记，因此 $AX = k\mathbb{1}$ 和 $AY = l\mathbb{1}$。由于 $X^\top AY$是 1×1 矩阵，我们有$X^\top AY = (X^\top AY)^\top = Y^\top AX$。于是

$$\begin{aligned} & lX^\top \mathbb{1} = kY^\top \mathbb{1} \\ \Longrightarrow\ & l(1 + 2 + \cdots + n) = k(1 + 2 + \cdots + n). \end{aligned}$$

由于 $(1 + 2 + \cdots + n)$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 中的单位，根据消去律可得 $l = k$。 ■

推论 2.4.1. 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 的2-距离幻和图，其中 $n \equiv 1$ 或$2 (\mathrm{mod}\ 4)$，且幻常数为 k，则 k 是唯一的。

证明。 设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 的 2-距离幻和图。假设 $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$，即 $n = 4j + 1$，其中 j 为某个整数。则 $^{n}_{(n+1)\ 2} = (4j + 1)(2j + 1)$，它是 $\mathbb{Z}_2$ 中的单位。类似地，当 $n = 4j + 2$ 时，其中 j 为某个整数，则 $^{n}_{(n+1)\ 2} = (2j + 1)(4j + 3)$，它同样是 $\mathbb{Z}_2$ 中的单位。证明完毕。 ■

定理 2.5. 如果 G 是一个具有 n 个顶点的 p-距离幻方图，同时也是 q-距离幻方图，其中 p 和 q 是满足 $pq \leq n$的某些互素整数，那么 G 是 pq-距离幻方图。

证明。 设 G是一个顶点集为 $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ 的图，对于某些满足 $pq \leq n$的互素整数 p和 q，该图既是 p-距离幻方图，也是q-距离幻方图。设 f_p， f_q是p-距离幻方标记和 q-距离幻方标记， k_p， k_q 是相应的幻和常数。对每个 $1 \leq i \leq n$，令 $f_p(x_i) \equiv a_i (\mathrm{mod}\ p)$，且 $f_q(x_i) \equiv b_i (\mathrm{mod}\ q)$。由于 p 和 q 互素，根据中国剩余定理，同余方程组

$$\begin{aligned} x &\equiv a_i (\mathrm{mod}\ p) \\ x &\equiv b_i (\mathrm{mod}\ q) \end{aligned}$$

对于每个 $i (1 \leq i \leq n)$，方程有唯一解 y_i(模 pq)。现在，我们通过 $f_{pq}(x_i) = y_i$ 定义新的标记 f_{pq}，对于每个 $i (1 \leq i \leq n)$。标号 y_is 的唯一性保证 f_{pq} 是一个双射。现在，我们计算顶点 $x_i \in V$ 在 f_{pq} 下的权。

$$\begin{aligned} w(x_i) &= \sum_{x_j \in N(x_i)} f_{pq}(x_j) \\ &\equiv \begin{cases} k_p (\mathrm{mod}\ p) \\ k_q (\mathrm{mod}\ q). \end{cases} \end{aligned}$$

对于每个 $1 \le i \le n$，我们再次求解同余方程组

$$\begin{aligned} w(x_i) &\equiv k_p (\mathrm{mod}\ p) \\ w(x_i) &\equiv k_q (\mathrm{mod}\ q) \end{aligned} \tag{1}$$

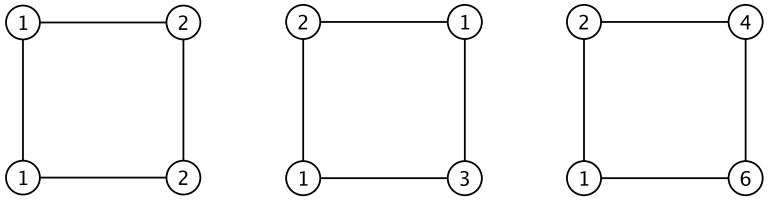
根据中国剩余定理，我们得出同余方程组 (1) 有唯一解，记为 $k_{pq}(\mathrm{mod}\ pq)$。这证明 f_{pq} 是所需的标记，且 G 是一个 pq-距离幻方图。

