arXiv:2302.05656v1 [math.FA] 11 Feb 2023

遍历性与超弱紧性

´GUILLAUME GRELIER 和 MATIAS RAJA

Abstract. 我们证明，巴拿赫空间的闭凸子集是（超）弱紧的，当且仅当它是（超）遍历的。由此我们推得，超弱紧集可由连续仿射映射的不动点性质刻画。我们还证明，仿射等距映射的 M-不动点性质蕴含巴拿赫-萨克斯性质。

1. Introduction

超弱紧集这一概念最早由 [20] 针对凸集提出，当时称为有限可切片集。“超弱紧”这一名称首次见于 [7]。此后，这一概念得到了深入研究。例如，第二位作者在 [21] 中证明，巴拿赫空间是超弱紧生成的，当且仅当它具有强一致盖托光滑范数。 [21], 中的另一项重新赋范结果（本文引用为定理 2.10）是本文的主要工具之一，因为它表明，凸超弱紧集可以重新赋范，使其具有正规结构；这一概念与不动点性质密切相关（见[15]）。

在 [8], 中，作者证明了，巴拿赫空间 X 的闭有界凸子集 K 是超弱紧的，当且仅当它具有保持 K的仿射等距映射 $T\colon X \to X$ 的不动点性质。在本文中，我们从两个不同方面改进了这一刻画。一方面，借助对经典均值遍历定理（定理 3.3）的改编，我们证明闭凸集 K 是超弱紧的，当且仅当它是超遍历的（定理 3.5）。随后运用相同的技巧即可轻松得到相应的不动点性质。另一方面， [8] 中给出的刻画的主要缺陷在于，定义在 K上的仿射等距映射可能无法扩展到整个空间。此外，超弱紧性是超自反性的局部化版本，因此自然会期待这样的刻画只依赖于 K。定理 4.5 给出了这一结果。

本文的结构如下。下一节将讨论全文中会用到的几个概念。我们首先回顾扩张模型的定义，并研究当移位限制在其扩张基的闭凸包上时，扩张模型的移位何时具有不动点

（见命题 2.1）。接下来，我们介绍集合的有限可表示性定义，该定义推广了巴拿赫空间的通常定义。最后，我们回顾超弱紧性的概念。在第三节中，我们用（超）遍历性刻画（超）弱紧性（定理 3.4 和 3.5）。为此，我们建立了均值遍历定理的一个版本（见定理 3.3）。第四节中，我们将超弱紧集的不动点性质作为其遍历性质的推论加以证明（见定理 4.5）。第五部分将前几节所建立的结果应用于强超弱紧生成巴拿赫空间。事实上，在这些空间中，任何弱紧集都是超弱紧的，因此我们可以得到更强的结果。在最后一节中，我们证明，如果巴拿赫空间X 的所有扩张模型都具有仿射等距映射不动点性质，那么 X 是自反的，并且事实上具有巴拿赫-萨克斯性质（定理 6.3）。由此可知，自反性严格地介于不动点性质和 M-（不动点性质）之间（见定义 6.1）。

2. Basic Notions

2.1. 记号。一般而言，我们采用标准记号，并遵循诸如 [10] 等教材中的记号约定。例如，若 X 是一个巴拿赫空间，则 B_X 表示其闭单位球；有界集 $A \subset X$ 的直径记作 diam(A)。若 X 是一个巴拿赫空间， $\mathcal{U}$ 是一个超滤子，则相对于 $\mathcal{U}$ 的 X 的超幂记作 $X^{\mathcal{U}}$。关于超幂的更多信息，请参阅 [13] 。

如果 ($\mathcal{P}$) 是巴拿赫空间的一个性质，我们称巴拿赫空间 X 具有 super-($\mathcal{P}$) 性质，如果 X 的任意超幂都具有 ($\mathcal{P}$)。如果 ($\mathcal{P}$) 具有遗传性，则这等价于：任何有限表示于 X 中的巴拿赫空间都具有 ($\mathcal{P}$)。

2.2. 扩张模型。在本节中，我们回顾 Brunel 和 Sucheston 最初在 [4] 中引入的扩张模型定义。关于扩张模型的精彩介绍，请参阅 [2] 。

设 X 为一个巴拿赫空间，且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X中的一个序列。若满足以下条件，则称 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为良序列：

$$\lim_{n_1\to\infty} \|a_1 x_{n_1} + ... + a_1 x_{n_k}\|,$$

其中 $n_1 < ... < n_k$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和所有 $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ 均存在。利用 Ramsey 的一个定理，可以证明每个有界序列都有一个良子列。如果 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是良序列，那么 $\|(a_1, ..., a_k)\| = \lim_{n_1\to\infty} \|a_1 x_{n_1} + ... + a_k x_{n_k}\|$，其中 $n_1 < ... < n_k$，定义了 c_{00} 上的一个半范数。容易看出，它定义范数当且仅当 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛。在这种情况下，赋予这一新范数后 c_{00} 的完备化 Z 称为基于 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构造的 X 的扩张模型。我们称 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ （其中

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 c_{00} 的典范基）为该扩张模型的基本序列。可以证明， Z 在 X 中有限可表示。更确切地说，有：

$$\forall \varepsilon>0 \ \ \forall N\geqslant 1 \ \ \exists p\in\mathbb{N} \ \ \forall n_1<\ldots<n_N \text{ 其中 } \ n_1\geqslant p \ \ \forall a_1,\ \ldots,\ a_N\in\mathbb{R}$$

$$(1-\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i x_{n_i}\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i x_{n_i}\right\| \tag{2.1}$$

若巴拿赫空间 X 中的非恒定序列 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足以下条件，则称其为扩张序列：

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_{n_i}\right\|$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$、所有 a_1、...、$a_k\in\mathbb{R}$ 以及所有 $n_1<\ldots<n_k$均成立。根据扩张模型范数的构造，其基本序列是扩张的。

