arXiv:2302.05681v1 [cs.DS] 11 Feb 2023

利用代表集实现预算匹配和预算拟阵交的 EPTAS

IlanDoron-Arad ✉以色列理工学院计算机科学系，以色列海法。

ArielKulik ✉CISPA 亥姆霍兹信息安全中心，萨尔州信息学园区，德国。

Hadas Shachnai ✉
以色列理工学院计算机科学系，以色列海法。

摘要

我们研究了众所周知的匹配和拟阵交问题的预算版本。虽然这两个问题都存在多项式时间近似方案（*PTAS*）[Berger 等人（《数学规划》，2011年）、Chekuri、Vondrák 和 Zenklusen（SODA 2011）], 但这些问题是否存在完全多项式时间近似方案（FPTAS），甚至高效多项式时间近似方案（EPTAS），一直是一个引人关注的未解问题。

本文肯定地回答了这个问题的第二部分，给出了预算匹配和预算拟阵交的 EPTAS。该方案的一个主要组成部分，是针对目标解构造一种新颖的代表集，其基数仅取决于ε精度参数。因此，在代表集内枚举解即可得到 EPTAS。这一点使我们的算法与以往的方法有着关键区别；以往方法依赖于对解集进行穷举。我们构造代表集的思路或许有助于解决其他预算优化问题，因此本身也具有独立的研究价值。

2012年 ACM 学科分类 计算理论

关键词与短语 预算匹配、预算拟阵交、高效多项式时间近似方案。

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs...23

1 引言

许多 NP-难组合优化问题都可以表述如下。给定一个基集 E 以及一个由 E 的子集组成的集合族$\mathcal{M}$，称之为可行集。基集中的元素关联有一个成本函数 $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个利润函数 p: $E \to \mathbb{R}$，此外还给定一个预算 $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。解 是一个成本受限的可行集$S \in \mathcal{M}$，其成本为 $c(S) \leq \beta$.[1] 通常，目标是找到利润最大的解 S，即:

$$\max p(S) \text{ s.t. } S \in \mathcal{M}, c(S) \leq \beta. \tag{1}$$

典型例子包括最短权重约束路径 [6], 、约束最小生成树 [15],以及带冲突图的背包问题 [14]。本文聚焦于两个重要问题，它们可以表述为式 (1)。

在预算匹配（*BM*）问题中，给定一个无向图 $G = (V, E)$、定义在边 p, c 上的收益和成本函数: $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, 以及预算 $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。解是 G 中的一个匹配 $S \subseteq E$，满足 $c(S) \leq \beta$。目标是找到一个解 S，使得

[1] 对于函数 f: $A \to \mathbb{R}$ 以及元素子集 $C \subseteq A$，我们定义 $f(C) = \sum_{e \in C} f(e)$。

©; 依据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权 莱布尼茨国际信息学会议录 达格斯图尔城堡 – 莱布尼茨信息学中心，达格斯图尔出版社，德国

总利润 $p(S)$ 最大化。注意，令$\mathcal{M}$为 G 中匹配的集合，即可用式 (1) 对预算匹配进行建模。

在预算拟阵交（*BI*）问题中，给定基集 E 上的两个拟阵 $(E,\mathcal{I}_1)$ 和 $(E,\mathcal{I}_2)$，元素 p, c 上的收益函数和成本函数 $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及一个预算 $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。每个拟阵均由一个成员预言机给出。解是一个公共独立集 $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，满足 $c(S) \leq \beta$；目标是找到一个总利润最大化的解 $p(S)$。通过将可行集定义为所有公共独立集 $\mathcal{M} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，即可将 BI 表述为 (1)。

设 OPT(I) 为最大化问题 Π 的实例 I 的最优解值。对于 $\alpha \in (0, 1]$, , 若$\mathcal{A}$ 是 Π 的一个 α-近似算法，则对于 Π 的任意实例 I，$\mathcal{A}$ 都会输出一个值至少为 $\alpha \cdot$OPT(I) 的解。Π 的多项式时间近似方案（PTAS）是一族算法 $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，满足对于任意 $\varepsilon > 0$，A_ε 都是 Π 的多项式时间 $(1-\varepsilon)$-近似算法。当 ε 变小时，PTAS 的运行时间若为 $n^{\Theta(\frac{1}{\varepsilon})}$ 形式，可能会变得极其庞大，因而不切实际；因此，自然会寻求运行时间更优的近似方案。此类方案中有两类已得到广泛研究：高效多项式时间近似方案（EPTAS）是一个 PTAS $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，其运行时间形式为 $f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot n^{O(1)}$，其中 f 是任意可计算函数，而 n 是输入实例的位长编码大小。全多项式时间近似方案（FPTAS）的运行时间形式为 $\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{O(1)}$，其中 A_ε。关于近似方案的综述，可参见例如 [17, 7]。

BM 和 BI 的最新成果是 Berger 等人 [1]提出的多项式时间近似方案。Chekuri 等人关于 BM 和 BI 的多预算变体的后续工作 [3] 也为这两个问题给出了类似的结果。上述方案的运行时间主要受穷举过程支配，该过程会找出解中收益最高的 $\Theta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 个元素。在本文中，我们采用一种新颖的方法优化枚举过程，从而大幅缩小寻找高效解的定义域。我们的主要结果如下。

▶**定理 1**。 预算匹配问题存在一个 EPTAS 。

▶**定理 2**。 预算拟阵交问题存在一个 EPTAS 。

1.1 相关工作

BM 和 BI 是经典 $0/1$背包问题的直接推广。尽管背包问题已知是 NP-难的，但它存在一个 FPTAS。这自然引出了一个问题：BM 和 BI 是否也存在 FPTAS？论文 [1, 3] 以及我们的结果可以被视为回答这一问题的初步尝试。

Berger 等人 [1] 开发了首个针对 BM 和 BI 的多项式时间近似方案。他们的方法包含一种优雅的组合算法，用于修补底层问题（即 BM 或 BI）的拉格朗日松弛的两个解；其中一个解是可行的，但收益较小；另一个解收益较高，但不可行。该方案枚举仅包含高收益元素的解，并使用组合算法添加低收益元素。此过程可能会损失某个低收益元素的（两倍）收益，从而得到一个多项式时间近似方案。

Chekuri 等人 [3] 为多预算匹配设计了一个多项式时间近似方案，并为多预算拟阵交设计了一个随机化 PTAS；它们分别是 BM 和 BI 的变体，其中成本是 d 维的，$d \geq 2$ 为某个常数。他们结合了复杂的基于鞅的分析来推导这些结果，并通过枚举来帮助选择解中的有利元素。该论文 [3] 推广了此前由

Grandoni 和 Zenklusen [8], 在 可表示拟阵中获得的多预算匹配和多预算拟阵交的 PTAS。[2] 对于 $d \geq 2$而言，多预算匹配和多预算拟阵交的多预算变体推广了二维背包问题，因此除非 W[1] = FPT [10]，否则不可能存在 EPTAS。

BM 不易获得 FPTAS 的一个佐证来自该问题的精确变体。在这种情形下，给定一个图 $G = (V, E)$、一个成本函数 $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个目标值 $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$；目标是找到一个完美匹配 $S \subseteq E$，使其成本恰好等于指定值$c(S) = B$。针对精确匹配，已有一种随机伪多项式时间算法 [12]。另一方面，精确匹配是否存在确定性伪多项式时间算法，长期以来仍是一个悬而未决的问题 [13]。有趣的是，正如 Berger 等人 [1], 所指出的，BM 的 FPTAS 也能对此后一问题给出肯定答案。BI 的 FPTAS 对精确拟阵交问题也会有类似的影响；该问题存在随机（但不存在确定性）伪多项式时间算法 [2]。尽管上述内容并未排除 BM 或 BI 存在 FPTAS 的可能性，但这表明，将我们的结果从 EPTAS 改进为 FPTAS 可能是一项艰巨的任务。

对于预算拟阵独立集（即由两个相同拟阵构成的预算拟阵交这一特殊情形），Doron-Arad 等人 [5] 开发了一种 EPTAS，利用代表集 改进对高利润元素的枚举。[3] 他们的方案利用预算约束下拟阵多面体的整数性（由 [8] 引入），高效地将低利润元素纳入解中。

1.2 贡献与技术

给定一个 BM 或 BI 的实例 I，若元素 e 满足 $p(e) > \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$，则称其为有利可图；否则，$e$ 称其为无利可图。Berger 等人 [1] 针对 BM 和 BI 的方案区分有利可图元素与无利可图元素。在主循环中，算法枚举所有仅包含有利可图元素的候选解。[4] 随后，通过一种组合算法将无利可图元素纳入每个解中。算法输出收益最高的解。总体而言，与最优解相比，这一过程最多会损失一个无利可图元素的两倍收益，因此能够有效保持近似保证；然而，对有利可图元素进行穷举会导致运行时间为 $n^{\Omega(\frac{1}{\varepsilon})}$。与此形成鲜明对比的是，本文提出了一种新方法，改进了对有利可图元素的枚举，从而实现 EPTAS。

我们将枚举范围限制为一小部分元素，称为代表集；也就是说，元素子集 $R \subseteq E$ 满足以下性质：存在一个解S，使得 S 中的有利元素是 R 的子集，并且 S 的收益至少为 $(1 - O(\varepsilon)) \cdot \mathrm{OPT}(I)$。如果能高效地找到一个基数为 $|R| \leq f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 的代表集 R，其中 f 是某个可计算函数，那么基于 [1] 的方法，就能直接得到一个 EPTAS。

我们的方案推广了 Doron-Arad 等人代表集框架 [5], ，该框架最初是为预算拟阵独立集而开发的。他们将代表集构造为拟阵的最小成本基，这可以通过贪心算法实现。遗憾的是，对于匹配和拟阵交问题，贪心算法的类似方法行不通；我们在图1中给出了一个例子。[5] 因此，我们采取了不同的方法。我们的主要技术贡献

[2] 可表示拟阵也称为线性拟阵。[3] 下面我们将详细说明 [5] 的框架与我们所说的代表集之间的区别。
[4] Chekuri 等人 [3] 也采用了类似的技术。[5] 读者熟悉第3节给出的定义后，这个例子便会一目了然。

在于为我们研究的每个问题构造代表集的新方法。

对于预算匹配，我们设计了一种出人意料地简单的算法，通过多个匹配的并集来寻找代表集。为此，我们将 G 中的边划分为利润类，使得每个利润类都包含利润相近的边。然后，我们使用贪心方法，在每个利润类中反复寻找不相交匹配的并集，其中每个匹配具有有界基数，并通过贪心方式选择以最小化成本。直观地说，为了证明上述方法能够得到代表集，考虑某个最优解中的一条有收益的边 e。假设 e 未被选入我们的匹配并集，则分两种情况讨论。如果在 e 所属的利润类中选出的每个匹配都包含一条与 e相邻的边（即与其共享一个顶点），我们证明这些边中至少有一条可以与 e进行交换；否则，存在一个不含与 e相邻的边的匹配。在这种情况下，我们证明贪心选择保证该匹配中存在一条可以与e交换的边，从而说明上述集合是一个代表集（详见第 4 节）。

对于预算拟阵交，我们设计了一种递归算法，它依赖于对给定的两个拟阵进行非对称解释。在每次递归调用中，我们都会获得一个独立集 $S \in \mathcal{I}_1$。算法会将第二个拟阵（$E,\mathcal{I}_2$）的一个最小成本基 B_S 加入所构造的代表集，并施加一项关键限制：任何元素 $e \in B_S$ 都必须满足$S \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1$。随后，每次递归调用都会使用集合 $S \cup \{e\}$，对每个 $e \in B_S$均如此。因此，我们将搜索空间限制为 $\mathcal{I}_1$，，同时相对于 $\mathcal{I}_2$构造基。为了证明该算法能产生代表集，考虑最优解中的一个有利可图元素 f。我们构造一个元素序列，其中的元素相对于 $\mathcal{I}_1$ 是独立的，并且可以相对于 $\mathcal{I}_2$与 f 交换。利用拟阵性质，我们证明其中一个元素可以相对于两个拟阵同时与 f 交换（详见第 5 节）。

有趣的是，我们用于求解 BM 和 BI 的框架（见第3节）可以扩展到求解其他形式化为 (1) 且具有类似交换性质的问题。我们将在第6节详细阐述这一点。此外，我们为 BM 和 BI 构造代表集的算法也可能有助于解决其他预算优化问题（见第6节），因此本身也具有研究价值。

