arXiv:2302.05695v1 [math.LO] 11 Feb 2023

关系结构的单调类中的单子 NIP

SAMUEL BRAUNFELD，ANUJ DAWAR、IOANNIS ELEFTHERIADIS 和 Aris Papadopoulos

摘要。我们证明，对于任意有限关系结构的单调类，该类的一阶理论在稳定性理论意义下是 NIP，当且仅当该类中结构的盖夫曼图集合处处稀疏。这一结果将此前针对图已知的结论推广到关系结构，并回答了 Adler 和 Adler（2014）提出的一个开放问题。我们通过应用 Ramsey 理论技术确立了这一结果，并表明 NIP 这一性质对于单调类具有很强的稳健性。我们还证明，对于任何非（单子）NIP 的单调结构类，一阶逻辑的模型检测问题都是难处理的。这是对 Bonnet 等人猜想的一项推进：能够进行固定参数可处理模型检测的遗传结构类，恰好是单子 NIP 的结构类。

1. 引言

经典模型论中稳定性理论的发展，始于五十年前 Shelah 提出的分类纲领 [19, 2]，旨在区分温和的一阶理论与狂野的理论。一个重要发现是，组合构型在这一分类中起到了划分界线的作用。

此外，在有限模型论的发展过程中，人们一直对研究有限结构的驯性类感兴趣。这里的驯性可以指算法驯性，即一般情况下难以处理的算法问题，在某个驯性类上可能是易处理的；也可以指模型论的驯性，即该类具有一些在所有有限结构组成的类中所缺失的理想模型论性质。关于这些驯性概念的阐述，请参见 [7] 。在此背景下出现的驯性类

2020 数学主题分类。主要分类：03C13，03C45；次要分类：05C75，68R05，68Q27。关键词与短语。模型论、有限模型论、结构图论、模型检验。第一作者获得捷克科学基金会（GAČR）项目 21-10775S、欧盟地平线 2020 研究与创新计划（拨款协议编号 810115 – Dynasnet）的资助。第三作者获得剑桥信托基金颁发的 George and Marie Vergottis 奖学金、奥纳西斯基金会奖学金及 Robert Sansom 学生奖学金。第四作者获得利兹大学颁发的利兹博士奖学金。

基于稀疏图研究中所采用的概念 [15] ，并且通常通过将这些概念应用于此类结构的盖夫曼图，将其扩展到超出图的关系结构类。

在稀疏类算法驯性的研究背景下，这一研究方向最终取得了 Grohe 等人的重要成果[10] ： 他们证明，在任何处处稀疏的图类上，一阶句子的模型检验问题都是固定参数可处理（FPT）的。这一结果推广了一系列早期成果；那些成果表明，在满足其他稀疏性概念的图类上，模型检验问题是易处理的。此外，已有结果 [13] 还表明，对于单调图类而言，这就是可处理性的极限。也就是说，（在合理的假设下），任何一阶模型检验问题属于 FPT 的单调图类都必然处处稀疏。这些结果凸显了处处稀疏这一概念在稀疏图类研究中的核心地位。

近年来，一项重要的研究致力于将关于图的驯性稀疏类的方法和结果推广到更一般、未必稀疏的类。有趣的是，这将有限模型论中的驯性概念与经典模型论中的驯性概念联系在了一起。稳定性理论中的概念在这些研究中发挥着日益重要的作用（例如参见 [16, 9], ）。这一联系的核心在于，人们认识到，对于图中经过深入研究的稀疏性概念，稀疏类的一阶理论 $\mathcal{C}$ 是稳定的。因此，将稳定性理论中的驯性概念应用于有限结构类的理论，可以推广源自稀疏性理论的驯性概念。

连接这两个方向的一个关键结果是：有限图的一个单调类是稳定的，当且仅当它处处稀疏。稳定性与组合稀疏性之间的这一联系，最初由 Podewski 和 Ziegler 在无限图的背景下建立[17] ，随后由 Adler 和 Adler 推广到有限图类 [1]。事实上，对于图的单调类而言，稳定性是一个相当稳健的概念，因为这类的理论是稳定的，当且仅当它具有 NIP（即不具有独立性性质）；而这些条件又等价于它是单子稳定且具有单子 NIP（这些概念将在下文第 2 节中形式化定义）。

Adler 和 Adler 提出了一个问题：他们的结果是否能够从图推广到任意有限关系语言中的结构。本文通过证明以下定理 1.1 解决了这一问题。在下文中，盖夫$(\mathcal{C})$ 表示类 $\mathcal{C}$中各结构的盖夫曼图的集合。需要注意的是，从图推广到关系结构，需要借助大量组合技术手段，具体表现为拉姆齐理论结果；我们将在后文详细介绍这些结果。我们还将这一刻画与这些类的可处理性联系起来。总而言之，我们的主要结果由以下定理表述。

定理 1.1。令 $\mathcal{C}$ 为有限关系语言中结构的一个单调类。则以下命题等价：

（*1*） $\mathcal{C}$ 是 *NIP*；（*2*） $\mathcal{C}$ 是单子 *NIP*；（*3*） $\mathcal{C}$ 是稳定的；（*4*） $\mathcal{C}$ 是单子稳定的；（*5*）Gaif（$\mathcal{C}$）处处稀疏；以及（*6*）（假设 AW$[*] \neq$ FPT） $\mathcal{C}$ 允许进行固定参数可处理的模型检验。

因此，对于关系结构的单调类，情况是清楚的。超出单调类后，并非每个 NIP 类都是稳定的或单子 NIP 的。然而，人们猜想 [3] 对于任意遗传类 $\mathcal{C}$ 的结构，其上的模型检测问题 $\mathcal{C}$ 是固定参数可处理的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是 NIP。此前，这一点已通过 Adler 和 Adler 的结果与 Grohe 等人的结果相结合，对于图的单调类得到证明；而对于有序图的遗传类，则由 Simon 和 Torunczyk 的结果得到证明 [20]。我们的结果还将已验证这一猜想的类扩展到了所有关系结构的单调类。

我们将在第 2 节和第 3节给出一些必要的定义和记号。定理 1.1 的证明占据接下来的三节。对于任意单调类 $\mathcal{C}$，前四个概念等价这一结论归功于 Braunfield and Laskowski [5]。因此，我们将证明第一个概念与第五、第六个概念等价。在第 4 节中，我们将证明，如果Gaif($\mathcal{C}$) 并非处处稀疏，那么 $\mathcal{C}$ 就有一个具有独立性性质的公式。其逆命题将在第 6节证明。文献 Gaif($\mathcal{C}$) 处处稠密蕴含可处理性，这一点在 [10]中已隐含给出。我们将在第 5节证明这一命题的逆命题。

2. 预备知识

我们假定读者熟悉一阶逻辑和模型论的基本概念。我们尽可能使本文内容自足，但仍请读者参阅 [11]以了解背景知识及未定义的记号。本文中，$\mathcal{L}$ 表示一种有限的一阶关系语言。对于每个关系符号 $\mathrm{ar}(R)$ 表示其元数 $R \in \mathcal{L}$。元素或变量的元组用带上划线的字母表示。给定一个元组 $\bar{a}$ 和 $k \leq |\bar{a}|$，我们用 $\bar{a}(k)$ 表示 k 中的第 $\bar{a}$ 个元素。我们常会滥用记号，将元组视为无序集合；究竟指有序元组还是无序集合，应由上下文判断。

我们采用如下约定：允许 $\mathcal{L}$ 公式中出现有限多个常量符号（即参数）。从句法上看，应将它们视为额外的自由变量；从语义上看，它们在每个 $\mathcal{L}$ 结构中都有固定的解释

。这纯粹是为了记号方便，不影响我们结果的适用性。我们还进一步滥用记号，不区分参数 p 与其在一个 $\mathcal{L}$ 结构 M 中的解释 p^M 。

2.1. 图与关系结构。 一个 $\mathcal{L}$-结构记作 $(M, R^M)_{R\in\mathcal{L}}$，其中 M是其基础集合，$R^M \subseteq M^{\mathrm{ar}(R)}$是关系符号 $R \in \mathcal{L}$ 在 M中的解释。我们用 $\mathfrak{C}(\mathcal{L})$表示所有 $\mathcal{L}$-结构组成的类。为方便起见，我们通常不区分 $\mathcal{L}$-结构及其基础集合。对于 $\mathcal{L}$-结构 M 及其子集$A \subseteq M$，我们用 $M[A]$ 表示由 A诱导的 M 的子结构。元组 $\bar{m}$ 在 $\mathcal{L}$-结构 M中的等式类型 是指集合 $\Delta_=(\bar{m})$，其中包含仅使用等号符号的原子公式 $\eta(\bar{x})$，且满足 $M \models \eta(\bar{m})$。

从一个 $\mathcal{L}$-结构 M 到一个 $\mathcal{L}$-结构 N 的同态 是一个映射$f : M \to N$，满足：对于所有关系符号 $R \in \mathcal{L}$ 和元组$\bar{m} \in M^{\mathrm{ar}(R)}$，若 $\bar{m} \in R^M$，则 $f(\bar{m}) \in R^N$。带标记结构 $f : (M, \bar{m}) \to (N, \bar{n})$之间的同态，指底层 $\mathcal{L}$-结构之间的同态 $f : M \to N$，且满足 $f(\bar{m}) = \bar{n}$。

图 G 指满足以下条件的 $\{E\}$-结构：$E^G \subseteq G^2$ 是对称的无自反二元关系。我们用 $E(G)$ 而非 E^G 表示图的边集。给定图 G 和 $r \in \mathbb{N}$，我们用 G^r 表示G的 r-次细分，即将 G的每条边替换为一条长度为$r + 1$的路径所得到的图。我们用 K_n 表示具有 n 个顶点的完全图，用 $K_{t,t}$ 表示两部分各有 t 个顶点的完全二部图。我们用 $G = (U, V; E)$表示一个两部分为 U 和 V、边集为 $E \subseteq U \times V$的二分图，并用 $\mathfrak{B}$表示所有二分图构成的类。

对于图 G、顶点 $u \in G$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们将 $N_m^G(u)$ 记作以 G 为中心的 m-邻域，即从 u 出发沿长度至多为 m的路径可到达的顶点。对于 $A \subseteq G$，我们将 $N_m^G(A)$ 记作 $\bigcup_{u\in A} N_m^G(u)$。此外，我们将 $N^G(u)$ 记作$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_m^G(u)$，并类似地定义 $N^G(A)$。