设 Z 是巴拿赫空间 X 的一个扩张模型，该模型建立在有界良序列 $(x_n)_n$ 之上，其基本序列为 $(e_n)_n$。遵循 Brunel 和 Sucheston 的思路（参见 [5]），我们可以定义一个线性等距映射 $T\colon c_{00}\to Z$，如下：

$$T\left(\sum_{i\geqslant 1} a_i e_i\right) = \sum_{i\geqslant 2} a_{i-1} e_i.$$

于是 T可扩张为从 Z到 Z的线性等距映射。显然， $T(\mathrm{co}\{e_n\}_n)\subset \overline{\mathrm{co}}\{e_n\}_n$。在本文中，我们始终将该映射称为扩张模型 Z的移位。

命题 2.1. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 Z 是 X 的一个扩张模型，其基本序列为 $(e_n)_n$。设 T 是 Z 的移位。以下断言等价：

(i) $T|_{\overline{\mathrm{co}}\{e_n\}_n}$ 有一个不动点；(ii) $(e_n)_n$ 弱收敛。

证明。$(ii)\implies(i)$ 假设 $(e_n)_n$ 弱收敛到 $e\in Z$。由 T 的弱连续性，我们有 $e_{n+1}=T(e_n)\xrightarrow[n]{w}T(e)$，且由于 $e_{n+1}\xrightarrow[n]{w}e$，我们推得 $T(e)=e$。显然我们还有 $e\in \overline{\mathrm{co}}\{e_n\}_n$。

$(i)\implies(ii)$ 令 $e\in\overline{\mathrm{co}}\{e_n\}_n$ 为 T 的一个不动点。对于 $n\geqslant 1$，定义 $F_n=\mathrm{span}(e_i)_{i\geqslant n}$。显然 $e\in F_\infty:=\bigcap_{n\geqslant 1}F_n$。

注意，我们可以假设 $(e_n)_n$ 是一个基序列。事实上，如果 $(e_n)_n$ 不是基序列，那么 $(e_n)_n$ 弱收敛（见 [2] 第 17 页的命题 2），于是结论成立。因此，假设 $(e_n)_n$ 是一个基序列。于是 $F_\infty=\{0\}$，由此可得 $e=0\in \overline{\mathrm{co}}\{e_n\}_n$。由于 $(e_n)_n$ 是一个扩张序列，这等价于 $e_n\xrightarrow{w}0$ 这一事实。n

2.3. 集合的有限可表示性。

定义 2.2. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间。如果集合 $A \subset X$ 在集合 $B \subset Y$ 中有限表示（简记为 A 在 B 中有限秩），则称之为有限表示；也就是说，对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $A_0 \subset A$ 有限线性无关集，都存在 $B_0 \subset B$ 和一个同构 $T : \mathrm{span}(A_0) \to \mathrm{span}(B_0)$，使得 $T(A_0) \subset B$，并且对于所有$x \in \mathrm{span}(A_0)$

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|.$$

请注意，以下定义推广了巴拿赫空间的通常定义，因为 X 在 Y 中有限可表示（我们也写作 X 在Y中有限秩），当且仅当 B_X 在 B_Y中有限秩。

我们需要以下引理:

引理 2.3. 设 $A \subset X$ 是巴拿赫空间 X 的子集，且 $\varepsilon > 0$。那么，对于 $\overline{A}$ 中的任意有限线性无关集 $x_1, ..., x_N$，存在 A 中的有限线性无关集 $y_1, ..., y_N$，使得对所有$1 \leqslant k \leqslant N$都有 $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$。

证明。存在序列 $(y_n^k)_n \subset A$，使得对所有$1 \leqslant k \leqslant N$都有 $(y_n^k)_n \xrightarrow[n]{} x_k$。不失一般性，我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leqslant k \leqslant N$ 都有 $\|y_n^k - x_k\| < \varepsilon$。由于 $\mathrm{span}\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant N}$ 是有限维的，它在 X 中有补，因此存在一个有界满射投影 $p : X \to \mathrm{span}\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant N}$。根据 p的连续性，我们有$p(y_n^k)_n \xrightarrow[n]{} p(x_k) = x_k$，对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$均成立。现在利用行列式在 $\mathrm{span}\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant N}$中的连续性，我们推得存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得族 $p(y_{n_0}^1), ..., p(y_{n_0}^N)$ 对所有 $n \geqslant n_0$均线性无关。族 $y_{n_0}^1, ..., y_{n_0}^N$ 是线性无关集，并且满足对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$都有 $\|x_k - y_{n_0}^k\| < \varepsilon$。

∎

以下结果在巴拿赫空间的情形下广为人知，是对集合的有限可表示性的推广:

命题 2.4. 设 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 分别是两个巴拿赫空间 X 和 Y 的子集。假设 A 可写为 $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$，其中 $(A_n)_n$ 是一个递增的集合序列，且 A_n 在 B 中有限秩。那么 A 在 B 中有限秩。

特别地，A 在 B 中有限秩，当且仅当 $\overline{A}$ 在 B 中有限秩。

证明。取 $\overline{A}$ 中一个有限的线性无关集 $e_1, ..., e_N$，并令 $\varepsilon > 0$。定义 $E = \mathrm{span}\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant N}$。由于 E 是有限维的，存在 $C > 0$，使得对所有 $a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{C} \max_{1\leqslant k\leqslant N} |a_k| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| \leqslant C \max_{1\leqslant k\leqslant N} |a_k|.$$

取 $\nu > 0$ 使得 $(1+\varepsilon)\frac{1+CN\nu}{1-CN\nu} < 1 + 2\varepsilon$。根据前述引理，存在一个有限的线性无关集 $x_1, ..., x_N \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，使得

