arXiv:2302.05699v1 [math.FA] 11 Feb 2023

伊朗数学会学报 国际标准刊号（印刷版）：????-????，
国际标准刊号（在线版）：????-???? 第 x 卷第 x 期
（201x），第 xx-xx 页。©201x 伊朗数学会

http://jims.iranjournals.ir http://en.ims.ir/

A(A)、Acb(A_{cb}) 和 AM(A_M) 中理想的 Arens 正则性)

BRIAN FORREST、JOHN SAWATZKY 和 AASAIMANI THAMIZHAZHAGAN

Abstract. 本文探讨傅里叶代数 $A(G)$ 中的各种理想，或其在相应的乘子代数和 cb-乘子代数中的闭包 $A_M(G)$ 和 $A_{cb}(G)$ 何时具有 Arens 正则性。我们证明，在每种情况下，若一个非零理想具有 Arens 正则性，则底层群 G必定是离散的。此外，我们还证明，若 $A(G)$ 中的理想 I 具有有界近似单位，则它具有 Arens 正则性当且仅当它是有限维的。

1. Introduction

设 G 是一个局部紧群，并赋予固定的左 Haar 测度 μ。令 Σ_G 表示 G 的弱连续酉表示的等价类集合。傅里叶–斯蒂尔切斯代数 $B(G)$ 是 G 上所有弱连续酉表示的系数函数所构成的空间。也就是说

$$B(G) = \{u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta\rangle | \pi \in \Sigma_G, \xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi\}.$$

$B(G)$ 在逐点运算下构成一个交换巴拿赫代数，其范数取自它作为群 C^*-代数 $C^*(G)$ 的对偶空间所继承的范数。

$L^2(G)$ 上的左正则表示 λ 定义如下

$$\lambda(x)(f)(y) = f(x^{-1}y)$$

对每个 x， $y \in G$。傅里叶代数 $A(G)$ 由 λ 的所有系数函数构成。也就是说，所有形如以下形式的函数

$$u(x) = \langle \lambda(x)f, g\rangle$$

其中 $f, g \in L^2(G)$。傅里叶代数是 $B(G)$ 的一个闭理想，具有 $\Delta(A(G)) = G$。它也是由 $\{\lambda(x) \mid x \in G\}$ 生成的 $B(L^2(G))$ 的冯·诺依曼子代数 $VN(G)$ 的预对偶。它可以

2010年数学主题分类：主分类：43A07；次分类：43A22、46J10、47L25 关键词：傅里叶代数、乘子、Arens 正则性、一致连续泛函、拓扑不变均值。收稿日期：dd mmmm yyyy，录用日期：dd mmmm yyyy。本研究部分由加拿大自然科学与工程研究委员会资助。

也可以将其实现为 $B(G)$ 中具有紧支撑的元素空间的闭包。（关于 $B(G)$ 和 $A(G)$ 的性质，更多内容请参见 [8] 。）

众所周知，任意巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 上的乘法都可以按照 Arens 在 [1] 中所展示的两种自然方式延拓到其二次对偶上。一般而言，这两个 Arens 乘积并不相同。如果二者相同，则称该巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 是 Arens 正则的。对于交换巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，当且仅当其二次对偶 $\mathcal{A}^{**}$ 是交换的时，才具有 Arens 正则性。

最为人熟知的 Arens正则代数例子是 $B(\mathcal{H})$ 的闭子代数，其中 $\mathcal{H}$ 表示希尔伯特空间上的有界算子。通常，许多由局部紧群导出的代数都不是 Arens正则的，除非对群结构施加相当严格的限制。例如，第一作者证明了：如果 $A(G)$ 是 Arens正则的，那么 G 必须是离散的，并且 G 的每个可和子群都必须是有限的 [10, 定理 3.2 和命题 3.7] ，从而推广了 Lau 关于可和群的早期结果 [18, 命题 3.3]。事实上，人们猜想并坚信：只要 $A(G)$ 是 Arens正则的， G 就必须是有限的。

关于局部紧群所产生的代数的 Arens 正则性，相关文献十分丰富。尤其是关于傅里叶代数的研究，例如参见 [11], [10], [15], [18] 和 [21]

本文将考察 $A(G)$ 中理想可能具有的 Arens 正则性，以及两个相关的巴拿赫代数 $A_M(G)$ 和 $A_{cb}(G)$ 中理想的 Arens 正则性。这两个代数分别是 $A(G)$ 在其乘子空间和完全有界乘子空间中的闭包。我们将证明，若这三个代数中的任意一个包含一个非零的 Arens正则闭理想 I ，则 G 必须是离散的。

2. 预备知识与记号

本文中， $\mathcal{A}$ 表示一个巴拿赫代数。在这种情况下，对偶空间 $\mathcal{A}^*$ 关于模作用成为一个巴拿赫$\mathcal{A}$-双模：

$$\langle u \cdot T, v\rangle = \langle T, vu\rangle$$

and

$$\langle T\square u, v\rangle = \langle T, uv\rangle$$

对每个 u、$v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$，均成立。

众所周知，有两种自然的乘积可用于将 $\mathcal{A}$ 的乘法延拓到其二次对偶 $\mathcal{A}^{**}$ 上。这两种 Arens 乘积定义如下：

1a) $\langle u \cdot T, v\rangle = \langle T, vu\rangle$ 对于每个 $u, v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$。 1b) $\langle T \odot m, u\rangle = \langle m, u \cdot T\rangle$ 对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$ 和 $m \in \mathcal{A}^{**}$。 1c) $\langle m \odot n, T\rangle = \langle n, T \odot m\rangle$ 对于每个 $T \in \mathcal{A}^*$ 和 $m, n \in \mathcal{A}^{**}$。 2a) $\langle T\square u, v\rangle = \langle T, uv\rangle$ 对于每个 $u, v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$。 2b) $\langle m\square T, u\rangle = \langle m, T\square u\rangle$ 对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$ 和 $m \in \mathcal{A}^{**}$。 2c) $\langle m\square n, T\rangle = \langle m, n\square T\rangle$ 对于每个 $T \in \mathcal{A}^*$ 和 $m, n \in \mathcal{A}^{**}$。

2.1. 注。如果 $\mathcal{A}$ 是交换巴拿赫代数，那么容易看出，对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$，都有 $u \cdot T = T\Box u$。特别地，如果 $m \in \mathcal{A}^{**}$ 和 $u \in \mathcal{A}$，那么

$$m \odot u = u \odot m = m\Box u = u\Box m.$$

然而，众所周知，即使 $\mathcal{A}$ 是交换的，也不意味着两种乘法在 $\mathcal{A}^{**}$上相同。此外，尽管假设 $\mathcal{A}$ 是交换的，但通常 $\mathcal{A}^{**}$ 也并非如此。

2.2. 定义. 若 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫代数，且对任意 $m, n \in \mathcal{A}^{**}$都有 $m \odot n = m\Box n$，则称 $\mathcal{A}$ 是Arens正则的。

从此处开始，我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个极大理想空间为$\Delta(\mathcal{A})$的交换巴拿赫代数。此外，若我们讨论的是 $\mathcal{A}^{**}$，则除非另有说明，我们假设所用的乘积为 $\odot$。

我们将采用以下定义和记号约定。

2.3. 定义. 我们称这个空间为

$$UCB(\mathcal{A}) = \overline{\operatorname{span}\{v \cdot T \mid v \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{A}^*\}}^{-\|\cdot\|_{\mathcal{A}^*}}$$

$\mathcal{A}$上的一致连续泛函。

如果满足以下条件，我们称 $T \in \mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 上的（弱）几乎周期泛函：

$$\{u \cdot T \mid u \in \mathcal{A}, \|u\|_{\mathcal{A}} \leq 1\}$$

在 $\mathcal{A}^*$ 中相对（弱）紧，并将 $\mathcal{A}$上所有（弱）几乎周期泛函组成的空间记为 $AP(\mathcal{A})$（$WAP(\mathcal{A})$）。

2.4. 注。格罗滕迪克的一个著名判据表明，当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 中的任意两个网 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega_1}$ 和 $\{v_\beta\}_{\beta\in\Omega_2}$，都有： $T \in \mathcal{A}^*$ 是弱几乎周期的，

$$\lim_\alpha \lim_\beta \langle T, u_\alpha v_\beta\rangle = \lim_\beta \lim_\alpha \langle T, u_\alpha v_\beta\rangle$$