■

给定一个具有 n 个顶点的图 G，若它对于某些互素整数 p 和 q 同时是 p-距离幻方图和 q-距离幻方图，且满足 $pq \le n$，那么根据定理 2.5，我们可以为 G找到一个 pq-距离幻方标记。当 $pq > n$时，我们不一定总能得到一个 pq-距离幻方图。例如，考虑一个圈 $C_4 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$。通过 $f_2(v_1) = 1$, $f_2(v_2) = 2$, $f_2(v_3) = 2$, $f_2(v_4) = 1$ 定义C_4 的 2-幻方标记，并通过 $f_3(v_1) = 2$,$f_3(v_2) = 1$, $f_3(v_3) = 3$, $f_3(v_4) = 1$ 定义一个 3-幻方标记，如图3所示。在图3中，图 G_1 展示了 C_4 的 2-距离幻方标记，其幻常数为 1；图 G_2 展示了同一图 C_4的一个 3-距离幻方标记，其幻常数为 2。对于每个 $i(1 \le i \le 4)$，我们求解方程组

$$\begin{aligned} x &\equiv f_2(x_i) (\mathrm{mod}\ 2) \\ x &\equiv f_3(x_i) (\mathrm{mod}\ 3) \end{aligned} \tag{2}$$

利用中国剩余定理。对于每个 $i(1 \le i \le 4)$，方程组 (2) 的唯一解分别为 2、4、6、1。我们利用这些解为 C_4的顶点标号： $f_6(v_1) = 2$,$f_6(v_2) = 4$, $f_6(v_3) = 6$, $f_6(v_4) = 1$，如图 G_3 中的图3所示。注意， f_6 不是从 $V(C_4)$ 到 {1、2、3、4}$_6$的映射。因此，在这种情况下，我们无法利用给定的 2-距离幻方图和 3-距离幻方图得到 6-距离幻方图。这与定理 2.5 并不矛盾，因为 $(p = 2) \times (q = 3) = 6 > 4 = n$。因此，在定理 2.5 的陈述中，不能忽略条件 $pq < n$。然而，在某些情况下，利用上述定理所述的中国剩余定理得到的每个标号 $y(\mathrm{mod}\ pq)$ 可能都满足 $1 \le y \le n$。我们称这种标记为相容的 标记。在这种情况下，该标记确实是一个 pq-距离幻方标记。我们陈述如下命题



(a) G_1　　(b) G_2　　(c) G_3

图3： p-距离幻方标记的 C_4

略去证明，因为其证明与定理 2.5 十分相似。

命题 2.1. 如果图 G 是一个具有 n 个顶点的 G 距离幻方图，同时也是一个 q 距离幻方图，其中 p 和 q 是满足 $pq > n$ 的某些互素整数，并且按照定理 *2.5* 的证明中所述得到的新标记是一致的，那么图 G 就是 pq 距离幻方图。

3 与距离幻方图相关的线性算子的谱

对于给定的图 G，设 μ_1、μ_2、……、μ_t 是其邻接矩阵 A 的不同特征值。若 μ 是图 G 的邻接矩阵 A 的特征值，则称 μ 为图 G 的特征值。若 0 是图 G 的特征值，则称该图为奇异图，否则称其为非奇异图。我们总是按非递增顺序 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_t$ 排列特征值。最大的特征值，即 μ_1，称为图 G 的指标。若特征值的代数重数为 1，则称其为单特征值。由于图 G 的邻接矩阵 A 是实对称矩阵，因此它可对角化。所以，其特征向量构成 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基。令 $E(\mu_i)$ 表示对应于特征值 μ_i 的特征子空间。对于 $a \in \in \mathbf{R}^n$，令 $P_i(a) = \sum_b a, bb$，其中 b 是对应于特征值 μ_i 的标准正交特征向量，且，是 $\mathbf{R}^n$ 上的标准内积。令 1 为一个所有分量均为 1 的列向量。图 G 的主角记为 β_i，定义为 $\beta_i = \frac{\|P_i \mathbb{1}\|}{\sqrt{n}}$。令 J_n 为═个所有元素均为 1 的 $n \times n$ 矩阵。

设 G 是一个具有 n 个顶点 v_1、v_2、……、v_n 的距离幻方图，其距离幻方标记为 f，幻常数为 k。令 $x = (f(x_1)\ f(x_2)\ldots\ldots,\ f(x_n))^\top$。定义变换 $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，使得 $T(e_i) = e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n$，其中 e_1、e_2、……、e_n 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基。于是，对于某个适当的置换矩阵 P，有 $x = PT\mathbb{1}$。本节中我们始终采用这些记号。

