arXiv:2302.05714v1 [math.DG] 11 Feb 2023

统计浸没的尖锐不等式与孤立子

MOHD. DANISH SIDDIQI，阿莉娅·纳兹·西迪基，以及 BA NG-YEN CHEN

Abstract. 在本文中，我们首先证明了统计流形的 Ricci 曲率和数量曲率所涉及的统计浸没的一些尖锐不等式。此外，我们从 Ricci-Bourguignon 孤立子的角度阐明统计浸没的几何意义。进一步地，我们将统计浸没的纤维刻画为具有共形向量场的 Ricci-Bourguignon 孤立子。最后，在 Ricci-Bourguignon 孤立子的垂直势向量场为梯度型这一特殊情形下，我们推导出统计浸没的泊松方程。

1. Introduction

黎曼流形之间浸没的概念最早由 O'Neill [19] 和 Gray [15]提出。1983 年，Watson [28] 以「近似厄米浸没」之名推广了近似厄米流形之间黎曼浸没的相关知识。此后，人们研究了近似厄米流形的各种子类之间的近似厄米浸没。此外，人们还在许多近似接触度量流形的子类之间定义了黎曼浸没，并称之为接触黎曼浸没 [20]。有关黎曼浸没、近似厄米浸没或接触黎曼浸没的大部分研究可见于文献 [14, 21]。

1981 年，J. P. Bourguignon [8] 基于 Lichnerowicz 未发表的部分成果以及 Aubin 的一篇论文 [2]，提出了作为里奇流[16] 推广的 Ricci-Bourguignon流概念。Ricci-Bourguignon流是定义在黎曼流形上的内蕴几何流，其不动点为孤子。因此，Ricci-Bourguignon 孤立子给出了 Ricci-Bourguignon流的自相似解 [8]

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(Ric - \rho Rg), \quad g(0) = g_0, \tag{1.1}$$

其中， Ric是里奇曲率张量， R 是相对于 g 的数量曲率，而 ρ 是一个非零实常数。值得注意的是，在方程 (1.1) 中，常数 ρ 取特殊值时，方程 (1.1) 中出现的张量 $Ric - \rho Rg$ 会呈现以下情形。这个由演化方程定义的偏微分方程组 (1.1) 尤其值得关注，特别是 [8], 我们有

(i) for $\rho = \frac{1}{2}$, the Einstein tensor $Ric - \frac{R}{2}g$ (and Einstein soliton [4]),
(ii) for $\rho = \frac{1}{n}$, the traceless Ricci tensor $Ric - \frac{R}{n}g$,

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C25, 53C43。*Key words and phrases.* 里奇-布尔吉尼翁孤立子、统计浸没、统计流形、爱因斯坦流形。

(iii) for $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$, the Schouten tensor $Ric - \frac{R}{2(n-1)}g$ (and Schouten soliton [8]),
(iv) for $\rho = 0$, the Ricci tensor Ric (and Ricci soliton [16]).

在二维情况下，前三个张量均为零，因此流是静态的；而在更高维数下，ρ 的取值严格按照上述顺序递减。

该几何流解的短时间存在性和唯一性已在 [8] 中得到证明。事实上，当 t 充分小时，方程 (1.1) 在 $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$ 上有唯一解。

另一方面，拟Einstein度量或里奇孤立子是里奇流方程 [9]的解。这促使人们通过考察 Ricci-Bourguignon 流 [10, 22, 25] 来研究一种更一般的里奇孤立子。事实上，维数为 $n \geq 3$ 的黎曼流形称为里奇-布尔吉尼翁孤立子[2] ，如果

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g + Ric + (\lambda - \rho R)g = 0, \tag{1.2}$$

其中，$\mathcal{L}_V$ 表示沿向量场 V 的李导数算子，ρ 是一个非零常数，而 λ 是任意实常数。与里奇孤立子类似，若里奇-布尔吉尼翁孤立子（$\mathcal{M}$，g，V，λ）满足 $\lambda > 0$，则称为膨胀型；满足 $\lambda = 0$，则称为稳态型；满足 $\lambda < 0$，则称为收缩型。

如果势向量场 V 是定义在 M 上某个光滑函数 f 的梯度，我们称 (M, g, f, λ) 为梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子。此时，孤立子方程为

$$Hess(f) + Ric + (\lambda - \rho R)g = 0, \tag{1.3}$$

其中，Hess(f) 是 f 的Hessian算子。

2019年，Meri̇c 等人引入并研究了总流形允许存在里奇孤立子的黎曼浸没 [18]。在 [23], M. D. Siddiqi 等人研究了规范变分下黎曼浸没上的共形 η-Ricci 孤立子。Barndorff-Nielsen 和 Jupp [3] 从统计学的角度探讨了黎曼浸没。Takano [26] 提出了不同空间的统计浸没这一论述。在 [24], Siddiqui 等人研究了扭曲积统计子流形上的统计孤立子。最近，Blaga 和 Chen 还研究了统计流形中梯度孤立子的一些性质，这与本文主题密切相关 [5]。因此，本文将研究总空间允许存在 Ricci-Bourguignon 孤立子和梯度Ricci-Bourguignon孤立子的统计浸没。

此外，探究子流形的外在不变量与内在不变量之间的关系，在过去二十五年里一直是一个非常热门的问题。Chen 于 1993 年通过其 δ-不变量在 [11] 中开创了这一方向的研究（另见 [12]）。在 [17], Meri̇c 等人建立了一系列关于黎曼浸没的不等式。在这项研究的基础上，本文为允许统计浸没的统计流形的垂直空间和水平空间，建立了其主要内在不变量与主要外在不变量之间的一些额外关系。