只要这两个极限都存在。从这里很容易看出，当且仅当 $WAP(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^*$时， $\mathcal{A}$是 Arens正则的。此外，由此可知，如果 $\mathcal{A}$ 是交换的，那么当且仅当 $\mathcal{A}^{**}$ 在两个 Arens 乘积中的任一个（因而也是两者）下同样是交换的时， $\mathcal{A}$ 是 Arens正则的。（见 [6] 和 [19]。）

2.5. 定义。若闭子空间 $X \subseteq \mathcal{A}^*$ 满足对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$ 都有 $u \cdot T \in X$，则称其为不变的。

给定 $\mathcal{A}^*$ 的一个闭不变子空间 X 以及一个 $m \in X^*$，我们定义线性算子 $m_L : X \to \mathcal{A}^*$ 为

$$\langle m_L(T), u\rangle := \langle m, u \cdot T\rangle$$

对每个 $T \in \mathcal{A}$ 和 $u \in \mathcal{A}$都成立。若 X 是拓扑内反射的，则称之为拓扑内反射，如果对每个 $m \in X^*$ 和 $T \in X$， $m_L(T) \in X$。

众所周知，若 X 是拓扑内反射的，则可以仿照我们对 $\mathcal{A}^{**}$ 所做的方式，使 X^* 成为一个巴拿赫代数，具体如下。

1) 对每个 $T \in X$ 和 $m \in X^*$，我们定义 $T \odot m = m_L(T)$。 2) 对每个 $T \in X$ 和 n， $m \in X^*$，我们定义 $\langle m \odot n,\ T\rangle = \langle n,\ T \odot m\rangle$

众所周知，容易证明， $AP(\mathcal{A})$ $WAP(\mathcal{A})$ 和 $UCB(\mathcal{A})$ 这三者都是 $\mathcal{A}^*$ 的闭内反射子空间。此外，若 $\mathcal{A}$ 是交换的且 X 是拓扑内反射的，则 X^* 是交换的，当且仅当 $X \subseteq WAP(\mathcal{A})$。

3. Multipliers of the Fourier Algebra

设 G是一个局部紧群。我们用 $A(G)$ 和 $B(G)$ 表示 G 上的傅里叶代数和傅里叶–斯蒂尔切斯代数，它们是 G 上的连续函数构成的巴拿赫代数，并由 [5] 引入。 $A(G)$ 的乘子是一个有界连续函数 v: $G \to \mathbb{C}$ ，满足 $vA(G) \subseteq A(G)$。 $A(G)$ 的每个乘子 v 都确定了 $A(G)$ 上的一个线性算子 M_v ，其定义为 $M_v(u) = vu$ ，对每个 $u \in A(G)$ 均成立。根据闭图定理，容易推出每个 M_v 也有界。 $A(G)$ 的乘子代数是闭子代数

$$MA(G) := \{M_v : v \text{ is a multiplier of } A(G)\}$$

$B(A(G))$ 的，其中 $B(A(G))$ 表示从 $A(G)$ 到 $A(G)$ 的所有有界线性算子所构成的代数。本文中，为了方便记号，我们通常用 v 代替算子 M_v ，并用 $\| v \|_{MA(G)}$ 表示 M_v 在 $B(A(G))$ 中的范数。

设 G 是一个局部紧群，并令 $VN(G)$ 表示其群von Neumann代数。对偶关系

$$A(G) = VN(G)_*$$

赋予 $A(G)$ 一个自然的算子空间结构。给定这一算子空间结构，我们可以将 $A(G)$ 的 cb-乘子代数定义为

$$M_{cb}A(G) := CB(A(G)) \cap M(A(G)),$$

其中 $CB(A(G))$ 表示从 $A(G)$ 到其自身的所有完全有界线性映射所构成的代数。我们用 $\| v \|_{cb}$ 表示算子 M_v 的 cb-范数。众所周知， $M_{cb}(A(G))$ 是 $CB(A(G))$ 的闭子代数，因此在范数 $\| \cdot \|_{cb}$ 下构成一个（完全压缩的）巴拿赫代数。

显然，

$$A(G) \subseteq B(G) \subseteq M_{cb}(A(G)) \subseteq M(A(G)).$$

此外，对于 $v \in A(G)$，我们有

$$\| v \|_{A(G)} = \| v \|_{B(G)} \geq \| v \|_{cb} \geq \| v \|_M .$$

若 G 是可和群，则有

$$B(G) = M_{cb}(A(G)) = M(A(G))$$

并且

$$\| v \|_{B(G)} = \| v \|_{cb} = \| v \|_M$$

对于任意 $v \in B(G)$。

3.1. 定义。给定一个局部紧群 G，令

$$A_M(G) \stackrel{def}{=} A(G)^{-\|\cdot\|_M} \subseteq M(A(G)).$$

and

$$A_{cb}(G) \stackrel{def}{=} A(G)^{-\|\cdot\|_{cb}} \subseteq M_{cb}(A(G)).$$

关于 $M_{cb}(A(G))$ 的基本性质，请参阅 [5] 。

3.2. 注。代数 $A_{cb}(G)$ 由第一作者在 [9] 中引入，当时记作 $A_0(G)$。在那篇论文中，我们证明，对于 $\mathbb{F}_2$（即由两个生成元生成的自由群），$A_{cb}(G)$ 具有许多可和群的傅里叶代数所特有的性质。特别是，已知代数 $A_{cb}(\mathbb{F}_2)$ 具有有界近似单位。对于满足 $A_{cb}(G)$ 具有有界近似单位的局部紧群 G，称为弱可和群。所有可和群都是弱可和的，但许多经典的非可和群，例如 $\mathbb{F}_2$ 和 $SL(2,\mathbb{R})$，也是弱可和的。

3.3. 注。令 $\mathcal{A}(G)$ 表示 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。考虑下面的映射及其伴随映射：

$i_{\mathcal{A}} : A(G) \to \mathcal{A}(G)$

$i_{\mathcal{A}}^* : \mathcal{A}(G)^* \to VN(G)$

$i_{\mathcal{A}}^{**} : VN(G)^* \to \mathcal{A}(G)^{**}$,

其中，$i_{\mathcal{A}}$ 表示包含映射。由于 $i_{\mathcal{A}}$ 的值域稠密，$i_{\mathcal{A}}^*$ 是单射，因此可逆，其逆映射为 ${i_{\mathcal{A}}^*}^{-1}$，定义在 $Range(i_{\mathcal{A}}^*)$ 上。不难看出，$i_{\mathcal{A}}^*$ 就是限制映射。即

$$i_{\mathcal{A}}^*(T) = T_{|_{A(G)}}.$$

将上述所有映射视为嵌入也很有用。也就是说，当 G 不可和时，$\mathcal{A}(G)^*$ 可视为 $VN(G)$ 的真子集，而 $VN(G)^*$ 可视为 $\mathcal{A}(G)^{**}$ 的真子集。

4. Topological Invariant Means

4.1. 定义。设 $\mathcal{A}$ 是一个交换巴拿赫代数，其极大理想空间为 $\Delta(\mathcal{A})$。设 X 是 $\mathcal{A}^*$ 的一个包含 $\phi \in \Delta(\mathcal{A})$ 的闭子模。若 $m \in X^*$ 在 X 上于 ϕ 处满足以下条件，则称其为拓扑不变平均（TIM）：

i) $\|m\|_{X^*} = \langle m, \phi \rangle = 1$, ii) $\langle m, v \cdot T \rangle = \phi(v) \langle m,$
$T \rangle$ 对于每个 $v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$。

我们将 ϕ 处 X 上的拓扑不变均值集合记为 $TIM_{\mathcal{A}}(X,\phi)$。

注：本节余下部分将重点讨论代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$、 $A_M(G)$ 及其闭理想。

4.2. 定义。设 $\mathcal{A}$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。令 $x \in G$ 定义等距映射 $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，其定义为

$$L_x(u)(y) = u(xy),$$

对每个 $y \in G$。

下面的命题将会很有用。

4.3. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 $X \subseteq \mathcal{A}(G)^*$ 是一个闭子模。设 $x \in G$。

i) 若 $Y = L_x^*(X)$，则 Y 是 $\mathcal{A}(G)^*$ 的闭子模，且

$$u \cdot L_x^*(T) = L_x^*(L_x(u) \cdot T)$$

对每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$均成立。

ii) 设 $x \in G$。则 $L_x^*(\phi_e) = \phi_x$，其中 e 表示 G的单位元。

iii) 设 $m \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(X,\phi_e)$。若 $x \in G$，则 $\phi_x \in L_x^*(X)$ 且 $L_{x^{-1}}^{**}(m) \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(L_x^*(X)\ \phi_x\quad)$.