下面的定理根据线性变换 APT 的特征值，给出了图成为距离幻方图的充要条件。

定理 3.1. 图 G 是距离幻方图，当且仅当对于某个适当的置换矩阵 P，$\mathbb{1}$ 是 APT 对应于特征值 k 的特征向量。

证明. 设 G 是距离幻方图。于是，我们有 $Ax = k\mathbb{1}$。选取 P 使得$PT\mathbb{1} = x$。这便得到所需的 $APT\mathbb{1} = Ax = k\mathbb{1}$。反过来，假设 APT 有一个特征值 k，其对应的特征向量为 1。于是 $APT\mathbb{1} = k\mathbb{1}$。取 $x = PT\mathbb{1}$，得到$Ax = k\mathbb{1}$。这证明了 G 是距离幻方图。 ■

已知奇数正则图不可能是距离幻方图 [11]。在 2-正则图中，只有 C_4 的不交并是距离幻方图 [11]。图5 展示了 C_4 的距离幻方标记。Miklavič 等人 [9, 10] 给出了 4-正则图和 6-正则图的刻画。他们根据图的谱证明了以下一般性结果，该结果给出了偶正则图成为距离幻方图的充要条件。

引理3.2。*[9]* 设 G 是一个阶为 n的偶正则图。那么，当且仅当0 是 G 的一个特征值，并且存在一个关于特征值0的特征向量 w，使得将其各项进行某种排列后得到等差数列时，G 才是距离幻方

$$\frac{1-n}{2}, \frac{3-n}{2}, \frac{5-n}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

特别地，如果 G 是距离幻方，则0 是 G的一个特征值，并且存在一个相应的特征向量，其所有项均两两不同。

设G是一个顶点集为$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$的图。令$D = diag(deg(v_1)\ deg(v_2)\ldots, deg(v_n))$为 G 的度对角矩阵。图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A$。现在，我们用矩阵 $L^2 + A^2$的特征值给出连通偶正则图为距离幻方图的另一个简单充要条件。

定理3.3. 设 G 是一个连通 r正则图，其中 r 为偶数。当且仅当$(L^2 + A^2)x = r^2x$时，图 G 是距离幻方图，且其距离幻方标记为 f，其中 $x = (f(x_1) \ldots, f(x_n))^\top$。

证明。设 G 是一个连通 r正则距离幻方图，其距离幻方标记为 f，幻常数为 k。则 $Ax = k\mathbb{1}$。我们知道 $L = D - A$。因此，

$$L^2 + A^2 = D^2 - 2rA + 2A^2 = r^2I - 2rA + 2A^2. \tag{3}$$

Then

$$\begin{aligned}(L^2 + A^2)x &= (r^2I - 2rA + 2A^2)x \\ &= r^2x - 2rk\mathbb{1} + 2rk\mathbb{1} \\ &= r^2x.\end{aligned}$$

反过来，假设 $(L^2 + A^2)x = r^2x$。然后，按照公式（3）展开左边并消去各项，可得 $A^2x = rAx$，即 $(A - rI)Ax = 0$。现在，由于 G的正则性， $A - rI$中每一行的元素之和均为 0；又由于G的连通性， $r - 1$是 $A - rI$的一个重数为 1 的特征值。因此，$\{1\}$构成了 $E(r - 1)$ 的一组基。注意， Ax 中的每个元素都是整数。因此，对某个正整数 k，必有 $Ax = k\mathbb{1}$。因此， G 是一个距离幻方图。 ■

现在我们证明存在无穷多个奇异距离幻图。回顾一下，图 G的锥覆盖 （记作 $K_1 \bigtriangledown G$）是通过向G 添加一个顶点，并将其与 G的所有其他顶点相连而得到的图。Kamatchi [8] 刻画了满足 $\Delta(G) = n - 1$的距离幻方图 G。

定理3.4. *[8]* 设 G 是一个阶为 n 且满足 $\Delta = n - 1$的任意图。那么， G 是距离幻方图，当且仅当 n 为奇数，且 G 同构于 $K_{n-1} - M$的锥覆盖 $K_1 \bigtriangledown (K_{n-1} - M)$，其中 M是 K_{n-1}中的一个完美匹配。