$\|e_k - x_k\| < \varepsilon$对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$成立。令 $n \in \mathbb{N}$ 使得 x_1，...， $x_n \in A_n$。由于A_n 是 B中的有限秩，存在 $B_0 \subset B$ 以及一个同构 T : span(A_0) →span(B_0)，使得 $T(A_0) \subset B$且 $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$。定义线性算子 S: $E \to$span(B_0)，使得对于所有 $1 \leqslant k \leqslant N$， $S(e_k) = T(x_k)$。取$e = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \in E$。注意到

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \leqslant N\nu \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |a_j| \leqslant CN\nu \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|.$$

一方面，我们有

$$\begin{aligned} \|S(e)\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right) \right\| &\leqslant \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| \\ &\leqslant \|T\| \left(\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| \right) \\ &\leqslant \|T\|\|e\|(1 + CN\nu) \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \|S(e)\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right) \right\| &\geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \\ &\geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \left(\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k - \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \right) \\ &\geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|e\|(1 - CN\nu). \end{aligned}$$

我们得出结论：$\|S\|\|S^{-1}\| \leqslant \|T\|\|T^{-1}\| \frac{1+CN\nu}{1-CN\nu} \leqslant (1 + \varepsilon) \frac{1+CN\nu}{1-CN\nu} < 1 + 2\varepsilon$。

■

推论 2.5. 设 Z 是巴拿赫空间 X 的一个扩张模型，它基于(x_n)$_n$ ，其扩张序列为(e_n)$_n$。那么，co$\{e_n\}_n$ 在co$\{x_n\}_n$中是有限秩的。

证明。根据前述命题，只需证明对于所有 $p \geqslant 1$，co$\{e_1, ..., e_p\}$在 $\{x_n\}_n$ 中是有限秩的。这可直接由(2.1)得出。 ■

2.4. 超弱紧性。

定义 2.6. 设 X 是一个巴拿赫空间， $A \subset X$ 是一个有界集。若 A 中任意有限秩集都是相对弱紧的，则称 A 是相对超弱紧的。此外，若 A 是弱闭的，则称 A 超弱紧（简称 SWC）。

这个概念是超自反性的局部化版本，也就是说，巴拿赫空间 X 是超自反的，当且仅当 B_X 是超弱紧的。

我们回顾一下，若 A 是巴拿赫空间 X 的有界子集，且 $\mathcal{U}$ 是集合 I上的超滤子，则 A 的超幂定义为

$$A^{\mathcal{U}} = \{(x_i)_{\mathcal{U}} \ : \ \forall i \in I \ \ x_i \in A\} \subset X^{\mathcal{U}}.$$

以下两个结果与 [13] 中的命题 6.1 和 6.2 类似，由于证明只需稍作调整，我们省略证明。

命题 2.7. 设 A 是巴拿赫空间 X 的一个有界子集。那么，对于任意自由超滤子 $\mathcal{U}$，$A^{\mathcal{U}}$ 在 A 中是有限秩的。

命题2.8. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间。假设 $B \subset Y$ 在 $A \subset X$ 中是有限秩的。若 $B_0 \subset B$ 是线性无关集，则存在一个自由超滤子 $\mathcal{U}$ 和一个线性等距映射 $T : \text{span}(B_0) \to (\text{span}(A))^{\mathcal{U}}$，使得 $T(B_0) \subset A^{\mathcal{U}}$。

由此我们得到 SWC集的如下刻画：

定理2.9. 设 K 是巴拿赫空间X的一个有界弱闭子集。以下断言等价：

(i) K 是超弱紧；(ii) 对任意超滤子 $\mathcal{U}$，$K^{\mathcal{U}}$ 都是相对弱紧的。

证明。（i）由命题 2.7 可得 $\implies$（ii）。现在假设存在一个在 K 中有限秩的集合 A，使得 A 不是相对弱紧的。那么A 包含一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它没有任何弱收敛子列。不失一般性，我们可以设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个线性无关族（事实上，根据佐恩引理，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个极大线性无关子列）。由命题2.8，存在一个自由超滤子 $\mathcal{U}$ 和一个线性等距映射 $T : \text{span}(B_0) \to (\text{span}(A))^{\mathcal{U}}$，使得 $T(B_0) \subset A^{\mathcal{U}}$。因此，$A^{\mathcal{U}}$不是相对弱紧的，因为 $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 没有任何弱收敛子列，进而 K不是超弱紧。

■

设 C 是巴拿赫空间 X 的一个凸子集。若对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} - \delta$$

只要 x、$y \in C$ 满足 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$。$f$ 的凸性模是由下式定义的函数 $\delta_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\delta_f(\varepsilon) = \inf\left\{\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ : \ x,y \in C, \ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

最后，我们回顾一下：如果对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $H \subset nK + \varepsilon B_X$，则称集合 $K \subset X$ 强生成集合 $H \subset X$。

以下结果是 [21]中的定理 3.2。由于它与正规结构和不动点性质密切相关，因此将在后续部分反复使用。

定理 2.10. 设 K 是巴拿赫空间 X的一个超弱紧绝对凸子集。那么 X 存在一个等价范数 $|.|$ ，使得$|.|^2$ 在由 K 强生成的任意凸集上的限制是一致凸的。

3. Ergodicity and (super) weak compactness

定义 3.1. 设 C 是巴拿赫空间 X的一个凸子集。称仿射函数 $T\colon C \to C$ 为

- 遍历的，如果对所有 $x \in C$，Cesàro 均值序列 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right)_n$ 都收敛；
- Cesàro 等度连续的，如果 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right\}_{n\geqslant 1}$ 是一个等度连续集。

如果任意 Cesàro 等度连续的仿射函数 $T:C \to C$ 都是遍历的，则称 C 是遍历的。如果任意在 C 中为有限秩的凸集都是遍历的，则称 C 是超遍历的。