证明。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 $X \subset \mathcal{A}(G)^*$ 是一个闭子模。设 $x \in G$。

i) 由于 L_x^* 是等距映射，因此显然 Y 是一个闭子空间。

设 $T \in X$ 和 u、 $v \in \mathcal{A}(G)$。注意到

$$\begin{aligned}
\langle u \cdot L_x^*(T), v\rangle &= \langle L_x^*(T), uv\rangle \\
&= \langle T, L_x(uv)\rangle \\
&= \langle T, L_x(u)L_x(v)_\rangle \\
&= \langle L_x(u) \cdot T, L_x(v)\rangle \\
&= \langle L_x^*(L_x(u) \cdot T), v\rangle
\end{aligned}$$

Hence $u \cdot L_x^*(T) = L_x^*(L_x(u) \cdot T) \in L_x^*(X) = Y$.

ii) 设 $u \in \mathcal{A}(G)$。那么

$$\langle L_x^*(\phi_e), u\rangle = \langle \phi_e, L_x(u)\rangle = L_x(u)(e) = u(x) = \langle \phi_x, u\rangle.$$

这表明 $L_x^*(\phi_e) = \phi_x$。

iii) 设 $T = L_x^*(T_1)$，且 $T_1 \in X$。若 $u \in \mathcal{A}(G)$，则有

$$\begin{aligned}
\langle L_{x^{-1}}^{**}(m), u \cdot T\rangle &= \langle m, L_{x^{-1}}^{*}(u \cdot T)\rangle \\
&= \langle m, L_{x^{-1}}^{*}(u \cdot L_x^*(T_1))\rangle \\
&= \langle m, , L_{x^{-1}}^{*}(L_x^*((L_x(u) \cdot T_1)\rangle \\
&= \langle m, L_x(u) \cdot T_1\rangle \\
&= L_x(u)(e)\langle m, T_1\rangle \\
&= u(e)\langle m, T_1\rangle \\
&= u(e)\langle m, L_{x^{-1}}^{*}(L_x^*(T_1))\rangle \\
&= u(e)\langle L_{x^{-1}}^{**}(m), T\rangle
\end{aligned}$$

由于 $L_{x^{-1}}^{**}$ 是等距映射，我们有

$$\|L_{x^{-1}}^{**}(m)\|_{\mathcal{A}^*} = \|m\|_{\mathcal{A}^*} = 1.$$

最后，我们有

$$\langle L_{x^{-1}}^{**}(m), \phi_x\rangle = \langle m, L_{x^{-1}}^{*}(\phi_x)\rangle = \langle m, \phi_e\rangle = 1.$$

□

下一个结果可由命题 4.3 iii) 直接得出。

4.4. 推论。设 $\mathcal{A}(G)$是 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$或 $A_M(G)$中的任意一个。设 $x \in G$。则

$$|TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)| = |TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_e)|,$$

其中 $|\cdot|$ 表示底层集合的基数。

第一位作者 与 T. Miao 共同在 [13 中为 $TIM_{A_M}(A_M^*, \phi_e)$ 建立了以下结果].

4.5. 命题。设 $\mathcal{A}$ 是 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。设 $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G) = \{u \cdot T\colon\ u \in \mathcal{A}(G)\ T \in VN(G)\}$。则

i) $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G) \subseteq UCB(A(G))$ ii $i^*(v \cdot T) = v \cdot i^*(T)$ 对每个 $v \in \mathcal{A}(G)\ T \in \mathcal{A}(G)$ * 均成立。iii) $i^*(UCB(\mathcal{A}(G))) \subseteq UCB(A(G))$。iv) 若 $\mathcal{A}$ 有有界近似单位，则 $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G) \cdot VN(G) = UCB(A(G))$ v) 对每个 $u \in A(G)\ T \in VN(G)$，$u \cdot T \in i^*(\mathcal{A}(G)^*)$。

证明。

i) 由于 $UCB(A(G))$ 是 $VN(G)$ 的闭子空间，且 $A(G)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(G)}$ 在 $\mathcal{A}(G)$ 中稠密，要证明 $i)$，我们只需证明对于任意序列 $\{v_n\} \subset A(G)$

以及满足 $\| v_n - v \|_{\mathcal{A}(G)} \to 0$ 的 $v \in \mathcal{A}(G)$ 和任意 $T \in VN(G)$，都有 $\|v_n \cdot T - v \cdot T\|_{VN(G)} \to 0$。然而，这显然成立，因为对于任意 $u \in A(G)$

$$\begin{aligned} | \langle v_n \cdot T - v \cdot T, u \rangle | &= | \langle (v_n - v) \cdot T, u \rangle | \\ &= | \langle T, (v_n - v)u \rangle | \\ &\leq \| T \|_{VN(G)} \| v_n - v \|_{\mathcal{A}(G)} \| u \|_{A(G)} . \end{aligned}$$

ii) 令 $v \in \mathcal{A}(G)$、 $T \in \mathcal{A}(G)^*$ 和 $u \in A(G)$。我们有

$$\begin{aligned} \langle i^*(v \cdot T), u \rangle &= \langle v \cdot T, i(u) \rangle \\ &= \langle T, vi(u) \rangle \\ &= \langle T, i(vu) \rangle \\ &= \langle i^*(T), vu \rangle \\ &= \langle v \cdot i^*(T), u \rangle \end{aligned}$$

因此， $i^*(v \cdot T) = v \cdot i^*(T)$。

iii) 由上面的 i) 可知，我们只需证明对于任意 $v \in \mathcal{A}(G)$ 和 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，有 $i^*(v \cdot T) \in \mathcal{A}(G) \cdot VN(G)$。然而，这立即由 ii) 得出。

iv) 由于 $\mathcal{A}(G)$ 具有有界近似单位，由 Cohen 因子分解定理 ˆ 以及上面的 i) 可知， $A_M(G) \cdot VN(G)$ 是 $UCB(G)$ 的闭子空间。然而，由于 $A(G) \cdot VN(G) \subseteq \mathcal{A}(G) \cdot VN(G)$，显然 $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G)$ 在 $UCB(\hat{G})$ 中也是稠密的。因此， $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G) \cdot VN(G) = UCB(A(G))$

v) 令 $u \in A(G)$ $T \in VN(G)$。于是我们可以在 $\mathcal{A}(G)$ 上定义一个线性泛函：

$$\varphi_{u,T}(v) = \langle T, uv \rangle$$

对每个 $v \in \mathcal{A}(G)$ 都成立。显然，$\varphi_{u,\ T}$的范数至多为 $\|u\|_{A(G)} \|T\|_{VN(G)}$。此外，该线性泛函在 $A(G)$ 上与 $u \cdot T$ 一致，因此 $u \cdot T = i^*(\varphi_{u,\ T})$。

□

4.6. 定理。 令 $\mathcal{A}(G)$ 表示 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。对于任意局部紧群， $i^{**}(TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x)$ $TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。此外， i^{**}： $TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x) \to TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$ 是一个双射。

*Pr*证明。我们首先证明 $i^{**}(TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x)) \subseteq TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。

设 $m \in TIM_{A(G)}(A(G)^*, \ \phi_x))$。令 $v \in \mathcal{A}(G)$ 且 $T \in \mathcal{A}(G)^*$。则存在 $\{u_n\} \subset A(G)$ 使得 $\| u_n - v \|_{\mathcal{A}(G)} \to 0$。由于 $\| u_n - v \|_\infty \leq \| u_n - v \|_{\mathcal{A}(G)}$， 可知 $u_n(x) \to v(x)$。