定义 2.1（盖夫曼图/类）。给定一个 $\mathcal{L}$-结构 $(M, R^M)_{M\in\mathcal{L}}$，我们将 M 的盖夫曼图（或底层图）定义为顶点集为 M 、边为以下形式的图，记作 Gaif(M)：

$$E := \{(x, y) : \exists R \in \mathcal{L} \exists v_1, \ldots, v_{\mathrm{ar}(R)-2} \exists \sigma \in S_{\mathrm{ar}(R)} (\sigma(x, y, v_1, \ldots, v_{\mathrm{ar}(i)-2}) \in R^M)\},$$

其中 $\mathcal{S}_n$ 是作用在 n 个元素上的对称群。对于由 $\mathcal{C}$组成且都使用相同语言的关系结构类，我们将 $\mathcal{C}$ 的盖夫曼类定义为 Gaif$(\mathcal{C}) := \{\text{Gaif}(M) : M \in \mathcal{C}\}$。

2.2. 稀疏性与稳定性。 在本文中，$\mathcal{C}$ 指一类$\mathcal{L}$-结构或图。我们用 Th$(\mathcal{C})$ 表示该类的公共理论，

也就是说，所有在 $\mathcal{C}$ 中的结构里都成立的一阶 $\mathcal{L}$-语句的集合。我们称类 $\mathcal{C}$ 为:

- 遗传的，如果 $\mathcal{C}$ 在诱导子结构下封闭;
- 单调，如果 $\mathcal{C}$ 在弱子结构下封闭，也就是说，如果 $(M, R^M)_{R\in\mathcal{L}} \in \mathcal{C}$，那么对于任意 $M' \subseteq M$ 和 $R^{M'} \subseteq R^M$，都有 $(M', R^{M'})_{R\in\mathcal{L}} \in \mathcal{C}$。

定义 2.2。设 $\mathcal{C}$ 是一个图类。我们称 $\mathcal{C}$ 处处稀疏，如果对于每个 $r \in \mathbb{N}$，都存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $G \in \mathcal{C}$，K_n^r 都不是 G的子图。

处处稀疏性由 Nešetřil 和 Ossona de Mendez 提出[14], ，作为有限图类的一种结构性质，它推广了许多性质良好的类，包括度有界图、平面图、不含固定 minor 的图以及扩展有界图。处处稀疏类在算法图论中发挥着重要作用，因为若将若干计算难题限制在这类图上，它们便会变得易处理。

现在让我们回顾分类理论中的一些核心驯性概念，并将其从无限结构的背景调整到（不一定是无限的）结构类的背景中。

定义 2.3（序性质／独立性性质）。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构类。我们称一个 $\mathcal{L}$-公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ 具有:

(1) 在 $\mathcal{C}$ 中具有序性质：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在某个 $M_n \in \mathcal{C}$ 以及 n 个序列 $(\bar{a}_i)_{i\in[n]}$ 和 $(\bar{b}_j)_{j\in[n]}$，它们是来自 M_n 的元组，并满足:

$$M_n \vDash \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \text{ if, and only if, } i < j.$$

(2) 在 $\mathcal{C}$ 中具有独立性性质，当且仅当对所有 $G = (U, V; E) \in \mathfrak{B}$ 都存在某个 $M_G \in \mathcal{C}$ 以及元组序列 $(\bar{a}_i)_{i\in U}$ 和 $(\bar{b}_j)_{j\in V}$，满足:

$$M_n \vDash \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \text{ if, and only if, } (i, j) \in E.$$

如果 $\mathcal{C}$ 中没有公式具有序性质，我们就称其为稳定 。如果$\mathcal{C}$ 中没有公式具有独立性性质，我们就称其为NIP （无独立性质）。

紧致性的一个简单应用表明，类 $\mathcal{C}$ 是稳定的（分别地，是 NIP），当且仅当 Th($\mathcal{C}$) 的所有完备理论都具有标准模型论意义上的稳定性（分别地，NIP）（标准的模型论定义例如见 [19] ）。

给定一个 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{L}$-结构类，以及一个通过一元谓词进行的扩张 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{P_i : i \in I\}$，我们称一个 $\mathcal{C}'$ 的 $\mathcal{L}'$-结构类为 $\mathcal{C}$的一元扩张，如果 $\mathcal{C} = \{M' \restriction_{\mathcal{L}} : M' \in \mathcal{C}'\}$，其中对于一个 $\mathcal{L}'$-结构 M'，我们

将 M'中不属于 $\mathcal{L}$的每个关系符号都直接遗忘后得到的 $\mathcal{L}$-结构记作 $M' \restriction_{\mathcal{L}}$。换言之，对于每个结构 $M \in \mathcal{C}$，若 $\mathcal{C}'$ 至少包含一个通过自由解释的一元谓词扩张而成的 M 副本，且不包含其他结构，则 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的一元扩张。

定义 2.4（一元稳定性/NIP）**：**设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构类。如果 $\mathcal{C}$ 的所有一元扩张 $\mathcal{C}'$ 都是稳定的（分别具有 NIP），则称 $\mathcal{C}$ 是单子稳定（分别为单子 *NIP*）的。

稀疏性与稳定性之间的关系由以下定理刻画，该定理由 Podewski 和 Ziegler 在无限图的语境中建立，后来又由 Adler 和 Adler 很久之后推广到图类的语境中 [17], [1]。

定理 2.5（Adler、Adler [1]；Podewski、Ziegler [17]）。设 $\mathcal{C}$ 是一个处处稀疏的图类。那么 $\mathcal{C}$ 是单子稳定的。此外，当 $\mathcal{C}$ 是单调的时，以下命题等价：

(1) $\mathcal{C}$ 具有 *NIP*；*(2)* $\mathcal{C}$ 是单子 *NIP*；*(3)* $\mathcal{C}$ 稳定；*(4)* $\mathcal{C}$ 是单子稳定；*(5)* $\mathcal{C}$ 处处稀疏。

此外，Adler 和 Adler 曾提出，定理 2.5 能否推广到具有有限签名的任意关系结构。最近，Braunfeld 和 Laskowski 针对关系结构确立了一种与定理 2.5 类似的塌缩现象。

定理 2.6 (Braunfeld、Laskowski、 [5])。设 $\mathcal{C}$ 是一个结构的遗传类。那么， $\mathcal{C}$ 是单子 *NIP*（分别为单子稳定），当且仅当 $\mathcal{C}$ 具有 *NIP*（分别为稳定）。此外，若 $\mathcal{C}$ 是单调的，那么 $\mathcal{C}$ 具有 *NIP* 当且仅当它稳定。

鉴于上述结果，定理 1.1 通过将定理 2.6 中呈现的图景与 Gaifman 类的稀疏性理论性质联系起来，对 Adler 和 Adler 的问题给出了肯定的回答。

2.3. **模型检验**。我们将类 $\mathcal{C}$ 上的模型检验称为以下参数化判定问题：

给定：一个一阶句子 ϕ 和一个结构 $M \in \mathcal{C}$。参数：$|\phi|$。判定：M 是否满足 ϕ。

定义 2.7。 我们称 $\mathcal{C}$ 是易处理的，或者称类 $\mathcal{C}$ 上的模型检验问题是固定参数可处理的，如果存在一个算法，对于输入 (M, ϕ)，能在时间 $f(|\phi|) \cdot |M|^{\mathcal{O}(1)}$ 内判定 $G \models \phi$是否成立，其中 f是某个可计算函数。

对所有图构成的类进行模型检验是 AW$[*]$ 复杂性类下的完全问题，而据猜测，该类严格包含固定参数可处理类。我们在全文中均假设 AW$[*]$ $\neq$FPT。

目前已知能够进行易处理模型检验的所有图和关系结构遗传类都是 NIP。此外，NIP 在遗传类中的稳健性表明，它可能是可处理性的必要条件。这是以下猜想的依据：

猜想 2.8 ([3])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个关系结构遗传类。那么 $\mathcal{C}$ 是易处理的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是 *NIP*。

有充分证据支持对这一猜想作肯定回答。事实上，已知它适用于：

- 图的单调类，其中 NIP 与处处稀疏性一致 [10];
- 有序图的遗传类，其中 NIP 与有界双宽一致 [20]。

尽管没有明确以这种形式表述，但仔细审视 [10] 的论证便会发现，以下结论成立。

定理 2.9 (Grohe、Kreutzer、Siebertz、 [10])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个关系结构类，且 Gaif($\mathcal{C}$) 处处稀疏。那么 $\mathcal{C}$ 具有固定参数可处理的模型检验。

2.4. **解释**。 经典模型论中的解释使我们能够以可定义的方式，在某种语言的结构的可定义商结构中找到另一种语言的结构；例如，我们可以用这种方式在整数中找到有理数。

在我们的情形中，我们关注解释的一种受限形式，称为简单解释（可以带参数）。直观地说，若存在一种统一的方法，能在某个结构 $\mathcal{C}$（或其某个笛卡尔幂）中定义 $\mathcal{D}$ 中的每个结构，那么 $\mathcal{L}'$-结构类 $\mathcal{D}$ 就可以解释在 $\mathcal{L}$-结构类 $\mathcal{C}$ 中。更形式化地说：

定义 2.10 （简单解释）。 设 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 是两个有限关系语言。一个带参数的简单解释 $I : \mathfrak{C}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{C}(\mathcal{L}')$由以下数据组成：

- 一个域公式 $\delta\ \bar{x}\ \bar{v}\ \in \mathcal{L}$ d $M \in (\ ,\ )$,
以及一个函数，该函数为每个 $(\ )$ 指定一个来自 $\bar{d}\ M$ 的元组 $M^{|\bar{v}|}(\ )$。
- 对于每个 k元关系符号 $R(y_1, \ldots, y_k) \in \mathcal{L}'$，一个解释公式 $\phi_R(x_1,\ldots, x_k, \bar{v}_R) \in \mathcal{L}$，其中 $|\bar{x}_i| = |\bar{x}|$，对每个 $i \in [k]$，以及一个函数 c_R，它将每个 $M \in \mathfrak{C}(\mathcal{L})$关联到来自 $M^{|\bar{v}_R|}$的一个元组 $\bar{c}_R(M)$。

为了使我们关于解释的讨论更加简明，我们采用以下记法。给定 $M \in \mathfrak{C}(\mathcal{L})$，我们用 $I(M)$表示定义在 $\delta(M)$这一集合上的 $\mathcal{L}'$ 结构 $\bar{}: = \{a \in M\colon\ M \vDash \delta(a, d(M))\}$，其满足：

$$I(M) \vDash R(a_1, \ldots, a_k) \text{ if, and only if, } M \vDash \phi_R(a_1, \ldots, a_k, \bar{c}_R(M)),$$