2. Background of Statistical Submersions

本节将介绍理解统计浸没所需的背景知识。

设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为两个黎曼流形，且 $\psi:\ \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ 是一个黎曼浸没，使得所有纤维都是 $\mathcal{M}$ 的黎曼子流形，并且 ψ_*保持水平向量的长度（更多详情请参见 [21, 14]）。2001年，Abe 和 Hasegawa [1] 研究了来自统计流形且具有水平分布的仿射浸没。此外，Takano 也在 [26, 27]中讨论了统计浸没。

设 $(\mathcal{M},g)$ 是一个带有非退化度量 g 的黎曼流形，并且 ∇ 是 $\mathcal{M}$ 上的无挠仿射联络。若三元组 $(\mathcal{M},\nabla,g)$ 满足 $(\nabla_U g)(V,W)=(\nabla_V g)(U,W)$ [26]，则称其为统计流形。对于统计流形 $(\mathcal{M},\nabla,g)$，我们考虑满足以下条件的第二个联络 ∇^*

$$Wg(U,V)=g(\nabla_W U,V)+g(U,\nabla^*_W V),\tag{2.1}$$

对于 $\mathcal{M}$ 上的任意向量场 U,V,W，并称 ∇^* 为关于 g 的 ∇ 的共轭（或对偶）联络。仿射联络 ∇^* 是无挠的，满足 $(\nabla^*_U g)(V,W)=(\nabla^*_V g)(U,W)$，并且符合 $(\nabla^*)^*=\nabla$。显然，$(\mathcal{M},\nabla^*,g)$ 也是一个统计流形。例如，任意带有黎曼联络 ∇ 的黎曼流形 $(\mathcal{M},\nabla,g)$ 都是平凡统计流形。在这种情况下，若 Rie 和 Rie^* 分别表示 $\mathcal{M}$ 上关于仿射联络 ∇ 及其共轭联络 ∇^* 的曲率张量，则可得

$$g(Rie(U,V)W,X)=-g(W,Rie^*(U,V)X),\tag{2.2}$$

对于 $\mathcal{M}$ [26]上的任意向量场 U、V、W、X。

设 $\psi:(\mathcal{M}^p,g)\longrightarrow(\mathcal{N}^q,\hat{}g)$是两个黎曼流形$(\mathcal{M}^p,g)$和$(\mathcal{N}^q,\hat{}g)$之间的黎曼浸没。对于任意点 $x\in\mathcal{N}$，黎曼子流形 $\psi^{-1}(x)$是$(p-q)$维的，其诱导度量为 $\bar{g}$，称为纤维¯，记作 $\mathcal{M}$。在 $\mathcal{M}$的切丛 $T\mathcal{M}$ 中，垂直分布和水平分布分别记为 $\mathcal{V}(\mathcal{M})$和 $\mathcal{H}(\mathcal{M})$。因此，我们有

$$T_r(\mathcal{M})=\mathcal{V}_r(\mathcal{M})\oplus\mathcal{H}_r(\mathcal{M}),\ \ r\in\mathcal{M}.$$

如果存在$\mathcal{N}$ 上的向量场 U_*，使得对每个 $r\in\mathcal{M}$都有 $\psi_*(U_r)=U_{*\psi(r)}$，则称 $\mathcal{M}$ 上的向量场 U 是可投影的。在这种情况下，U 和 U_* 称为ψ相关的。此外，$\mathcal{H}(\mathcal{M})$上的向量场 U 若是可投影的 [19]，则称为基本的。

若 U 和 V 是分别与 U 和 V相关的基本向量场，则有以下事实

(1) $g(U,V)=\hat{}g(\hat{}U,\hat{}V)\circ\psi$, (2) $\mathcal{H}[U,V]$ 是一个与 $[X_*,Y_*]$ 相关的基本向量场，$\hat{}\hat{}$ (3) $\mathcal{H}(\nabla_U V)$ 是一个与 $\nabla_{\hat{U}}V$相关的基本向量场。

黎曼浸没的几何由 O'Neill 张量$\mathcal{T}$和 $\mathcal{A}$刻画，其定义如下 [19]

$$\mathcal{T}_E F=\mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E}\mathcal{H}F+\mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E}\mathcal{V}F,\tag{2.3}$$

$$\mathcal{A}_E F=\mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{H}F+\mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{V}F,\tag{2.4}$$

对于 $\mathcal{M}$ 上的任意向量场 E、F。容易看出，$\mathcal{T}_E$ 和 $\mathcal{A}_E$ 是相对于 g 的斜对称算子，它们作用于 $\mathcal{M}$ 的切丛，并交换垂直分布与水平分布。我们总结张量场 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{A}$ 的性质。设 V、W 是垂直向量场，X、Y 是 $\mathcal{M}$ 上的水平向量场。那么，

$$\mathcal{T}_V W=\mathcal{T}_W V,\tag{2.5}$$

$$\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}_Y X = \frac{1}{2}\mathcal{V}[X,Y]. \tag{2.6}$$

设 $(\mathcal{M}, \nabla, g)$ 是一个统计流形，且 $\psi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是一个黎曼浸没。我们用 ∇ 和 ∇^* 表示 ψ 的任意纤维 $\mathcal{M}$ 上的对偶仿射联络。容易看出，∇ 和 ∇^* 是无挠的，并且相对于 g 互为共轭。