接下来，我们注意到，仿照命题 4i) 的证明，可以证明对于每个 $T \in \mathcal{A}(G)^*$， $u_n \cdot T \to v \cdot T$在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(G)^*}$ 中成立。这一次利用命题 4ii)，可得

$$\begin{aligned}\langle i^{**}(m), v \cdot T\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle i^{**}(m), u_n \cdot T\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle m, i^*(u_n \cdot T)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle m, u_n \cdot i^*(T)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n(x)\langle m, i^*(T)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} v(x)\langle m, i^*(T)\rangle \\ &= v(x)\langle i^{**}(m), T\rangle.\end{aligned}$$

这表明 $i^{**}(TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x)) \subseteq TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。

接下来证明 i^{**}: $TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x) \to TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$ 是单射。为此，我们首先注意到，若 $m_1, m_2 \in TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x)$ 且 $m_1 \neq m_2$，则存在一个 $T \in VN(G)$，使得

$$\langle m_1, T\rangle \neq \langle m_2, T\rangle.$$

接下来，选取 $u_0 \in A(G)$，使得 $u_0(x) = 1$。于是

$$\langle m_1, u_0 \cdot T\rangle = \langle m_1, T\rangle \neq \langle m_2, T\rangle = \langle m_2, u_0 \cdot T\rangle.$$

由于 $u_0 \cdot T \in \mathcal{A}(G)^*$，我们有

$$\begin{aligned}\langle i^{**}(m_1), u_0 \cdot T\rangle &= \langle m_1, i^*(u_0 \cdot T)\rangle \\ &= \langle m_1, u_0 \cdot T\rangle \\ &\neq \langle m_2, u_0 \cdot T\rangle \\ &= \langle m_2, i^*(u_0 \cdot T)\rangle \\ &= \langle i^{**}(m_2), u_0 \cdot T\rangle\end{aligned}$$

从而 $i^{**}(m_1) \neq i^{**}(m_2)$。

最后，我们证明 i^{**}: $TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x) \to TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$ 是满射。

设 $M \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。首先注意，若 $u, v \in A(G)$，且 $u(x) = 1 = v(x)$，并且若 $T \in VN(G)$，则 $u \cdot T$和 $v \cdot T$属于 $\mathcal{A}(G)^*$ 且

$$\langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, v \cdot (u \cdot T)\rangle = \langle M, u \cdot (v \cdot T)\rangle = \langle M, v \cdot T\rangle.$$

Pick 一个 $u_0 \in A(G)$，其中 $\| u_0 \|_{A(G)} = 1$ 和 $u_0(x) = 1$。我们可以定义 $m_M \in A(G)^{**}$ by

$$\langle m_M, T\rangle = \langle M, u_0 \cdot T\rangle$$

对于 $T \in VN(G)$。

注意，$\|m_M\|_{A(G)^{**}} \leq 1$。由上述观察可知，若 $v \in A(G)$ 满足 $v(x) = 1$，则 $\langle m_M, v \cdot T\rangle = \langle m_M, T\rangle$。我们还有

$$\langle m_M, \phi_x\rangle = \langle M, u_0 \cdot \phi_x\rangle = \langle M, u_0(x)\phi_x\rangle = \langle M, \phi_x\rangle = 1.$$

也就是说，$m_M \in TIM_{A(G)}(A(G)^*, \phi_x)$。

最后，若 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，则

$$\langle i^{**}(m_M), T\rangle = \langle m_M, i^*(T)\rangle = \langle M, u_0 \cdot i^*(T)\rangle = \langle M, u_0.T\rangle = \langle M, T\rangle.$$

因此，$i^{**}(m_M) = M$。

□

4.7. 定义。给定一个局部紧群 G，令 $b(G)$ 表示 G 在单位元 e 处的邻域基的最小基数。

下一个推论可直接由前一个定理和 Hu [15] 得出。

4.8. 推论. 设 G 是一个非离散局部紧群。设 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。那么

$$| TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)) | = 2^{2^{b(G)}}.$$

特别地，$\mathcal{A}(G)^*$ 存在唯一的拓扑不变平均，当且仅当 G 是离散的。

现在我们转而关注代数 $\mathcal{A}(G)$ 中的理想，其中 $\mathcal{A}(G)$ 可以是 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。

4.9. 引理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想。假设 $x \notin Z(I)$。设 $M \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。那么 $M \in (I^\perp)^\perp$。

证明. 设 $T \in I^\perp$。由于 $Z(I)$ 是闭的，且 $x \notin Z(I)$，我们可以找到一个包含 x 的开邻域 U，使得 $U \cap Z(I) = \emptyset$。然后可以找到一个 $u_0 \in A(G) \cap C_{00}(G)$，使得 $supp(u_0) \subseteq U$，且 $u_0(x) = 1$。由此可得 $u_0 \in I$。

由于 $T \in I^\perp$，对于任意 $u \in \mathcal{A}(G)$，我们有

$$\langle u_0 \cdot T, u\rangle = \langle T, u_0 u\rangle = 0$$

因此 $u_0 \cdot T = 0$。然而，由于 $M \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$，且由于 $u_0(x) = 1$，

$$\langle M, T\rangle = \langle M, u_0 \cdot T\rangle = 0.$$

□

4.10. 注. 前一个引理表明，若 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中满足 $x \notin Z(I)$ 的闭理想，ˆ且若 $M \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$，则可用一种典范的方式将 M视为 I^{**} 的一个元素 M。具体而言，若 $T \in I^{**}$，且 T_1 是 T 的任意扩张，我们可以定义

$$\hat{M}(T) = M(T_1)$$

并且ˆM是良定义的，因为 $M \in (I^{\perp})^{\perp}$。我们声称ˆ $M \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$。为说明这一点，我们注意到

$$\|\hat{M}\|_{I^*} = \|M\|_{\mathcal{A}(G)^{**}} = M(\phi_x) = \hat{M}(\phi_{x_{|_I}}).$$

若 $u \in I$，则若 $T_{1_{|_I}} = T$，那么 $u \cdot T_{1_{|_I}} = u \cdot T$，因此

$$\hat{M}(u \cdot T) = M(u \cdot T_1) = u(x)M(T_1) = \phi_{x_{|_I}}(u)\hat{M}(T).$$

这给出了一个映射 $\Gamma\colon TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x) \to TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$，定义为

$$\Gamma M = \hat{M}.$$

映射 $\Gamma\colon TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x) \to TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$，定义为

$$\Gamma(M) = \hat{M}.$$

4.11. 定理。设 $\mathcal{A}(G)$为 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$或 $A_M(G)$。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$中的一个闭理想。假设 $x \notin Z(I)$。映射 $\Gamma\colon TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x) \to TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$，定义为

$$\Gamma(M) = \hat{M}$$

是一个双射。

证明。假设 $M_1, M_2 \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$，并且 $T_0 \in \mathcal{A}(G)^*$ 满足 $M_1(T_0) \neq M_2(T_0)$。令 $T \in I^* = T_{0_{|_I}}$。那么

$$\hat{M}_1(T) = M_1(T_0) \neq M_2(T_0) = \hat{M}_2(T)$$

so

$$\Gamma(M_1) = \hat{M}_1 \neq \hat{M}_2 = \Gamma(M_2)$$

因此 Γ 是单射。

接下来，令 $m \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$。令 $u_0 \in I$ 满足 $u_0(x) = 1$，其中 $\|u_0\|_{\mathcal{A}(G)} = 1$。首先，注意到对于每个 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，$(u_0 \cdot T)_{|_I} = u_0 \cdot (T_{|_I})$。然后我们定义 $M \in \mathcal{A}(G)^{**}$ 为

$$\langle M, T\rangle = \langle m, u_0 \cdot (T_{|_I})\rangle = \langle m, T_{|_I}\rangle$$

对于每个 $T \in \mathcal{A}(G)^*$。我们有

$$\|M\|_{\mathcal{A}(G)^{**}} \leq \|m\|_{I^{**}}\|u_0\|_{\mathcal{A}(G)} = 1.$$

此外

$$\langle M, \phi_x\rangle = \langle m, u_0 \cdot \phi_{x_{|_I}}\rangle = u_0(x)\langle m, \phi_{x_{|_I}}\rangle = 1.$$