定理3.5. 对于任意正整数 $n \geq 3$，存在一个阶为 n的奇异距离幻方图。

证明. 设 G 是一个阶为 n的图。
情形 i：设 $n \geq 4$ 为偶数，并令 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$。不妨设顶点 i 的标号为 i。对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 $N(i) = V(G) - \{i, n + 1 - i\}$。因此，对于所有 $i = 1, 2, \ldots, n$，有 $w(i) = {}^{n}_{(n+1)\,2}\ {}^{-}_{-}(n + 1)$。由此可得， G 是距离幻方图。此外，根据构造显然有 $N(1) = N(n)$。因此，与 1 和 n 对应的行在

G 的邻接矩阵相同。这证明 G 必为奇异矩阵。

情形 ii：设 $n \geq 3$ 为奇数。对于 $n = 3$，我们知道 P_3 是距离幻方图（见图5），且它是一个奇异图。假设 $n > 3$。那么存在一个距离幻方图 $G = K_{n-1} - M + K_1$，其中 M 是 K_{n-1}中的完美匹配。如果 $uv \in M$，那么 $N_{K_{n-1}}(u) = N_{K_{n-1}}(v)$。因此，$N_G(u) = N_G(v)$。这就证明了 G 是奇异的。

■

如果一个图的所有特征值都是整数，则称其为整数谱；否则称其为非整数谱。我们很快将证明，对于奇数 n， $K_{n-1} - M$ 的锥覆盖不是整数谱。

我们将计算这类图的特征多项式。根据特征值和 G的主角， G 的特征多项式与其锥覆盖的特征多项式之间存在如下关系：

定理 3.6. *[3]* G 的锥覆盖的特征多项式为 $P_{K_1 \triangledown G}(y) = P_G(y)\left(y - \sum_{i=1}^{k} \frac{n\beta_i^2}{y-\mu_i}\right)$，其中 μ_i和 β_j 分别是 G 的特征值和主角。

因此，为了计算 $K_1 \triangledown (K_{n-1} - M)$ 的特征多项式，我们需要了解 $K_{n-1} - M$ 的谱和主角。

命题 3.1。 设 $n \geq 4$ 为偶数， K_n 为具有 n 个顶点1、2、.....、n 的完全图。设 M 是 K_n 中的一个完美匹配，使得若 $e \in M$，则 $e = (i、\ i + \frac{n}{2})$。则

$$\operatorname{spec}(K_n - M) = \begin{pmatrix} n-2 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

证明。 在完全图 $K_n\ (n \geq 4)$ 中删除一个最大匹配不会使图不连通。因此， $G = K_n - M$ 是一个连通的（$n-2$）-正则图。因此，（$n-2$）是 G 的一个单特征值。此外，在 G 中，$N(i) = N(i + \frac{n}{2})$。因此，邻接矩阵中的相应行完全相同，从而特征值 0 的重数为 $\frac{n}{2}$。基 E(0) 中的所有 $\frac{n}{2}$ 特征向量均由 v_j 给出，其中对于每个 $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$，向量 v_j 的 i 个坐标为

$$(v_j)_i = \begin{cases} -1 & \text{if } i = j \\ 1 & \text{if } i = j + \frac{n}{2} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个 $2 \leq j \leq \binom{n}{2}$，考虑向量 w_j，其第 i 个坐标为

$$(w_j)_i = \begin{cases} -1 & \text{if } i = 1, \frac{n}{2} + 1 \\ 1 & \text{if } i = j, \frac{n}{2} + j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易验证，这些 $\frac{n}{2}-1$ 向量 w_j 线性无关，且是对应于特征值 -2的特征向量。因此， -2 的重数至少为 $\frac{n}{2}-1$。我们已经找到 G的另外 $\frac{n}{2}+1$ 个特征值。因此，特征值 -2 的代数重数必为 $\frac{n}{2} - 1$。证明至此完成。

■

根据前面讨论的图 $K_n - M$ 的谱，我们可以写出其特征多项式： $P_{K_n-M}(y) = y^{\frac{n}{2}}(y+2)^{\frac{n}{2}-1}(y-n+2)$。现在我们来计算 $\bar{K_n} - M$的主角 β_i。

设 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbf{R}^n$。回顾一下，为了计算 $P_i(y)$，我们取自 $\mathbf{E}(\mu_i)$ 的标准正交向量。对应于特征值 $(n-2)$ 的唯一特征向量是 $\mathbf{1}$。因此，

$$\begin{aligned} P_1(y) &= \left\langle y, \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{n}} \right\rangle \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n, y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \ldots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \end{aligned}$$