论文结构：第 2 节给出一些定义和记号。第3节介绍我们的框架，该框架可为每个问题提供一个 EPTAS。第4节和第5节分别介绍为 BM 和 BI 构造代表集的算法。最后，我们在第6节总结全文，并提出一些未来研究方向。由于篇幅限制，部分证明收录于附录。

2 预备知识

为简化记号，对于任意集合 A 和元素 e，我们分别用 $A+e$ 和 $A-e$ 表示 $A \cup \{e\}$ 和 $A \setminus \{e\}$。此外，对于任意 $k \in \mathbb{R}$，令 $[k] = \{1, 2, \ldots, \lfloor k \rfloor\}$。对于函数 $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及元素子集 $C \subseteq A$，令 $f|_C\colon C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 f 在 C 上的限制，使得 $\forall e \in C\colon f|_C(e) = f(e)$。

2.1 匹配与拟阵

给定一个无向图 $G = (V, E)$，G 的一个匹配 是边 $M \subseteq E$ 的一个子集，使得每个顶点在 M 中至多作为一条边的端点出现一次；也就是说，对所有 $v \in V$，都有 $|\{\{u, v\} \in M \mid u \in V\}| \leq 1$。我们用 $V(M) = \{v \in V \mid \exists u \in V$满足$\{u, v\} \in M\}$表示 G的一个匹配 M 的端点集合。

设 E 为有限基集，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 为包含 E 的非空集合，称 E 的子集为 E 的独立集。若满足以下条件，则 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ 是一个拟阵。

1.（遗传性质）对于所有 $A \in \mathcal{I}$ 和 $B \subseteq A$，均有 $B \in \mathcal{I}$。2.（交换性质）对于任意 A，$B \in \mathcal{I}$ 其中 $|A| > |B|$，存在 $e \in A \setminus B$ 使得 $B + e \in \mathcal{I}$。

拟阵的基 $\mathcal{G} = (E, \mathcal{I})$ 是一个独立集 $B \in \mathcal{I}$，满足对所有 $e \in E \setminus B$，都有 $B + e \notin \mathcal{I}$。给定成本函数 $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，若对于任意 $\mathcal{G}$ 的基 A，都有 $c(B) \leq c(A)$，则称 $\mathcal{G}$ 的基 B 是相对于 c 的最小基。通过贪心方法，可以在多项式时间内轻松构造相对于 c 的 $\mathcal{G}$ 的最小基（例如，参见 [4]）。下面我们定义几种拟阵操作。注意，定义 3 中所述操作得到的结构都是拟阵（例如，参见 [16]）。

▶ **定义 3.** 设 $G = (E, I)$ 是一个拟阵。
1.（限制）对于任意 $F \subseteq E$，定义 $I_{\cap F} = \{A \in I \mid A \subseteq F\}$，且 $G \cap F = (F, I_{\cap F})$。*2.*（稀疏化）对于任意 $F \in I$，定义 $I/F = \{A \subseteq E \setminus F \mid A \cup F \in I\}$，且 $G/F = (E \setminus F, I/F)$。[6] *3.*（截断）对于任意 $q \in \mathbb{N}$，定义 $I_{\leq q} = \{A \in I \mid |A| \leq q\}$，且 $[G]_{\leq q} = (E, I_{\leq q})$。

2.2 实例定义

我们为预算匹配和预算拟阵交的实例给出一个统一定义。给定由元素组成的基集 E，如果满足以下条件之一，我们就称 $\mathcal{C}$ 是 E 的一个约束。

- $\mathcal{C} = (V, E)$ 是一个匹配约束，其中 $\mathcal{C}$ 是一个无向图。令 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \{M \subseteq E \mid M$ 表示 $\mathcal{C}\}$ 中的一个匹配，它构成 $\mathcal{C}$ 的可行集。给定边的一个子集 $F \subseteq E$，令 $E/F = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \notin V(F)\}$ 表示在 E 上对 F 进行稀疏化，并令 $\mathcal{C}/F = (V, E/F)$ 表示在 $\mathcal{C}$ 上对 F 进行稀疏化。
- $\mathsf{C} = (\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2)$ 是一个拟阵交约束，其中 (E, I_1) 和 (E, I_2) 是拟阵。在本文中，我们假设每个拟阵均由独立性预言机给出。也就是说，判断某个 $F \subseteq E$ 是否属于 I_1 或 I_2，分别只需调用 I_1 或 I_2，对应的预言机一次。令 $\mathsf{M}(\mathsf{C}) = \mathsf{I}_1 \cap \mathsf{I}_2$ 表示 C 的可行集族。此外，给定某个 $F \subseteq E$，令 $\mathsf{C}/F = (\mathsf{I}_1/F, \mathsf{I}_2/F)$ 表示在 C 上对 F 进行稀疏化。我们称 C 是单拟阵约束，如果 $\mathsf{I}_1 = \mathsf{I}_2$

根据上下文可以理解时，我们简记 $\mathsf{M} = \mathsf{M}(\mathsf{C})$。将预算约束问题（BC）的一种实例定义为一个元组 $I = (E, \mathsf{C}, c, p, \beta)$，其中 E 是由元素构成的基集，C 是 E 的一个约束，$c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是成本函数，$p: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是利润函数，$\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是预算。如果 C 是匹配约束，则 I 是 BM 实例；否则，I 是 BI 实例。I 的一个解是一个可行集 $S \in \mathsf{M}(\mathsf{C})$，满足 $c(S) \leq \beta$。目标是找到 I 的一个解 S，使 $p(S)$ 最大化。令 $|I|$ 表示 BC 实例 I 的编码大小，$\mathrm{poly}(|I|)$ 表示 $|I|$ 中的多项式大小。

3 算法

本节将介绍 BC 问题的 EPTAS。我们的第一步是确定构造出的解中的有利可图的元素集合。[7] 为此，我们将代表集的概念 [5] 推广到 BC 场景。[8] 我们的方法首先依赖于找到一个

[6] 稀疏化通常也称为收缩；为避免与图中的边收缩混淆，我们使用“稀疏化”这一术语。[7] 例如，[8, 1, 5]中也采用了类似的方法。[8] [5] 的代表集可以视为我们提出的严格代表集的一个特例（参见定义 6）。

基数较小的有利元素集合，再通过枚举从中选出收益最高的元素加入解中。随后，使用 [1] 的一种技术将无利可图的元素加入解中。

在本节余下部分，固定一个 BC 实例 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 和一个误差参数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$。令 $H(I, \varepsilon) = \{e \in E \mid p(e) > \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)\}$ 表示 I 中的有利可图元素集合，$E \setminus H(I, \varepsilon)$ 表示无利可图的 元素集合；根据上下文明确时，我们记作 $H = H(I, \varepsilon)$。现在，代表集是一个元素子集，其中包含某个近似 最优解中的有利元素。形式化地，

▶ 定义 4. 设 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 为一个 BC 实例，$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 且 $R \subseteq E$。如果存在 I 的一个解 S，使得以下条件成立，则称 R 为 I 和 ε 的代表集。1. $S \cap H \subseteq R$。2. $p(S) \geq (1 - 4\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$。

[5] 的工作为以下关于替代集和严格代表集（SRS）的概念奠定了基础，适用于 BC 中 $\mathcal{C}$ 为单个拟阵约束的特殊情形。下面我们将替代集和 SRS 的定义推广到一般情形。

直观地说，对于基数有界的 I 的解 S，其替代集是针对 I 的另一个解，它保留了 S 中有利元素的属性（即 $S \cap H$）。具体而言，替代集的收益接近 $p(S \cap H)$，而成本和有利元素的数量只能更小。SRS 是一个元素子集，其中包含 I 的基数有界的每个解的一个替代集。

一般 BC 实例的替代集和 SRS 的形式化定义分别见定义 5 和 6。设 $q(\varepsilon) = \left\lceil \varepsilon^{-\varepsilon^{-1}} \right\rceil$，且 $\mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)} = \{A \in \mathcal{M} \mid |A| \leq q(\varepsilon)\}$为 $\mathcal{C}$ 和 ε 的所有有界可行集。回顾一下，我们使用 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ 表示$\mathcal{C}$的可行集；对于有界可行集，记号也采用类似的简化。

▶ **定义 5.** 给定一个BC 实例 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，$S \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，以及$Z_S \subseteq E$，我们称 Z_S 是 I 和 ε 对应的 S 的替代集，如果满足以下条件：
1. $(S \setminus H) \cup Z_S \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$. 2. $c(Z_S) \leq c(S \cap H)$. 3. $p((S \setminus H) \cup Z_S) \geq (1 - \varepsilon) \cdot p(S)$. 4. $|Z_S| \leq |S \cap H|$.

▶ **定义 6.** 给定一个BC 实例 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，以及 $R \subseteq E$，我们称 R 是 I 和 ε 的严格代表集（SRS），如果对于任意 $S \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，都存在一个 I 和 ε对应的 S 的替代集 $Z_S \subseteq R$。

注意，对于 I 的任意解 S，只要 $|S| \leq q(\varepsilon)$，就有 $S \cap H$ 是 S 的替代集；此外，E 是一个 SRS。在下一个结果中，我们展示 SRS 在求解 BC 时的作用。具体而言，我们证明任意 SRS $R \subseteq E$ 也是一个代表集。因此，通过枚举 R 的子集，我们可以找到一个元素子集，只需添加无利可图元素即可将其扩展为近似 最优解（见算法 2）。

▶ **引理 7.** 设 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 是一个BC 实例，设 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，并设 R 是I 和 ε 的一个SRS。那么 R 是 I 和 ε 的一个代表集。

引理 7 的证明见附录 A。接下来，我们构造一个 SRS，其基数仅取决于 ε。首先，我们将有利元素（以及可能的一些其他元素）划分为少数几个利润类，同一利润类中的元素具有相近的利润。这些利润类由 $\mathrm{OPT}(I)$ 的一个 2-近似 α 得到，

它可以在多项式时间内轻松计算。具体而言，对于所有 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，将 r-利润类别定义为

$$\mathcal{K}_r(\alpha) = \left\{ e \in E \;\middle|\; \frac{p(e)}{2\cdot\alpha} \in \left((1-\varepsilon)^r, (1-\varepsilon)^{r-1}\right] \right\}. \tag{2}$$

下面，我们为每个利润类别定义一个交换集 。这有助于构造 SRS。简而言之，元素的子集 X 是某个利润类别 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的交换集，当且仅当对于任意可行集 Δ 和元素 $a \in (\Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)) \setminus X$，都可以用某个元素 $b \in (X \cap \mathcal{K}_r(\alpha)) \setminus \Delta$ 替换它（同时保持可行性），且 b 的成本不高于 a的成本。形式化地说，

▶ 定义 8. 设 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 是一个 BC 实例，$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$, $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$, 且 $X \subseteq \mathcal{K}_r(\alpha)$。我们称 X 是 I, ε, α 和 r 的交换集，如果满足：对于所有 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in (\Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)) \setminus X$，都存在 $b \in (\mathcal{K}_r(\alpha) \cap X) \setminus \Delta$ 使得

- $c(b) \leq c(a)$。
- $\Delta - a + b \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。

SRS 与交换集之间的相似性并非偶然。我们证明，若集合$R \subseteq E$满足：对于任意 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，$R \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$ 都是交换集，则 R是 SRS，因此根据引理 7，它也是一个代表集。这使我们能够通过对每个利润类别分别取一个互不相交的交换集的并集来构造 SRS。

▶ **引理 9**。 设 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 是一个 BC 实例，$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$且 $R \subseteq E$。若对所有 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，$R \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$ 都是I、ε、α和 r的交换集，则 R 是 I 和 ε的代表集。

我们在附录 A 中给出形式化证明。现在，我们提出一种统一算法，用于为两类约束——匹配约束或拟阵交约束——寻找代表集。该算法通过取所有利润类的交换集之并来实现这一点。不过，在构造交换集时，我们会区分这两类约束。因此，得到的代表集大小也有所不同。用于寻找交换集的算法是本文的核心技术贡献。

对于匹配约束，我们设计了一种算法：通过从给定利润类中寻找多个$\mathcal{C}$ 匹配，为任意利润类构造交换集。每个匹配的基数都有界，并采用贪心方法选择边以使成本最小化。我们在第 4 节中给出引理10的完整细节和形式化证明。

▶ **引理10**。 存在一个算法ExSet-Matching，给定一个预算匹配 实例 I, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$以及 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，可在时间 $q(\varepsilon)\cdot \mathrm{poly}(|I|)$ 内返回一个交换集 X，用于 I, ε, α 和 r，使得 $|X| \leq 18\cdot q(\varepsilon)^2$。