接下来，令 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，并令 $u \in \mathcal{A}(G)$。那么

$$\begin{aligned}\langle M, u \cdot T\rangle &= \langle m, u_0 \cdot (u \cdot T)_{|_I}\rangle \\ &= \langle m, (u_0 u) \cdot T_{|_I}\rangle \\ &= (u_0 u)(x)\langle m, T_{|_I}\rangle \\ &= u(x)(u_0(x)\langle m, T_{|_I}\rangle) \\ &= u(x)\langle m, u_0 \cdot (T_{|_I})\rangle \\ &= u(x)\langle M, T\rangle\end{aligned}$$

由此可得 $M \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x)$。最后，若 $T \in I^*$，且若 $T_1 \in \mathcal{A}(G)$，其中 $T_{1_{|_I}} = T$，则

$$\begin{aligned}\langle \hat{M}, T\rangle &= \langle M, T_1\rangle \\ &= \langle m, T_{1_{|_I}}\rangle \\ &= \langle m, T\rangle\end{aligned}$$

ˆ因此， $\Gamma(M) = M = m$，且 Γ 是满射。

□

以下结果可由推论 4.8 立即得到。

4.12. 推论. 设 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想。假设 $x \notin Z(I)$。若 G 是非离散群，则

$$|TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})| = 2^{2^{b(G)}}.$$

特别地，当且仅当 G 是离散群时， I^* 才存在唯一的拓扑不变平均。

4.13. 引理。设 $\mathcal{A}$ 是极大理想空间为 $\Delta(\mathcal{A})$ 的交换巴拿赫代数。设 X 是 $\mathcal{A}^*$ 的闭子模，且包含 $\phi \in \Delta(\mathcal{A})$。设 $M \in TIM_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \phi)$。设 $m = M_{|_X}$ 是 M 在 X 上的限制。则 $m \in TIM_{\mathcal{A}}(X, \phi)$。

特别地，若令 $\mathcal{A}(G)$ 为代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一，令 I 为 $\mathcal{A}(G)$ 中满足 $x \notin Z(I)$ 的闭理想，且 X 是 $UCB(I)$、 $WAP(I)$ 或 $AP(I)$ 中任意一个，则有 $\phi_{x_{|_I}} \in X$，因此对任意 $M \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$，若 $m = M_{|_X}$，便可得 $m \in TIM_I(X, \phi_{x_{|_I}})$。

证明。设 $M \in TIM_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \phi)$。设 $m = M_{|_X}$ 是 M 在 X 上的限制。我们有

$$1 = \langle M, \phi\rangle = \langle m, \phi\rangle = \|m\|_{X^*}$$

并且如果 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$，那么

$$\langle m, u \cdot T\rangle = \langle M, u \cdot T\rangle = \langle \phi, u\rangle\langle M, T\rangle = \langle \phi, u\rangle\langle m, T\rangle.$$

因此 $m \in TIM_{\mathcal{A}}(X, \phi)$。

设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一，并且 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中满足 $x \notin Z(I)$ 的一个闭理想。设 $X = UCB(I)$。我们可以选取 X 的一个开邻域 U，使得 $U \cap Z(I) = \emptyset$，并且存在一个 $u_0 \in \mathcal{A}(G) \cap C_{00}(G)$，满足 $supp(u_0) \subseteq U$ 且 $u_0(x) = 1$。于是 $u_0 \in I$。此外，若 $v \in I$,

$$\langle u_0 \cdot \phi_{x|_I}, v\rangle = \langle \phi_{x|_I}, u_0 v\rangle = u_0(x)v(x) = \langle \phi_{x|_I}, u_0 v\rangle.$$

因此 $\phi_{x|_I} = u_0 \cdot \phi_{x|_I} \in UCB(I)$。

为证明 $\phi_{x|_I} \in AP(I)$，注意到 $\{u(x) | \|u\|_I \leq 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mid \lambda \mid \leq 1\}$ 是紧的，因此

$$\{u \cdot \phi_{x|_I} | \|u\|_I \leq 1\} = \{\lambda \phi_{x|_I} \in \mathbb{C} | \mid \lambda \mid \leq 1\}$$

在 I^* 中是紧的，所以 $\phi_{x|_I} \in AP(I)$。由于 $AP(I) \subseteq WAP(I)$，我们还有 $\phi_{x|_I} \in WAP(I)$。

□

4.14. 定理。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想。假设 $x \notin Z(I)$。限制映射 $R\colon TIM_I(I^*, \phi_{x|_I})) \to TIM_I(UCB(I)\ \phi_{x|_I}))$ 是一个双射。特别地，若 G 是非离散的，则

$$\mid TIM_{\mathcal{A}(G)}(\mathcal{A}(G)^*, \phi_x) \mid = \mid TIM_{\mathcal{A}(G)}(UCB(\mathcal{A}(G), \phi_x) \mid = 2^{2^{b(G)}}.$$

证明。选取 x 的一个开邻域 U，使得 $U \cap Z(I) = \emptyset$，并取一个 $u_0 \in \mathcal{A}(G) \cap C_{00}(G)$，满足$supp(u_0) \subseteq U$，且 $u_0(x) = 1$。于是 $u_0 \in I$，并且

$$\phi_{x|_I} = u_0 \cdot \phi_{x|_I} \in UCB(I).$$

接下来令 $M \in TIM_I(I^*, \phi_{x|_i}))$. 令 $m = R(M)$。由引理 4.13 可得 $m \in TIM_I(UCB(I)\ \phi_{x|_I}))$.

若 $M_1, M_2 \in TIM_I(I^*, \phi_{x|_I})$ 且 $M_1 \neq M_2$，则存在一个 $T \in I^*$，使得

$$\langle M_1, T\rangle \neq \langle M_2, T\rangle.$$

选取 x 的一个开邻域 U，使得 $U \cap Z(I) = \emptyset$，并取一个 $u_0 \in \mathcal{A}(G)$，满足 $supp(u_0) \subseteq U$，且 $u_0(x) = 1$，则 $u_0 \cdot T \in UCB(I)$，满足

$$\langle M_1, u_0 \cdot T\rangle = \langle M_1, T\rangle \neq \langle M_2, T\rangle = \langle M_2, u_0 \cdot T\rangle.$$

这表明 $R(M_1) \neq R(M_2)$，因此 R 是单射。

接下来，令 $m \in TIM_I(UCB(I)\ \phi_{x|_I}))$。取一个满足 $\| u_0 \|_{A(G)} = 1 = u_0(x)$ 的 $u_0 \in I$。定义 $M \in I^{**}$为

$$\langle M, T\rangle = \langle m, u_0 \cdot T\rangle, \quad T \in I^*.$$

由于 $u_0(x) = 1$，可得

$$\langle M, \phi_{x|_I}\rangle = \langle m, u_0 \cdot \phi_{x|_I}\rangle = \langle m, \phi_{x|_I}\rangle = 1.$$

由此及 $\| u_0 \|_{A(G)} = 1$ 这一事实，可得 $\| M \| = 1$。

接下来，如果 $v \in I, T \in I^*$，那么

$$\langle M, v \cdot T\rangle = \langle m, u_0 \cdot (v \cdot T)\rangle = \langle m, v \cdot (u_0 \cdot T)\rangle = v(x)\langle m, u_0 \cdot T\rangle = v(x)\langle M, T\rangle.$$

这表明 $M \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$。

最后，如果 $T \in UCB(I)$，那么

$$\langle M, T\rangle = \langle m, u_0 \cdot T\rangle = \langle m, T\rangle$$

因为 $m \in TIM_I(UCB(I)\ \phi_{x_{|_I}})$。因此， $R(M) = m$ 且 R 是满射。

□

4.15. 注记. 在前一个定理的证明中，我们能够明确地说明每个 $m \in TIM_I(UCB(I)\ \phi_{x_{|_I}})$ 如何扩展为一个元素 $M \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_I}})$。下一个命题表明，这类扩展在更一般的情形下也成立。

我们需要以下引理。

4.16. 引理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想，且 $Z(I)$ 是 $\mathcal{A}(G)$ 的谱综合集。假设 $x \notin Z(I)$。那么 $\{x\}$ 是 I 的谱综合集。