从 $(\mathcal{M}, g)$ 到 $(\mathcal{N}, \hat{g})$ 的黎曼浸没 ψ 称为统计浸没，当且仅当 ψ 满足 $\psi_*(\nabla_X Y)_r = (\hat{\nabla}_{\psi_*(X)}\psi_*(Y))_{\psi(r)}$ 对于 $\mathcal{M}$ 和 $r \in \mathcal{M}$ 上的基本向量场 X, Y。在上述表达式中将 ∇ 替换为 ∇^*，我们定义 $\mathcal{T}^*$ 和 $\mathcal{A}^*$ [26]。当且仅当 $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ 分别关于 ∇ 和 ∇^* 可积时，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 等于零。对于 $X, Y \in \Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$ 和 $V, W \in \Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$，我们得到

$$g(\mathcal{T}_V W, X) = -g(W, \mathcal{T}^*_V X), \qquad g(\mathcal{A}_X Y, V) = -g(Y, \mathcal{A}^*_X V). \tag{2.7}$$

3. Properties of Statistical Submersions

本节将讨论 Takano [26] 提出的统计浸没的一些有用性质。在同一篇论文中，Takano 给出了以下引理，这些引理对本研究很有用。因此，对于统计浸没 $\psi\colon (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$，我们有 [19, 26]

引理 3.1. [26] 若 X 和 Y 是水平向量场，则 $\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}^*_Y X$。

引理 3.2. [26] 对于 $X, Y \in \Gamma\mathcal{H}$（$\mathcal{M}$）和 $V, W \in \Gamma\mathcal{V}$（$\mathcal{M}$），有

$$\nabla_V W = \mathcal{T}_V W + \bar{\nabla}_V W, \qquad \nabla^*_V W = \mathcal{T}^*_V W + \bar{\nabla}^*_V W, \tag{3.1}$$

$$\nabla_V X = \mathcal{T}_V X + \mathcal{H}\nabla_V X, \qquad \nabla^*_V X = \mathcal{T}^*_V X + \mathcal{H}\nabla^*{}_V X, \tag{3.2}$$

$$\nabla_X V = \mathcal{A}_X V + \mathcal{V}\nabla_X V, \qquad \nabla^*_X V = \mathcal{A}^*_X V + \mathcal{V}\nabla^*_X V, \tag{3.3}$$

$$\nabla_X Y = \mathcal{H}\nabla_X Y + \mathcal{A}_X Y, \qquad \nabla^*_X Y = \mathcal{H}\nabla^*_X Y + \mathcal{A}^*_X Y. \tag{3.4}$$

此外，若 X 是基本的，则 $\mathcal{H}\nabla_V X = \mathcal{A}_X V$ 和 $\mathcal{H}\nabla^*_V X = \mathcal{A}^*_X V$。

设 Rie（分别为 Rie^*）是关于 ∇（分别为 ∇^*）的 $\mathcal{M}$ 的曲率张量。各纤维关于诱导仿射联络 ∇（分别为 $\bar{\nabla}^*$）的曲率张量为 $\bar{Rie}$（分别为 $\bar{Rie}^*$）。此外，$\hat{Rie}(X,Y)Z$（分别为 $\hat{Rie}^*(X,Y)Z$）是水平向量场，满足

$$\psi_*(\hat{Rie}(X,Y)Z) = \hat{Rie}(\psi_* X, \psi_* Y)\psi_* Z$$

$$(\text{resp. } \psi_*(\hat{Rie}^*(X,Y)Z) = \hat{Rie}^*(\psi_* X, \psi_* Y)\psi_* Z\ )$$

对于每个 $p \in M$，其中 $\hat{Rie}$（分别地，$\hat{Rie}^*$）表示关于仿射联络 $\hat{\nabla}$（分别地，$\hat{\nabla}^*$）的曲率张量。于是我们有以下定理 [26]

定理 3.3. 如果 $\psi\colon (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没，那么对于 $E, F, G, K \in \Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$ 以及 $X, Y, Z, W \in \Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$，我们有

$$Rie(E,F,G,K) = \bar{Rie}(E,F,G,K) + g(\mathcal{T}_E G, \mathcal{T}^*_F K) - g(\mathcal{T}_F G, \mathcal{T}^*_E K), \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} Rie(X,Y,Z,W) =& \hat{Rie}(X,Y,Z,W) + g((\mathcal{A}_X + \mathcal{A}^*_X)Y, \mathcal{A}^*_Z W) \\ &- g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{A}^*_X W) + g(\mathcal{A}_X Z, \mathcal{A}^*_Y W). \end{aligned} \tag{3.6}$$

现在，我们得到

定理3.4。$(\mathcal{M}, \nabla, g)$、$(\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 以及 ψ 中任意 $\hat{}$ 纤维的里奇曲率张量分别记为 Ric、 Ric 和 Ric，它们满足

$$\begin{aligned} Ric(E,F) =& \bar{Ric}(E,F) - g(\mathcal{T}_E F, N^*) + \sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{X_i}\mathcal{T})(E,F), X_i) \\ &+ g(\mathcal{A}_{X_i}E, \mathcal{A}^*_{X_i}F) - \sum_{j=1}^{m} g((\nabla^*_{E_j}\mathcal{A})(X_i,X), V), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& \hat{Ric}(X,Y) + g(\nabla^*_X N^*, Y) - \sum_{j=1}^{m} g(\mathcal{T}_{E_j}X, \mathcal{T}_{E_j}Y) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{A}_X X_i, \mathcal{A}^*_Y X_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i}\mathcal{A})(X_i,X), Y) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{A}_{X_i}X_i, \mathcal{A}_X Y) - g(\mathcal{A}^*_X X_i, \mathcal{A}^*_X X_i), \end{aligned} \tag{3.8}$$