$\bar{}$对于每个 k元关系符号 $R \in \mathcal{L}'$和 a_1，.....，$a_k \in \delta(M, d(M))$。这$\widehat{}$对偶地给出了一个映射 $I\colon\ \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$，将带参数的 $\mathcal{L}'$公式映射为带参数的 $\mathcal{L}$公式，使得对于任意 $\mathcal{L}'$句子 ϕ，我们都有：

$$M \models \widehat{I}(\phi) \text{ if, and only if, } I(M) \models \phi.$$

为了能够将一类结构上的一阶模型检验问题归约到另一类结构上（后者可能使用不同的语言），我们关注那些能够在多项式时间内计算的解释。更准确地说，我们定义如下概念：

定义 2.11（多项式解释）。给定结构类$\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{C}(\mathcal{L})$和 $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{C}(\mathcal{L}')$，如果存在以下对象，我们称 $\mathcal{D}$ 可通过多项式时间解释于 $\mathcal{C}$（带参数）：

（1）一个带参数的简单解释，$I\colon\ \mathfrak{C}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{C}(\mathcal{L}')$，如定义 2.10 中所述，使得函数 d和 c_R（$_{R\in\mathcal{L}'}$）可在多项式时间内计算；以及（2）一个多项式时间可计算映射 $f\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得对于所有$D \in \mathcal{D}$，我们都有 $D = I(f(D))$。

在这种情况下，我们记作 $\mathcal{D} \leq_{\mathsf{P}} \mathcal{C}$。

下一个引理说明了多项式解释为何有用。

引理 2.12。关系 $\leq_{\mathsf{P}}$ 是有限关系语言中结构类集合上的拟序。此外，$\leq_{\mathsf{P}}$ 保持可处理性，即如果 $\mathcal{C}$ 是易处理的且 $\mathcal{D} \preceq_{\mathsf{P}} \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{D}$ 也是易处理的。

证明。引理的第一部分显而易见，因此我们只讨论第二部分。我们将 $\mathcal{D}$ 中的模型检验问题归约为 $\mathcal{C}$中的模型检验问题。给定一个 $\mathcal{L}'$句子 ϕ 和一个 $\mathcal{L}'$结构 $M \in \mathfrak{C}(\mathcal{L}')$，根据假设，我们可以在多项式时间内计算出一个 $\mathcal{L}$结构 $f(D) \in \mathcal{C}$，使得

$M = I(f(D))$。根据假设，我们也可以在多项式时间内计算 $I(f(D))$，因为论域中的参数和解释公式都可以在多项式时间内从 M 计算得出。于是，我们有：

$$f(D) \models \widehat{I}(\phi) \text{ if, and only if, } I(f(D)) = M \models \phi,$$

其中 $\widehat{I}(\phi)$ 的构造方式基本上与定义 2.10之后的讨论相同；显然，这可以在多项式时间内由 ϕ得到。由于 $\mathcal{C}$ 是易处理的，因此 $\mathcal{D}$ 也是易处理的。□

2.5. **拉姆齐理论**。 我们的论证中反复使用的一项核心技巧是：如果一个有限结构足够大，那么其中必然会出现某些模式。这正是拉姆齐理论的核心思想，下面我们回顾其中相关的工具。

定理 2.13 (拉姆齐定理，[18])。 存在一个可计算函数$\mathcal{R} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ 使得对于所有 $m, k, r \in \mathbb{N}$ 以及每一种着色 $\chi : [\mathcal{R}(m, k, r)]^{(k)} \to [r]$ 都存在某个 $S \subseteq [\mathcal{R}(m, k, r)]$，其大小为 m 且为单色。

拉姆齐理论中的另一个标准定理是以下定理 2.13 的著名变体，我们将用到它：2.13：

定理 2.14 (二部拉姆齐定理)。 存在一个可计算函数 $\mathcal{P} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对所有 $m, r \in \mathbb{N}$ 以及完全二部图 $K_{\mathcal{P}(m,r),\ \mathcal{P}(m,r)}$ 的所有使用 r 种颜色的边着色，都存在两个子集 A, B，分别取自两部分且大小均为 m，它们诱导出一个 $K_{m,\ m}$的单色副本。

我们还需要用到以下拉姆齐理论结果，其中颜色数可以是无限的。当然，在这种情况下，我们不能指望找到单色子集。尽管如此，我们仍可确保在一个足够大的集合上，着色的行为属于少数几种“典范”情形之一。最初的典范拉姆齐定理由 Erdős 和 Rado[8], 提出；但就本文而言，我们只关注其有效形式的二部版本。

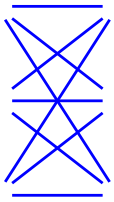
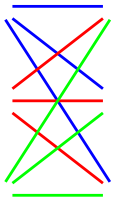
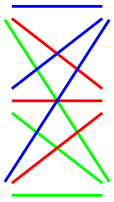
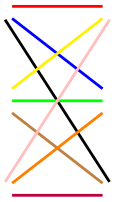
定理 2.15 （二部典范拉姆齐定理，[12]）。 存在一个可计算函数 $\mathcal{K} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及完全二部图 $K_{\mathcal{K}(n),\ \mathcal{K}(n)}$ 的每一种边着色，都存在两个部分的子集 X、Y，二者的大小均为 n，使得对于所有 $x, x' \in X$和 $y, y' \in Y$，以下情形之一成立：

(1) $\chi(x, y) = \chi(x', y')$;

(2) $\chi(x, y) = \chi(x', y')$ *if, and only if,* $x = x'$;

(3) $\chi(x,\ y) = \chi(x',\ y')$ 当且仅当，$y = y'$；

(4) $\chi(x,\ y) = \chi(x',\ y')$ 当且仅当 $x = x'$ 和 $y = y'$。

(1):  (2):  (3) :  (4) : 

今后，我们称完全二部图的边着色为类型为1 （分别为2、3、4）典范的，当且仅当它对所有边都满足定理2、3、4中的条件1（分别为2.15 ）。更一般地，若此类着色是任意类型的典范着色，我们就称其为典范的。

2.6. 典范结构。回顾一下，公式 $\phi(\bar{x})$ 称为原始正公式，若其形式为 $\exists\bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$，其中 ψ 是原子公式的合取。若 $\phi(\bar{x})$ 的形式为 $\exists\bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$，其中 ψ 是原子公式与形如 $v_i \neq v_j$ 的公式的合取，且 v_i、v_j 是 ϕ 的变量，则称 $\phi(\bar{x})$ 为准正公式。在数据库理论文献中，原始正公式也称为合取查询。将典范结构与原始正公式相关联，并反过来将有限结构与相应的典范公式相关联，这一做法可追溯至 Chandra 和 Merlin [6]。

定义 2.16 （典范结构）。给定一个原始正公式$\phi(\bar{x}) = \exists\bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$，我们定义一个带标记的 $\mathcal{L}$-结构$(M_\phi, \bar{x})$，其论域为 $\{v_1, \ldots, v_r\}$ 中变量的集合，并按如下方式解释每个 $R \in \mathcal{L}$：

$$M_\phi \vDash R(v_1, \ldots, v_n) \iff R(v_1, \ldots, v_n) \text{ appears as a conjunct in } \psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

带标记元素 $\bar{x}$恰好对应于 ϕ的自由变量。该结构在同构意义下是唯一的，我们称之为 ϕ的典范结构。

类似地，对于每个带标记的 $\mathcal{L}$-结构$(A, \bar{x})$，我们可以关联一个原始正公式 $\phi_A(\bar{x})$，使得$(\mathcal{M}_{\phi_A}, \bar{x}) = (A, \bar{x})$。我们称此公式为$(A, \bar{x})$的典范公式。设 $\phi(\bar{x})$是一个原始正公式，$(M_\phi, \bar{x})$是其典范结构。容易看出，对于任意 $\mathcal{L}$-结构 A和 $\bar{a} \in A$，有 $A \models \phi(\bar{a})$当且仅当存在一个（带标记结构之间的）同态 $h : (\mathcal{M}_\phi, \bar{x}) \to (A, \bar{a})$。

事实上，原始正公式是否成立，只取决于其规范结构的各个连通分支是否成立。更准确地说，有如下结论：

引理 2.17. 设 $\phi(\bar{x})$ 是一个原始正公式， $\mathcal{M}_\phi$ 是其规范结构。设 $G_1, \dots G_n$ 为 Gaif$(\mathcal{M}_\phi) \setminus \bar{x}$的连通分支，且 $M_i = \mathcal{M}_\phi[G_i, \bar{x}]$。那么，对于任意 $\mathcal{L}$-结构A 和元组 $\bar{a} \in A$，以下条件等价：

(1) $A \models \phi$（$\bar{a}$）。*(2)* 对每个 $i \in [n]$，都存在一个同态 h_i：（M_i, $\bar{x}$）$\to$（A, $\bar{a}$）。

证明。 只有蕴含关系 (2) $\implies$ (1) 是非平凡的。给定一组同态 h_i: (M_i, $\bar{x}$) $\to$ (A, $\bar{a}$)，如 (2) 所示，它们的并 $h = \bigcup h_i$ 是一个同态 ($\mathcal{M}_\phi$, $\bar{x}$) $\to$ (A, $\bar{a}$)。由于各连通分支G_1、.....、G_n 彼此不相交，因此该定义良好；于是 $M_i \cap M_j = \bar{x}$ 对于 $i \neq j$ 而言，在所有 h_i'下具有相同的像。此外，若 (v_1, . . . , v_n) $\in R^{\mathcal{M}_\phi}$，则 $\bar{v} \setminus \bar{x}$ 中的元素位于 Gaif($\mathcal{M}_\phi$) $\setminus \bar{x}$ 的同一个连通分支中，设为 G_k。由于h_k 是一个同态，因此可得 $h_k(\bar{v}) = h(\bar{v}) \in R^A$。□

˜给定一个准正公式 $\phi(\bar{x}) = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$，我们用 $\phi(\bar{x})$ 表示从 ψ 中移除形如 $v_i \neq v_j$ 的合取项后得到的原始正公式。随后，我们将 ϕ 的典范结构定义为 $\mathcal{M}_{\tilde{\phi}}$。容易看出，在这种情况下，当且仅当存在一个同态 h: ($\mathcal{M}_{\tilde{\phi}}$, $\bar{x}$) $\to$ (A, $\bar{a}$) 满足对于来自 ψ 的每个合取项 $v_i \neq v_j$，均有 $f(v_i) \neq f(v_j)$ 时，$A \models \phi(\bar{a})$ 成立。