证明。取满足 $u(x) = 0$ 的 $u \in I$。令 $E = Z(I)$。令 $\epsilon > 0$。由于 E 是 $\mathcal{A}(G)$ 的谱综合集，我们可以找到 $w \in \mathcal{A}(G) \cap C_{00}(G)$，使得 $K = supp(w) \cap E = \emptyset$，并且

$$\|u - w\|_{\mathcal{A}(G)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

由于 $u(x) = 0$，这意味着 $|w(x)| < \frac{\epsilon}{2}$。

接下来，我们选取 x 的邻域 V_1 和 V_2，使其闭包紧且与满足 $V_1 \subseteq V_2$ 的 E 不相交。然后选取一个 $v \in \mathcal{A}(G)$，使得若 $x \notin V_2$，则 $v(x) = 0$； $v(y) = w(x)$ 在 V_1 上，且 $\|v\|_{\mathcal{A}(G)} = |w(x)|$。于是 $w - v \in I = I(E)$ 的紧支撑为 K_1，且 $K_1 \cap (E \cup \{x\}) = \emptyset$，并且

$$\|u - (w - v)\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|u - w\|_{\mathcal{A}(G)} + \|v\|_{\mathcal{A}(G)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

4.17. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想，其中 $Z(I)$ 是 $\mathcal{A}(G)$ 的谱综合集。假设 $x \notin Z(I)$。另设 $Y \subset X$ 是 I^* 的两个闭子模，且都包含 $\phi_{x_{|_I}}$。令 $m \in TIM_I(Y, \phi_{x_{|_I}})$。那么存在某个 $M \in TIM_I(X, \phi_{x_{|_I}})$，使得 $M_{|_Y} = m$。

证明。设 $m \in TIM_I(Y, \phi_{x_{|_I}})$。根据 Hahn-Banach 定理，我们可以找到一个 $\Psi \in X^*$，使得 t

$$\|\Psi\|_{X^*} = \|m\|_{Y^*} = 1.$$

接下来令

$$S = \{u \in I \mid \|u\|_{\mathcal{A}(G)} = u(x) = 1\}.$$

那么， S 在逐点乘法下构成一个交换半群，因此是可和的。令$\Phi \in \ell_\infty(S)^*$ 为一个不变均值。那么，对每个 $T \in X$，我们定义 $f_T\colon S \to \mathbb{C}$ 如下：

$$f_T(u) = \langle \Psi, u \cdot T\rangle.$$

由此可得，对每个 $u \in S$， $f_T \in \ell_\infty(S)$，因为 $|f_T(u)| \leq \|T\|_X$。此外，若 $v \in S$，则

$$f_{v\cdot T}(u) = \langle \Psi, u \cdot (v \cdot T)\rangle = \langle \Psi, vu \cdot T\rangle = L_v(f_T)(u)$$

其中 L_v 是 $\ell_\infty(S)$上的左平移算子。

接下来，我们令

$$\langle M, T\rangle = \langle \Phi, f_T\rangle$$

对每个 $T \in X$。注意， $f_{\alpha T_1+\beta T_2} = \alpha f_{T_1} + \beta f_{T_2}$和 $|\langle M, T\rangle| \leq \|T\|_X$，因此实际上 $M \in X^*$，其中 $\|M\|_{X^*} \leq 1$。

现在，若 $T = \phi_{x_{|_I}}$，则

$$f_T(u) = \langle \Psi, u \cdot \phi_{x_{|_I}}\rangle = 1$$

对每个 $u \in S$均成立，因此 $\langle M, \phi_{x_{|_I}}\rangle = 1$ 且 $\|M\|_{X*} = 1$。

最后，由于 Φ 是 $\ell_\infty(S)^*$ 上的左不变均值，我们有：若 $u \in S$，则

$$\langle M, u \cdot T\rangle = \langle \Phi, f_{u\cdot T}\rangle = \langle \Phi, L_u(f_T)\rangle = \langle M, T\rangle.$$

最后，我们必须证明，对于所有 $u \in I$和 $T \in X$，都有 $\langle M, u \cdot T\rangle = u(x)\langle M, T\rangle$。

首先，我们将证明，若 $v \in I$，且存在 x 的一个邻域 U，使得 $v(y) = 1$ 在U上成立，则对于所有 $T \in X$，都有 $\langle M, v \cdot T\rangle = \langle M, T\rangle$。为说明这一点，我们取 $u \in I$，使得$u(x) = 1 = \|u\|_{\mathcal{A}(G)}$，且当 $y \notin U$时， $u(y) = 0$。于是 $uv = u$，因此

$$\langle M, v \cdot T\rangle = \langle M, u \cdot (v \cdot T)\rangle = \langle M, uv \cdot T\rangle = \langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, T\rangle.$$

接下来，假设 $v \in I$ 在 x的某个邻域 U 上满足 $v(y) = 0$。由于 $1 \in B(G)$，函数 $1 - u$ 是 I的乘子，也就是说，对于每个 $w \in I$，都有$(1 - v)w \in I$，因此$(1 - v) \cdot T \in X$。注意到 $1 - v(y) = 1$ 在 U 上成立。再次取 $u \in I$，使得 $u(x) = 1 = \|u\|_{\mathcal{A}(G)}$，且当$y \notin U$时， $u(y) = 0$。再次得到

$$(\langle M, T\rangle - \langle M, v \cdot T\rangle) = \langle M, (1 - v) \cdot T\rangle = \langle M, u \cdot ((1 - v) \cdot T)\rangle = \langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, T\rangle.$$

因此 $\langle M, v \cdot T\rangle = 0$。

现在设 $u \in I$ 满足 $u(x) = 0$。根据引理 4.16， $\{x\}$ 是 I 的谱综合集。因此，我们可以找到函数序列 $\{w_n\} \subset I$ 和开邻域序列 $\{U_n\}$，它们是 x 的开邻域，并且每个 w_n 都有紧支撑， $w_n(y) = 0$ 对所有 $y \in U_n$ 成立，且 $\lim_{n\to\infty} \|u - w_n\|_{\mathcal{A}(G)} = 0$。特别地，根据上文所述， $\langle M, w_n \cdot T\rangle = 0$，因此

$$\langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, (u - w_n) \cdot T\rangle$$

此外，

$$\lim_{n\to\infty} \|u \cdot T - w_n \cdot T\|_{I^*} = 0,$$

因此我们有 $\langle M, u\rangle = 0$。最后，选取 $u \in I$，使得 $u(x) = 1$。再次选取 $v \in I$，使得 $v = 1$ 在 x 的某个邻域 U 上成立。于是 $u - v(x) = 0$，并且

$$\langle M, (u - v) \cdot T\rangle = 0$$

这意味着

$$\langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, v \cdot T\rangle = v(x)\langle M, T\rangle = u(x)\langle M, T\rangle.$$

在这里，若 $u(x) \neq 0$，令 $w = \frac{1}{u\ x()}u$。于是

$$\langle M, u \cdot T\rangle = \langle M, u(x)(\frac{1}{u(x)}u \cdot T)\rangle = u(x)\langle M, (\frac{1}{u(x)}u \cdot T)\rangle = u(x)\langle M, T\rangle.$$

这表明 $M \in TIM_I(X, \phi_{x_{|_I}})$。

最后，若 $T \in Y$，则

$$f_T(u) = \langle \Psi, u \cdot T\rangle = \langle m, u \cdot T\rangle = \langle m, T\rangle$$

对所有 $u \in S$ 均成立。特别地，$\langle M, T\rangle = \langle \Phi, f_T\rangle = \langle m, T\rangle$，故 $M_{|_Y} = m$，如所求。

□

4.18. 定理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想。假设 $x \notin Z(I)$。则 $WAP(I)$ 在 $\phi_{x_{|_I}}$ 处有唯一的拓扑不变平均。证明 . $TIM_I(WAP(I)\ \phi_{x_{|_i}}) \neq \emptyset$ 这一事实可直接由以下观察得出：I^* 上的每个拓扑不可约极小理想都限制为 $WAP(I)$ 上的拓扑不可约极小理想，并且我们知道 $TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_i}}) \neq \emptyset$。

接下来,我们令 $n, m \in TIM_I(WAP(I)\ \phi_{x_{|_i}})$. 那么存在一个网 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega} \subseteq I$，使得 t

$$m = \lim_{\alpha\in\Omega}\{u_\alpha\}$$

在 I^{**} 上的弱* 拓扑中。因此，对每个 $T \in I^*$,

$$\langle n \odot m, T\rangle = \lim_\alpha \langle n \odot u_\alpha, T\rangle = \lim_\alpha \langle n, u_\alpha \cdot T\rangle = \lim_\alpha u_\alpha(x)\langle n, T\rangle.$$

但我们也知道

$$1 = \langle n, \phi_{x_{|_i}}\rangle = \lim_\alpha \langle u_\alpha, \phi_{x_{|_i}}\rangle = \lim_\alpha u_\alpha(x).$$

因此 $n \odot m = n$。但 但我们也知道 $n \odot m = m \odot n = m$。因此，$n = m$，并且该拓扑不可约极小理想是唯一的 e.