对于任意的 $E, F \in \Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$ 和 $X, Y \in \Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$，其中 $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $\{E_j\}_{1\le i\le m}$ 分别是 $\mathcal{H}(horizontal)$ 和 $\mathcal{V}(vertical)$ 分布的标准正交基。

对于统计浸没 ψ 的任意纤维，其平均曲率向量场 H由 $mH = N$ 给出，其中

$$N = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{T}_{E_j} E_j, \tag{3.9}$$

m 是 ψ 的任意纤维的维数， $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ 是垂直分布中的标准正交基。我们指出，水平向量场 N 消失，当且仅当统计浸没 ψ 的任意纤维都是极小的。

现在，由 (3.9) 可得

$$g(\nabla_U N, X) = \sum_{j=1}^{m} g((\nabla_U \mathcal{T})(E_j, E_j), X), \tag{3.10}$$

对于任意的 $U \in \Gamma(TM)$ 和 $X \in \Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$，均有。

此外，对于任意张量场 $\mathcal{P}$，我们定义

$$\hat{\delta}\mathcal{P} = -\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{X_i}\mathcal{P})_{X_i} \quad \text{and} \quad \bar{\delta}\mathcal{P} = -\sum_{j=1}^{m} (\nabla_{E_j}\mathcal{P})_{E_j}.$$

在 $\Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$ 中，任意向量场 X 的水平散度记为 $\delta(X)$，其表达式为

$$\delta(X) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i} X, X_i), \tag{3.11}$$

其中， $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是水平空间 $\Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$ 的标准正交基。因此，考虑到 (3.11)，我们有

$$\delta(N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g((\nabla_{X_i}\mathcal{T})(E_j, E_j), X_i). \tag{3.12}$$

4. Some Sharp Inequalities Involving Ricci and Scalar Curvatures

本节主要研究给定统计浸没的 Ricci 曲率和数量曲率，并构造一些涉及 Ricci 曲率和数量曲率的不等式。由定理3.4和 [26], 可得

$$\begin{aligned} Ric(E,F) =& \bar{Ric}(E,F) - g(\mathcal{T}_E F, N^*) + (\hat{\delta}\mathcal{T})(E,F) \\ &+ g(\mathcal{A}E, \mathcal{A}^* F) - g(\nabla^*_E \sigma, F) \end{aligned} \tag{4.1}$$

and

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =& \hat{Ric}(X,Y) + g(\nabla^*_X N^*, Y) - g(\mathcal{T}X, \mathcal{T}Y) + (\hat{\delta}\mathcal{A})(X,Y) \\ &+ g(\sigma, \mathcal{A}_X Y) - g(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}^*_Y) - g(\mathcal{A}^*_X, \mathcal{A}^*_Y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$(\hat{\delta}\mathcal{T})(E,F) = \sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{X_i}\mathcal{T})(E,F), X_i),$$

$$(\hat{\delta}\mathcal{A})(X,Y) = \sum_{j=1}^{m} g((\nabla_{E_j}\mathcal{A})(X,Y), E_j),$$

$$g(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{A}_X X_i, \mathcal{A}_Y X_i) = \sum_{j=1}^{m} g(\mathcal{A}^*_X E_j, \mathcal{A}^*_Y E_j),\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{X_i} X_i,$$

$$g(\mathcal{A}E, \mathcal{A}F) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{A}_{X_i} E, \mathcal{A}_{X_i} F), \quad g(\mathcal{T}X, \mathcal{T}Y) = \sum_{j=1}^{m} g(\mathcal{T}_{E_j} X, \mathcal{T}_{E_j} Y).$$

因此，我们推导出以下不等式：

定理4.1。设 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$为一个统计浸没。则有

$$Ric(E,E) \geq \bar{Ric}(E,E) - m^2 g(\mathcal{T}_E E, H^*) + (\hat{\delta}\mathcal{T})(E,E) - (\bar{\delta}\sigma)(E,E). \tag{4.3}$$

当且仅当 $\mathcal{H}(\mathcal{M})$可积时，(4.3)中的等号情形成立。

由于 $2\mathcal{A}^0 = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$，我们有

定理4.2. 设 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$为一个统计浸没。则有

$$\begin{aligned} Ric(X,X) \leq& \hat{Ric}(X,X) + g(\nabla^*_X N^*, X) + (\hat{\delta}\mathcal{A})(X,X) \\ &+ g(\sigma, \mathcal{A}_X X) - 2g(\mathcal{A}^0_X, \mathcal{A}^*_X). \end{aligned} \tag{4.4}$$

当且仅当每个纤维相对于 ∇ ($\mathcal{T} = 0$)均为全测地时，(4.4)中的等号情形成立。

根据(3.5)，利用 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}^*$的对称性，我们推得

$$2R = 2\bar{R} - m^2 g(H, H^*) + \sum_{i,j=1}^{m} g(\mathcal{T}_{E_i} E_j, \mathcal{T}^*_{E_i} E_j).$$