3. 路径公式

在我们的分析中，我们论证了，只要一个关系结构的单调类具有独立性性质，就一定可以由某种原始正公式予以见证。对于图而言，Adler 和 Adler 的工作隐含地表明，这个原始正公式的典范结构是标准图论意义下的一条路径，即一个元组（x_1, ..., x_n），其中的元素两两不同，并且对于所有 $i \in [n-1]$，都有 $E(x_i, x_{i+1})$。

本节中，我们将介绍一般关系结构中见证独立性性质的（图）路径的类比概念。我们从以下较为技术性的定义开始。

定义 3.1（路径）。所谓长度为 n的路径，是指由一列元组 $\bar{e}_1$,... , $\bar{e}_n$ 构成的一个 $\mathcal{L}$-结构 P，其中各元素互不重复，并且满足：

- P $= \bigcup_{i \in [n]} \bar{e}_i$;
- $|\bar{e}_i \cap \bar{e}_{i+1}| = 1$，对所有 $i < n$;
- $\bar{e}_i \not\subseteq \bar{e}_{i+1}$ 且 $\bar{e}_{i+1} \not\subseteq \bar{e}_i$，对所有 $i < n$;

对于所有 $j \in [n] \setminus \{i-1, i, i+1\}$, • $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \emptyset$;

对于某个唯一的关系符号 $R_i \in \mathcal{L}$，• $R_i(\bar{e}_i)$；

• $R(\bar{a}) \implies \bar{a} = \bar{e}_i$ 对于某些 $i \in [n]$、所有关系符号 $R \in \mathcal{L}$以及所有元组 $\bar{a} \in \mathbf{P}$。

我们将 $S(\mathbf{P}) = \bar{e}_1 \setminus \bar{e}_2$ 记作，并称这些为起始顶点；而将$F(\mathbf{P}) = \bar{e}_n \setminus \bar{e}_{n-1}$ 记作，并称这些为终止顶点。我们将元组$\bar{e}_i$ 称为路径的步骤，并将 $\bar{e}_i \cap \bar{e}_{i+1}$ 中的单元素集合称为路径的连接点。

给定一个原始正公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$（其中 $\bar{z}$ 可能为空），如果存在 $x_0 \in \bar{x}$ 和 $y_0 \in \bar{y}$，使得 $\mathcal{M}_\phi$是一条路径，且具有 $x_0 \in S(\mathcal{M}_\phi)$ 和 $y_0 \in F(\mathcal{M}_\phi)$，则称 ϕ为路径公式 。类似地，如果 $\bar{x} \subseteq S(\mathcal{M}_\phi)$ 和 $\bar{y} \subseteq F(\mathcal{M}_\phi)$，则称 ϕ 为简单路径公式 。

请注意，严格来说，根据上述定义，没有任何图 G 可以是路径。事实上，最后一个条件确保了 $E(G)$ 不可能是对称的，因为关系 R 中出现的元组的任何置换都不可能出现在来自 $\mathcal{L}$的任何其他关系中。为避免混淆，我们始终将图论意义上的标准路径称为图路径。

直观地说，路径公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ 起着从 $\bar{x}$ 到 $\bar{y}$的高元数图路径的作用。然而，在足够的对称性下，我们可能无法通过定义辨别 ϕ的方向，即 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 在 ϕ中看起来相同。这在下面的定义中得到了形式化，并且对定理 5.2的证明十分重要。

定义 3.2 （对称路径）。若路径 P 的长度为 n，且对所有 $i \in [n]$都有 $R_i = R_{n+1-i}$，则称其为对称路径。对称路径公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是一个满足 $|\bar{x}| = |\bar{y}| = m$ 的简单路径公式，其中 $\mathcal{M}_\phi$ 是一条对称路径，并且存在自同构 f，其作用于 $\mathcal{M}_\phi$，将 $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ 映射为 $\mapsto (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(m)})$，并将 $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ 映射为 $\mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots, x_{\sigma^{-1}(m)})$；其中存在某个 $\sigma \in \mathcal{S}_m$ ，使得该置换不是恒等置换。此外，如果 ϕ 包含参数，则这些参数必须由 f 固定。

给定一个 $\mathcal{L}$-结构，以及 Gaif(M) 中的一条图路径，我们可以构造一个路径公式来描述这条路径的“类型”。以下定义体现了这一思想，并与引理 4.1 的证明有关。

定义 3.3 (路径类型)。 设 M 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $S = (u_1, \ldots, u_n)$ 是 Gaif(M) 中的一条图路径。对于每个 $i \in [n-1]$，我们可以关联一个关系符号 $R_i \in \mathcal{L}$、元素 $v_{i,1}$、…、$v_{i,\mathrm{ar}(R_i)}$，以及一个置换 $\sigma_i \in S_{\mathrm{ar}(R_i)}$，使得 $\sigma_i(u_i, u_{i+1}, \bar{v}_i) \in R_i^M$。于是我们称公式</output>

$$\phi(x, y, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \exists \bar{v}_i \ldots \bar{v}_{n-1}(R_1(\sigma_1(x, z_2, \bar{v}_1)) \wedge R_2(\sigma_2(z_2, z_3, \bar{v}_2)) \\ \wedge \cdots \wedge R_{n-1}(\sigma_{n-1}(z_{n-1}, y, \bar{v}_{n-1})))$$

图路径 $u_1, \ldots, u_n$ 的一种路径类型 。

容易看出，每当 $S=(u_1,\dots,u_n)$ 是 Gaif(M) 中的一条图路径时，都存在一种针对 S 的路径类型 ϕ，使得 $M\models\phi(u_1,u_n,u_2,\dots,u_{n_1})$。显然，这并非由 S 唯一确定，因为对于 Gaif(M) 中同一条图路径 $u_1,\dots,u_n$，我们可能得到不同的关系序列$R_i,\dots R_{i-1}$以及排列 $\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1}$，如定义 3.3 所示。

4. 从某处稠密性到 IP

本节的主要结果是定理 4.3，我们将在其中证明：对于任意单调类 $\mathcal{C}$，若其盖夫曼类某处稠密，则存在一个路径公式（定义 3.1意义下），该公式可在 $\mathcal{C}$上统一编码所有二分图的边关系。证明中使用的工具是第 2.5节的拉姆齐理论结果。只要使用足够大的有限结构，这些结果就能帮助我们确保各种类型的正则性。

我们通过两个预备引理来证明该定理，这两个引理的优点是也适用于不一定单调的类。直观地说，引理 4.1 告诉我们，如果 $\mathcal{C}$ 是一个关系结构单调类，且其盖夫曼类某处稠密，那么我们就能找到一个路径公式，该公式可在 $\mathcal{C}$中编码所有有限完全二部图的边关系。

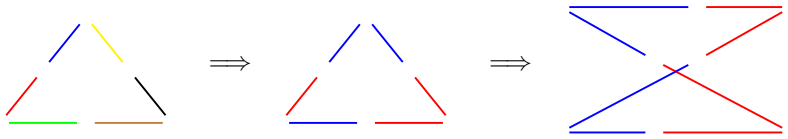
引理 *4.1.* 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构类，且 *Gaif($\mathcal{C}$)* 某处稠密。那么存在一个长度为 ≥ 2 的路径公式 $\phi(x,y,\bar{z})=\exists\bar{w}\psi(x,y,\bar{z},\bar{w})$，其连接点恰好是 $\bar{z}$ 中的变量；并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在某个 $M_n\in\mathcal{C}$ 以及两两不同的元素 $(a_i)_{i\in[n]}$、$(b_j)_{j\in[n]}$、$(\bar{c}_{i,j})_{(i,j)\in[n]^2}$，它们来自 M_n，使得

$$M_n\models\phi(a_i,b_j,\bar{c}_{i,j}),\ \textit{for all } i,j\in[n].$$

证明。 如果 Gaif($\mathcal{C}$) 某处稠密，那么存在 $r\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都存在某个 $M_n\in$ Gaif($\mathcal{C}$)，满足 $K_n^r\leq$Gaif(M_n)。不失一般性，我们可以假设 $r\geq 1$。事实上，如果 $r=0$，那么 $K_n^1\leq K_{n^2}\leq$Gaif(M_{n^2})，因此我们可以取 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列，并适当地重新标记各个指标。

对于每个 $i<j$，取自 $[n]$，令 $S_{i,j}^n$ 为 Gaif(M_n) 中对应于 K_n 中边 (i,j) 的 r-细分的图路径，并从 i 指向 j。令 $q\in\mathbb{N}$为关系符号 $R\in\mathcal{L}$的最大元数。注意，对每条图路径 $S_{i,j}^n$，至多有 $p=(|\mathcal{L}|\times q!)^{r+1}$ 种路径类型。由拉姆齐定理，对于每个 n，我们可以找到某个大小为 n的 $\Sigma_n\subseteq[\mathcal{R}(n,2,q)]$，使得对于所有来自 Σ_n的 $i<j$，$S_{i,j}^{\mathcal{R}(n,2,q)}$ 具有相同的路径类型。因此，对 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 取一个子序列并重新标记指标后，我们可以假设所有 $S_{i,j}^n$ 都具有相同的路径类型。记此类型为 ϕ_n。由于对每个 n只有有限多种可能的路径类型，我们可以再次对序列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 进行抽稀，确保得到相同的路径类型 $\phi(x,y,\bar{z})$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均如此。根据定义， $\mathcal{M}_\phi$ 的连接点恰好是 $\bar{z}$中的变量，而 $\mathcal{M}_\phi$ 的长度为 ≥ 2 ，因为 $r \geq 1$。



在 M_{2n} 中工作，并令 $(a_i)_{i\in[n]}$ 为对应于 K^r_{2n} 中 $1, \ldots, n$ 的元素，令 $(b_j)_{j\in[n]}$ 为对应于 K^r_{2n} 中 $n+1, \ldots, 2n$ 的元素。此外，令 $\bar{c}_{i,j}$ 为从图路径 $S^{2n}_{i,n+j}$ 的首尾分别移除 a_i 和 b_j 后得到的元组。显然，元素 $(a_i)_{i\in[n]}$、$(b_j)_{j\in[n]}$、$(\bar{c}_{i,j})_{i,j\in[n]}$ 两两不同。由于对于所有 $i, j \in [n]$，$S^{2n}_{i,n+j}$ 的路径类型都等于 ϕ，因此对于所有 $i, j \in [n]$，有 $M_{2n} \models \phi(a_i, b_j, \bar{c}_{i,j})$。最后，我们转到子序列 $(M_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 并重新标记。□