□

4.19. 推论。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想。若 $UCB(I) \subseteq WAP(I)$，则 G 是离散的。

证明。假设 G 不是离散的，且 $x \notin Z(I)$。令 $M_1, M_2 \in TIM_I(I^*, \phi_{x_{|_i}})$，其中$M_1 \neq M_2$，则 $m_1 = M_{1_{|_{WAP(I)}}}, m_2 = M_{2_{|_{WAP(I)}}} \in TIM_I(WAP(I)\ \phi_{x_{|_i}})$。取满足$\langle M_1$的 $T \in I^*$，令 $T\rangle \neq \langle M_2, T\rangle$，并选择 $u \in I$ 使得 $u(x) = 1$。于是 $u \cdot T \in UCB(I) \subseteq WAP(I)$，并且

$$\langle m_1, u \cdot T\rangle = \langle M_1, u \cdot T\rangle = \langle M_1, T\rangle \neq \langle M_2, T\rangle = \langle M_2, u \cdot T\rangle = \langle m_2, u \cdot T\rangle$$

这与 $WAP(I)$ 上拓扑不可约极小理想的唯一性相矛盾。

□

5. Arens Regularity of Ideals in $A(G)$ $A_{cb}(G)$ and $A_M(G)$

本节将运用我们对拓扑不变均值的了解，探讨 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 和 $A_M(G)$ 中理想可能具有的 Arens 正则性。以下关键观察改进了 [10, 推论 3.13]:

5.1. 定理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 为代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的非零闭理想。若 I 是 Arens正则，则 G 是离散的。

证明. 若 I是 Arens正则，则 $I^* = WAP(I)$。因此， I^* 具有唯一的拓扑不变均值。然而，根据推论 4.12，这意味着 G 必为离散的。

□

以下推论显然成立。另见 [10, 定理 3.2] 和 [13, 推论 3.9]。

5.2. 推论. 设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一种。若 $\mathcal{A}(G)$ 是 Arens正则的，则 G 是离散的。

5.3. 推论. 设 G 是非离散的。若 $\mathcal{A}(G)$ 是 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的一种，则 $\mathcal{A}(G)$ 没有非零自反闭理想。

5.4. 注. Granirer [14, 定理 5] 证明，每个无限离散群都含有一个无限集合 $E \subset G$ ，使得理想 $I_{A(G)}(G \setminus E)$ 同构于 ℓ_2。特别地，该理想是自反的，因此也是 Arens正则的。然而，若要求 I 也有有界近似单位，那么至少对于傅里叶代数而言，这样的理想只有在有限维时才可能是 Arens正则的。

5.5. 引理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一种。设 H 是 G 的子群。若 $\mathcal{A}(G)$ 是 Arens 正则的，则 $\mathcal{A}(H)$ 也是 Arens 正则的。特别地，若 H 是可和的，则 H 是有限的。证明 . 由于 G 是离散的， H 在 G 中是开的。在这种情况下，限制映射 $R: \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$ 是一个压缩同态，且也是满射。因此 $\mathcal{A}(H)$ 是 Arens正则的。

最后一个陈述即为 [18, 命题 3.3]。

□

5.6. 定义。令 $\mathcal{R}(G)$表示 G的陪集环，即由 G的子群的陪集生成的集合的布尔环。子集 E 属于 G 当且仅当

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i H_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m_i} b_{i,j} K_{i,j}),$$

其中 H_i 是 G的子群， $x_i \in G$， $K_{i,\ j}$ 是 H_i的子群，且$b_{i,\ j} \in K_{i,\ j}$。

我们将 $\mathcal{R}_a(G)$（即 G的可均值化陪集环）定义为所有形如以下形式的集合

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i H_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m_i} b_{i,j} K_{i,j}),$$

其中 H_i 是 G 的可和子群， $x_i \in G$、 $K_{i,j}$ 是 H_i 的子群，且 $b_{i,j} \in K_{i,j}$.

5.7. 定理。设 I 是 $A(G)$ 的一个闭理想，且具有有界近似单位并且是 Arens正则的。那么 I 是有限维的。

证明。假设 $I \subseteq A(G)$ 是 Arens正则的。根据定理 5.1 G 必须是离散的。若 I 具有有界近似单位，则由于 $A(G)$ 是弱序列完备的（参见相关文献）， I 必须是含单位元的。由此可得 $1_{G\setminus Z(I)} \in I$。特别地， $G \setminus Z(I)$ 必须是紧的，因而是有限的。这表明 I 是有限维的。

□

5.8. 注。 $A(G)$ 是弱序列完备的这一事实，对于建立前述定理至关重要。遗憾的是，我们不知道 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中是否有一个或二者都是弱序列完备的。

在本节余下部分，我们假设 G 是一个离散群。

5.9. 引理。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个。设 H 是 G 的一个真可和子群。若 $I_{\mathcal{A}(G)}(H)$ 是 Arens正则的，则 H 是有限的，并且 $\mathcal{A}(G)$ 也是 Arens正则的。证明。由于 H 是真子群，存在一个 $x \in G \setminus H$。理想 $I_{\mathcal{A}(G)}(xH)$ 与 $I_{\mathcal{A}(G)}(H)$ 等距同构，因而也是 Arens正则的。

如果 $u \in \mathcal{A}(H)$，那么由 $u^\circ(y) = u(y)$（若 $y \in H$）以及 $u^\circ(y) = 0$（若 $y \in G \setminus H$）定义的函数 u° 属于 $\mathcal{A}(G)$。现在，若 $R : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$ 是限制映射，那么 R 是一个压缩同态，它将 $I_{\mathcal{A}(G)}(xH)$ 映到 $\mathcal{A}(H)$ 上。特别地， $\mathcal{A}(H) = A(G)$ 也是 Arens正则的。因此， H 是有限的。

令 $\mathcal{B}$ 为代数 $1_H\mathcal{A}(G) \oplus_1 1_{G\setminus H}\mathcal{A}(G)$。那么 B 是一个交换巴拿赫代数，而映射 $\Gamma\colon \mathcal{A}(G) \to \mathcal{B}$，由 $\Gamma(u) = (1_H u, 1_{G\setminus H} u)$ 给出，是一个连续同构，它将 $I_{\mathcal{A}(G)}(H)$ 等距映到 $\mathcal{B}$ 中的理想 $(I_{\mathcal{A}(G)}(H), 0)$ 上。由于 $1_{G\setminus H})\mathcal{A}(G)$ 是有限维的，因此它是 Arens正则的。由此可得

$$(1_H\mathcal{A}(G) \oplus_1 1_{G\setminus H}\mathcal{A}(G))^{**} = (1_H\mathcal{A}(G))^{**} \oplus_1 (1_{G\setminus H}\mathcal{A}(G))^{**}$$

它是交换的，因为其每个分量都是交换的。因此， $1_H\mathcal{A}(G) \oplus_1 1_{G\setminus H}\mathcal{A}(G)$ 是 Arens正则的， $\mathcal{A}(G)$ 也是如此

□

5.10. 定理. 设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个。设

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i H_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m_i} b_{i,j} K_{i,j}),$$

其中 H_i 是 G, $x_i \in G$, $K_{i,j}$ 的可和子群， H_i 是一个子群，并且 $b_{i,j} \in K_{i,j}$。若 $I_{\mathcal{A}(G)}(E)$ 非零且 Arens正则，则要么 E 有限且 $\mathcal{A}(G)$ 也 Arens正则，要么 G 可和且 $I(E)$ 是有限维的。