定理 4.3. 设 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 为统计浸没。那么，我们有

$$2R \geq 2\bar{R} - m^2 g(H, H^*). \tag{4.5}$$

当且仅当 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{T}^*$ 是另一个的倍数时，(4.5) 中等号成立。特别地，要么每个纤维相对于 ∇ ($\mathcal{T}=0$) 都是全测地的，要么每个纤维相对于 ∇^* ($\mathcal{T}^*=0$) 都是全测地的。

根据 (3.6)，对水平向量场 $\mathcal{A}_XY=-\mathcal{A}_Y^*X$ 使用 X 和 Y，我们得到

$$\begin{aligned}2R=&2\hat{R}+\sum_{i,j=1}^{n}\Big[g(\mathcal{A}_{X_i}X_j,\mathcal{A}_{X_j}^*X_i)-g(\mathcal{A}_{X_j}X_j,\mathcal{A}_{X_i}^*X_i)\\&+g((\mathcal{A}_{X_i}+\mathcal{A}_{X_i}^*)X_j,\mathcal{A}_{X_j}^*X_i)\Big]\\=&2\hat{R}+g(\sigma,\sigma)-\sum_{i,j=1}^{n}\Big[2g(\mathcal{A}_{X_i}X_j,\mathcal{A}_{X_i}X_j)+g(\mathcal{A}_{X_i}^*X_j,\mathcal{A}_{X_i}X_j)\Big].\end{aligned}$$

定理 4.4. 设 $\psi\colon(\mathcal{M},\nabla,g)\longrightarrow(\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$ 是一个统计浸没。则有

$$2R\leq 2\hat{R}+g(\sigma,\sigma). \tag{4.6}$$

当且仅当 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}\mathcal{H}=0$ 时，(4.6) 中的等号情形成立。

考虑关系式 (4.1) 和 (4.2)，可得下列等式 [26]

$$\begin{aligned}R-\bar{R}-\hat{R}=&-2g(\mathcal{A},\mathcal{A})+g(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)-g(\mathcal{T},\mathcal{T}^*)-g(N,N^*)\\&-\hat{\delta}N-\hat{\delta}^*N^*-\bar{\delta}\sigma+\bar{\delta}^*\sigma+g(\sigma,\sigma),\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 R 和 $\bar{R}$ 分别是$\mathcal{M}$的垂直空间与水平空间的标量曲率。这里

$$g(\mathcal{T},\mathcal{T}^*)=\sum_{i=1}^{n}g(\mathcal{T}X_i,\mathcal{T}^*X_i),\quad g(\mathcal{A},\mathcal{A})=\sum_{i=1}^{n}g(\mathcal{A}_{X_i},\mathcal{A}_{X_i}),$$

$$g(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)=\sum_{i=1}^{n}g(\mathcal{A}_{X_i},\mathcal{A}_{X_i}^*).$$

利用柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式和等式 (4.7)，可得以下定理：

定理 4.5. 设 $\psi\colon(\mathcal{M},\nabla,g)\longrightarrow(\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$ 是一个统计浸没。则有

$$\begin{aligned}R\geq&\bar{R}+\hat{R}-2||\mathcal{A}||^2+g(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)-||\mathcal{T}||||\mathcal{T}^*||-g(N,N^*)\\&-\hat{\delta}N-\hat{\delta}^*N^*-\bar{\delta}\sigma+\bar{\delta}^*\sigma+g(\sigma,\sigma).\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) 中等号成立，当且仅当 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{T}^*$ 是另一个的倍数。特别地，要么每个纤维关于 ∇ ($\mathcal{T}=0$) 都是全测地的，要么每个纤维关于 ∇^* ($\mathcal{T}^*=0$) 都是全测地的。

由定理 4.5，可得以下推论：

推论 4.6. 设 $\psi\colon(\mathcal{M},\nabla,g)\longrightarrow(\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$ 是一个统计浸没。若$\mathcal{H}(\mathcal{M})$是可积的，则有

$$R\geq\bar{R}+\hat{R}-||\mathcal{T}||||\mathcal{T}^*||-m^2g(H,H^*)-\hat{\delta}N-\hat{\delta}^*N^*. \tag{4.9}$$

当且仅当 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{T}^*$ 是另一个的倍数时，(4.9) 中取等号。特别地，要么每个纤维关于 ∇ ($\mathcal{T}=0$) 都是全测地的，要么每个纤维关于 ∇^* ($\mathcal{T}^*=0$) 都是全测地的。

例 4.7. 设 $(\mathcal{M}=\{(x_1,...,x_6)\in\mathbb{R}^6\},\nabla,g=\sum_{i,\ j=1}^{6}dx_i\otimes dx_j)$ 是一个统计流形，其 ∇ 由下式给出

$$\nabla_{e_1}e_1=e_6,\quad \nabla_{e_2}e_2=e_6,\quad \nabla_{e_3}e_3=e_6,\quad \nabla_{e_4}e_4=e_6,\quad \nabla_{e_5}e_5=e_6$$
$$\nabla_{e_6}e_6=0,\quad \nabla_{e_6}e_i=0,\quad \nabla_{e_i}e_6=e_i,\quad 1\le i\le 5$$

以及 $\nabla_{e_i}e_i=0$，对于 $1\le i\le 5$，其中

$$e_1=\partial x_1,\quad e_2=\partial x_2,\quad e_3=\partial x_3,\quad e_4=\partial x_4,\quad e_5=\partial x_5,\quad e_6=\partial x_6.$$