因此， P_1 关于 $\mathbf{R}^n$ 的标准基的矩阵表示为矩阵 J_n。因此， $\|P_1\mathbb{1}\| = 1$，从而 $\beta_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$。现在，对于任意 $v \in \mathbf{E}(0)$， $\|v\| = \sqrt{2}$。

$$\begin{aligned} P_2(y) &= \frac{1}{2}\sum_{v\in\mathcal{E}(0)} \langle y, v\rangle v \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (-y_1 + y_{j+\frac{n}{2}})v \\ &= \frac{1}{2}(y_1 - y_{1+\frac{n}{2}}, y_2 - y_{2+\frac{n}{2}}, \ldots, y_{\frac{n}{2}} - y_{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}, -y_1 + y_{1+\frac{n}{2}}, -y_2 + y_{2+\frac{n}{2}}, \ldots, -y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}). \end{aligned}$$

注意， P_2 关于 $\mathbf{R}^n$ 的标准基的矩阵表示中每一行的元素之和均为 0。因此 $\|P_2\mathbb{1}\| = 0$，从而 $\beta_2 = 0$。对于任意 $v \in \mathbf{E}(-2)$， $\|v\| = \frac{1}{2}$。

$$\begin{aligned} P_3(y) &= \frac{1}{4}\sum_{w\in\mathcal{E}(-2)} \langle y, w\rangle w \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{\frac{n}{2}} (-y_1 + y_j - y_{1+\frac{n}{2}} + y_{j+\frac{n}{2}})w_j = w, \end{aligned}$$

其中， w 的第 i 个坐标为

$$w = \begin{cases} (\frac{n}{2}-1)y_1 - y_2 - \cdots - y_{\frac{n}{2}} + (\frac{n}{2}-1)y_{\frac{n}{2}+1} - y_{\frac{n}{2}+2} - \cdots - y_n & \text{if } i = 1, \frac{n}{2}+1 \\ -y_1 + y_i - y_{\frac{n}{2}+1} + y_{\frac{n}{2}+i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

再次注意到， P_3 相对于 $\mathbf{R}^n$ 的标准基的矩阵表示中，每一行元素之和均为 0。因此 $\|P_3\mathbb{1}\| = 0$，进而 $\beta_3 = 0$。

若 $n = 3$，则 $K_1 \bigtriangledown (K_{n-1} - M) \cong P_3$ 且

$$\operatorname{spec}(P_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此， P_3 不是整数谱。设 $n \geq 5$ 为奇整数。由定理 3.6 可得，

$$P_{K_1\bigtriangledown(K_n-M)}(y) = P_{K_n-M}(y)\left(y - \sum_{i=1}^{k} \frac{n\beta_i^2}{y-\mu_i}\right). \tag{4}$$

由命题 3.1，$K_m - M$的不同特征值（其中 $m = n-1$）为 $m-2$、0 和 -2。此外，$K_m - M$的主角为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$、$\beta_2 = \beta_3 = 0$和 $P_{K_m - M}(y) = y^{\frac{m}{2}}(y+2)^{\frac{m}{2}-1}(y-m+2)$。因此，方程（4）变为

$$P_{K_1 \triangledown (K_m - M)}(y) = y^{\frac{m}{2}}(y+2)^{\frac{m}{2}-1}(y-m+2)\left(y - \frac{m\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2}{y-(m-2)}\right)$$
$$= y^{\frac{m}{2}}(y+2)^{\frac{m}{2}-1}(y^2 + (2-m)y - 1).$$