我们针对拟阵交约束的算法更加复杂，并通过对给定的两个拟阵进行非对称解读来生成一个交换集。我们在第 5 节给出完整细节，并在附录 C 给出引理 11 的形式化证明。

▶**引理 11.** 存在一个算法ExSet-MatroidIntersection，对于给定的预算拟阵交 实例 I, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$以及 $r \in [对数_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，可在 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}\cdot$ 多项式$(|I|)$时间内返回一个交换集 X，适用于 I, ε, α 和 r，且满足 $|X| \leq q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}$。

利用上述结果，我们设计了一种算法，可为这两类约束返回一个代表集。具体做法是计算 OPT(I) 的 2-近似 α，然后

算法1 RepSet($I = (E, C\ c, p, \beta)\ \varepsilon$) 输入：一个 BC 实例 I 和误差参数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$。输出：$I$ 和 ε 的代表集 R。1 使用参数为 $\varepsilon' = \frac{1}{2}$ 的 BC 多项式时间近似方案，计算 I 的 2-近似 S^*。2 设置 $\alpha \leftarrow p(S^*)$。3 初始化 $R \leftarrow \emptyset$。4 对 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1]$ 执行 5 若 I 是 BM 实例，则6 $R \leftarrow R \cup$ ExSet-Matching($I, \varepsilon, \bar{\alpha}, r$)。7 否则8 $R \leftarrow R \cup$ ExSet-MatroidIntersection($I, \varepsilon, \alpha, r$)。9 返回 R。

针对相应类型的约束，为所有利润类寻找交换集。最后，我们返回上述交换集的并集。我们的算法 RepSet 的伪代码见算法1。

▶ **引理 12**。给定一个 BC 实例 $I = (E, C\ c, p, \beta)$ 和 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，算法*1*返回一个代表集 R，其中包含 I 和 ε，并且以下条件之一成立。

- 如果 C 是匹配约束，则运行时间为 $q(\varepsilon)^2 \cdot$多项式($|I|$)，且 $|R| \leq 54 \cdot q(\varepsilon)^3$。如果 C 是
- 拟阵交约束，则运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))} \cdot$多项式($|I|$)，且 $|R| \leq q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}$。

该引理的证明见附录 A。接下来，我们使用 [1] 的结果，将收益较低的元素加入解中。[1] 的技术基于对 BC 的拉格朗日松弛的两个解进行非平凡的拼接（分别针对匹配约束和拟阵交约束）。该方法产生一个收益几乎最优的可行集；在最坏情况下，它与最优解之间的差距是实例中某个元素最大收益的两倍。由于我们只对无利可图元素使用后一种方法，因此这实际上不会损害我们的近似保证。下面给出 [1]上述结果的简洁表述。

▶**引理 13.** 存在一个多项式时间算法NonProfitableSolver，给定一个BC实例 $I = (E, C\ c, p, \beta)$，即可计算一个解 S，其收益为 $I\ p(S) \geq \mathrm{OPT}(I) - 2 \cdot \max_{e \in E} p(e)$。

结合上述算法与我们用于计算代表集的算法，我们得到一个针对 BC 的 EPTAS。令 R 为 RepSet(I, ε) 返回的代表集。我们的方案枚举 R 的子集，以选取解中的有利可图元素。随后，使用算法 NonProfitableSolver将解扩展，使其也包含无利可图元素。具体而言，令$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq$OPT($I$) 为 I 最优收益的一个 2-近似。此外，令 $E(\alpha) = \{e \in E \mid p(e) \leq 2\varepsilon \cdot \alpha\}$ 为包含无利可图元素、且可能也包含有利可图元素的集合 $e \in E$，满足 $p(e) \leq 2\varepsilon \cdot$OPT($I$)。给定一个可行集 $F \in \mathcal{M}$，我们定义一个残余 BC 实例，其中包含可通过添加 $E(\alpha)$中的元素来扩展F 的元素。更形式化地说，

▶ **定义 14**。给定一个BC 实例 $I = (E, C\ c, p, \beta)$、$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$以及 $F \in M(C)$，F和 α针对 I的残余实例是BC 实例 $I_F(\alpha) = (E_F, C_F, c_F, p_F, \beta_F)$，定义如下。

- $E_F = E(\alpha) \setminus F$。

$C_F = C/F.p_F = p|_F$（即 p 在 F 上的限制）。$c_F = c|_F.\beta_F = \beta - c(F)$。

▶ **观察15**。设 $I = (E, C\ c, p, \beta)$ 是一个BC 实例，$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$，$F \in M(C)$，并设 T 是 $I_F(\alpha)$ 的一个解。那么，$T \cup F$ 是 I 的一个解。

对于满足 $|F| \leq \varepsilon^{-1}$ 的 I 的所有解 $F \subseteq R$，我们使用算法 NonProfitableSolver 为残余实例 $I_F(\alpha)$ 求得一个解 T_F，并将 $K_F = T_F \cup F$ 定义为 F 的扩展解。我们的方案会遍历所有此类解F 对应的扩展解 K_F，并选择总利润最大的扩展解 K_{F^*}。该方案的伪代码见算法 2。

算法 2 EPTAS($I = (E, C\ c, p, \beta)$ ε) 输入：一个 BC 实例 I 和一个误差参数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$。输出：$I$ 的一个解。1 构造代表集 $R \leftarrow$ RepSet(I, ε)。2 使用参数为 $\varepsilon' = \frac{1}{2}$ 的 BC 多项式时间近似方案，为 I 计算一个 2-近似 S^*。3 设置 $\alpha \leftarrow p(S^*)$。4 初始化一个空解 $A \leftarrow \emptyset$。5 对于满足 $|F| \leq \varepsilon^{-1}$ 且 F 是 I 的一个解的 $F \subseteq R$，执行以下操作：6 使用 $T_F \leftarrow$ NonProfitableSolver($I_F(\alpha)$) 为 $I_F(\alpha)$ 求一个解。7 令 $K_F \leftarrow T_F \cup F$。8 如果 $p(K_F) > p(A)$，则 9 更新 $A \leftarrow K_F$。10 返回 A。

算法 2 的运行时间关键取决于代表集的基数。粗略地说，运行时间等于代表集中包含至多 ε^{-1} 个元素的子集数量，乘以一个关于实例编码大小的多项式计算时间。此外，由于 $R = $ RepSet(I, ε) 是一个代表集（根据引理 12），因此存在一个 I 的近似最优解 S，使得其中的有利元素是 R 的子集。因此，算法 2 的 **for** 循环中存在一次迭代，使得 $F = S \cap H$。在引理 16 的证明中，我们聚焦于这次迭代，并证明它会得到一个 I 的解 K_F，其收益近似最优。

▶ **引理 16**。给定一个 BC 实例 $I = (E, C\ c, p, \beta)$ 以及 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，算法 *2* 返回一个针对 I 的解，其收益至少为 $(1 - 8\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I)$，并且满足以下条件之一。

若 I 是一个预算匹配 实例，运行时间为 $2^{O(\varepsilon^{-2}\ 对数\ \frac{1}{\varepsilon})} \cdot$ 多项式($|I|$)。若 I 是一个预算拟阵交 实例，运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1} \cdot q(\varepsilon))} \cdot$多项式($|I|$)，其中 $q(\varepsilon) = \left\lceil \varepsilon^{-\varepsilon^{-1}} \right\rceil$。

引理 16 的证明见附录 A。现在我们可以证明主要结果。**定理 1 和定理 2 的证明：** 给定一个 BC 实例 I 和 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，使用带参数 $\frac{\varepsilon}{8}$的算法 2 来处理 I，根据引理 16，我们得到所需的近似保证。此外，运行时间为 $2^{O(\varepsilon^{-2} \log \frac{1}{\varepsilon})} \cdot \mathrm{poly}(|I|)$ 或 $q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1} \cdot q(\varepsilon))} \cdot \mathrm{poly}(|I|)$，具体取决于 I 分别是 BM 实例还是 BI 实例。◀

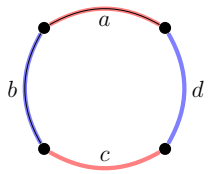

图1 一个说明二分图匹配可能无法产生交换集的例子。考虑以红色和蓝色标出的两个匹配 $\Delta_1 = \{a, c\}$ $\Delta_2 = \{b, d\}$，并假设 $\mathrm{K}_r(\alpha) = \{a, b\}$ 是一个利润类别。$\mathrm{K}_r(\alpha)$ 的唯一交换集是 $\{a, b\}$，它不是一个匹配。注意，二分图匹配可以表示为拟阵交。对于二分图 $G = (L \cup R, E)$，定义拟阵 $\mathrm{M}_1 = (E, \mathrm{I}_1)$ 和 $\mathrm{M}_2 = (E, \mathrm{I}_2)$，其中 $\mathrm{I}_1 = \{F \subseteq E | \forall v \in L\colon |F \cap N(v)| \leq 1\}$，$\mathrm{I}_2 = \{F \subseteq E | \forall v \in R\colon |F \cap N(v)| \leq 1\}$，其中 $N(v)$ 是 v 的邻居集合。因此，二分图匹配是匹配和拟阵交的一个特例。

4 匹配约束的交换集

在本节中，我们设计一种算法，用于为 BM 实例和利润类别寻找交换集，从而证明引理10。在本节余下部分，固定一个 BM 实例 $I = (E, \mathcal{C}\ c, \ p, \ \beta)$、一个误差参数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$、$\mathrm{OPT}(I)$ 的 2-近似，以及一个利润类别 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的索引 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1]$。

我们注意到，对于单拟阵约束，可以通过在拟阵 [5] 中寻找最小成本基来构造交换集。具体而言，文献 [5] 证明，在拟阵 $[\mathcal{G} \cap \mathcal{K}_r(\alpha)]_{\leq q(\varepsilon)}$ 中的最小成本基是 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的交换集。这种交换集可以通过贪心方法轻松计算。对于匹配约束，一种类似的做法是在 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 中寻找基数为 $\Omega(q(\varepsilon))$ 且总成本最小的匹配。然而，如图1所示，这种思路行不通。因此，我们转而采用一种完全不同的方法。

一个关键观察是，即使贪心匹配算法可能不足以构造交换集，多次应用该算法也可能解决问题。因此，我们的算法将贪心方法匹配作为一个子程序。该算法迭代地选择成本最低的边，同时确保所选边集构成匹配。此过程持续进行，直到算法达到给定的基数上限，或无法再添加边为止。GreedyMatching 的伪代码见算法 3。[9]

算法 3 GreedyMatching$(G = (V, \ E) \ N, \ c)$**输入：** 一个图 G、一个整数 $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$和一个成本函数 $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.**输出：** 一个 G的匹配 M.**1** 初始化 $M \leftarrow \emptyset$.**2** **当** $|M| < N$ 且 $E/M \neq \emptyset$ **时**.**3** 找到关于 c成本最小的 $e \in E/M$.**4** 更新 $M \leftarrow M + e$.**5** 返回 M.