注意，前面对遍历性的定义以自然的方式推广了通常的定义。事实上，回忆一下，若任意 Cesàro 有界算子 $T\colon X \to X$（即 $\sup_{n\geqslant 1}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^n\right\| < \infty$）都是遍历的，则称巴拿赫空间 X 是遍历的（参见 [11]）。

命题 3.2. 巴拿赫空间 X 是遍历的，当且仅当 B_X 是遍历的。

证明。假设 X 是遍历的。令 $T\colon B_X \to B_X$ 为 Cesàro 等度连续仿射函数。不失一般性，我们可以假设$T(0) = 0$。注意到 T 可以通过 $T'\colon X \to X$ ，借助$T'(x) = T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|x\|$扩展到 X 。容易证明 T'是线性的。此外，由于 T具有 Cesàro 等度连续性，显然 T'是 Cesàro 有界的。由此可得 T' 是遍历的，进而 T 也是遍历的。

现在假设 B_X 是遍历的。令 $T\colon X \to X$ 满足 T 是 Cesàro 有界的。不失一般性，我们可以假设 $\|T\| \leqslant 1$。于是 $T|_{B_X}\colon B_X \to B_X$ 是良定义的，且具有 Cesàro 等度连续性，因此根据假设是遍历的。由此可得 T 是遍历的。∎

我们首先对均值遍历定理作一番改述（见 [16] 第 72 页上的定理 1.1）：

定理 3.3. 设 C 是巴拿赫空间 X 的有界凸子集，且 x、$y \in C$。设 $T\colon C \to C$ 是 Cesàro 等度连续仿射函数。以下断言等价：

(i) $Ty = y$和 $y \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x\}_{n\geqslant 0}$；(ii) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) \to y$；(iii) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) \xrightarrow{w} y$；(iv) $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right)_{n\geqslant 1}$ 有一个子列弱收敛到 y。

证明。为简单起见，对于所有 $n \geqslant 1$，我们记 $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$。显然，我们有 $(ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$。假设 (iv) 成立，即 $(S_{\phi(n)}(x))_{n\geqslant 1}$ 对某个严格递增函数 $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$弱收敛到 y。显然，$y \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x\}_{n\geqslant 0}$。注意，对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$T\left(S_{\phi(n)}(x)\right) = S_{\phi(n)}(x) + \frac{1}{\phi(n)}T^{\phi(n)}(x) - \frac{1}{\phi(n)}x$$

并且由于 C 有界，我们可推得 $T\left(S_{\phi(n)}(x)\right) \xrightarrow{w} y$。此外，$T$ 是弱连续的，因此 $T\left(S_{\phi(n)}(x)\right) \xrightarrow{w} T(y)$。由此可得 $Ty = y$。

现在假设 (i) 成立，并固定 $\varepsilon > 0$。由于 T 是 Cesaro 等度连续的，存在 $\eta > 0$，使得当 $z \in C$ 满足 $\|z - y\| < \eta$时，$\|S_n(y) - S_n(z)\| < \varepsilon$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。存在一个凸组合$\sum_{k=0}^{p} a_k T^k(x)$，使得 $\left\|y - \sum_{k=0}^{p} a_k T^k(x)\right\| < \eta$。在 C 上定义仿射函数 $S = \sum_{k=0}^{p} a_k T^k$。对于所有 $n > p$，有

$$\begin{aligned}
\|S_n S x - S_n x\| &= \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1} T^k\left(\sum_{j=0}^{p} a_j T^j(x)\right) - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p} a_j T^{k+j}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=0}^{p} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\left(T^{k+j}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right)\right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^{p} a_j \sum_{k=n}^{n-1+j} T^k(x)\right\|.
\end{aligned}$$

由于 $\lim_n \frac{1}{n}T^n(x) = 0$ (C有界)，我们推得存在 $N > p$，使得对所有 $n \geqslant N$ 都有 $\|S_n S x - S_n x\| < \varepsilon$。由此可得

$$\|y - S_n x\| = \|S_n y - S_n x\| \leqslant \|S_n y - S_n S x\| + \|S_n S x - S_n x\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

对所有 $n \geqslant N$，由于 $\|y - Sx\| < \eta$。我们得出 $y = \lim_n S_n x$。 ∎

我们得到弱紧性的如下刻画：

定理 3.4. 设 C 是巴拿赫空间 X 的一个闭凸子集。以下断言等价：

(i) C 是弱紧的；(ii) C 的任意闭凸子集都是遍历的。

证明。$(i) \Longrightarrow (ii)$ 直接由前一个定理得出。现在假设 C 不是弱紧的。根据 [3], 中的命题 1，存在一个基序列 $(y_n)_n \subset C$ 以及一个仿射同胚 $\Phi\colon A \to B$，使得

对所有 $n \in \mathbb{N}$， $\Phi\left(y_n\right) = e_n$，其中

$$A := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \mid a_n \geqslant 0 \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

and

$$B := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \mid a_n \geqslant 0 \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

其中，$e_n n$ 是 l_1的典范基。定义 l_1 上的双边移位如下:

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = a_2 e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} e_{2n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} e_{2n+2}.$$

最后，我们定义一个仿射连续映射 $T = \Phi^{-1} S \Phi :\ A \to A$。显然， T是 Cesàro 等度连续的。事实上，对于所有 $n \geqslant 1$，都有 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S^k\right)\Phi$，其中 $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S^k\right\| \leqslant 1$。此外， [3] 中的定理 3.2 证明了 T 没有任何不动点。由定理 3.3，我们推得 T 不是遍历的。因此， A 是 C 的一个非遍历子集，证毕。■

现在我们证明前一个定理的超版本:

定理 3.5. 设 C 是巴拿赫空间 X 的一个闭凸子集。以下断言等价:

(i) C 是超弱紧；(ii) C 是超遍历的；(iii) 从 C 中一个有限秩集合到其自身的任意仿射等距映射都是遍历的。

证明. $(i) \implies (ii)$ 直接由前一个定理得出。$(ii) \implies (iii)$ 显然。

假设 C 不是超弱紧，并证明 (iii) 不成立。存在 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子 $\mathcal{U}$，使得 $C^{\mathcal{U}}$ 不弱紧。因此，存在一个序列 $(x_n)_n \in C^{\mathcal{U}}$，它没有任何收敛子列。如有必要，取子列后，我们可以假设 $(x_n)_n$ 是一个良序列。令 Z 为基于 $(x_n)_n$ 构造的扩张模型，其基本序列为 $(e_n)_n$，并考虑令 T 为 Z 的移位。

如果 $(e_n)_n$ 与 l_1 的典范基等价，那么平均序列 $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(e_1))_n$ 不收敛，因为 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(e_1) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_k$。请记住，根据推论 2.5，$\mathrm{co}\{e_n\}_n$ 在 $\mathrm{co}\{x_n\}_n \subset C^{\mathcal{U}}$ 中是有限秩的；根据命题 2.7， $C^{\mathcal{U}}$ 在 C 中是有限秩的。由于 $\mathrm{co}\{e_n\}_n$ 不是遍历的，因此 (ii) 不成立。

现在我们假设 $(e_n)_n$ 不等价于 l_1的典范基。最后，我们将再次证明 Cesàro 均值序列 $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(e_1))_n$ 不可能收敛。反设该序列收敛。这意味着 $(e_n)_n$ 弱收敛（见 [2]第 21 页的命题 4）。由于 $(e_n)_n$ 不等价于 l_1的典范基，因此

可得 $(x_n)_n$ 弱收敛（根据 [2]第 25 页的定理 3），这就产生了矛盾。

■

定理 3.6. 超自反性等价于超遍历性。

证明。假设 X 不是超遍历的，并设 Y 是一个在 X 中有限秩且不遍历的巴拿赫空间。因此 B_Y 不遍历。由推论 3.4 可知， B_Y 不是弱紧的。因此 Y 不是自反的，且 X 不是超自反的。现在假设 X 是超遍历的，并设 Y 是一个在 X中有限秩的巴拿赫空间。那么 B_Y 在 B_X 中有限秩，进而根据前一个定理， B_Y 是遍历的。因此，根据命题 3.2， Y 是遍历的。

■

4. Fixed point property and (super) weak compactness

本节旨在推广 [8]中的定理 3.6。作者证明了，巴拿赫空间 X的闭有界凸子集 C 是超弱紧的，当且仅当任何可以延拓为 X 上的仿射等距映射的仿射等距映射 $T\colon C \to C$ 都有不动点。然而， C 上可能存在无法仿射等距延拓到 X上的仿射等距映射。因此，我们提出一种内在刻画。

定义 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 为一类凸映射。若巴拿赫空间 X 的有界闭凸子集 C 具有关于 $\mathcal{C}$的不动点性质（简称 FPP），即从 C 到其自身的每个属于 $\mathcal{C}$ 的映射都有不动点，则称 C 具有关于 $\mathcal{C}$ 的超不动点性质（super-FPP），如果 C 中的任意有限秩凸集都具有关于 $\mathcal{C}$的不动点性质。最后，若 X 的任意有界闭凸子集都具有关于 $\mathcal{C}$的不动点性质，则称 X 具有关于 $\mathcal{C}$的不动点性质。

引理 4.2. 设 C 为巴拿赫空间 X的有界闭凸子集。若 $T\colon C \to C$ 是仿射连续映射，则 T 弱连续。

证明。设 $(x_a)_{a\in A}$ 是 C 中的一个网，且弱收敛到某个 $x \in C$。假设 $(T(x_a))_{a\in A}$ 不弱收敛到 $T(x)$。那么存在 $T(x)$的一个弱开邻域 V，以及 $(x_a)_{a\in A}$的一个子网 $(x_b)_{b\in B}$，使得对所有 $b \in B$都有 $T(x_b) \notin V$。我们可以写成 $V = \bigcap_{i=1}^{p} U_i$，其中 $U_i = \{y \in X \mid x_i^*(y - T(x)) < \varepsilon\}$。因此，必要时再取一个子网，可设存在 $i_0 \in \{1, \dots, p\}$，使得对所有$b \in B$都有 $x_b \notin U_{i_0}$。由于 $(x_b)_{b\in B}$ 弱收敛到 x，我们有 $x \in \overline{\mathrm{co}}\{x_b\}_{b\in B}$，于是存在一个序列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{co}\{x_b\}_{b\in B}$，使得 $y_n \to x$。由 T的连续性可得 $T(y_n) \to T(x)$。然而，利用 T 是仿射映射、 U_i^c的凸性，以及对所有 $b \in B$都有 $T(x_b) \notin U_{i_0}$这一事实，容易看出对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $T(y_n) \notin U_{i_0}$。这就产生了矛盾，证明完毕。

■

引理 4.3. 设 C 是巴拿赫空间 $(X, \|.\|)$ 的凸子集，且 $\|.\|^2$ 在 C 上一致凸。若 D 是巴拿赫空间 $(Y, |.|)$ 的凸子集，并且在 C 中是有限秩的，则 $|.|^2$ 在 D 上一致凸。

证明。定义 $\delta(t) = \min\{\delta_{\|.\|^2}\left(\frac{t}{2}\right), \delta_g(t)\} > 0$，其中 $g(s) = s^2$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均成立。设 $x, y \in D$。首先假设 x 和 y 线性无关。对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 $C_n \subset C$ 和一个同构 $T_n : \text{span}\{x, y\} \to \text{span}(C_n)$，使得 $T_n(x)$ $T_n(y)$ $\in C$，并且

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)|z| \leqslant \|T_n(z)\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)|z|$$