既然我们已经证明可以编码任意完全二部图的边关系，接下来便希望利用单调性来编码任意二分图的边关系，从而见证独立性性质。为此，我们必须确保编码中使用的元组“足够不相交”，这样移除所需的关系才能确实转化为移除一条编码边。下面的引理是朝此目标迈出的一步。

引理 *4.2. disjoint* 设 $\mathcal{C}$ 是一类 $\mathcal{L}$-结构，且 *Gaif(C)* 某处稠密。那么存在一个长度为 ≥ 2 、带有参数 $\bar{p}$ 的路径公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \exists \bar{w} \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$，其连接点恰好是 $\bar{z}$ 中的元素；并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，都存在某个 $M_n \in \mathcal{C}$ 以及来自 M_n 的元组 $(\bar{a}_i)_{i\in[n]}$，$(\bar{b}_j)_{j\in[n]}$，$(\bar{c}_{i,j})_{(i,j)\in[n]^2}$，$(\bar{d}_{i,j})_{i,j\in[n]^2}$ ，使得对所有 $i, i', j, j' \in [n]$，以下条件均成立：

(1) $M_n \models \psi(\bar{a}_i, \bar{b}_j, \bar{c}_{i,j}, \bar{d}_{i,j})$; (2) $\bar{a}_i(k) \neq \bar{a}_{i'}(k)$，对于 $i \neq i'$ 以及所有 $k \in [|\bar{x}|]$; (3) $\bar{b}_j(k) \neq \bar{b}_{j'}(k)$，对于 $j \neq j'$ 以及所有 $k \in [|\bar{y}|]$; (4) $\bar{c}_{i,j}(k) \neq \bar{c}_{i',j'}(k)$ 和 $\bar{c}_{i,j}(k) \neq \bar{c}_{i,j}(l)$，对于 $(i, j) \neq (i', j')$ 以及所有来自 $[|\bar{z}|]$的 $k \neq l$; (5) $\bar{d}_{i,j}(k) \neq \bar{d}_{i',j'}(k)$，对于 $(i, j) \neq (i', j')$ 以及所有 $k \in [|\bar{w}|]$。

证明。设 $\phi(x, y, \bar{z}) = \exists \bar{w} \psi(x, y, \bar{z}, \bar{w})$ 和 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如引理 4.1 所述。为清晰起见，我们用 $(a^n_i)_{i\in[n]}$、$(b^n_j)_{j\in[n]}$、$(\bar{c}^n_{i,j})_{(i,j)\in[n]^2}$ 表示同一引理中的 M_n 的元素。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以及每一对 $(i, j) \in [n]^2$，选取一个由 M_n 中元素组成的元组 $\bar{d}^n_{i,j}$ ，其中包含一些任意固定的

存在量词见证，使得 $M_n \models \phi(a_i^n, b_j^n, \bar{c}_{i,\ j}^n)$ 成立，即对于所有 $i, j \in [n]$，均有 $M_n \models \psi(a_i^n, b_j^n, \bar{c}_{i,\ j}^n, d_{i,\ j}^n)$。

设 $m = |d_{i,j}|$。根据定理 2.15 的 m 次应用，我们可以假设，$d_{i,j}^n(k) = d_{i',j'}^n(k)$ 是否成立，取决于该定理给出的四种规范情形之一，而不取决于 n。事实上，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $k \in [m]$，定义边的着色 $\chi_{n,k}(i,j) = d_{i,j}^n(k)$，其定义在 $K_{n,n}$ 上。令 $\mathcal{K}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为定理 2.15 保证存在的可计算函数，并将 $\mathcal{K}$ 与自身复合 m 次记为 $\mathcal{K}^m$。由此可知，部集大小为 $\mathcal{K}^m(n)$ 的完全二部图包含两个部的子集 A_n, B_n，其大小为 n；这些子集在其上诱导出一个 $K_{n,n}$ 的副本，并且对于所有 $k \in [m]$，$\chi_{\mathcal{K}^m(n)\,k}$ 都是规范的。因此，我们可以将论证限制在子序列 $(M_{\mathcal{K}^m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 以及元素 $a^{\mathcal{K}^m(n)\,i}, b^{\mathcal{K}^m(n)\,j}, \bar{c}^{\mathcal{K}^m(n)\,i,j}, \bar{d}^{\mathcal{K}^m(n)\,i,j}$ 上，其中 $i \in A_n$ 和 $j \in B_n$，并作适当的重新标记。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，重新标记后，我们由此得到一个元组 $\bar{t}_n \in [4]^m$，使得 $\chi_{n,k}$ 是 $\bar{t}_n(k)$ 类型的规范形式。由于这样的 t_n 只有有限多个，根据抽屉原理，我们可以考虑 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列，使得 $\bar{t}_n$ 为常数，且等于某个 $\bar{t} \in [4]^m$，然后再次重新标记。

现在，我们依次从元组 $d_{i,j}^n$ 中移除元素，并将它们命名为参数，或将其追加到 a_i^n 或 b_j^n 之一中。由于对于所有 n，t 都是常量，因此对所有元组 $d_{i,j}$ 执行的过程完全相同，所以我们可以同时将相应的变量从 ϕ 中移出。于是，若对某个 k 属于情形 1，即若 $\bar{t}(k) = 1$，则对所有 i，$d_{i,j}(k)$ 都相同，因此我们可以将其命名为一个参数，并从每个 $h_{i,j}$ 中将其移除。若属于情形 2，则 $d_{i,j}(k) = d_{i',j'}(k)$ 当且仅当 $i = i'$。于是，对每个 $i \in [n]$，我们都可以从每个 $d_{i,j}$ 中移除公共元素 $d_{i,j}(k)$，并将其追加到 a_i 中，使其成为一个元组 $\bar{a}_i$。接着，我们相应地调整 ϕ，将对应的变量 v_k 从 $\bar{v}$ 移到 x，后者也因此成为一个元组 $\bar{x}$。情形 3 与情形 2 对称，只不过现在我们将 $d_{i,j}(k)$ 追加到 b_j 中，并将变量 v_k 移到 $\bar{y}$。因此，我们可以假设，对所有剩余的 $k \in [m]$，都属于情形 4。

我们论证所得的公式和元组满足引理的要求。显然，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i, j \in [n]$，$M_n \models \phi(\bar{a}_i, b_j, \bar{c}_{i,\ j}, d_{i,\ j})$。条件 2 也得到满足，因为原始的单元素集合 $(a_i)^{i\in[n]}$ 彼此不相交，而对于每个 $i \neq i'$ 和 $k \in [m]$，分别附加到 a_i 和 $a_{i'}$ 上的元素 $d_{i,\ j}(k)$ 和 $d_{i',\ j}(k)$ 来自情形 2 的一个实例，因此两两不同。同样，条件 3 也得到满足。由于在上述过程中我们没有干扰元组 $\bar{c}_{i,\ j}$，而根据引理 4.1，这些元组包含两两不同的元素，因此条件 4 也得到满足。最后，条件 5 显然得到满足，因为 $d_{i,\ j}$中剩余的元素属于情形 4。□

由此，我们可以证明本节的主定理。

定理 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构的单调类，且 $Gaif(\mathcal{C})$ 某处稠密。那么，存在一个路径公式 $\phi(\bar{x},\bar{y}) = \exists \bar{w}\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$，带有参数 $\bar{p}$；并且对于每个二分图 $G = (U,V;E) \in \mathfrak{B}$，都存在 $\bar{}$ $\bar{}$ 某个 $M_G \in \mathcal{C}$ 以及元组序列 $(\bar{a}_u)_{u\in U}$ $(\bar{b}_v)_{v\in V}$、$(\bar{h}_{u,v})_{(u,v)\in E}$，它们取自$M_G$，使得：

$\bar{}$(1) $M_G \models \phi(\bar{a}_u,\bar{b}_v)$ 当且仅当 $(u,v) \in E$（因此，特别是 $\mathcal{C}$不是 NIP）；$\bar{}$ $\bar{}$(2) 如果 $(u,v) \in E$，那么 $M_G \models \psi(\bar{a}_u,\bar{b}_v,\bar{h}_{u,v})$；$\bar{}$ $\bar{}$(3) $\bar{p}_{u,v} = \bar{a}_u^\frown \bar{b}_v^\frown \bar{h}_{u,v}$ 的等式类型对于所有 $(u,v) \in E(G)$ 都是常量；$\bar{}$ $\bar{}$(4) $\{\bar{a}_u, \bar{b}_v, \bar{h}_{u,v}$ 中的任意两个元组：$u \in U, v \in V\}$ 互不相交，且不与参数 $\bar{p}$相交。

证明。设 $\phi(x,y,\bar{z}) = \exists \bar{w}\psi(x,y,\bar{z},\bar{w})$，其参数为 $\bar{p}$，且 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如引理 4.2 所述。为清楚起见，我们再次用 $(a_i^n)_{i\in[n]}$、$(b_j^n)_{j\in[n]}$、$(\bar{c}_{i,j}^n)_{(i,j)\in[n]^2}$表示该引理中来自 M_n的元素。考虑$\bar{}$ $\bar{}$元组 $\bar{p}_{i,j}^n = \bar{a}_i^n \frown b_j^n \frown \bar{c}_{i,j}^n \frown d_{i,j}^n$，并令 $q = |\bar{p}_{i,j}^n|$。注意，对于每个$n \in \mathbb{N}$，至多有 $q \cdot |\bar{p}|$ 个元组 $\bar{p}_{i,j}^n$ 与参数 $\bar{p}$ 相交，这是引理 4.2 中条件所致。通过选取足够大的 n 并避开这些元组，我们可以重新标记，使得没有任何 $\bar{p}_{i,j}^n$ 与 $\bar{p}$相交。