给定一个图 $G = (V, \ E)$ 和两条边 $a, \ b \in E$，若存在 $x, \ y, \ z \in V$使得 $a = \{x, \ y\}$ 且 $b = \{y, \ z\}$，则称 $a, \ b$ 相邻；对于所有 $e \in E$，令 $\mathrm{Adj}_G(e)$ 表示相邻

[9] 给定一个图 $G = (V, \ E)$ 和一个 G的匹配 M，稀疏化 E/M 的定义见第 2 节。

于 e 的边在 G 中的集合。在下一个结果中，我们将证明，若边 a 未被 GreedyMatching 选入解，则该算法要么选择一条相邻边，其成本至多为 $c(a)$，要么所有选中的边的成本都至多为 $c(a)$。

▶ **引理 17**。给定一个图 $G=(V,E)$、$N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，算法 *3* 可在多项式时间内返回一个 G 的匹配 M，使得对于所有 $a \in E \setminus M$，以下条件之一成立。

1. $|M| \leq N$ 且存在 $b \in \mathrm{Adj}_G(a) \cap M$ 使得 $c(b) \leq c(a)$。**2.** $|M| = N$，对于所有 $b \in M$，都有 $c(b) \leq c(a)$，且 $M + a$ 是 G的匹配。

证明。显然，算法 3 可在多项式时间内返回 G的一个匹配 M。注意，根据步骤 2，$|M| \leq N$。为证明 1. 或 2. 成立，我们分两种情况讨论。$a \notin E/M$。于是 $\mathrm{Adj}_G(a) \cap M \neq \emptyset$。令 e 为步骤 4 中加入 M 的 $\mathrm{Adj}_G(a) \cap M$ 中的第一条边；另令 L 为在 e之前加入 M 的边集。于是 $a \in E/L$，因为 L 不包含与 a相邻的边。根据步骤 3，有 $c(e) = \min_{e' \in E/L} c(e') \leq c(a)$。$a \in E/M$。因此，$|M| = N$；否则，$a$将被加入 M。此外，$M+a$是 G的一个匹配。现在，令 $b \in M$，并令 K为在 b之前加入 M的边集。由于 $M+a$是 G的一个匹配，根据 $(E, \mathrm{M}(G))$ 的遗传性质，$K+a$是 G的一个匹配；因此，$a \in E/K$，并且根据步骤 3 可得 $c(b) = \min_{e' \in E/K} c(e') \leq c(a)$。

◀

根据引理 17，我们论证可以通过迭代使用 GreedyMatching 找到一个交换集。具体而言，设 $k(\varepsilon) = 6 \cdot q(\varepsilon)$ 且 $N(\varepsilon) = 3 \cdot q(\varepsilon)$。我们运行 GreedyMatching $k(\varepsilon)$ 次，每次迭代都将匹配的基数限制为 $N(\varepsilon)$。在第 i 次迭代中，我们从利润类别 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的边中选择一个匹配 M_i，并从图中移除所选的边。因此，在后续迭代中，也可以选择与之前所选边相邻的边。图 2 展示了该算法的小规模示例。用于为给定利润类别计算交换集的 ExSet-Matching 算法伪代码见算法 4。

算法 4 ExSet-Matching($I = (E, \mathrm{C}\ c, p, \beta)\ \varepsilon, \alpha, r$) 输入：一个匹配-BC实例 I，$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$，$r \in [\lceil \log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1 \rceil]$。输出：针对 I、ε 和 α 的交换集，以及 r。1 初始化 $X \leftarrow \emptyset$ 和 $\mathrm{E}_0 \leftarrow \mathrm{K}_r(\alpha)$。2 对于 $i \in \{1, \ldots, k(\varepsilon)\}$ do 3 定义 $G_i = (V, \mathrm{E}_{i-1})$，其中 V 是 C 的顶点集。4 计算 $M_i \leftarrow \mathrm{GreedyMatching}\left(G_i, N(\varepsilon)\ c|_{\mathcal{E}_{i-1}}\right)$。5 更新 $X \leftarrow X \cup M_i$ 并定义 $\mathrm{E}_i \leftarrow \mathrm{E}_{i-1} \setminus M_i$。6 返回 X。

ExSet-Matching 算法输出一个由利润类别 $\mathrm{K}_r(\alpha)$ 中的边构成的不相交匹配的并集 X M_1，...，$M_{k(\varepsilon)}$。对于某个 $\Delta \in \mathrm{M(C)}$ 和 $a \in (\Delta \cap \mathrm{K}_r(\alpha)) \setminus X$，根据引理 17，有两种情况概括了引理10证明中的主要思路。所有匹配 M_i 都包含某个 b_i，它与 a 相邻，使得 $c(b_i) \leq c(a)$。于是，由于 $k(\varepsilon)$ 足够大，这样的某个 b_i 不与 $\Delta - a$ 中的任何边相邻。因此，$\Delta - a + b_i$ 是一个匹配。

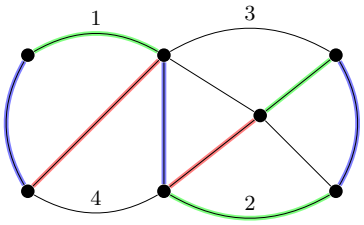

图 2 使用（小得不合法的）参数 $N(\varepsilon) = k(\varepsilon) = 3$ 的 ExSet-Matching 算法示意图。边旁的参数表示成本。迭代 $i = 1,2,3$ 中选取的边分别以蓝色、红色和绿色标记。

这样的某个 M_i 只包含成本至多为 $c(a)$ 的边；由于 $N(\varepsilon)$ 足够大，存在 $b \in M_i$，使得 $\Delta - a + b$ 是一个匹配。

引理10的证明：对于所有 $i \in \{1, \dots, k(\varepsilon)\}$，令 G_i 和 M_i 分别为 ExSet-Matching$(I, \varepsilon, \alpha, r)$ 中 for 循环第 i 次迭代的步骤 3 和 4 的输出。此外，令 X 为该算法的输出；注意 $X = \bigcup_{i \in [k(\varepsilon)]} M_i$。我们证明 X 是 I, ε, α 和 r 的交换集（见定义 8）。令 $\Delta \in \mathrm{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，且令 $a \in (\Delta \cap \mathrm{K}_r(\alpha)) \setminus X$。我们将在下面的断言中使用下列不等式。

$$\frac{k(\varepsilon)}{2} = N(\varepsilon) = 3 \cdot q(\varepsilon) > 2 \cdot |\Delta| = |V(\Delta)|. \tag{3}$$

该不等式成立是因为 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。最后一个等式成立是因为每个顶点在一个匹配中至多作为端点出现一次。

▷ 断言 18。存在 $b \in (X \cap \mathcal{K}_r(\alpha)) \setminus \Delta$ 使得 $\Delta - a + b \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，且 $c(b) \leq c(a)$。

证明。令 $a = \{x, y\}$、$I = (E, \mathsf{C}, c, p, \beta)$，以及 $\mathsf{C} = (V, E)$。由于 $a \notin X$，对于所有 $i \in \{1, \dots, k(\varepsilon)\}$，都有 $a \notin M_i$；因此，$a \in \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_{i-1} \setminus M_i$。于是，根据引理 17，以下情况之一成立。

1. 对于所有 $i \in [k(\varepsilon)]$，存在 $b_i \in$ 邻接$_{G_i}(a) \cap M_i$ 使得 $c(b_i) \leq c(a)$。对于 $z \in \{x, y\}$ 令

$$J_z = \{i \in [k(\varepsilon)] \mid \exists u \in V : b_i = \{z, u\}\}$$

为与 z 相邻的边 b_i 的索引集合。由于 $b_i \in \mathrm{Adj}_{G_i}(a)$，因此有 $J_x \cup J_y = [k(\varepsilon)]$。于是，存在 $z \in \{x, y\}$，使得 $|J_z| \geq {}^{k}(\frac{\varepsilon}{2} > |V|)\,(\Delta)|$，其中最后一个不等式由 (3) 得出。对于任意 $i \in J_z$，令 $v_i \in V$ 为 b_i 中与 z 相连的顶点，即 $b_i = \{z, v_i\}$。由于匹配 M_1、$\dots M_{k(\varepsilon)}$ 互不相交，且 $b_i \in M_i$，因此对于 $i \in J_z$，顶点 v_i 彼此不同。由于 $|J_z| > |V(\Delta)|$，存在 $i^* \in J_z$，使得 $v_{i^*} \notin V(\Delta)$。因此，$\Delta - a + b_{i^*} \in \mathrm{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，且 $c(b_{i^*}) \leq c(a)$。

2. 存在 $i \in \{1, \dots, k(\varepsilon)\}$ 使得 $|M_i| = N(\varepsilon)$对所有 $b \in M_i$ 均有 $c(b) \leq c(a)$，且 $M_i + a$ 是 G_i 的一个匹配。于是，

$$|M_i| = N(\varepsilon) > |V(\Delta)|. \tag{4}$$

根据情况 2 中 M_i 的定义，等式成立。不等式由 (3) 得出。由于每个顶点在一个匹配中至多作为端点出现一次，根据 (4)，存在$b \in M_i$，使得 b 的两个端点都不在 $V(\Delta)$ 中。因此，$\Delta + b \in \mathcal{M}$；根据遗传性质，且由于 $a \in \Delta$，可得 $\Delta - a + b \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。

◁

根据断言 18 和定义 8，我们有 X 是 I、ε、α 的交换集，并且 r，如所需。为完成引理的证明，我们将在附录 B 中证明如下结论。

▷ 断言 19. $|X| \leq 18 \cdot q(\varepsilon)^2,$，算法 4 的运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))} \cdot \text{poly}(|I|)$.

◀

5 拟阵交约束的交换集

本节中，我们设计一种算法，用于在 BI 实例中为一个利润类别寻找交换集，并由此证明引理 11。在本节余下部分，固定一个 BI 实例 $I = (E, \mathcal{C}\ c,\ p,\ \beta)$、一个误差参数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$、OPT($I$) 的一个 2-近似，$\text{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \text{OPT}(I)$，以及利润类别 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的一个索引 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1]$。此外，令$\mathcal{C} = (\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2)$ 为 I 的拟阵交约束$\mathcal{C}$。为简洁起见，在上下文明确时，本节中的一些引理会考虑给定参数（例如 I），而不显式声明。受篇幅限制，本节中各引理的证明见附录 C。

如图1所示，在拟阵交中，简单的贪心方法虽然能找到一个最小成本的可行集（在$\mathcal{K}_r(\alpha)$范围内），但可能无法为$\mathcal{K}_r(\alpha)$输出交换集。相反，我们的方法建立在拟阵交的一些有趣性质之上。下一个定义给出了关于两个拟阵的可行集 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和元素$a \in \Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$的移位性质 。我们利用这一性质证明我们的算法能够构造一个交换集。

▶ 定义 *20*。设 $\Delta \in M^{\leq q(\varepsilon)}$、 $a \in \Delta \cap K_r(\alpha)$和 $b \in K_r(\alpha) \setminus \Delta$。我们称 b 是 Δ 的一个移位，当且仅当 $c(b) \leq c(a)$且 $\Delta - a + b \in M^{\leq q(\varepsilon)}$；此外，若 $c(b) \leq c(a)$且 $\Delta - a + b \in I_2$ 但 $\Delta - a + b \notin I_1$，则称 b 是Δ 的一个半移位。

作为交换集算法的起点，我们说明如何获得基数较小的集合，使得对于每一对 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in \Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$，其中都包含一个移位或半移位。以下结论的证明见附录 C。

▶ **引理 21.** 设 $U \subseteq K_r(\alpha)$、 $\Delta \in M^{\leq q(\varepsilon)}$，且 B 是相对于 c 的 $[(E, I_2) \cap U]_{\leq q(\varepsilon)}$ 的一个最小基。另外，设 $a \in (U \cap \Delta) \setminus B$。那么，存在 $b \in B \setminus \Delta$，使得 b 是到 a 的半移位（针对 Δ），或者 b 是到 a 的移位（针对 Δ）。

注意，要得到一个交换集，我们的目标是找到 $\mathcal{K}_r(\alpha)$ 的一个子集，使其对于每一对 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in \Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$ 都包含一个移位。因此，利用引理 21，我们设计了如下递归算法 ExtendChain。该算法针对越来越受限的基集（相对于 $\mathcal{I}_2$，和 $\mathcal{I}_1$），找出拟阵的最小基之并。算法 ExtendChain 的伪代码见算法 5。

我们可以将 ExtendChain 的执行过程视为一棵树，其中每个节点（下文称为分支）对应于特定递归调用中的子集 $S \subseteq \text{K}_r(\alpha)$。现在说明 S 在算法 ExtendChain 中的作用。如果 $|S| \geq q(\varepsilon) + 1$，我们就直接返回 $\emptyset$；这样的分支称为叶节点，不会为构造的交换集贡献元素。否则，将分支 S 的全集定义为 $U_S = \{e \in \text{K}_r(\alpha) \setminus S \mid S + e \in \text{I}_1\}$；也就是说，全集 S 中的元素可以加入 S，从而得到一个关于 I_1的独立集。接下来，我们构造拟阵 $[(E, \text{I}_2) \cap U_S]_{\leq q(\varepsilon)}$关于 c 的最小基 B_S。注意， B_S至多包含 $q(\varepsilon)$个元素，这些元素取自 S 的全集，并且 B_S 关于 I_2是独立的。请注意，全集的定义与 I_1 有关，而基的构造与 I_2有关；因此，这两个拟阵在算法中扮演着完全不同的角色。

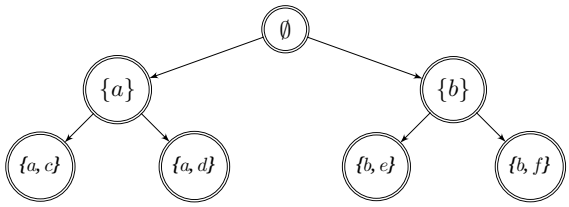

图 3 算法 5 中针对 $S = \emptyset$ 的分支示意图。注意，$B_\emptyset = \{a、b\}$、$B_{\{a\}} = \{c、d\}$ 和 $B_{\{b\}} = \{e、f\}$。此外，$\{a、c\}$ 和 $\{a、d\}$ 是$\{a\}$的子分支。