对所有 $z \in \text{span}\{x, y\}$。对于所有 $n \geqslant 2$，可得

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left|\frac{x+y}{2}\right|^2 &\leqslant \left\|\frac{T_n(x) + T_n(y)}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant \frac{\|T_n(x)\|^2 + \|T_n(y)\|^2}{2} - \delta_{\|.\|^2}(\|T_n(x) - T_n(y)\|) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} - \delta_{\|.\|^2}\left(\frac{|x-y|}{2}\right)\end{aligned}$$

并令 $n \to \infty$，我们得到

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} - \delta_{\|.\|^2}\left(\frac{|x-y|}{2}\right) \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} - \delta(|x-y|).$$

现在，若 x 和 y 线性相关，则很容易证明

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} - \delta_g(|x-y|) \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} - \delta(|x-y|)$$

证明至此完成。 ∎

设 C 是巴拿赫空间 X的一个闭凸子集。回顾一下，若一个点 $x \in C$ 满足 $\sup\{\|x - y\| : y \in D\} = \text{diam}(D)$，则称其为直径点。若$C$ 满足正规结构（见 [15]），则称 C 具有正规结构；这意味着C 中的任意包含多个点的有界闭凸子集 D 都含有一个非直径点。

引理 4.4. 设 C 是巴拿赫空间 X 的一个凸子集，且 $\|.\|^2$ 在 C上一致凸。那么 C 具有正规结构。

证明。设 D 是 C 的有界闭凸子集，且 $d = \text{diam}(D)$。固定 x、$y \in D$ 两个不同的点，下面证明 $\frac{x+y}{2}$ 不是 D 的直径点。假设它是直径点。那么对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 $x_n \in D$，使得 $\left\|\frac{x+y}{2} - x_n\right\|^2 > d^2 - \frac{1}{n}$.。由此可得:

$$\begin{aligned}d^2 - \frac{1}{n} &< \left\|\frac{x+y}{2} - x_n\right\|^2 \\ &= 2\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_n}{2} + \frac{y - x_n}{2}\right)\right\|^2 \\ &\leqslant \left\|\frac{x - x_n}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y - x_n}{2}\right\|^2 - \delta_{\|.\|^2}(\|x - y\|) \\ &\leqslant d^2 - \delta_{\|.\|^2}(\|x - y\|)\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，便得到矛盾。 ∎

定理 4.5. 设 C 是巴拿赫空间 X 的一个有界闭凸子集。以下断言等价：

(i) C 是超弱紧；(ii) C 具有仿射等距映射的超固定点性质；(iii) C 具有连续仿射映射的超固定点性质；(iv) 在 X 上存在一个等价范数，使得 C 具有非扩张映射的超固定点性质。

证明。闭凸集上的任意连续仿射自映射都是弱连续的，这是由引理 4.3 得出的。由此，根据 Schauder-Tychonoff 定理，$(i) \implies (iii)$。蕴含关系 $(iii) \implies (ii)$ 显然成立。

$(ii) \implies (i)$ 只需仿照定理 3.5 中 $(ii) \implies (i)$ 的证明即可。

$(i) \implies (iv)$ 根据定理 2.10，存在 X 上的一个等价 $|.|$ 范数，使得 $|.|^2$ 在 C 上一致凸。下面证明 $(C, |.|)$ 具有非扩张映射的超固定点性质。设 D 是 $(C, |.|)$ 中任意一个有限秩凸集。根据前述两个引理，D 具有正规结构。由 Kirk定理（见 [15]），可知 D 具有非扩张映射的不动点性质。

$(iv) \implies (i)$ 在这个新范数下，C 具有仿射等距映射的超固定点性质，因此根据蕴含关系 $(ii) \implies (i)$，我们推得 C 是超弱紧的。 ∎

注 4.6. 一般来说，凸的 SWC 集具有等距映射的超固定点性质，这并不成立。事实上，Alspach 构造了一个 $L_1[0,1]$ 的弱紧集 K（因此也是 SWC 集，见下一部分），以及一个等距映射 $T\colon K \to K$，它没有任何不动点（见 [1]）。

注 4.7. 蕴含关系 $(i) \implies (ii)$ 也可以直接利用 C 上下半连续一致凸函数的存在性来证明。这一构造的思路见 [12]；关于以下论证中所用不同概念的定义，请读者参阅该文献。设 $T\colon C \to C$ 是任意一个仿射等距映射。对于 $\varepsilon > 0$，我们将 $f_\varepsilon(x)$ 定义为以 x 为根的、相邻节点间距为 ε 的二叉树的最大高度。注意，通过拼接树，容易看出 f_ε 满足

$$f_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \min\{f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)\} + 1$$

每当 $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$，即 f_ε 是一个 ε-拟凹函数。由于以 x 为根的 ε-分离二叉树，通过 T可得到以$T(x)$为根的 ε-分离二叉树，因此我们有 $f_\varepsilon \circ T \geqslant f_\varepsilon$。我们很容易推得，函数$h_\varepsilon := 3^{-f_\varepsilon}$ 是一致 ε凸的，并且满足 $h_\varepsilon \circ T \leqslant h_\varepsilon$。我们推得，$h_\varepsilon$ 的闭凸包络 $g_\varepsilon = \mathrm{co}(h_\varepsilon)$ 是一致 2ε凸的、凸的且下半连续的。此外，注意到 $g_\varepsilon \circ T \leqslant g_\varepsilon$。事实上，我们有 $g_\varepsilon \circ T = \mathrm{co}(h_\varepsilon) \circ T \leqslant h_\varepsilon \circ T \leqslant h_\varepsilon$，其中 $g_\varepsilon \circ T$ 是凸的下半连续函数，因此 $g_\varepsilon \circ T \leqslant \mathrm{co}(h_\varepsilon) = g_\varepsilon$。$g$ 的闭包络