因此，统计流形 $(\mathcal{M},\nabla,g)$ 具有常曲率。标量曲率为 -20，因此它是一个爱因斯坦统计流形。

5. Ricci-Bourguignon Solitons along Statistical Submersions

本节讨论统计流形之间的统计浸没$\psi:(\mathcal{M},\nabla,g)\longrightarrow(\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$的里奇-布尔吉尼翁孤立子，并探讨此类浸没的纤维的性质。

由方程 (3.1) 至 (3.4)，对于统计浸没，我们得到以下结果：

定理 5.1. 设 $\psi:(\mathcal{M},\nabla,g)\longrightarrow(\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$是统计流形之间的统计浸没。若对于任意 $X,Y\in\Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$和$E,F\in\Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$，方程 (3.1) 和 (3.3) 的水平部分 $\mathcal{T}_FH$（分别为 $\mathcal{T}_F^*H$）和 $\mathcal{A}_XF$（分别为 $\mathcal{A}_X^*F$）恒等于零，则垂直分布 $\mathcal{V}$ 相对于联络 ∇（分别为 ∇^*）是平行的。

类似地，对于任意 $X,Y\in\Gamma\mathcal{H}(\mathcal{M})$ 和 $E,F\in\Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$，若 (3.2) 和 (3.4) 中的垂直部分 $\mathcal{T}_FX$（分别为 $\mathcal{T}_F^*X$）和 $\mathcal{A}_XY$（分别为 $\mathcal{A}_X^*Y$）恒为零，则水平分布 $\mathcal{H}$ 关于联络 ∇（分别为 ∇^*）是平行的。

将 (M,g) 视为里奇-布尔吉尼翁孤立子，由 (1.2) 可得

$$(\mathcal{L}_Vg)(E,F)+2Ric(E,F)+(2\lambda-\rho R)g(E,F)=0, \tag{5.1}$$

对于任意 $E,F\in\Gamma\mathcal{V}(\mathcal{M})$。利用 (3.7) 和 (4.7)，可得

$$\frac{1}{2}\left[g(\nabla_EV,F)+g(\nabla_FV,E)\right]+\bar{Ric}(E,F)-g(\mathcal{T}_EF,N^*) \tag{5.2}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[g((\nabla_{X_i}\mathcal{T})(E,F),X_i)+g(\mathcal{A}_{X_i}E,\mathcal{A}_{X_i}^*F)]-\sum_{j=1}^{m}g((\nabla_{E_j}^*\mathcal{A})(X_i,X),V)$$
$$+\Big(\lambda-\rho\Big\{\bar{R}-g(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)-g(N,N^*)$$
$$-\hat{\delta}N-\hat{\delta}^*N^*-\bar{\delta}\sigma+\bar{\delta}^*\sigma+\left\|\sigma^2\right\|\Big\}\Big)g(E,F)=0,$$

其中 $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ 表示水平分布 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基。由定理 5.1 和方程 (2.4)、(3.1)，可得以下表达式：

$$\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}_EV,F)+\bar{g}(\bar{\nabla}_FV,E)]+\bar{Ric}(E,F)+(\Lambda-\rho\bar{R})\bar{g}(E,F)=0, \tag{5.3}$$

^^ 其中 $\Lambda=\lambda+\rho[g(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)+g(N,N^*)+\delta N+\delta^*N^*]$。因此，我们有如下结论：

定理 5.2. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho)$ 是一个具有垂直势向量场 V 的里奇-布尔吉尼翁孤立子，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 平行，则该统计浸没 ψ 的任意纤维都是满足 (5.3) 的里奇-布尔吉尼翁孤立子。

现在，类似地，利用 (5.3)，我们给出以下推论：

推论 5.3. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho = \frac{1}{2})$ 是一个具有垂直势向量场 V 的爱因斯坦孤立子，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 平行，则统计浸没 ψ 的任意纤维都是一个满足下列条件的爱因斯坦孤立子

$$\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}_E V, F) + \bar{g}(\bar{\nabla}_F V, E)] + \bar{Ric}(E, F) + \left(\Lambda - \frac{\bar{R}}{2}\right)\bar{g}(E, F) = 0. \tag{5.4}$$

推论 5.4. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho = \frac{1}{2(n-1)})$ 是一个具有垂直势向量场 V 的肖滕孤子，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 平行，则统计浸没 ψ 的任意纤维都是一个满足下列条件的肖滕孤子

$$\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}_E V, F) + \bar{g}(\bar{\nabla}_F V, E)] + \bar{Ric}(E, F) + \left(\Lambda - \frac{\bar{R}}{2(n-1)}\right)\bar{g}(E, F) = 0. \tag{5.5}$$

推论 5.5. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho = 0)$ 是一个里奇孤立子，其垂直势向量场为 V，并设 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 是平行的，则该统计浸没 ψ 的任意纤维都是一个满足下式的里奇孤立子

$$\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}_E V, F) + \bar{g}(\bar{\nabla}_F V, E)] + \bar{Ric}(E, F) + \Lambda\bar{g}(E, F) = 0. \tag{5.6}$$

此外，对于对偶情形，我们有以下定理：

定理 5.6. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其垂直势向量场为 V，并设 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla^*, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}^*, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 是平行的，则该统计浸没 ψ 的任意纤维都是一个满足下式的里奇-布尔吉尼翁孤立子

$$\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}^*_E V, F) + \bar{g}(\bar{\nabla}^*_F V, E)] + \bar{Ric}^*(E, F) + (\Lambda - \rho\bar{R}^*)\bar{g}(E, F) = 0. \tag{5.7}$$

注记. 同样，我们也可以得到对偶情形下相应的推论。

定理 5.7. 设 $(\mathcal{M}, g, V, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其势向量场为 V，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若水平分布 $\mathcal{H}$ 平行，则满足以下结论

(1) 若势向量场 V 垂直，则 $(\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个爱因斯坦流形；(2) 若势向量场 V 水平，则 $(\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其势向量场为 $V' = \psi_* V$.