对于每个元素 $e \in B_S$，我们使用 $S' = S + e$ 递归调用算法 ExtendChain，以找到相应的基 B_{S+e}。算法通过递归返回所有分支上构造的基的并集。最后，算法 ExSet-MatroidIntersection 通过以初始分支（即 根节点） $S = \emptyset$运行算法 ExtendChain，为 I，ε，α和 r 构造一个交换集：

$$\text{ExSet-MatroidIntersection}(I, \varepsilon, \alpha, r) = \text{ExtendChain}(I, \varepsilon, \alpha, r, \emptyset). \tag{5}$$

算法的示意图见图 3。

算法 5 ExtendChain($I = (E, \mathsf{C}\ c, p, \beta)$ $\varepsilon, \alpha, r, S$) 输入：一个拟阵-BC 实例 I，其中 $\mathsf{C} = (\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2)$、$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$、$\mathrm{OPT}(I)_2 \leq \alpha \leq \mathrm{OPT}(I)$、$r \in [\log_{1-\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{2}) + 1]$，以及 $S \subseteq E$。输出：（对于 $S = \emptyset$）针对 I、ε、α 和 r 的交换集 X。1 如果 $|S| \geq q(\varepsilon) + 1$，则 2 返回 $\emptyset$ 3 定义 $U_S = \{e \in \mathrm{K}_r(\alpha) \setminus S \mid S + e \in \mathrm{I}_1\}$。4 计算拟阵 $[(E, \mathrm{I}_2) \cap U_S]_{\leq q(\varepsilon)}$ 中关于 c 的最小基 B_S。5 返回 $B_S \cup \left(\bigcup_{e \in B_S} \text{ExtendChain}(I, \varepsilon, \alpha, r, S + e)\right)$。

在算法的分析中，我们考虑具有有用属性的分支，称为链；这些本质上是针对某个 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in \Delta \cap \mathcal{K}_r(\alpha)$ 的半移位序列。令$X = \text{ExSet-MatroidIntersection}(I, \varepsilon, \alpha, r)$，并令 $\mathcal{S}$为所有满足以下条件的分支 $S \subseteq \mathcal{K}_r(\alpha)$ 的集合：在构造 X 的过程中计算了 ExtendChain$(I, \varepsilon, \alpha, r, S)$。

▶ **定义 22.** 设 $S \in \mathcal{S}$、$\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in (\mathcal{K}_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$。如果 $a \in U_S$，且对于所有 $e \in S$，都有 e 是针对 a 和 Δ 的半移位，则称 S 是 a 和 Δ 的一条链。

注意，由于空集满足定义 22 的条件，因此 a 和 Δ 必定存在一条链。此外，利用拟阵 $(E, \mathcal{I}_1)$ 的交换性质，我们可以将链的基数界定为 $q(\varepsilon)$。上述论证将在接下来的引理中形式化。

▶ **引理 23。** 对于所有的 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in (\mathcal{K}_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$，存在 $S \subseteq X$，使得 S 是 a 和 Δ 的链。

▶ **引理 24。** 对于所有的 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$、$a \in (\mathcal{K}_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$，以及 a 和 Δ 的链 S，都有 $|S| \leq q(\varepsilon)$。

对于一条由 a 和 Δ 构成的链 S，令 B_S 表示 ExtendChain$(I, \varepsilon, \alpha, r, S)$ 中首次执行步骤 4 所得到的结果（即不在递归调用中）。引理 11 的证明中的关键论证

是，对于一条具有最大基数的链 S^*，B_{S^*} 包含一个移位，指向 a 和 Δ，这利用了 S^* 的极大性和引理 21。

▶ **引理 25.** 对于所有 $\Delta \in M^{\leq q(\varepsilon)}$, $a \in (K_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$，以及基数最大的 a 和 Δ 的链 S^*，存在一个移位 $b^* \in B_{S^*}$ 到 a，适用于 Δ。

在引理 11 的证明中，对于每个 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $a \in (\mathcal{K}_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$，我们取一条基数最大的 a 和 Δ 的链 S^*（根据引理 23 和引理 24，这样的链存在）。然后，根据引理 25，存在一个移位 b^* 到 a，适用于 Δ；由此可得，X 是 I、ε、α 和 r 的交换集。形式化证明见附录 C。

6 讨论

本文提出了首个用于预算匹配和预算拟阵交的 EPTAS，从而改进了这两个问题现有的多项式时间近似方案。我们通过推广 Doron-Arad 等人 [5] 的代表集框架得出这些结果；这改进了类似情形中所采用的穷举 [1, 3]。

我们注意到，基于代表集的框架可能有助于解决其他可表述为 (1) 的问题。事实上，引理 7 和引理 9 的证明建立了代表集框架，且不依赖于约束的具体类型，只要求存在一个具有某个常数 k 的 k-交换系统。[10]

此外，我们的交换集算法稍作修改后即可应用于我们问题的其他变体，因此本身也具有研究价值。特别是，我们可以使用算法 4 的推广版本，为带预算的 b-匹配问题构造交换集。此外，我们认为，算法 5 可以推广为带预算的多拟阵交 构造交换集，适用于任意固定数量的拟阵；这包括带预算的多维匹配 问题。除非 P=NP，[9], 该问题不可能存在多项式时间近似方案；不过，我们的初步研究表明，通过构造代表集，并以解中元素的数量为参数，我们或许可以获得一个固定参数可处理近似方案。[11]

最后，要确定 BM 和 BI 的复杂度状态，就必须回答一个引人关注的问题：这些问题是否存在 FPTAS？遗憾的是，这可能是一项非常困难的任务。即使对于单个拟阵的特殊情形（例如图拟阵），FPTAS 是否存在仍悬而未决。此外，针对预算匹配的确定性 FPTAS 将能确定性地解决精确匹配问题，而该问题四十多年来一直悬而未决 [13]。

参考文献

1 André Berger、Vincenzo Bonifaci、Fabrizio Grandoni 和 Guido Schäfer。通过汽油谜题解决预算匹配与预算拟阵交。数学规划，128(1):355–372，2011年。2 Paolo M. Camerini、Giulia Galbiati 和 Francesco Maffioli。用于精确拟阵问题的随机伪多项式算法。算法杂志，13(2):258–273，1992。

[10] 若集合系统 $(E,\mathcal{I})$ 对所有 $A \in \mathcal{I}$ 均满足 k交换性质，则称其满足 k-交换性质；此时存在 $B \subseteq A, |B| \leq k$, 使得 $(A \setminus B) \cup \{e\} \in \mathcal{I}$。[11] 关于在固定参数可处理（FPT）时间内运行的参数化近似算法的定义，读者可参阅例如 [11]。

3 Chandra Chekuri、Jan Vondrák 和 Rico Zenklusen。通过依赖舍入实现多预算匹配与拟阵交。载于第二十二届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第1080–1097页。SIAM，2011年。 4 Thomas H Cormen、Charles E Leiserson、Ronald L Rivest 和 Clifford Stein。算法导论。麻省理工学院出版社，2022年。 5 Ilan Doron-Arad、Ariel Kulik 和 Hadas Shachnai。预算拟阵独立集的EPTAS。载于算法简洁性研讨会（SOSA），第69–83页，2023年。 6 Michael R Garey 和 David S Johnson。计算机与难解性，第174卷。旧金山：弗里曼出版社，1979年。 7 Teofilo F. Gonzalez，编。近似算法与元启发式手册，第二版，第1卷：方法与传统应用。Chapman and Hall/CRC，2018年。 8 Fabrizio Grandoni 和 Rico Zenklusen。多预算独立系统的近似方案。载于欧洲算法研讨会，第536–548页。施普林格，2010年。 9 Viggo Kann。最大有界三维匹配是MAX SNP完全问题。信息处理快报，37(1):27–35，1991年。 10 Ariel Kulik 和 Hadas Shachnai。二维背包不存在EPTAS。信息处理快报，110(16):707–710，2010年。 11 Dániel Marx。参数化复杂性与近似算法。计算机杂志，51(1):60–78，2008年。 12 Ketan Mulmuley、Umesh V Vazirani 和 Vijay V Vazirani。匹配问题与矩阵求逆一样容易。载于第十九届年度ACM计算理论研讨会论文集，第345–354页，1987年。 13 Christos H Papadimitriou 和 Mihalis Yannakakis。受限生成树问题的复杂性。ACM会刊（JACM），29(2):285–309，1982年。 14 Ulrich Pferschy 和 Joachim Schauer。冲突图背包问题。图算法与应用期刊，13(2):233–249，2009年。 15 Ram Ravi 和 Michel X Goemans。受约束最小生成树问题。载于斯堪的纳维亚算法理论研讨会，第66–75页。施普林格，1996年。 16 Alexander Schrijver 等。组合优化：多面体与效率，第24卷。施普林格，2003年。 17 Petra Schuurman 和 Gerhard J Woeginger。近似方案教程。调度讲座，2001年。

A 第 3 节省略的证明

我们给出证明引理 7 时用到的若干定义和命题。下一个一般性观察可由多次应用拟阵的交换性质得出，并用于引理 27 的证明。

▶ **观察 26**。 给定一个拟阵 (E, I) 以及 $A, B \in I$，存在 $D \subseteq A \setminus B$，$|D| = \max\{|A| - |B|, 0\}$，使得 $B \cup D \in I$。

一个集合系统 是一个元组 $(E,\mathcal{I})$，其中 E 是由元素构成的基集，而$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 是 E 的子集族（例如，拟阵就是一种集合系统）。若对于所有 $A \in \mathcal{I}$ 和 $B \subseteq A$，都有 $B \in \mathcal{I}$，则集合系统 $(E,\mathcal{I})$ 满足遗传性质 。注意，集合系统 $(E,\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ 满足遗传性质，其中$\mathcal{C}$ 是 E的一个约束；对于匹配约束和拟阵交约束，该性质都成立。下一个结果描述了这两类约束的弱交换性质。证明依赖于这样一个事实：匹配和拟阵交的交换性质与拟阵的交换性质相似，但较弱。

▶ **引理 27**。 给定一个基集 E、一个关于 E 的约束 C，以及 $A, B \in M$，存在$D \subseteq A \setminus B$，$|D| =$ 最大值$\{|A| - 2 \cdot |B|, 0\}$，使得 $B \cup D \in M$。

证明。 考虑以下两种情况。

1. C 是拟阵交约束。令 $\mathsf{C} = (\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2)$。根据观察 26，存在$D_1, D_2 \subseteq A \setminus B$，使得 $|D_1| = |D_2| = \max\{|A| - |B|, 0\}$，$B \cup D_1 \in \mathrm{I}_1$,且 $B \cup D_2 \in \mathrm{I}_2$。注意到 $D_1 \cap D_2 \subseteq D_1$ 且 $D_1 \cap D_2 \subseteq D_2$；因此，根据 (E, I_1) 和 (E, I_2) 的遗传性质，有 $B \cup (D_1 \cap D_2) \in \mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 = \mathrm{M}$。此外，

$$\begin{aligned}
|D_1 \cap D_2| &= |A \setminus ((A \setminus D_1) \cup (A \setminus D_2))| \\
&\geq |A| - |A \setminus D_1| - |A \setminus D_2| \\
&= |A| - (|A| - |D_1|) - (|A| - |D_2|) \\
&\geq |A| - (|A| - (|A| - |B|)) - (|A| - (|A| - |B|)) \\
&= |A| - 2 \cdot |B|.
\end{aligned}$$

第一个和第二个等式成立，因为 D_1，$D_2 \subseteq A$。第二个不等式由 $|D_1| = |D_2| = \max\{|A| - |B|, 0\}$ 得出。因此，我们有 $D = D_1 \cap D_2$ 满足该引理的条件。

2. $\mathcal{C}$ 是一个拟阵交约束。令 $\mathcal{C} = (V, E)$ 并定义 $D = \{\{u, v\} \in A \mid u, v \notin V(B)\}$。显然，$B \cup D$ 是一个匹配，因为 G，A、B 都是 G的匹配。此外，

$$\begin{aligned}
|D| &= |A \setminus (A \setminus D)| \\
&= |A| - |\{\{u, v\} \in A \mid u \in V(B) \text{ or } v \in V(B)\}| \\
&\geq |A| - |V(B)| \\
&= |A| - 2 \cdot |B|.
\end{aligned}$$