命题 3.2. 若 G 是一个阶为 n 且满足 $\Delta(G) = n-1$ 的距离幻方图，则 G 不是整数谱。

证明。我们知道，若 G 是一个阶为 n 且满足 $\Delta(G) = n-1$ 的距离幻方图，则 n 为奇数，并且 G 与 $K_m - M$ 的锥覆盖同构，其中 $m = n-1$，其特征多项式为 $P_{K_1 \triangledown (K_m - M)}(y) = y^{\frac{m}{2}}(y+2)^{\frac{m}{2}-1}(y^2 + (2-m)y - 1)$。考虑因子 $y^{\frac{m}{2}}(y+2)^{\frac{m}{2}-1}$。若 $n = 3$，我们知道 P_3 不是整数谱，因为 $\sqrt{2}$ 是其特征值。假设 $n \geq 5$。由于 $c = m-2 \geq 2$ 为偶数，我们将多项式 $y^2 - (m-2)y - 1$ 改写为 $y^2 - cy - 1$。该多项式的根为：$y = \frac{c \pm \sqrt{c^2+1}}{2}$。同样，由于 c 为偶数，我们令 $c = 2d$。于是根变为 $y = d \pm \sqrt{4d^2+1}$。但是，$4d^2+1$ 不是完全平方数。若对某个整数 a 有 $4d^2 + 1 = a^2$，则可得 $(2d-a)(2d+a) = 1$，这是不可能的，因为 a 和 d 都是整数。因此，G 的锥覆盖具有一个非整数特征值，证毕。 ■

在同构意义下，阶不超过 10 [13,17]的距离幻方图只有 23 个。可以手动验证，在任何阶不超过 10 的距离幻方图 G 中，都存在顶点 u, v使得 $N(u) = N(v)$。因此，图 G中与顶点 u 和 v 对应的邻接矩阵行完全相同。由此可知，这样的图 G 必定是奇异的。因此，所有阶不超过 10 的距离幻方图都是奇异的。最小阶的非奇异距离幻方图（有 11 个顶点）如图 4 所示。此外，正如前文所述，对于每个 $n \geq 3$，至少存在一个阶为 n 的奇异距离幻方图。这些观察使我们将注意力转向距离幻方图邻接矩阵的广义逆。

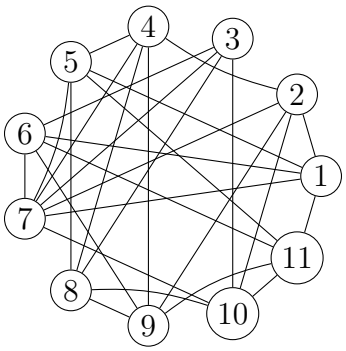


图 4：最小阶非奇异距离幻方图

若矩阵 $B^{\dagger} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 满足 $BB^{\dagger}B = B$、 $B^{\dagger}BB^{\dagger} = B^{\dagger}$、$(BB^{\dagger})^{*} = BB^{\dagger}$ 和$(B^{\dagger}B)^{*} = B^{\dagger}B$, 则称其为矩阵 $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 的$Moore\text{-}Penrose$ （或广义）逆。我们根据邻接矩阵的广义逆, 给出图为距离幻方图的另一个必要条件。回顾一下，双随机矩阵是指每一行和每一列的元素之和均为 1 的矩阵。

定理3.7。 如果 G是距离幻方图，那么 AA^{t} 是双随机矩阵，其中 A^{t} 是 G的邻接矩阵 A 的广义逆。

证明。设 G 是幻常数为 k的距离幻方图。那么 $Ax = k\mathbb{1}$.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow AA^{\dagger}Ax = kAA^{\dagger}\mathbb{1}\\
&\Longrightarrow Ax = kAA^{\dagger}\mathbb{1}\\
&\Longrightarrow k\mathbb{1} = kAA^{\dagger}\mathbb{1}\\
&\Longrightarrow \mathbb{1} = AA^{\dagger}\mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

这表明 $AA^{\dagger}$ 的每一行之和都为**1**。由于 $AA^{\dagger}$ 是对称的，各列之和也为**1**。由此定理得证。 ■

上述定理的逆命题并不成立。例如，取$G = K_{1,\,3}$，并令 A 为其邻接矩阵。那么

$$
A^{\dagger}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{pmatrix}
\qquad
AA^{\dagger}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{pmatrix}
$$

且**1**是 $AA^{\dagger}$ 对应于特征值**1**的特征向量，但 G 不是距离幻方图。

4 图的自同构群对其标号集合的作用

设 G 是一个有 n 个顶点的图，令 $Aut(G)$ 为 G 的自同构群。设 $\mathbf{M}(G) = \{f : f$ 是 G 的距离幻方标记$\}$ 为 G 的距离幻方标记集合。