函数 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n\|g_{1/n}\|_\infty}g_{1/n}$ 是一致凸的、下半连续的，并且满足 $g\circ T\leqslant g$。函数 g 在弱紧集上是凸的下半连续函数（因此是凸的 w-下半连续函数），所以在 C 上的某点 $x\in C$处取得最小值。由于 g 是一致凸的，这个最小值是唯一的。此外，我们有 $g(T(x))\leqslant g(x)$。由此可得$T(x)=x$。

5. Application to S^{2}WCG Banach spaces

[21] 中给出了以下定义：

定义 5.1. 若巴拿赫空间 X 存在一个 SWC集 $K\subset X$，能够强生成任意弱紧集 $H\subset X$，则称其为强超弱紧生成（简称 S^{2}WCG）。

注意，若 X 是 S^{2}WCG 空间，则 X 的任意弱紧子集都是超弱紧的（见 [6] 中的定理4.1）。S^{2}WCG 空间的一个基本例子是$L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu,X)$，其中 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是有限测度空间，而 X 是超自反巴拿赫空间（证明见 [21] ）。

[8] 中的定理4.6 可由前述结果轻易推出：

命题 5.2. 设 X 是一个 S^{2}WCG 巴拿赫空间。那么 X 存在一个等价范数，使得任意弱紧凸子集对于非扩张映射都具有不动点性质。

证明。设 K 是一个超弱紧的绝对凸集，并且它强生成 X。考虑到 X 配备了定理 2.10 给出的范数，可知该范数的平方在 X 的任意弱紧子集上是一致凸的，因此任意弱紧子集都具有正规结构，由引理 4.4 可得。结论由 Kirk定理得出。 ∎

结合前面各部分的结果，我们得到：

命题 5.3。设 C 是 S^{2}WCG 巴拿赫空间 X 的一个闭凸子集。以下断言等价：

(i) C 弱紧；(ii) C 超弱紧；(iii) C 超遍历；(iv) C 的任意闭凸子集都是遍历的；(v) C 的任意闭凸子集对连续仿射映射都具有不动点性质。

证明。$(i)\implies(ii)$ 由 X 是 S^{2}WCG 这一事实可得。$(ii)\implies(iii)$ 由定理 3.5 可得。$(iii)\implies(iv)$ 显然。$(iv)\implies(v)$ 由定理 3.3 可得。$(v)\implies(i)$ 是 [3]中的定理 3.2。 ∎

命题 5.4。设 Y 是 S^{2}WCG 巴拿赫空间 X的子空间。以下断言等价：

(i) Y 是自反的；(ii) Y 是超自反的；(iii) Y 是超遍历的；(iv) Y 是遍历的；(iv) Y 对连续仿射映射具有不动点性质。

证明。由前面的结果可直接得出。 ∎

备注 5.5。在 $L^1(\Omega\ \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ 的情形下，前面的推论可以得到大幅加强。在这种情况下， Y 是自反的，当且仅当 Y 对非扩张映射具有不动点性质。其中一个方向归功于 Maurey（ [18]中的定理 1），另一个方向归功于 Dowling 和 Lennard（ [9]中的定理 1.4）。

6. 关于 M-FPP 的一个备注

定义 6.1。设 $(\mathcal{P})$ 是巴拿赫空间的一种性质。若 X 的任意扩张模型都具有 $(\mathcal{P})$，则称巴拿赫空间 X 具有性质 M-$(\mathcal{P})$。

值得注意的是，一般而言，这并不意味着 X 具有（$\mathcal{P}$）。M-性质这一概念由 Beauzamy 在 [2] 中提出（见第 5 章）。在这本书中，作者声称 M-自反性不存在任何刻画。据我们所知，这个问题仍未解决。

请记住，若巴拿赫空间 X 中任意有界序列 $(x_n)_n \subset X$ 都存在一个子列 $(x_{\phi(n)})_n$，使得 $\left(\sum_{k=1}^n x_{\phi(k)}\right)_n$ （或 $\left(\sum_{k=1}^n (-1)^k x_{\phi(k)}\right)_n$）收敛，则称该空间具有巴拿赫-萨克斯性质（或交替 Banach-Saks 性质）。关于这些性质及其与扩张模型的联系，更多信息请参阅 [2]。

我们从下面的引理开始：

引理 6.2. M-仿射等距映射的不动点性质蕴含交替 Banach-Saks 性质。

证明。设 X 是一个巴拿赫空间，并假设 X 不具有交替 Banach-Saks 性质。根据 Beauzami 定理（见 [2]，第 47 页的定理 5），可知 X 有一个扩张模型 Z，它与 l_1 同构。因此， Z 的基本序列 $(e_n)_n$ 等价于 l_1 的典范基。特别地，$(e_n)_n$ 不弱收敛。根据前述命题，我们可推得 co$\{e_n\}_n$，因而 Z，不具有仿射等距映射的不动点性质。 ∎

众所周知，不动点性质并不意味着自反性。事实上， l_1 可以通过重新赋范而具有非扩张映射的不动点性质

（见 [17]）。然而，M-不动点性质意味着自反性。更确切地说，我们有：

定理 6.3。M-仿射等距映射的不动点性质蕴含巴拿赫-萨克斯性质。

证明。设 X 是具有 M-仿射等距映射的不动点性质的巴拿赫空间。根据前述引理，我们已经知道 X 具有交替 Banach-Saks 性质。现在证明 X 是自反的。反设 X 不是自反的。存在一个有界序列 $(x_n)_n$ ，它没有任何弱收敛子列。必要时取子列后，可设 $(x_n)_n$ 是生成一个 spreding 模型 Z 的良序列，其基本序列为 $(e_n)_n$。由于 X 具有交替 Banach-Saks 性质，$(e_n)_n$ 不等价于 l_1的典范基。由于 $(x_n)_n$ 不是弱收敛的，因此 $(e_n)_n$ 也不是弱收敛的（参见 [2]中的定理 3，第 25 页）。根据前述命题，我们得出 Z 不具有仿射等距映射的不动点性质，这与假设矛盾。因此 X 是自反的，且具有交替 Banach-Saks 性质，进而具有巴拿赫 - 萨克斯性质（参见 [2] 中的命题 II-4-1）。 ∎