该不等式成立，是因为一个顶点在 A 中至多只能作为端点出现一次（回忆一下，A是一个匹配）。最后一个等式可由观察到 $|V(B)| = 2 \cdot |B|$ 得出，因为匹配中的每条边恰有两个端点，且匹配中不同边的端点互不相交。

◀

引理 7 的证明：由于这个证明基于 [5],中相应引理的证明，我们沿用其中的一些定义和记号。稍微滥用一下记号，我们用 OPT 表示 I的一个最优解。给定一个最优解，我们将该解中的一部分元素划分为 $\lceil \varepsilon^{-1} \rceil$ 个不相交集合（其中一些集合可能为空）。具体而言，令 $N = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$；对所有 $i \in [N]$，定义

$$J_i = \left\{ e \in \mathrm{OPT} \;\middle|\; p(e) \in \left(\varepsilon^i \cdot \mathrm{OPT}(I), \varepsilon^{i-1} \cdot \mathrm{OPT}(I) \right] \right\}. \tag{6}$$

令 $i^* = \arg\min_{i \in [N]} p(J_i)$。根据 (6)，我们至少有 ε^{-1} 个不相交集合；因此，$p(J_{i^*}) \leq \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$。现在，令 $L = \bigcup_{k \in [i^*-1]} J_k$ 为 OPT 中所有收益大于 $\varepsilon^{i^*-1} \cdot \mathrm{OPT}(I)$ 的元素组成的子集，并且 $Q = \mathrm{OPT} \setminus (L \cup J_{i^*})$。为完成该引理的证明，我们还需要几个断言。

▷ 断言 28。 $L \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。

证明。 由于 $L \subseteq \mathrm{OPT}$，根据 $\mathcal{M}$ 的遗传性质，我们有 $L \in \mathcal{M}$。此外，

$$|L| \leq \sum_{e \in L} \frac{p(e)}{\varepsilon^{i^*-1} \cdot \mathrm{OPT}(I)} = \frac{p(L)}{\varepsilon^{i^*-1} \cdot \mathrm{OPT}(I)} \leq \varepsilon^{-(i^*-1)} \leq \varepsilon^{-N+1} \leq \varepsilon^{-\varepsilon^{-1}} \leq q(\varepsilon)$$

第一个不等式成立，因为对于所有 $e \in L$，$p(e) \geq \varepsilon^{i^*-1} \cdot \mathrm{OPT}$。对于第二个不等式，我们注意到 L 是 I 的一个解。由上可得 $L \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。◁

根据断言 28，且由于 R 是一个 SRS，可得 L 有一个替代集 $Z_L \subseteq R$。令 $\Delta_L = (L \setminus H) \cup Z_L$。根据定义 5 的性质 1，我们有 $\Delta_L \in \mathcal{M}_{\leq q(\varepsilon)}$，并且 $\mathcal{M}_{\leq q(\varepsilon)} \subseteq \mathcal{M}$ 也成立。因此，$\Delta_L \in \mathcal{M}$。此外，由于 $Q \subseteq \mathrm{OPT}$ 且 $\mathrm{OPT} \in \mathcal{M}$，根据 $\mathcal{M}$ 的遗传性质可得 $Q \in \mathcal{M}$。因此，根据引理 27，存在一个子集 $T \subseteq Q \setminus \Delta_L$，其中 $|T| = \max\{|Q| - 2 \cdot |\Delta_L|, 0\}$，使得 $\Delta_L \cup T \in \mathcal{M}$。

设 $S = \Delta_L \cup T$。我们证明 S 满足该引理的条件。

▷ 断言29。 S 是 I 的一个解。

证明。 根据 T 的定义，有 $S = \Delta_L \cup T \in \mathcal{M}$。此外，

$$\begin{aligned} c(S) &= c(\Delta_L \cup T) \\ &\leq c(Z_L) + c(L \setminus H) + w(T) \\ &\leq c(L \cap H) + c(L \setminus H) + c(T) \\ &\leq c(L) + c(Q) \\ &\leq c(\mathrm{OPT}) \\ &\leq \beta. \end{aligned}$$

第二个不等式成立，因为 $c(Z_L) \leq c(L \cap H)$（见定义 5 的性质 2）。对于第三个不等式，回顾一下 $T \subseteq Q$。最后一个不等式成立，因为 OPT 是 I 的一个解。

◁

下一个断言的证明依赖于 Q 和 L 中元素之间的利润差距 。

▷ Claim 30. $p(Q \setminus T) \leq 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$.

证明。 注意到

$$|Q \setminus T| \leq 2 \cdot |\Delta_L| \leq 2 \cdot |Z_L| + 2 \cdot |L \setminus H| \leq 2 \cdot |L \cap H| + 2 \cdot |L \setminus H| \leq 2 \cdot |L|. \tag{7}$$

第一个不等式由 T 的定义得到。对于第三个不等式，我们使用定义 5 的性质 4。因此，

$$p(Q \setminus T) \leq |Q \setminus T| \cdot \varepsilon^{i^*} \cdot \mathrm{OPT}(I) \leq 2 \cdot |L| \cdot \varepsilon^{i^*} \cdot \mathrm{OPT}(I) \leq 2\varepsilon \cdot p(L) \leq 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I).$$

第一个不等式成立，是因为对于所有 $e \in Q$，$p(e) \leq \varepsilon^{i^*} \cdot \mathrm{OPT}(I)$。第二个不等式由（7）得到。第三个不等式成立，是因为对于所有 $e \in L$，$p(e) > \varepsilon^{i^*-1} \cdot \mathrm{OPT}(I)$。◁

▷ Claim 31. $p(S) \geq (1 - 4\varepsilon)\mathrm{OPT}(I)$.

证明。 根据定义 5 的性质 3，

$$p(\Delta_L) = p((L \setminus H) \cup Z_L) \geq (1 - \varepsilon) \cdot p(L). \tag{8}$$

此外，

$$p(T) \geq p(Q) - p(Q \setminus T) \geq p(Q) - 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I) \geq (1 - \varepsilon) \cdot p(Q) - 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I). \tag{9}$$

第二个不等式由断言30得出。利用 (8) 和 (9)，我们得到

$$\begin{aligned} p(\Delta_L) + p(T) &\geq (1 - \varepsilon) \cdot p(L \cup Q) - 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I) \\ &= (1 - \varepsilon) \cdot p(\mathrm{OPT} \setminus J_{i^*}) - 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I) \\ &\geq (1 - \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I) - 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I) \\ &\geq (1 - 4\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I). \end{aligned}$$

第二个不等式成立，因为 $p(J_{i^*}) \leq \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$。注意到 $S = \Delta_L \cup T$ 并且 $T \cap \Delta_L = \emptyset$。因此，

$$p(S) = p(\Delta_L) + p(T) \geq (1 - 4\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I).$$

◁

最后，我们注意到，根据 (6) 和 Q 的定义，有 $Q \cap H = \emptyset$。因此，根据 S 的定义，我们有 $S \cap H \subseteq Z_L$。由于 $Z_L \subseteq R$（根据定义 6），可知 $S \cap H \subseteq R$。因此，利用断言 29 和 31，根据定义 4 可知，R 是一个代表集。

引理 9 的证明： 为证明该引理，我们定义某个可行集的一个替代，其定义参照 [5]。某个 $G \in \mathcal{M}_{\leq q(\varepsilon)}$ 的替代的前两个性质与 G 的替代集定义中的前两个性质相同。然而，我们要求替代保留 G 中每个利润类别内有利可图元素的数量，并且替代必须与 G 中的非盈利元素集合不相交。

▶ **定义 32。** 对于 $G \in M_{\leq q(\varepsilon)}$ 和 $Z_G \subseteq \bigcup_{r \in [\log_{1-\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{2})+1]} K_r(\alpha)$，如果满足以下条件，我们称 Z_G 是 G 的一个替代。

1. $(G \setminus H) \cup Z_G \in M_{\leq q(\varepsilon)}$。*2.* $c(Z_G) \leq c(G \cap H)$。*3.* 对所有 $r \in [\log_{1-\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{2}) + 1]$，都有 $|K_r(\alpha) \cap Z_G| = |K_r(\alpha) \cap G \cap H|$。*4.* $(G \setminus H) \cap Z_G = \emptyset$。

▷ 断言 33。对于任意 $G \in \mathcal{M}_{\leq q(\varepsilon)}$，存在 Z_G 的一个替代 G，使得 $Z_G \subseteq R$。

证明。设 $G \in \mathrm{M}_{\leq q(\varepsilon)}$，并设 Z_G 是 G 的一个替代，满足 $|Z_G \cap R|$ 在所有 G的替代中是极大的；形式化地，令 $\mathrm{S}(G)$ 为 G 的所有替代，并令 $Z_G \in \{Z \in \mathrm{S}(G) \mid |Z \cap R| = \max_{Z' \in \mathrm{S}(G)} |Z' \cap R|\}$。由于 $G \cap H$ 特别是 G 的一个替代，因此 $\mathrm{S}(G) \neq \emptyset$，故 Z_G 定义良好。反设存在 $a \in Z_G \setminus R$；那么根据定义 32，存在 $r \in [\log_{1-\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{2}) + 1]$，使得 $a \in \mathrm{K}_r(\alpha)$。令 $\Delta_G = (G \setminus H) \cup Z_G$；根据定义 32，有 $\Delta_G \in \mathrm{M}_{\leq q(\varepsilon)}$。此外，由于 R 是 I、ε、α和 r的交换集，根据定义 8，存在 $b \in (\mathrm{K}_r(\alpha) \cap R) \setminus \Delta_G$，使得$c(b) \leq c(a)$，且 $\Delta_G - a + b \in \mathrm{M}_{\leq q(\varepsilon)}$。根据以下内容，定义 32 的性质对$Z_G - a + b$ 成立。

1. $(G \setminus H) \cup (Z_G - a + b) = \Delta_G - a + b \in \mathrm{M}_{\leq q(\varepsilon)}$ 根据 b 的定义。2. $c(Z_G - a + b) \leq c(Z_G) \leq c(G \cap H)$，因为 $c(b) \leq c(a)$。3. 对所有 $r' \in [\log_{1-\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{2}) + 1]$，都有 $|\mathrm{K}_{r'}(\alpha) \cap (Z_G - a + b)| = |\mathrm{K}_{r'}(\alpha) \cap Z_G| = |\mathrm{K}_{r'}(\alpha) \cap G \cap H|$，因为 $a, b \in \mathrm{K}_r(\alpha)$。4. $|(G \setminus H) \cap (Z_G - a + b)| \leq |(G \setminus H) \cap (Z_G)| = 0$，其中不等式成立是因为$b \notin \Delta_G$，等式成立是因为 Z_G 是 G 的替代。

根据上述内容和定义 32，可知 $Z_G + a - b$ 是 G的替代；也就是说，$Z_G + a - b \in \mathcal{S}(G)$。此外，

$$|R \cap (Z_G - a + b)| > |R \cap Z_G| = \max_{Z \in \mathcal{S}(G)} |Z \cap R|. \tag{10}$$

第一个不等式成立是因为 $a \in Z_G \setminus R$ 和 $b \in R$。根据 (10)，我们得出矛盾：我们找到了一个 G 的替代，其中的元素数量比 R 中的 $Z_G \in \mathcal{S}(G)$ 更多；而后者被定义为 R 中元素数量最多的 G 的替代。因此，$Z_G \subseteq R$，如所需。

◁

▷ 断言 34. 对于所有满足 $\{e\} \in \mathcal{M}$ 的 $e \in H$，恰好存在一个 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，使得 $e \in \mathcal{K}_r(\alpha)$。

证明。 设 $e \in H$。注意：

$$\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{p(e)}{2 \cdot \mathrm{OPT}(I)} \le \frac{p(e)}{2 \cdot \alpha} \le \frac{p(e)}{\mathrm{OPT}(I)} \le 1. \tag{11}$$