定理 4.1. 距离幻方图 G 至少有 $|Aut(G)|$ 个距离幻方标记。

证明。 设 G 是一个具有 $V(G) = \{1,2,\ldots,n\}$ 的图，并令 $\mathbf{M}$ 为图 G 的所有距离幻方标记的集合。定义 $Aut(G)$ 在 $\mathbf{M}$ 上的作用为 $(\sigma \cdot f)(i) = f\sigma^{-1}(i)$，对所有 $f \in \mathbf{M}$ 以及所有 $i \in V$ 均成立。首先，我们将证明对于所有 f 和所有 σ，均有 $\sigma \cdot f \in \mathbf{M}$。对于 $v \in V$，令 $N(v) = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$。由于 $f \in \mathbf{M}$，故 $w_f(v) = k$ ；又由于 $\sigma \in Aut(G)$， $u_i \in N(v)$ 蕴含

$\sigma^{-1}(u_i) \in N(\sigma^{-1}(v))$.

$$\begin{aligned} w_{\sigma\cdot f}(v) &= \sum_{u\in N(v)} \sigma\cdot f(u) \\ &= \sum_{u\in N(v)} f\sigma^{-1}(u) \\ &= \sum_{x\in N(\sigma^{-1}(v))} f(x) \\ &= k. \end{aligned}$$

现在很容易验证，在上述作用下， $Aut(G)$作用于 M。对于 $f \in$M，令 S$_f$ 表示 f 的稳定子，O$_f$ 表示 f的轨道。设 $\sigma\cdot f = f$，其中$\sigma \in Aut(G)$。那么 $f\sigma^{-1} = f$，即对所有 $x \in V$，$f\sigma^{-1}(x) = f(x)$。由于 f和 σ都是双射函数，我们得出 $\sigma \equiv 1$是恒等自同构。这证明了|S$_f$| = 1。因此，根据轨道-稳定子定理， $|Aut(G)| = |O_f|$。由于 M 中元素的轨道将 M 划分为若干部分，且每部分的大小均为 $|Aut(G)|$，所以 $|Aut(G)|$ 整除 |M|。证明完毕。

■

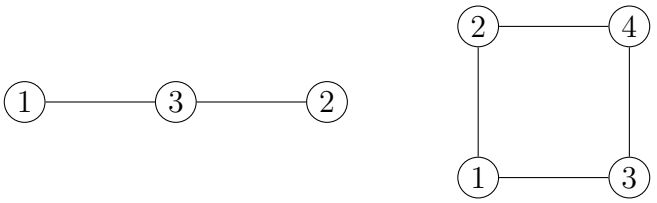
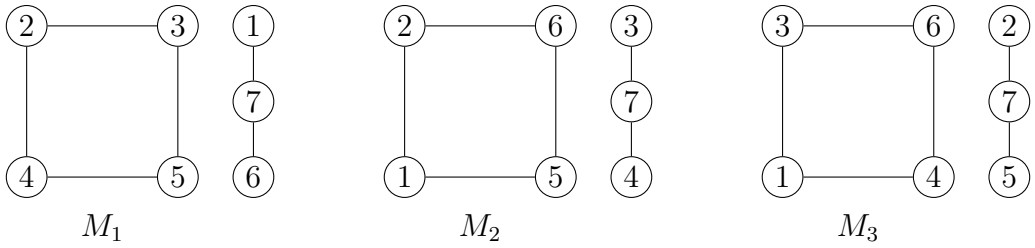


图5：图 P_3 和 C_4的距离幻方标记

对于给定的距离幻方图 G，我们知道 $|Aut(G)| \le$ |M|。为简便起见，对于给定的图 G，我们将其顶点标号记作($f(v_1)$ $f(v_2)\ldots, f(v_n)$)，或在不会引起混淆时简记为($f(v_1)f(v_2)$ $\ldots f$ (v_n))。现在，我们给出一些例子，说明对于若干图，所得到的距离幻方标记集 M 的大小下界是紧的。距离幻方图 P_3 和 C_4达到等号。图5展示了 P_3 和 C_4 的距离幻方标记，其幻常数分别为 3 和 5。

回忆一下， $|Aut(P_3)| = 2$。令 $P_3 : v_1, v_2, v_3$ 为 v_1, v_3-路。容易验证，M(P_3) = {(132), (231)} 是 P_3 的全部距离幻方标记。因此， $|Aut(P_3)| = |M(P_3)|$。对于一个圈 $C_4 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$；M($C_4$) ={(1243),(3124), (4312), (2431), (2134), (1342), (3421), (4213)}，且 $|Aut(C_4)| = 8$。因此，$|Aut(C_4)| = |M(C_4)|$。