证明。采用 (1.2)、(3.8) 和 (4.7)，我们得到

$$\frac{1}{2}\left[g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_Y V, X)\right] + \hat{Ric}(\hat{X}, \hat{Y}) + g(\nabla^*_X N^*, Y) \tag{5.8}$$

$$-\sum_{j=1}^{m} g(\mathcal{T}_{E_j}X,\mathcal{T}_{E_j}Y)+\sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{A}_X X_i,\mathcal{A}_Y^* X_i)+\sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{X_i}\mathcal{A})(X_i,X),Y)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[g(\mathcal{A}_{X_i}X_i,A_XY)-g(\mathcal{A}_X^*X_i,\mathcal{A}_X^*X_i)]$$
$$+\Big(\lambda-\rho\Big\{\hat{R}-2\left\|\mathcal{A}\right\|^2-g(\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$$
$$-\hat{\delta}N-\hat{\delta}^*N^*-\bar{\delta}\sigma+\bar{\delta}^*\sigma-\left\|\sigma^2\right\|\Big\}\Big)g(X,Y)=0,$$

其中，对于任意 X、$Y\in\Gamma\mathcal{H}$（$\mathcal{M}$），$\hat{}X$ 和 $\hat{}Y$ 分别与 X 和 Y 是 ψ-相关的。现在，将定理 5.1 应用于上述方程 (5.8)，我们得到

$$[g(\nabla_X V,Y)+g(\nabla_Y V,X)]+2\hat{Ric}(\hat{X},\hat{Y})+(2\Lambda-\rho\hat{R})g(X,Y)=0, \tag{5.9}$$

其中 $\Lambda=\lambda+\rho[2\left\|\mathcal{A}\right\|^2+g(\mathcal{T},\mathcal{T}^*)+\hat{}\delta N+\hat{}\delta^*N^*]$。

(1) 若向量场 V 是垂直的，由(3.3)可得

$$[g(\mathcal{A}_X V,Y)+g(\mathcal{A}_Y V,X)]+2\hat{Ric}(\hat{X},\hat{Y})+(2\Lambda-\rho\hat{R})g(X,Y)=0. \tag{5.10}$$

由于 $\mathcal{H}$ 是平行的，我们得到

$$\hat{Ric}(\hat{X},\hat{Y})+\left(\Lambda-\frac{\rho\hat{R}}{2}\right)g(X,Y)=0, \tag{5.11}$$

这意味着 $(\mathcal{N},\hat{}\nabla,\hat{}g)$ 是爱因斯坦的。
(2) 如果向量场 V 是水平的，由（5.9）可得

$$(\mathcal{L}_V g)(X,Y)+2\hat{Ric}(\hat{X},\hat{Y})+(2\Lambda-\rho\hat{R})g(X,Y)=0, \tag{5.12}$$

这表明统计流形（$\mathcal{N}$，$\hat{}\nabla$，$\hat{}g$）是一个势向量场为 $V'=\psi_*V$的里奇-布尔吉尼翁孤立子。□

对于对偶情形，我们给出以下定理：

定理5.8. 设（$\mathcal{M}$，g，V，λ，ρ）是一个势向量场为 V的里奇-布尔吉尼翁孤立子，且 ψ：($\mathcal{M}$，∇^*，g) $\longrightarrow$($\mathcal{N}$，$\hat{}\nabla^*$，$\hat{}g$)是统计流形之间的统计浸没。如果水平分布 $\mathcal{H}$ 是平行的，则满足以下条件：

(1) 如果势向量场 V是垂直的，则（$\mathcal{N}$，$\hat{}\nabla^*$，$\hat{}g$）是一个爱因斯坦流形；(2) 如果势向量场 V是水平的，则（$\mathcal{N}$，$\hat{}\nabla^*$，$\hat{}g$）是一个势向量场为 $V'=\psi_*V$ 的里奇-布尔吉尼翁孤立子。

6. Ricci-Bourguignon Solitons on Statistical Submersions with a Conformal Vector Field

定义 6.1. 黎曼流形 $(\mathcal{M},g)$ 上的光滑向量场 ζ 称为共形向量场，如果存在光滑函数 φ，定义在 $\mathcal{M}$ 上，并满足[13]

$$\mathcal{L}_\zeta g=2\varphi g, \tag{6.1}$$

其中 $\mathcal{L}_\zeta g$ 是关于 g 的李导数 ζ。若 $\varphi=0$，则称 ζ 为等距的（也称为 Killing 向量场）。

定理 6.2. 设 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$ 是一个具有共形向量场 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$ 的里奇-布尔吉尼翁孤立子，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若共形向量场 ζ 是垂直的且 $(\varphi + \Lambda - \frac{\rho\bar{R}}{2}) \neq 0$，则统计浸没的任意纤维都是爱因斯坦的，其数量曲率为 $\bar{R} = -\frac{m}{(\varphi+\Lambda)(1-\frac{m\rho}{2})}$。