第一个不等式成立，因为 $e \in H$。第二个和第三个不等式成立，因为 $\mathrm{OPT}(I)/2 \le \alpha \le \mathrm{OPT}(I)$。最后一个不等式成立，因为 $\{e\}$ 是 I 的一个解（或者可以从实例中删除该元素，因为它不会出现在 I 的任何解中）。此外，注意，对于 $r_0 = \lceil \log_{1-\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2} \rceil$，有 $(1-\varepsilon)^{r_0} \le \frac{\varepsilon}{2}$；而对于 $r_1 = 1$，有 $(1-\varepsilon)^{r_1-1} = 1$。因此，由于 $r_0 \le \lfloor \log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1 \rfloor$，根据 (11)，恰有一个 $r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$ 满足 $p(e)/(2\alpha) \in (1-\varepsilon)^r, (1-\varepsilon)^{r-1}]$；于是，根据 (2)，对于 $r' \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1] \setminus \{r\}$，有 $e \in \mathrm{K}_r(\alpha)$ 和 $e \notin \mathrm{K}_{r'}(\alpha)$。◁

引理 9 的证明可通过说明：对于任意 $G \in \mathcal{M}^{\le q(\varepsilon)}$，其子集 $G\mathcal{M}\ R$ 实际上是 G 的替代集。令 $G \in \mathcal{M}^{\le q(\varepsilon)}$；根据断言 33，$G$ 有一个替代 $Z_G \subseteq R$。于是，

$$\begin{aligned} p(Z_G) &\ge \sum_{r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]} p(\mathcal{K}_r(\alpha) \cap Z_G) \\ &\ge \sum_{r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1] \text{ s.t. } \mathcal{K}_r(\alpha) \neq \emptyset} |\mathcal{K}_r(\alpha) \cap Z_G| \cdot \min_{e \in \mathcal{K}_r(\alpha)} p(e) \\ &\ge \sum_{r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1] \text{ s.t. } \mathcal{K}_r(\alpha) \neq \emptyset} |\mathcal{K}_r(\alpha) \cap G \cap H| \cdot (1-\varepsilon) \cdot \max_{e \in \mathcal{K}_r(\alpha)} p(e) \\ &\ge (1-\varepsilon) \cdot p(G \cap H). \end{aligned} \tag{12}$$

第三个不等式由 (2) 和定义 32 的性质 3 得出。最后一个不等式由断言 34 得出（注意，根据遗传性质，对于所有 $e \in G \cap H$，都有 $\{e\} \in \mathcal{M}$）。因此，

$$\begin{aligned} p((G \setminus H) \cup Z_G) &= p(G \setminus H) + p(Z_G) \\ &\ge p(G \setminus H) + (1-\varepsilon) \cdot p(G \cap H) \\ &\ge (1-\varepsilon) \cdot p(G). \end{aligned} \tag{13}$$

第一个等式由定义 32 的性质 4 得出。第一个不等式由 (12) 得出。现在，根据定义 32 的性质 1 和性质 2，Z_G 分别满足定义 5 的性质 1 和性质 2。此外，根据 (13)，Z_G 满足定义 5 的性质 3。最后，Z_G 根据

$$|Z_G| = \sum_{r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]} |Z_G \cap \mathcal{K}_r(\alpha)| \le \sum_{r \in [\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]} |G \cap H \cap \mathcal{K}_r(\alpha)| = |G \cap H|.$$

第一个不等式成立，因为 Z_G 是 G 的一个替代。最后一个等式由断言 34 得出。我们得出结论：Z_G 是 G 的一个替代集，且满足 $Z_G \subseteq R$；因此，根据定义 6，R 是一个严格代表集。因此，由引理 7 可知，R 是一个代表集。◀

在以下证明中，我们将用到下一个技术辅助断言。

▷ 断言 35。对于所有 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，都有 $\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1 \le 3\varepsilon^{-2}$。

证明。 利用对数运算法则可得

$$\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1 \leq \frac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{-\ln(1-\varepsilon)}+1 \leq \frac{2\varepsilon^{-1}}{\varepsilon}+1 \leq 3\varepsilon^{-2}.$$

第二个不等式由 $x<-\ln(1-x)$ $\forall x>-1$, $x\neq 0$, 以及 $\ln(y)<y$, $\forall y>0$ 得出。

◁

引理 12 的证明： 令 α 为算法1的步骤 2 的结果，且 $r\in[\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$。根据约束的类型，我们分两种情况讨论。

- 若 I 是一个 BM 实例，则根据引理10，ExSet-Matching(I,ε,α,r) 是 I,ε,α 的一个交换集，并且 r 满足 ExSet-Matching$(I,\varepsilon,\alpha,r)|\leq 18\cdot q(\varepsilon)^2$。因此，对于所有 $r\in[\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，$R\cap\mathcal{K}_r(\alpha)$ 都是 I,ε,α 的一个交换集，并且

  $$|R|\leq\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1\right)\cdot 18\cdot q(\varepsilon)^2\leq 3\cdot\varepsilon^{-2}\cdot 18\cdot q(\varepsilon)^2\leq 54\cdot q(\varepsilon)^3.$$

  第二个不等式由断言 35 得出。然后，根据引理 9， R 是 I 和 ε 的一个代表集；此外，$|R|\leq 54\cdot q(\varepsilon)^3$。
  关于运行时间，注意到使用误差参数为 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 的 BC 多项式时间近似方案（见 [1]），可在 poly($|I|$) 时间内计算步骤1。此外，根据引理10，步骤 4 的**for** 循环的每次迭代都可在 $q(\varepsilon)\cdot$poly($|I|$) 时间内完成。因此，由于步骤 4 的**for** 循环共进行 $\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+1$ 次迭代，该算法的运行时间上界为

  $$\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1\right)\cdot q(\varepsilon)\cdot\text{poly}(|I|)\leq 6\cdot\varepsilon^{-2}\cdot q(\varepsilon)\cdot\text{poly}(|I|)\leq q(\varepsilon)^2\cdot\text{poly}(|I|).$$

  第一个不等式由断言 35 得出。
- 若 I 是一个 BI 实例，则根据引理 11，ExSet-MatroidIntersection(I,ε,α,r) 是 I、ε、α 和 r 的一个交换集，且满足 |ExSet-MatroidIntersection$(I,\varepsilon,\alpha,r)|\leq q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}$。因此，根据算法1的步骤 4、步骤8和步骤9，对于所有满足 $|R|\leq\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1\right)\cdot q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}$ 的 $r\in[\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+1]$，有 R 是 I、ε 和 α 的一个交换集。于是，根据定义 8 和引理 9， R 是 I 和 ε 的一个代表集。

  注意到，使用误差参数为 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 的 BC 多项式时间近似方案（参见 [1]），可在 poly($|I|$) 时间内计算步骤1。此外，根据引理 11，步骤 4 的**for** 循环中的每次迭代都可在 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}\cdot$poly($|I|$) 时间内完成。因此，由于步骤 4 的**for** 循环共进行 $O\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ 次迭代，该算法的运行时间为 $O\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\cdot q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}\cdot\text{poly}(|I|)$；根据断言 35，有 $O\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=O(\varepsilon^{-2})$，从而可得 $O\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=q(\varepsilon)^{O(1)}$。因此，该算法的运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}\cdot$poly($|I|$)。此外，根据断言 35，由于 $O\left(\log_{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=O(\varepsilon^{-2})$，可得 $|R|\leq q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}$。

◀

为了证明引理 16，我们使用以下辅助引理。

▶ **引理 36.** 给定一个BC实例 $I=(E,\mathcal{C},c,p,\beta)$ 和 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，算法*2* 返回一个针对 I 的解，其收益至少为$(1-8\varepsilon)\cdot\text{OPT}(I)$。

证明。 根据引理 12，有 $R=$ 代表集(I,ε) 是 I 和 ε的代表集。因此，根据定义 4，存在一个针对 I 的解 S，使得 $S\cap H\subseteq R$，并且

$$p(S)\geq(1-4\varepsilon)\cdot\text{OPT}(I). \tag{14}$$

对于所有 $e \in S \cap H$，我们都有 $p(e) > \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$，而 S 是 I的一个解，因此$|S \cap H| \leq \varepsilon^{-1}$。注意，步骤 5 中存在一次迭代，使得 $F = S \cap H$；因此，在步骤 6 中，我们构造出 $I_{S\cap H}$ 的一个解 $T_{S\cap H}$，满足：

$$\begin{aligned} p(T_F) &\geq \mathrm{OPT}(I_{S\cap H}) - 2 \cdot \max_{e \in E_{S\cap H}} p(e) \\ &\geq p(S \setminus H) - 2 \cdot \max_{e \in E_{S\cap H}} p(e) \\ &\geq p(S \setminus H) - 4\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I). \end{aligned} \tag{15}$$

第一个不等式由引理 13 得出。第二个不等式成立，因为 $S \setminus H$ 特别地是残余实例 $I_F(\alpha)$ 的一个解，这是由定义 14 得出的。第三个不等式成立，因为对于所有 $e \in E_{S\cap H}$，都有 $p(e) \leq 2\varepsilon \cdot \alpha \leq 2\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I)$。现在，回顾一下$K_{S\cap H}$，其定义于算法 2 的步骤7中。

$$p(K_{S\cap H}) = p(S \cap H) + p(T_F) \geq p(S) - 4\varepsilon \cdot \mathrm{OPT}(I) \geq (1 - 8\varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(I). \tag{16}$$

第一个不等式使用了（15）。最后一个不等式由（14）得出。

▷ 断言37。 $A = \mathrm{EPTAS}(\mathcal{I}, \varepsilon)$ 是 I 的一个解。

证明。 如果 $A = \emptyset$，则该断言显然成立，因为 $\emptyset$ 是 I的一个解。否则，根据算法 2 的步骤9，存在一个 F 的解 I，使得 $A = K_F$。因此，在这种情况下，根据观察15， A 是 I 的一个解。◁

根据断言37、算法 2 的步骤 5、9 和 10 以及 (16)，我们有 $A = \mathrm{EPTAS}(I, \varepsilon)$ 是满足 $p(A) \geq p(K_{S\cap H}) \geq (1 - 8\varepsilon)\mathrm{OPT}(I)$ 的 I解。证明至此完成。◀

▶ **引理 38**。 给定一个 BC 实例 $I = (E, \mathcal{C}, c, p, \beta)$ 和 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，算法 *2* 的运行时间满足以下其中一种情况。

- 如果 I 是一个 预算匹配 实例，则运行时间为 $2^{O(\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \mathrm{poly}(|I|)$。
- 如果 I 是一个 预算拟阵交 实例，则运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1}\cdot q(\varepsilon))} \cdot \mathrm{poly}(|I|)$。

证明。 下文中，令 $W' = \left\{F \subseteq R \;\middle|\; |F| \leq \varepsilon^{-1}, F \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), c(F) \leq \beta\right\}$ 表示算法 2 的步骤 5 中考虑的所有可行集，并令 $W = \left\{F \subseteq R \;\middle|\; |F| \leq \varepsilon^{-1}\right\}$。注意，算法 2 的步骤 5 的迭代次数至多为 $|W|$，因为 $W' \subseteq W$，并且对于每个 $F \in W$，我们都可以在多项式时间内验证 $F \in W'$。我们将对 $|W|$ 上界的分析分为两部分。

1. I 是一个 BM 实例。

$$\begin{aligned} |W| &\leq (|R| + 1)^{\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \left(54 \cdot q(\varepsilon)^3 + 1\right)^{\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \left(\varepsilon^{-6}\right)^{\varepsilon^{-1}} \cdot \left\lceil \varepsilon^{-\varepsilon^{-1}} \right\rceil^{3\cdot\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \varepsilon^{-6\cdot\varepsilon^{-1} - 6\varepsilon^{-2}} \\ &= 2^{O\left(\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \end{aligned} \tag{17}$$

第二个不等式由引理 12 得出。第三个不等式成立，因为 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$。 –

2. I 是一个 BI 实例。那么，

$$|W| \leq (|R|+1)^{\varepsilon^{-1}} \leq \left(q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}\right)^{\varepsilon^{-1}} = q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1}\cdot q(\varepsilon))}. \tag{18}$$

第二个不等式由引理 12 得出。

因此，根据 (17) 和 (18)，对于 BM 和 BI 实例，步骤 5 中 **for** 循环的迭代次数分别有界于 $2^{O(\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon})}$ 和 $q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1}\cdot q(\varepsilon))}$。此外，根据引理 13，每次迭代的运行时间为 $\mathrm{poly}(|I|)$。综上，如果 I 是 BM 实例，算法 2 的运行时间为 $2^{O(\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon})}\cdot\mathrm{poly}(|I|)$；如果 I 是 BI 实例，运行时间则为 $q(\varepsilon)^{O(\varepsilon^{-1}\cdot q(\varepsilon))}\cdot\bar{\mathrm{poly}}(|I|)$。◀