对于 $i,j,k,l \in [n]$，我们称元组 $\bar{p}_{i,j}^n$和 $\bar{p}_{k,l}^n$平凡相交，当且仅当

$$\bar{p}_{i,j} \cap \bar{p}_{k,l} = \begin{cases} \bar{p}_{i,j}, & \text{if } i = k \wedge j = l \\ \bar{a}_i, & \text{if } i = k \wedge j \neq l \\ \bar{b}_j, & \text{if } i \neq k \wedge j = l \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $f(n) = q\cdot(n-1)^2 + n$，我们断言，对于所有 $n \in \mathbb{N}$以及所有 $m \geq f(n)$，都可以找到一个大小为 n 的集合 $A_n \subseteq [f(n)]$，使得对于所有 $i,j,k,l \in A_n$，$\bar{p}_{i,j}^m$和 $\bar{p}_{k,l}^m$都平凡相交。

我们用归纳法证明这一点。事实上，对于 $n = 1$，由于 $A_1 = [1]$对所有 $m \geq 1$ 都成立，这显然为真。假设该断言对 $n-1$ 成立，并固定 $m \geq f(n)$。由于 $f(n) \geq f(n-1)$，根据归纳假设，存在某个 $A_{n-1} \subseteq f(n-1)] \subseteq [f(n)]$，其大小为 $n-1$，使得对于所有 i、j、k、$l \in A_{n-1}$，$\bar{p}_{i,j}^m$、$_j$ 与 $\bar{p}_{k,l}^m$、$_l$ 均平凡相交。注意，由引理 4.2 可知，对于每个固定的 $\bar{p}_{i,}$、$_j$，至多有 q 个元组 $\bar{p}_{k,}$、$_l$ 与其不平凡相交。因此，至多有 $q\cdot(n-1)^2$ 个元素 $l \in [f(n)]$，使得对于所有 i、j、$k \in A_{n-1}$，$\bar{p}_{i,}^m$、$_j$ 与 $\bar{p}_{k,}^m$、$_l$ 不平凡相交。由于 $[f(n)]$ 还包含额外的 n 个元素，因此我们必定能找到某个 $l \in [f(n)],$，它不属于

$n-1$ 个 A_{n-1} 的元素，使得对于所有 i、j、$k \in A_{n-1}$，$\bar{p}^m_{i,\,j}$ 与 $\bar{p}^m_{k,\,l}$ 均平凡相交。因此，我们可以令 $A_n = A_{n-1} \cup \{l\}$。

因此，我们可以考虑子序列 $(M_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$，并对元组作适当的重新标记，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i,j,k,l \in [n]$，元组 $\bar{p}^n_{i,j}$,$\bar{p}^n_{k,l}$ 两两交集为空。此外，根据定理 2.14，我们可以假设对于所有 $i,j \in [n]$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，元组 $\bar{p}^n_{i,j}$ 具有相同的等式类型。更确切地说，对于每一对 $(i,j) \in [n]^2$，令 $\Delta_n(i,j) := \Delta_=(\bar{p}^n_{i,j})$。

令 $q = |\bar{p}_{i,j}|$，容易看出，至多有 $p = 2^q$ 个集合 $\Delta_n(i,j)$。由定理 2.14 可知，存在 $\mathcal{P}(n,2,p)$ 的子集 A,B，其大小为 n，使得对于所有 $i \in A$, $j \in B$, $\Delta_{\mathcal{P}(n,2,p)}(i,j)$ 都是常数。因此，我们可以作适当的重新标记，使得对于所有 i, $j \in [n]$, $\Delta_n(i,j)$ 都是常数。由于这类集合只有有限多个，抽屉原理表明，我们可以对序列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 进行删减，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n(i,j)$ 都一致为常数。

由此可知，任何元组 $\bar{a}^n_i$都不会与元组 b^n_j相交。事实上，由于等式类型是恒定的，特别是 $\Delta_n(i,j) = \Delta_n(i,j')$，若 $\bar{a}^n_i$和 b^n_j有一个公共元素，那么对某个 k 以及所有 $j' \neq j$，都有 $b^n_j(k) = b^n_{j'}(k)$，这与引理 4.2 的假设矛盾。同样，元组 $h^n_{i,j} = \bar{c}^n_{i,j} \frown d^n_{i,j}$也不能与元组 $\bar{a}_i$ 或 b_j相交。由于元组 $\bar{p}^n_{i,j}$ 两两不相交，这意味着任意两个元组 $\{\bar{a}^n_i, b^n_j, h^n_{i,j} : i, j \in A_n\}$ 都两两不相交，而且也不与参数 $\bar{p}$相交。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑弱子结构 $M'_n \leq M_n$，它由 $\bar{p}^n_{i,\,j}$ 中的元素和参数 $\bar{p}$ 构成，并且只包含见证 $M_n \models \psi(\bar{a}^n_i, b^n_j, h^n_{i,\,j})$ 所必需的关系。由单调性可知，$M'_n \in \mathcal{C}$。注意，M'_n 中关系里的每个元组都至少包含一个 $\bar{c}^n_{i,\,j}$ 中的元素，其中 $i,j \in [n]$。事实上，$\bar{c}_{i,\,j}$ 中的元素恰好对应于路径 $\phi(\bar{a}_i, b_j)$ 的连接点；而由于 $\mathcal{M}_\phi$ 的长度为 ≥ 2，每条路径至少有一个连接点。

最后，给定 $G = (U, V; E)$，其中 $U = V = [n]$，令 $M_G \in \mathcal{C}$ 为 M'_n 的诱导子结构，它由删除所有 $(i,j) \notin E$ 对应的 $h^n_{i,j}$ 而得。由于 $\{\bar{a}^n_i, b^n_j, h^n_{i,j} : i,j \in [n]\}$ 中的元组两两不相交，因此对于 $(i,j) \in E(G)$，有 $h^n_{i,j} \in M_G$。于是，令 $\phi'(\bar{x},\bar{y}) = \exists \bar{z}\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，可知对于所有 $(i,j) \in E(G)$，都有 $M_G \models \phi'(\bar{a}^n_i, b^n_j)$。此外，对于 $(i,j) \notin E(G)$，有 $M_G \models \neg\phi(\bar{a}_i, b_j)$。事实上，由于 $\bar{c}^n_{i,j}$ 中的元素对于 $(i,j) \notin E(G)$ 不属于 M_G，上述观察表明 $M_G \models \neg\phi(\bar{a}_i, b_j)$。□

请注意，上述所有结论都可以通过以下方式证明：借助紧致性得到一个适当的 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ 无限模型，并应用不同拉姆齐定理的无限版本。我们选择给出一个有限证明，尽管这无疑更加复杂，但这样一来，整个过程都可以有效地进行。因此，如果我们假设该类中公式的 *VC* 维数可计算，那么

我们就可以在给定 r 时，计算出 $\mathcal{C}$ 中某个结构的盖夫曼图里出现的r-细分团的最大规模。

定义 4.4。如果存在一个可计算函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于所有公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 以及所有结构 $M\in\mathcal{C}$，不存在 $n>f(|\phi|)$ 和 $(\bar{a}_i)_{i\in[n]}$，$(b_J)_{J\subseteq[n]}$，则称结构类 $\mathcal{C}$ 是有效 NIP 的，其中

$$M\models\phi(\bar{a}_i,\bar{b}_J)\iff i\in J.$$

回顾一下，只要存在一个可计算函数 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于所有 $r\in\mathbb{N}$ 以及所有 $G\in\mathcal{C}$，我们都有 $K^r_{f(r)}$ 不是 G 的子图，就称图类 $\mathcal{C}$ 为有效无处稠密。

推论 4.5。设 $\mathcal{C}$ 是有限关系语言中的一个 $\mathcal{L}$-结构的单调且（单调地）*NIP* 类。那么Gaif($\mathcal{C}$) 处处稀疏。此外，如果 $\mathcal{C}$ 是有效 *NIP* 的，那么Gaif($\mathcal{C}$) 是有效无处稠密的。

5. 难处理性

在本节中，我们证明，任何 Gaifman 类某处稠密的关系结构单调类，都可以多项式解释所有二分图构成的类，因此是难处理的。为此，我们首先加强定理 4.3 ，以得到一个简单路径公式 ϕ以及一个可计算函数 $\Phi\colon\mathfrak{B}\to\mathcal{C}$ 使得 ϕ 在 G 中$\Phi(G)$编码边关系。

引理 *5.1. simplepath* 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构的单调类，且 *Gaif(C)* 某处稠密。那么存在一个简单路径公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$，带有参数 $\bar{p}$，以及一个多项式时间可计算函数 $\Phi\colon\mathfrak{B}\to\mathcal{C}$，使得对于每个二分图 $G=(U,V;E)\in\mathfrak{B}$，都存在元组 $(\bar{a}_u)_{u\in U}$ $(\bar{b}_v)_{v\in V}$、$(h_{u,v})_{(u,v)\in E}$，它们来自 $\Phi(G)$，满足：

$$\Phi(G)\models\phi(\bar{a}_u,\bar{b}_v)\ \textit{if, and only if,}\ (u,v)\in E.$$

此外，$\bar{p}$ *in* $\Phi(G)$ 中参数的解释可以在常数时间内根据 $G\in\mathfrak{B}$ 计算得出。

证明。令 ϕ 和 $(M_G)_{G\in\mathfrak{B}}$ 如定理 4.3 所述。考虑路径 $\mathcal{M}_\phi$。注意，要么存在一个步骤 $\bar{e}_i$，使得 $\bar{e}_i\cap\bar{x}=\bar{x}'\neq\emptyset$ 和 $\bar{e}_i\cap\bar{y}=\bar{y}'\neq\emptyset$ 均成立；要么存在 $i<j$ 以及步骤 $\bar{e}_i$、$\bar{e}_j$，使得 $\bar{e}_i\cap\bar{y}=\emptyset$、$\bar{e}_j\cap\bar{x}=\emptyset$，且 $\bar{e}_i\cap\bar{x}=\bar{x}'\neq\emptyset$、$\bar{e}_j\cap\bar{y}=\bar{y}'\neq\emptyset$，并且对所有 $k\in\{i+1,\dots,j-1\}$ 均有 $\bar{e}_k\cap\bar{x}=\bar{e}_k\cap\bar{y}=\emptyset$。在第一种情况下，考虑 $\mathcal{M}_\phi$ 的诱导子结构 $\mathcal{M}'$，其仅由步骤 $\bar{e}_i$ 构成；在第二种情况下，则仅由步骤 $\bar{e}_i$、.....、$\bar{e}_j$ 构成。令 $\phi'(\bar{x}',\bar{y}')=\exists\bar{w}'\psi'(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}')$ 为 $(\mathcal{M}',\bar{x}',\bar{y}')$ 的典范公式。显然，ϕ' 是一个简单路径公式，并且根据构造，对于每个 $G\in\mathfrak{B}$，我们可以选取最小子元组 $\bar{a}'_u\subseteq$ $\bar{a}_u$、$b'_v\subseteq b_v$、$\bar{c}'_{u,v}\subseteq\bar{c}_{u,v}$、$h'_{u,v}\subseteq h_{u,v}\in M_G$，对所有 $u\in U$、$v\in V$ 满足：

- $M_G \models \phi'(\bar{a}'_u, \bar{b}'_v)$ if, and only if, $(u,v) \in E$, and
- $(u,v) \in E$ implies $M_G \models \phi'(\bar{a}'_u, \bar{b}'_v, \bar{c}'_{u,v}, \bar{h}'_{u,v})$.