在下一个定理之前，我们回顾一些众所周知的事实。首先，巴拿赫-萨克斯性质蕴含自反性（证明见 [19] ，或者注意到 ℓ_1不具有巴拿赫-萨克斯性质，并应用 Rosenthal 的 ℓ_1-定理）。此外，根据 Enflo 定理，任何超自反巴拿赫空间都具有一致凸范数。于是，根据 Kakutani 定理（见 [14]），超自反巴拿赫空间具有巴拿赫-萨克斯性质。特别地，超自反性等价于超巴拿赫-萨克斯性质。

Maurey 证明了，在超自反巴拿赫空间的闭凸子集 C上，任意等距映射 $T\colon C \to C$ 都有一个不动点（例如参见 [22]中的第 112 页定理 F）。任意连续仿射映射 $T\colon C \to C$ 也具有这一性质：

定理 6.4. 设 X 为巴拿赫空间。以下断言等价：

(i) X 是超自反的；(ii) X 具有仿射等距映射的超不动点性质；(iii) X 具有连续仿射映射的超不动点性质；(iv) X 具有等距映射的超不动点性质。

证明。根据前面的定理，仿射等距映射的超固定点性质蕴含巴拿赫-萨克斯性质。由于超自反性等价于超巴拿赫-萨克斯性质，我们得到 $(ii) \implies (i)$。根据 Schauder-Tychonoff 定理，$(i) \implies (iii)$ 成立，而 $(iii) \implies (ii)$ 显然成立。$(i) \implies (iv)$ 是 Maurey 的定理。由于 $(iv) \implies (ii)$ 显然成立，证明完毕。 ∎

致谢：第一作者还特别感谢 G. Lancien 和 G. Godefroy 富有成效的交流。

作者获得了科学与创新部资助，项目编号为 PID2021-122126NB-C32；还获得了塞内卡基金会—穆尔西亚自治区 ACyT 项目 21955/PI/22 的资助。第一作者还获得了 MICINN 2018 FPI奖学金，编号为 PRE2018-083703，该奖学金与项目 MTM2017-83262-C2-2-P 相关。

References

[1] D. E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, 《美国数学学会会刊》82 (1981), 423–424。[2] B. Beauzamy 和 J. T. Laprest´e, *Modèles étalés des espaces de Banach*, 《里昂数学系出版物》，1983年。[3] T. D. Benavides、M. J. Pineda 和 S. Prus, *Weak compactness and fixed point property for affine mappings* **209** 2004 1 15 , 《泛函分析杂志》（），–。[4] A. Brunel 和 L. Sucheston, *On J-convexity and some ergodic super-properties ofBanach spaces*, 《美国数学学会汇刊》204 (1975), 79–90。[5] A. Brunel 和 L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, 《数学系统理论》7 (197), 294–299。[6] L. Cheng、Q. Cheng、S. Luo、K. Tu 和 J. Zhang, *On super weak compactness of subsets and its equivalences in Banach spaces* **25** 2018 899 926 , 《凸分析杂志》（），–。[7] L. Cheng、Q. Cheng、B. Wang 和 W. Zhang, *On super weakly compact sets and uniform convexifiable sets.* **199** 2 145 169 2010 《数学研究》，（），–（）。[8] L. Cheng、Q. Cheng 和 J. Zhang, *On super fixed point property and super weak compactness of convex subsets in Banach spaces*, 《数学分析及其应用杂志》428 (2015), 1209–1224。[9] P. Dowling 和 C. Lennard, *Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property* **128** 1997 443 446 , 《美国数学学会会刊》（），–。[10] M. Fabian、P. Habala、P. H´ajek、V. Montesinos 和 V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis* 2011 ，施普林格，纽约。[11] V. P. Fonf、M. Lin 和 P. Wojtaszczyk, *Ergodic characterizations of reflexivity of Banach spaces* **187** 2001 146 162 , 《泛函分析杂志》（），–。[12] G. Grelier 和 M. Raja, *On uniformly convex functions*, 《数学分析及其应用杂志》505 (2022)。[13] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*, 《纯粹与应用数学杂志》313 (1980), 72–104。[14] S. Kakutani, *Weak convergence in uniformly convex spaces*, 《东北数学杂志》第一辑45 (1939), 188–193。[15] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, 《美国数学月刊》72 (1965), 1004–1006。[16] U. Krengel, *Ergodic theorems*, Walter de Gruyter，2011年。[17] P. K. Lin, *There is an equivalent norm on l_1 that has the fixed point property*, 《非线性分析：理论、方法与应用》68 (2008), 2303–2308。[18] B. Maurey, *Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L^1*, S´功能分析研讨会（又称“Maurey-Schwartz”）（1980），1–18。[19] T. Nishiura 和 D. Waterman, *Reflexivity and summability*, 《数学研究》1 (1963), 53–57。[20] M. Raja, *Finitely dentable functions operators and sets*, 《凸分析杂志》15 (2008), 219–233。

[21] M. Raja, *Super WCG Banach spaces*, 《数学分析及其应用杂志》439 (2016), 183–196。[22] R. C. Sine, *Fixed points and nonexpansive mappings*, 美国数学会，1983年。

（G. Grelier） Universidad de Murcia, Departamento de Matemáticas, Campus de Espinardo 30100 Murcia, Spain*Email address*: g.grelier@um.es（M. Raja） Universidad de Murcia, Departamento de Matemáticas, Campus de Espinardo 30100 Murcia, Spain*Email address*: matias@um.es