引理 16 的证明： 该证明由引理 36 和引理 38 得出。 ◀

B 第 4 节中省略的证明

断言 19 的证明： 关于运行时间，注意到步骤 2 的 **for** 循环的每次迭代都可在多项式时间内完成，因为步骤 3 和步骤 5 的运行时间为线性，而根据引理 17，步骤 4 的运行时间为多项式时间。因此，由于共有 $k(\varepsilon)=O(q(\varepsilon))$ 次迭代，运行时间为 $q(\varepsilon)\cdot\mathrm{poly}(|I|)$。最后，关于交换集 X 的大小：

$$|X| = \left|\bigcup_{i\in[k(\varepsilon)]} M_i\right| \leq \sum_{i\in[k(\varepsilon)]} |M_i| \leq k(\varepsilon)\cdot N(\varepsilon) = 18\cdot q(\varepsilon)^2.$$

第一个等式由步骤 5 和步骤 6 得出。第二个不等式成立，因为根据引理 17，$\forall i \in [k(\varepsilon)]$: $|M_i| \leq N(\varepsilon)$。最后一个等式成立，因为 $k(\varepsilon) = 2\cdot N(\varepsilon) = 6\cdot q(\varepsilon)$。◀

C 第 5 节中省略的证明

引理 39 和 40 给出了本节中用到的基本拟阵性质；证明见 [5]。

▶ **引理 39.** 给定一个拟阵 (E, I) 和成本函数 $c: E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，设 B 是关于 c 的 (E, I) 的一个最小基。那么，对于任意 $a\in E\setminus B$，都有 $\{e\in B \mid c(e)\leq c(a)\}+a\notin I$。

▶ **引理 40.** 设 (E, I) 是一个拟阵，$A, B\in I$，且 $a\in A\setminus B$ 满足 $B+a\notin I$。那么存在 $b\in B\setminus A$，使得 $A-a+b\in I$。

我们给出引理 21 的一个更一般的表述。

▶ **引理 41。** 设 $G=(E, I)$ 是一个拟阵，$c: E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$、$U\subseteq E$、$q\in\mathbb{N}$，且 B 是相对于 c的 $[G\cap U]_{\leq q}$最小基。此外，令 $\Delta\in I_{\leq q}$，并令 $a\in(\Delta\cap U)\setminus B$。那么，存在 $b\in B\setminus\Delta$ 使得 $\Delta-a+b\in I$ 且 $c(b)\leq c(a)$。

证明。 定义 $D=\{e\in B \mid c(e)\leq c(a)\}$ 并令

$$\mathcal{I}^U_{\leq q} = \{A\subseteq U \mid A\in\mathcal{I}, |A|\leq q\} \tag{19}$$

是拟阵 $[\mathcal{G}\cap U]_{\leq q}$ 的独立集族（根据定义 3）。注意，$a\in U\setminus B$；此外，由于 $D\subseteq B$ 和 $a\notin B$，可得 $a\notin D$。因此，根据引理 39，可得 $D+a\notin\mathcal{I}^U_{\leq q}$。我们分两种情况讨论。

- $D+a\in\mathcal{I}$。那么，

$$|D|\geq q\geq|\Delta|>|\Delta-a|. \tag{20}$$

第一个不等式成立，因为 $D+a\in\mathcal{I}$、 $D+a\notin\mathcal{I}^U_{\leq q}$ 和 $D+a\subseteq U$；因此，根据 (19)，$|D+a|>q$。第二个不等式成立，因为 $\Delta\in\mathcal{I}^{\leq q}$；最后一个不等式成立，因为$a\in\Delta$。注意，根据遗传性质，有 $D\in\mathcal{I}^U_{\leq q}\subseteq\mathcal{I}^{\leq q}$，且$\Delta-a\in\mathcal{I}^{\leq q}$（注意 $\Delta\in\mathcal{I}^{\leq q}$）。因此，根据 (20) 以及 $[\mathcal{G}]_{\leq q}$ 的交换性质，存在 $b\in D\setminus(\Delta-a)$，使得 $\Delta-a+b\in\mathcal{I}^{\leq q}$。由于 $a\notin D$，有 $b\notin\Delta$。利用 $b\in D$，可得 $c(b)\leq c(a)$。

- $D+a\notin\mathcal{I}$。根据定义 3， $\Delta\in\mathcal{I}$。此外，由于$D\subseteq B$, $B\in\mathcal{I}^U_{\leq q}$，且$\mathcal{I}^U_{\leq q}\subseteq\mathcal{I}$，可知 $D\in\mathcal{I}$。因此，根据引理 40，存在 $b\in D\setminus\Delta$，使得$\Delta-a+b\in\mathcal{I}^{\leq q}$。注意到，由于 $b\in D$， $c(b)\leq c(a)$。

◀

引理 21 的证明： 根据引理 41，存在 $b\in B\setminus\Delta$，使得 $\Delta-a+b\in\mathcal{I}_2$，并且$c(b)\leq c(a)$。因此，根据定义 20，如果还满足 $\Delta-a+b\in\mathcal{I}_1$,，那么 b 对于 Δ 是到 a 的移位；否则，$\Delta-a+b\notin\mathcal{I}_1$，且 b 对于 Δ 是到 a 的半移位。◀

引理 23 的证明： 令 $S=\emptyset$。显然，由 (5) 可知 $\emptyset\subseteq X$ 和 $S\in\mathcal{S}$。此外，由于$a\in\Delta$ 和 $\Delta\in\mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，根据遗传性质， $a=\emptyset+a\in\mathcal{I}_1$；因此，根据算法 5 的步骤 3， $a\in U_\emptyset$。最后，对于所有 $e\in\emptyset$， e 都是 a 关于 Δ 的半移位，这显然成立。因此，根据定义 22， $\emptyset$ 是由 a 和 Δ 构成的一条链。◀

引理 24 的证明： 反设 $|S|>q(\varepsilon)$；那么，

$$|S|>q(\varepsilon)\geq|\Delta|>|\Delta-a|. \tag{21}$$

第二个不等式成立，是因为 $\Delta\in\mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$。现在，根据定义 22 $a\in U_S$，以及算法 5 的步骤 3，有 $S+a\in\mathcal{I}_1$；因此， $S\in\mathcal{I}_1$。此外，由于 $\Delta\in\mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$，根据遗传性质， $\Delta-a\in\mathcal{I}_1$。因此，根据 (21) 以及 $(E,\mathcal{I}_1)$ 的交换性质，存在 $e\in S\setminus(\Delta-a)$，使得 $\Delta-a+e\in\mathcal{I}_1$。然而，由于 S是一条链且 $e\in S$，我们有 e是 a 关于 Δ 的半移位（见定义 20 和 22），这意味着 $\Delta-a+e\notin\mathcal{I}_1$。矛盾。◀

引理 25 的证明： 根据引理 21，存在 $b^*\in B_{S^*}$，使得对于 Δ， b^* 是到 a 的半移位或移位。反设 b^* 是对于 Δ 到 a 的半移位。我们证明 S^*+b^* 是由 a 和 Δ 构成的链。

- $S^*+b^*\in\mathcal{S}$。由算法 5 的步骤 5 以及 $|S^*|\leq q(\varepsilon)$ 可知，根据引理 24，$a\in U_{S^*+b^*}$。
- 反设 $a\notin U_{S^*+b^*}$；那么，根据引理 40，存在$e\in S^*+b^*$，使得 $\Delta-a+e\in\mathcal{I}_1$。矛盾（因为 S^* 是由 a 和 Δ 构成的链，且对于 Δ， b^*是到 a 的半移位）。
- $\forall e\in S^*+b^*$ 成立，即对于 Δ， e 是到 a 的半移位。这是因为根据我们的假设， S^*是由a 和 Δ 构成的链，且对于 Δ， b^* 是到 a 的半移位。

根据上述内容， S^*+b^* 是a和Δ的一条链。此外，由于$b^*\in B_{S^*}\subseteq U_{S^*}$和 $B_{S^*}\cap S^*=\emptyset$，因此 $|S^*+b^*|>|S^*|$。于是，这与 S^*的极大性矛盾。我们得出结论：对于 Δ， b^* 是 a 的一个移位。◀

引理 11 的证明： 令 $\Delta \in \mathcal{M}^{\leq q(\varepsilon)}$, $a \in (C_r(\alpha) \cap \Delta) \setminus X$，并令 S^* 为a 和 Δ 的一条基数最大的链。根据引理 23，存在一条 a 和 Δ的链；根据定义 22，链是元素的有限子集，因此 S^* 定义良好。根据引理 24，$|S^*| \leq q(\varepsilon)$成立；因此，根据算法 5 的步骤1和步骤 4，以及式 (5)，B_{S^*} 由算法 ExSet-MatroidIntersection 计算得出。于是，根据引理 25，存在一个针对 Δ、从 a 到 $b^* \in B_{S^*}$ 的移位。注意，根据算法 5 的步骤 5，$B_{S^*} \subseteq X$ 。因此，根据定义 20（移位）和定义 8（交换集），可知 X 是I, ε, α的一个交换集，且 r。我们使用以下断言进行复杂度分析。

▷ 断言 42. $|X| \leq q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon)}$，算法的运行时间为 $q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon)} \cdot \text{poly}(|I|)$。

证明。回顾一下，S 是所有分支 $S \subseteq \mathrm{K}_r(\alpha)$ 的集合，其中 ExtendChain$(I, \varepsilon, \alpha, r, S)$ 是在执行 ExSet-MatroidIntersection$(I, \varepsilon, \alpha, r)$ 期间计算的。对于所有 $t \in \{0, 1, \ldots, q(\varepsilon)+1\}$，令 $L_t = \{S \in \mathrm{S} \mid |S| = t\}$ 为分支 S 的集合，这些分支包含 t 在算法 ExSet-MatroidIntersection 的算法 5 的步骤 4 的某次迭代中计算出的元素。注意，每次对算法 ExtendChain 的递归调用中的操作（即不包括次级递归调用）都可以在关于实例规模的多项式时间内完成，因为步骤 4 中的最小基可以在线性时间内求得（例如，参见 [4]）。此外，根据步骤 5 和步骤1，该算法的递归调用次数以该算法访问的分支数为上界。注意，根据（5）和算法 5 的步骤1，分支的大小介于 0 和 $q(\varepsilon) + 1$ 之间。此外，每个分支 S 都会引发 $|S|$ 次对算法 5 的递归调用。因此，该算法的运行时间可被界定为

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\{0,1,\ldots,q(\varepsilon)+1\}} \sum_{S\in L_t} |B_S| \cdot \text{poly}(|I|) &\leq \sum_{t\in\{0,1,\ldots,q(\varepsilon)+1\}} |L_t| \cdot q(\varepsilon) \cdot \text{poly}(|I|) \\ &\leq (q(\varepsilon)+1) \cdot q(\varepsilon)^{q(\varepsilon)+1} \cdot q(\varepsilon) \cdot \text{poly}(|I|) \\ &= q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon)} \cdot \text{poly}(|I|).\end{aligned} \tag{22}$$

第一个不等式成立，是因为根据步骤 4 和定义 3，对于每个分支 S，都有 $|B_S| \leq q(\varepsilon)$。第二个不等式成立，是因为 $\forall t \in [q(\varepsilon)]$：根据算法 5 的步骤 5，$|L_{t+1}| \leq q(\varepsilon) \cdot |L_t|$；因此，由 (5) 可知 $|L_0| = 1$，进而通过归纳论证可得 $\forall t \in [q(\varepsilon) + 1]$：$|L_t| \leq q(\varepsilon)^{q(\varepsilon)+1}$。最后，对于 X（即返回的交换集）的大小，我们有

$$\begin{aligned}|X| &= \left| \bigcup_{t\in\{0,1,\ldots,q(\varepsilon)+1\}} \bigcup_{S\in L_t} B_S \right| \\ &\leq \sum_{t\in\{0,1,\ldots,q(\varepsilon)+1\}} \sum_{S\in L_t} |B_S| \\ &\leq \sum_{t\in\{0,1,\ldots,q(\varepsilon)\}} |L_t| \cdot q(\varepsilon) \\ &= q(\varepsilon)^{O(q(\varepsilon))}.\end{aligned}$$

第一个等式由 (5) 以及算法 5 的步骤 1 和步骤 5 得出。第二个不等式由步骤 4 得出，因为根据定义 3，计算得到的基 B_S 的大小不超过 $q(\varepsilon)$。最后一个不等式可通过与 (22) 类似的对称论证得出。◁

引理 11 的证明可由上述内容得出。 ◀