显然，这些新的子元组彼此不相交，也不与 $\bar{p}' \subseteq \bar{p}$ 中出现的任何参数相交 ϕ'。最后令 M'_G 为 M_G 的诱导子结构¯ ¯，其仅由这些子元组构成。由于根据定理 4.3，所有元组 $\bar{p}'_{u、v} = \bar{a}_u^\frown b_v^\frown h_u$ 的等式v 类型均一致，因此可以通过从 $G = (U, V; E)$ 中添加彼此不相交的元组 $()_{u\in U}$、$0_{v\in V}$、$(、v)_{(u,v)\in E(G)}$、$\bar{p}^G$，并赋予适当的等式类型，以表示顶点和存在量词见证，再添加由 ϕ' 指定的关系以表示边，从而计算出 M_G。显然，解释 ϕ' 中参数的元组 $\bar{p}^G$ 可由 G 在常数时间内获得。□

定理 5.2。设 $\mathcal{C}$ 是一个由 $\mathcal{L}$ 结构组成的单调类，且 Gaif($\mathcal{C}$) 某处稠密，并假设 AW[$*$] $\neq$ 固定参数可处理。那么，在 $\mathcal{C}$ 上进行 一阶逻辑 模型检验并非固定参数可处理。

证明。设 $\mathcal{C}$ 满足上述条件，并假设 AW[$*$] $\neq$ 固定参数可处理。我们论证可以在 $\mathcal{C}$ 中多项式解释所有二分图组成的类。

令 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ 为引理 5.1 中的简单路径公式。不失一般性，我们可以假设 ϕ 不对称（定义 3.2 所述意义下）。事实上，若 ϕ 对称，令 $\sigma \in S_n$ 为定义 3.2 中的非恒等置换，并考虑公式 $\phi'(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{x}, \sigma^{-1}(\bar{y}))$，其中$\sigma^{-1}$ 作用于 $\bar{y}$ 的指标。显然， ϕ' 不再对称，而元组 $(\bar{a}_u)_{u\in U}$ $(\sigma(b_v))_{v\in V}$、$(h_{u,v})_{(u,v)\in E}$ 仍满足引理 5.1 中的条件。

现在，令 k 路径 $\mathcal{M}_\phi$ 的长度，并定义辅助映射：

$$f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$$
$$G = (U, V; E) \mapsto (U', V'; E'),$$

其中 $U' := U \sqcup \{\dot{u}_{v,1}, \ldots, \dot{u}_{v,k+1} : v \in V\}$, $V' := V \sqcup \{\dot{v}_{u,1}, \ldots, \dot{v}_{u,k+1} : u \in U\}$, 且 $E' := E \sqcup \{(u, \dot{v}_{u,i}) : u \in U, i \in [k+1]\} \sqcup \{(v, \dot{u}_{v,i}) : v \in V, i \in [k+1]\}$。

这显然可以在多项式时间内计算。给定 $G = (U, V; E) \in \mathfrak{B}$，考虑 $\Phi \circ f(G) \in \mathcal{C}$ 由定理 4.3 给出，并令：

$$\theta_U(\bar{x}) := \exists^{>k} \bar{y} \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{x} \neq \bar{p} \text{ and } \theta_V(\bar{y}) := \exists^{>k} \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{y} \neq \bar{p},$$

其中，$\bar{p}$ 是 ϕ的参数。不失一般性，我们可以假设 $|\bar{x}| = |\bar{y}|$；因为若 $m = |\bar{y}| < |\bar{x}| = n$，则可以取 $\theta_V(\bar{y}, y_{m+1}, \ldots, y_n)$为 $\theta_V(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i=m}^{n-1} (y_i = y_{i+1})$；若 $|\bar{x}| < |\bar{y}|$，类似可得。因此，令 $\theta(\bar{x}) = \theta_V(\bar{x}) \vee \theta_U(\bar{x})$。

注意到 G 是 $f(G)$的诱导子图，因此我们可以将 $\Phi(G)$视为 $\Phi \circ f(G)$的诱导子结构。令$\bar{p}_{u,v} = \bar{a}_u^\frown \bar{b}_v^\frown h_{u,v}$，则有$\bar{p}_{u,v} \cap \bar{p} = \emptyset$ 并且

$$\bar{p}_{u,v} \cap \bar{p}_{u',v'} = \begin{cases} \bar{a}_u & \text{if } u = u'; \\ \bar{b}_v & \text{if } v = v'; \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

每当 $(u, v) \neq (u', v')$。因此，路径中出现次数超过 k 次的唯一非参数元素，是元组 $\bar{a}_u$ 和 b_v 中的元素，对于 $u \in U$ 和 $v \in V$ 而言，也就是对应于 G 中元素的那些元组。由于 ϕ 并非对称，因此可得 $\theta(\Phi \circ f(G)) = \{\bar{a}_u, b_v : u \in U, v \in V\}$，所以，数对 $I = (\theta(\bar{x}), \phi(\bar{x}, \bar{y}))$ 是一个带有可计算参数的解释，使得对于所有 $G \in \mathfrak{B}$，$I(\Phi \circ f(G)) = G$。由此可得 $\mathfrak{B} \leq_P \mathcal{C}$，因此 $\mathcal{C}$ 并非易处理的。□

6. 从 IP 到某处稠密性

在结构的单子 NIP 类分析中，对元组进行配对的组合构型至关重要；更广泛地说，它们对于单子 NIP 一阶理论的分析也同样重要。令人惊讶的是，事实证明，单子 NIP 等价于不存在此类构型（见 [4]中的定理 4.1）。具体而言，任何非单子 NIP 的结构类都存在元组编码构型。若将范围限制在单调类（分别为遗传类），则可保证这些构型的存在是通过“低复杂度”公式实现的，即准正公式（分别为存在公式）。我们将在下述定义及后续定理中精确阐述上述内容。

定义 6.1。设 M 是一个（无限） $\mathcal{L}$-结构。在 M 中的预编码构型 由一个带参数的公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z)$、一个序列$\mathcal{I} = \langle d_i : i \in \mathbb{N} \rangle$，以及 $\{c_{s,t} : s, t \in \mathbb{N}\}$ 组成，并满足对所有$s, t \in \mathbb{N}$，以下条件成立：

(1) $M \models \phi(d_s, d_t, c_{s,t})$；(2) $M \models \neg\phi(d_s, d_v, c_{s,t})$，对所有 $v > t$；(3) $M \models \neg(d_u, d_t, c_{s,t})$，对所有 $u < s$。

此外，当上述定义中的 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) := \exists \bar{w} \psi(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w})$ 是存在公式时，我们称该预编码构型是不相交的，如果存在来自 M 的元组 $h_{s,t}$，使得 $M \models \psi(d_s, d_t, c_{s,t}, h_{s,t})$，并且 $\{d_s, c_{s,t}, h_{s,t} : s, t \in \mathbb{N}\}$ 中任意两个都不相交，且它们与 ϕ 的参数不相交。注意，通过典范拉姆齐型论证，我们总能利用存在公式将预编码构型变换为不相交的构型，这类似于

引理 4.2的证明。下述定理保证，在任何不是单子 NIP 的单调类中，我们都能找到准正预编码。

定理 6.2 (Braunfeld, Laskowski, [5])。设 $\mathcal{C}$ 是一个非单子 *NIP* 的单调结构类。那么 $\mathcal{C}$ 可通过一个准正公式实现不相交预编码，即存在某个 $M \models \mathrm{Th}(\mathcal{C})$ 以及 M 中的一个不相交预编码构型，该构型由准正公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ 见证：$=\exists \bar{w} \psi(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w})$。

下一个引理告诉我们，只要准正公式在结构 M 中实现了不相交预编码，那么它必定会在 Gaif(M) 中生成避开参数的路径。

引理 6.3。设 M 是一个带有不相交预编码构型的 $\mathcal{L}$-结构，该构型由准正公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ 给出。那么存在 $x_0 \in \bar{x}$ 和 $y_0 \in \bar{y}$，使得在 Gaif($\mathcal{M}_{\tilde{\phi}}$) 中有一条从 x_0 到 y_0 的路径，且该路径不经过 ϕ 的参数。

证明。设 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \exists \bar{w} \psi(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w})$，$M$ 且 $(d_s)_{s\in\mathbb{N}}$、$(c_{s,t})_{s,t\in\mathbb{N}}$、$(h_{s,t})_{s,t\in\mathbb{N}}$见证了 M 中的一个不相交准正预编码构型。考虑公式 ψ，即从 ψ 中删除所有形如 $v_i \neq v_j$ 的合取项后得到的无量词公式，并令 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z)$。令 $G = \text{Gaif}(\mathcal{M}_{\tilde{\phi}}) \setminus \{p : p\text{是 } \phi\}$ 中的一个参数，$M_x = N^G(\bar{x})$ 和 $M_{y,z} = N^G(\bar{y}, z)$，即 M_x（分别为 $M_{y,z}$）是这样一组变量：在 Gaif($\mathcal{M}_{\tilde{\phi}}$) 中避开参数后，它们分别可从 $\bar{x}$（分别为 $\bar{y} \cup \{z\}$）到达。反设 M_x 与 $M_{y,z}$ 不相交。不失一般性，记 $\bar{w} = \bar{w}_x^\frown \bar{w}_{y,z}$ 为 $\bar{w}_x \in M_x$，并记 $\bar{w}_{y,z} \in M_{y,z}$ 为 ϕ，使得 $\bar{x}(\bar{y}, z) = \exists \bar{w}_x \exists \bar{w}_{y,z} \psi(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w}_x, \bar{w}_{y,z})$。类似地，将来自 M 的存在量词见证 $h_{i,j}$ 划分为 $\bar{\alpha}_{i,j}$ 以及 $\beta_{i,j}$，使得 $h_{i,j} = \bar{\alpha}_i^\frown {}_j\beta_{i,j}$，并且对所有 $i, j \in \mathbb{N}$，都有 $M \models \psi(d_i, d_j, c_{i,j}, \bar{\alpha}_{i,j}, \beta_{i,j})$。