证明。

$_n$我们首先假设 $E = \bigcup x_i H_{i}$。在这种情况下，我们将通过归纳法$_{i=1n}$对 n证明结论。也就是说，我们令 $P(n)$ 表示以下命题：如果 $E = \bigcup x_i H_i$ 是 G 的真子集，并且 $I_{\mathcal{A}(G)}(E)_{i=1}$是 Arens正则的，那么 E 是有限的，且 $\mathcal{A}(G)$ 是 Arens正则的。

若 $n = 1$, $E = xH$，其中 H 是一个真可和子群。由于 $I(H)$与 $I(xH)$等距同构，引理 5.9表明 E 是有限的，且 $\mathcal{A}(G)$是 Arens正则的。

$_{k+1}$假设对所有 $n \leq k$， $P(n)$都成立。令 $E = \bigcup x_i H_i$，其中每个 H_i 都是 G的一个可和子群$_{i=1k}$。如有必要，经过平移后可假设 $x_{k+1} = e$。若 $H_{k+1} \subseteq \bigcup x_i H_i$，则有$_{i=1k}E = \bigcup x_i H_i$，结论得证。因此，我们可以假设$_{i=1}$

$$F = H_{k+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} x_i H_i) \neq \emptyset.$$

注意， $H_{k+1} \setminus F \in \mathcal{R}(H_{k+1})$，并且

$$I_{\mathcal{A}(H)}(H_{k+1} \setminus F) = I_{\mathcal{A}(G)}(E)_{|_{H_{k+1}}}.$$

特别地，由于限制映射是一个同态， $I_{\mathcal{A}(H)}(H_{k+1} \setminus F)$是 Arens正则的。但由于 $H_{k+1} \setminus F \in \mathcal{R}(H_{k+1})$且 H_{k+1} 是可和的，我们有 $\mathcal{A}(H) = A(H)$，并且 $I_{\mathcal{A}(H)}(H_{k+1} \setminus F)$具有有界近似单位。由此根据定理 5.7可知， F 是有限的。

$_k$接下来我们注意到， E 是不交并，由$\bigcup x_i H_i$ 和有限集合 F组成。但由于 F 是有限的，我们$_{i=1}$ $_k$可以采用与引理 5.9证明类似的方法，得出 $I_{\mathcal{A}(G)}(\bigcup_{i=1} x_i H_i)_k$也是 Arens正则的。由此，归纳假设告诉我们$\bigcup x_i H_i$ 是有限的。又由于$_{i=1k}F = H_{k+1} \setminus (\bigcup x_i H_i)$也是有限的， H_{k+1} 是有限的。因此 E 也有限。$_{i=1}$

如果我们假设

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i H_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m_i} b_{i,j} K_{i,j}),$$

其中 H_i 是 G中的一个可和子群， $x_i \in G$, $K_{i,\ j}$ 是 H_i的一个子群。我们分两种情况讨论。第一种情况是$\bigcup x_i H_i \neq G$。若属于这种情况，则如果$E_1 = \bigcup x_i H_i$，那么 $E \subseteq E_1$，因此非零闭理想 $I_{\mathcal{A}(G)}($ $E_1)$包含于 Arens正则理想 $I_{\mathcal{A}(G)}(E)$中，故它也具有 Arens正则性。但我们在上文已经看到，这意味着 E_1 是有限的。由此可知 E 也是有限的。与之前一样，这将意味着 $\mathcal{A}(G)$也具有 Arens正则性。

$_n$最后，假设$\bigcup x_i H_i = G$。那么根据 [11, 推论 3.3]，其中一个 H_i 的指标在 G 中有限。由于每个 H_i 都是可和的，因此 G 也是可和的。这意味着我们可以将 $G \backslash E$ 表示为不相交的$_m$并集 $\bigcup F_l$，其中每个 F_l 都是某个开可和$_{l=1}$的陪集环中某个元素的平移

子群 $K_{i,\ j}$。此外，这意味着 $I_{\mathcal{A}(G)}(E) = I_{A(G)}(E)$ 有有界近似单位[11, 定理 3.20]。由此可根据定理 5.7 得出，该理想是有限维的。

□

致谢

作者谨向刘炯朗教授致以祝贺，祝贺他在卓越的职业生涯中取得的诸多成就。此外，第一作者谨向 Lau 教授表达由衷的感激，感谢他给予的非凡指导、始终如一的支撑，以及他为我们所有有幸与他共事的人树立的楷模。

References

[1] R. Arens，双线性运算的伴随。《美国数学会会刊》2 (1951), 839-848.[2] F.F. Bonsall 和 J. Duncan，《完备赋范代数》，施普林格出版社，纽约、海德堡、柏林，1973.[3] P. Civin 和 B. Yood，巴拿赫代数的第二共轭空间作为代数。《太平洋数学杂志》11 第 3 期 (1961), 847–870.[4] M. Cowling 和 U. Haagerup，实秩一单李群的傅里叶代数的完全有界乘子。《数学发明》96 (1989), 507-549.[5] J. De Canniere 和 U. Haagerup，若干单李群及其子群的傅里叶代数的乘子。《美国数学杂志》107 (1985), 455-500.[6] J. Duncan 和 S. A. R. Hosseinium，巴拿赫代数的第二对偶。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》84 (1979), 309–325.[7] C. Dunkl 和 D. Ramirez，傅里叶代数上的弱几乎周期泛函。《美国数学会汇刊》185 (1973), 501–514.[8] P. Eymard，局部紧群的傅里叶代数。《法国数学会通报》92 (1964), 181-236.[9] B. E. Forrest，完全有界乘子及在闭子群上消失的 $A(G)$ 中的理想。载于：A. T.-M. Lau 和 V. Runde，*Banach Algebras and Their Applications*，《当代数学》363，页 89–94。美国数学会，2004.[10] B. Forrest，Arens 正则性与离散群。《太平洋数学杂志》151，第 2 期 (1991), 217-227.[11] B. Forrest，可和性与 $A(G)$ 中的理想。《澳大利亚数学会杂志》（A 辑）53 (1992), 143-155.[12] B. Forrest，Arens 正则性与 Ap(G) 代数。《美国数学会会刊》 119 (1993), 595–598.[13] B. Forrest 和 T. Miao，一致连续泛函与 M- 弱可和群。《加拿大数学杂志》65 (2013), 第 5 期, 1005–1019.[14] E. E. Granirer，关于局部紧群的 Banach 代数 AP(G) 的若干性质。《美国数学会会刊》95 (1985), 375-381.[15] Z. Hu，冯·诺依曼代数 VN(G) 上的拓扑不变均值集合。《伊利诺伊数学杂志》39 (1995), 第 3 期, 463–490.[16] Z. Hu，傅里叶代数 A(G) 的归纳极端非 Arens 正则性。《数学研究》151 (2002), 第 3 期, 247-264.[17] S. Kakutani，关于双紧凸集的两个不动点定理。《东京帝国学士院纪要》(1938), 第 14 期, 242–245.

[18] A. T. Lau，局部紧群的傅里叶代数的第二共轭。《美国数学会汇刊》267 (1981), 53–63[19] J. S. Pym，有界函数空间上的泛函卷积。伦敦数学会会报 15 (1965), 84–104.[20] A. ¨Ulger，Arens 正则性有时蕴含 RNP。《太平洋数学杂志》143 (1990), 377-399.[21] A. ¨Ulger，弱序列完备巴拿赫代数的 Arens 正则性。《美国数学会会刊》127 (1999), 第 11 期, 3221-3227.

Brian Forrest纯数学系，滑铁卢大学，滑铁卢，安大略省，加拿大，N2L 3G1 邮箱：beforres@uwaterloo.ca

John Sawatzky 纯数学系，滑铁卢大学，滑铁卢，安大略省，加拿大，N2L 3G1 邮箱：jmsawatzky@uwaterloo.ca

Aasaimani Thamizhazhagan 纯数学系，滑铁卢大学，滑铁卢，安大略省，加拿大，N2L 3G1 邮箱：athamizhazhagan@uwaterloo.ca