对于距离幻方图 $P_3 \cup C_4$，该不等式是严格的。我们知道 $|Aut(P_3 \cup C_4)| = 16$。利用图6所示的每种距离幻方标号方案 M_1、M_2 和 M_3，通过对 $P_3 \cup C_4$ 的自同构，可以得到 16 种不同的距离幻方标号。因此， $P_3 \cup C_4$ 至少有 48 种不同的距离幻方标号。



$P_3 \cup C_4$的各种距离幻方标记方案（图6）

5 结论与进一步研究方向

“距离幻方图”这一类图的图论性质和谱尚未得到探索。本文研究了这一类图的若干图论性质。我们提出以下问题：

问题 1. 给定一个并非距离幻方图的图 G，刻画所有满足 G 不是 p-距离幻方图的素数 —— $p \leq {}^{n^2-1}_{2}$。

问题 2. 根据与图相关的矩阵的谱来刻画距离幻方图。

问题 3. 确定奇异距离幻方图和整数距离幻方图的类别。

问题 4。 距离幻方图的刻画 G 使得 $|Aut(G)| = |M(G)|$.

定理 4.1 中给出的类似界也适用于图标号的其他变体：例如，反幻方标号（若图 G 在边标号 $f : E(G) \to \{1, 2, ..., |E(G)|\}$ 下的所有顶点权互不相同，则称该图为反幻方图。更多详情请参见 [5]）。

问题 5. 刻画阶为 n 且最大度为（$n-2$）的距离幻方图。

问题 6. 给定一个图 G 和一个正整数 p，研究以下判定问题的计算复杂性： G 是否为 p-距离幻方图?

参考文献

[1] S. Arumugam、D. Froncek 和 N. Kamatchi。距离幻方图综述。《印度尼西亚数学学会杂志》，（特刊）：11–26，2011年。[2] S. Arumugam、N. Kamatchi 和 G. R. Vijayakumar。关于 D 顶点幻方常数的唯一性。《数学讨论：图论》，34(2)：279–286，2014年。[3] D. Cvetkovi´c、P. Rowlinson 和 S. Simi´c。图谱理论导论。剑桥大学出版社，2010年。[4] D. Froncek。圈的笛卡尔积的群距离幻方标记。《澳大利亚组合学杂志》，55：167–174，2013年。[5] J. A. Gallian。图标记动态综述（第25版）。《电子组合学杂志》，5：动态综述6，43，2022年。

[6]S. Gupta 和 M. Zehavi。公平竞赛调度的多变量分析。*arXiv:2102.03857*，2021年。[7] M. Jinnah。关于 Σ 标记图。载于 B.D. Acharya 和 S.M. Hedge 编，图标记问题小组讨论技术论文集，第71–77页。NITK Surathkal，1999年。[8] N. Kamatchi。图的距离幻方标记与距离反幻方标记。博士论文，卡拉萨林加姆研究与教育学院，Krishnankoil, Srivilliputhur，泰米尔纳德邦，2012年6月。[9] ˇS. Miklaviˇc 和 P. ˇSparl。四价距离幻方循环图的分类。离散数学，344(11)：论文编号112557，8页，2021年。[10] ˇS. Miklaviˇc 和 P. ˇSparl。关于价为6的距离幻方循环图。离散应用数学，329：35–48，2023年。[11] M. Miller、C. Rodger 和 R. Simanjuntak。图的距离幻方标记。《澳大利亚组合学杂志》，28：305–315，2003年。[12] A. O'Neal 和 P. J. Slater。顶点幻方常数的唯一性。*SIAM*离散数学杂志，27(2)：708–716，2013年。[13] R. Pawar、T. Singh、H. Mukherjee 和 J. Bagga。距离幻方图所产生的所有幻方常数的完整刻画。*arXiv:2311.10330*，2023年。[14] P. Slater。全都是标记。载于 G. Ralucca、L. Craig 和 H. Stephen 编，图论：最喜爱的猜想与开放问题-*1*，第231–252页。施普林格国际出版，2016年。[15] V. Vilfred。 Σ标记图与循环图。博士论文，喀拉拉大学，特里凡得琅，喀拉拉邦，印度，1994年。[16] D. B. West。图论导论。普伦蒂斯·霍尔，第2版，2000年9月。[17] F. Yasin 和 R. Simanjuntak。距离幻方标记的启发式方法。计算机科学进展，74：100–104，2015年。“第二届图论与信息安全国际会议”。