根据假设，$M \models \psi(d_1, d_2, c_{1,2}, \bar{\alpha}_{1,2}, \beta_{1,2}) \wedge \phi(d_2, d_3, c_{2,3}, \bar{\alpha}_{2,3}, \beta_{2,3})$，并且因此特别有 $M \models \phi(d_1, d_2, c_{1,2}, \bar{\alpha}_{1,2}, \beta_{1,2}) \wedge \phi(d_2, d_3, c_{2,3}, \bar{\alpha}_{2,3}, \beta_{2,3})$。由于$M_x$和$M_{y,z}$互不相交，引理 2.17 推出 $M \models \psi(d_1, d_3, c_{2,3}, \bar{\alpha}_{1,2}, \beta_{2,3})$。然而，$\phi$ 是一个预编码构型这一事实意味着 $M \models \neg\phi(d_1, d_3, c_{2,3})$。因此，必定存在变量 $u \in M_x$和$v \in M_{y,z}$，使得 ψ 包含 $u \neq v$ 作为一个合取项。由于 $\mathcal{M} \models \neg\psi(d_1, d_3, c_{2,3}, \bar{\alpha}_{1,2}, \beta_{2,3})$，这意味着元组$d_1 \bar{\alpha}_{1,2}$和 $d_3, c_{2,3}, \beta_{2,3}$必有一个公共元素，这与它们互不相交相矛盾。

由此可知，存在某个 $x_0 \in \bar{x}$，使得存在一条避开参数的路径，从 x_0 通往 $M_{\bar{y},z}$中的某个元素；这要么就是某个 $y_1 \in \bar{y}$，这样我们便完成了证明，要么就是 z。通过类似的论证，我们可以找到某个 $y_0 \in \bar{y}$，使得存在一条避开参数的路径，通往 $M_{\bar{x},z}$中的某个元素；要么这是某个

$x_1 \in \bar{x}$，这样我们便完成了证明，要么是这个 z，在这种情况下， x_0 和 y_0 通过 z 相连，其间存在一条避开参数的路径。□

上述引理，加上预编码构型中的元素可以选取得彼此适当地不交这一事实，使我们能够在 Gaif($\mathcal{C}$) 中找到细分团。

定理 6.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个非单子 *NIP* 的 $\mathcal{L}$-结构单调类。那么 Gaif($\mathcal{C}$) 某处稠密。

证明。如果 $\mathcal{C}$ 是一个非单子 NIP 的 $\mathcal{L}$-结构单调类，那么 $\mathcal{C}$ 可由准正公式 $\phi(\bar{x},\bar{y},z) = \exists \bar{w}\psi(\bar{x},\bar{y},z,\bar{w})$ 实现不交编码。令 $M \models \mathrm{Th}(\mathcal{C})$，并令 $\{d_s, c_{s,t}, h_{s,t} : s,t \in \mathbb{N}\}$ 作为见证，如定理 6.2 所述。由引理 6.3 可知，对于 $s,t \in \mathbb{N}$，存在 $a_s \in d_s, b_t \in d_t$，使得 a_s 在 Gaif(M) 中通过一条固定长度为 r 的路径与 b_t 相连。此外，对于不同的 (s,t)，这些路径彼此不交，因为它们不会经过 ϕ 的参数，且非参数元组彼此不交。因此，$K^r_{\omega,\omega} \leq$ Gaif(M)。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在某个 $M_n \in \mathcal{C}$，使得 $K^r_{n,n} \leq$ Gaif(M_n)，由此可知 Gaif($\mathcal{C}$) 某处稠密。□

由于处处稀疏性在取单调闭包后仍然保持，因此有如下更强的推论。

推论 6.5。 设 $\mathcal{C}$ 是任意一个 $\mathcal{L}$-结构类，且 Gaif($\mathcal{C}$) 处处稀疏。那么 $\mathcal{C}$ 是单子稳定的。

证明。 考虑上述的 $\mathcal{C}$，并令 $\mathcal{C}$ 为其单调闭包。由此可知，Gaif($\mathcal{C}$) 处处稀疏，因为它包含于 Gaif($\mathcal{C}$) 的单调闭包中，而根据假设，后者处处稀疏。由上文可知，$\mathcal{C}$ 是单子 NIP 的，因此根据单调性，它是单子稳定的。由于 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$，这意味着 $\mathcal{C}$ 是单子稳定的。□

这里的所有结果都不要求 $\mathcal{C}$ 包含有限结构，也不要求 $\mathcal{L}$是有限的。因此，只需取 $\mathcal{C} = \{M\}$ 为任意无限的 $\mathcal{L}$-结构，且其所在的关系语言可能是（可数）无限的，上述结果便是对 Podewski 和 Ziegler 原始结果的推广 [17]。

推论 6.6. 设 M 是一个关系结构，使得对于所有 $r \in \mathbb{N}$，都存在某个 $n \in \mathbb{N}$，满足 $K^r_n \not\leq$ 盖夫(M)。那么 M 是单子稳定的。

7. 结论

我们的论文解决了 Adler 和 Adler 提出的问题，表明单调类的驯性可以完全从其 Gaifman 类的结构稀疏性中恢复。我们认为，稀疏图理论中的许多结果都可以通过研究 Gaifman 类推广到关系结构，并计划在未来的工作中展示这类推广。

尽管迄今尚未讨论这一点，但针对关系结构类所定义的单调性，与图论意义上的标准单调性并不完全对应。事实上，在图论意义上，图的单调类是指在删除无向边后仍然封闭的类，也就是说，可以同时删除一对关系 $E(u, v)$ $E(v, u)$。然而，$\{E\}$-结构的单调类是指可以删除任意 E 关系的类（因此可能会将一条无向边变为有向边）。在未来的工作中，我们计划通过引入对称单调类来探讨这一细微差异，从而将我们的结果推广至更广泛的关系结构类，例如在删除超边后仍然封闭的无向超图类。

最后，本文为猜想2.8的解决作出了重要贡献，证明了该猜想在结构单调类的情形下成立。尽管本文所用的技术手段必将有助于解决完整的猜想，但我们认为这项工作还需要新的技术。这里，重要的是理解线性序在有序图遗传类中单子 NIP 与有界双宽坍缩过程中的作用，并确定哪些模型论条件能将这一现象推广到任意遗传图类。

参考文献

[1] Hans Adler和Isolde Adler。将处处稀疏图类解释为模型论中的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36：322–330，2014年。[2] John T. Baldwin。稳定性理论基础。逻辑展望丛书。剑桥大学出版社，2017年。[3] Édouard Bonnet、Ugo Giocanti、Patrice Ossona de Mendez、Pierre Simon、Stéphan Thomassé和Szymon Toruńczyk。双宽IV：有序图与矩阵，2021年。[4] Samuel Braunfeld和Michael Laskowski。单子 NIP 的刻画。美国数学会汇刊*B*辑，8(30)：948–970，2021年。[5] Samuel Braunfeld和Michael C. Laskowski。单子 NIP 的存在性刻画，2022年。[6] Ashok K. Chandra和Philip M. Merlin。关系数据库中合取查询的最优实现。载于John E. Hopcroft、Emily P. Friedman和Michael A. Harrison编，*1977*年*5*月*4*日至*6*日于美国科罗拉多州博尔德举行的第*9*届*ACM*计算理论研讨会论文集，第77–90页。ACM，1977年。[7] Anuj Dawar。驯结构类上的有限模型论。载于*MFCS*，第4708卷《计算机科学讲义》，第2–12页。施普林格，2007年。

[8] Paul Erdős和Richard Rado。一个组合定理。伦敦数学学会杂志，1(4)：249–255，1950年。[9] Jakub Gajarský、Michal Pilipczuk和Szymon Torunczyk。有界双宽的稳定图。载于Christel Baier和Dana Fisman编，*LICS '22*：第*37*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会，*2022*年*8*月*2*日至*5*日，以色列海法，39 1 39 12 2022- 页码：–。ACM，。[10] Martin Grohe、Stephan Kreutzer和Sebastian Siebertz。判定处处稀疏图的一阶性质。*ACM*学报，64(3)，2017年6月。[11] Wilfrid Hodges。模型论。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1993年。[12] Alexandr Kostochka、Dhruv Mubayi和Jacques Verstraëte。图兰问题与影子 II：树。组合理论杂志*B*辑，122：457–478，2017年。[13] Stephan Kreutzer和Anuj Dawar。一阶逻辑的参数化复杂性。电子计算复杂性讨论会，TR09-131，2009年。[14] Jaroslav Nešetřil和Patrice Ossona De Mendez。论处处不稠密图。《欧洲组合学杂志》，32(4)：600–617，2011年。[15] Jaroslav Nešetřil和Patrice Ossona De Mendez。稀疏性：图、结构与算法，第28卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[16] Michal Pilipczuk、Sebastian Siebertz和Szymon Torunczyk。稀疏结构上模型检验的参数化电路复杂性。载于Anuj Dawar和Erich Grädel编，第*33*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年会论文集，*LICS 2018*，*2018*年*7*月*9*日至*12*日，英国牛津，第789–798页。ACM，2018年。[17] Klaus-Peter Podewski和Martin Ziegler。稳定图。*Fund. Math*，100(2)：101–107，1978年。[18] F. P. Ramsey。论形式逻辑中的一个问题。伦敦数学学会论文集，s2-30(1)：264–286，1930年1月。[19] Saharon Shelah。分类理论与非同构模型的数量，《逻辑与数学基础研究》第92卷。North-Holland出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1978年。[20] Pierre Simon和Szymon Toruńczyk。有界双宽的有序图，2021年。

Samuel Braunfeld，查理大学计算机科学学院（IUUK），布拉格，捷克共和国

电子邮箱地址：sbraunfeld@iuuk.mff.cuni.cz

Anuj Dawar，计算机科学与技术系，剑桥大学，英国

电子邮箱地址：anuj.dawar@cl.cam.ac.uk

Ioannis Eleftheriadis，计算机科学与技术系，剑桥大学，英国

电子邮箱地址：ie257@cam.ac.uk

Aris Papadopoulos，数学学院，利兹大学，英国电子邮箱地址：
mmadp@leeds.ac.uk