证明。由于 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，对于任意 $E, F \in \Gamma T(\mathcal{M})$，同样应用定理 5.2 和方程 (5.3)，我们有

$$[\bar{g}(\bar{\nabla}_E V, F) + \bar{g}(\bar{\nabla}_F V, E)] + 2\bar{Ric}(E, F) + (2\lambda - \rho\bar{R})\bar{g}(E, F) = 0. \tag{6.2}$$

现在，结合 (6.2)、(6.1) 和 (4.7)，我们有

$$\bar{Ric}(E, F) + \left(\varphi + \Lambda - \frac{\rho\bar{R}}{2}\right)\bar{g}(E, F) = 0, \tag{6.3}$$

其中 $\Lambda = \lambda + \rho[g(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) + g(N, N^*) + \hat{\delta}N + \hat{\delta}^* N^*]$，这表明$\psi$ 的纤维是爱因斯坦的。对 (6.3) 求缩并，得到

$$\bar{R} = -\frac{m(\varphi + \Lambda)}{(1 - \frac{m\rho}{2})}. \tag{6.4}$$

□

推论 6.3. 设 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其 Killing 向量场为 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若 Killing 向量场 ζ 是垂直的，且 $(\Lambda - \frac{\rho\bar{R}}{2}) \neq 0$，则统计浸没的任意纤维也是爱因斯坦流形，其数量曲率为 $\bar{R} = -\frac{m\Lambda}{(1-\frac{m\rho}{2})}$。

现在，对于对偶情形，我们也得到如下结果:

定理 6.4. 设 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其共形向量场为 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla^*, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}^*, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若共形向量场 ζ 是垂直的，且 $(\varphi + \Lambda - \frac{\rho\bar{R}^*}{2}) \neq 0$，则统计浸没的任意纤维都是爱因斯坦流形，其数量曲率为 $R^* = \frac{m(\varphi+\Lambda)}{(1-\frac{m\rho}{2})}$。

推论 6.5. 设 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$ 是一个里奇-布尔吉尼翁孤立子，其 Killing 向量场为 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$，且 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla^*, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}^*, \hat{g})$ 是一个统计浸没。若 Killing 向量场 ζ 是垂直的，且 $(\varphi + \Lambda - \frac{\rho\bar{R}^*}{2}) \neq 0$，则统计浸没的任意纤维也都是爱因斯坦的，其数量曲率为 $\bar{R}^* = -\frac{m\Lambda}{(1-\frac{m\rho}{2})}$。

注记. 现在，我们得到了定理 6.2 和定理 6.4 的重要推论。对于 ρ 的特定取值，例如 $\rho = \frac{1}{2}$，$\rho = \frac{1}{2(n-1)}$、$\rho = 0$，我们可以轻松得到爱因斯坦~~孤立子~~、肖滕孤立子和里奇孤立子的相应结果。

利用方程（6.4），我们得到以下结果:

定理 6.6. 若 $\psi: (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个带有垂直共形向量场 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$ 的统计浸没，且任意纤维都容许一个里奇-布尔吉尼翁孤立子 $(\mathcal{M}, g, \zeta, \lambda, \rho)$，那么任意具有标量曲率 R 的纤维上的里奇-布尔吉尼翁孤立子分别为膨胀型、稳态型和收缩型，当

(i) $\bar{R}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{m}\right) > \varphi$,
(ii) $\bar{R}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{m}\right) = \varphi$,
(iii) $\bar{R}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{m}\right) < \varphi$.

定理 6.7. 若 $\psi:(\mathcal{M},\nabla^*,g) \longrightarrow (\mathcal{N},\hat{\nabla}^*,\hat{g})$ 是一个带有垂直共形向量场 $\zeta \in \Gamma T(\mathcal{M})$ 的统计浸没，且任意纤维都容许一个里奇-布尔吉尼翁孤立子 $(\mathcal{M},g,\zeta,\lambda,\rho)$，那么任意具有标量曲率 R^* 的纤维上的里奇-布尔吉尼翁孤立子分别为膨胀型、稳态型和收缩型，当

(i) $\bar{R}^*\left(\frac{\rho}{2}-\frac{1}{m}\right)>\varphi$,
(ii) $\bar{R}^*\left(\frac{\rho}{2}-\frac{1}{m}\right)=\varphi$,
(iii) $\bar{R}^*\left(\frac{\rho}{2}-\frac{1}{m}\right)<\varphi$。

7. Gradient Type Ricci-Bourguignon Solitons on Statistical Submersions

本节讨论统计浸没的梯度Ricci-Bourguignon孤立子，其势向量场为 $V=grad(\Psi)$，其中 Ψ 是 $\mathcal{M}$上的光滑函数。

考虑方程 (5.3)。在定理 5.2的条件下，我们得到

$$\bar{Ric}(E,F)=-\left(\Lambda-\frac{\rho\bar{R}}{2}\right)\bar{g}(E,F)-\frac{1}{2}[\bar{g}(\bar{\nabla}_E V,F)+\bar{g}(\bar{\nabla}_F V,E)]. \tag{7.1}$$

将 (7.1) 缩并，得到

$$\bar{R}=-m\left(\Lambda-\frac{\rho\bar{R}}{2}\right)-div(V). \tag{7.2}$$

现在，我们得到以下结果：

定理 7.1. 设 $\psi:(\mathcal{M},\nabla,g) \longrightarrow (\mathcal{N},\hat{\nabla},\hat{g})$ 是一个带有垂直势场 $V=grad(\Psi)$ 的统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 是平行的，则该统计浸没 ψ 的任意纤维都存在梯度 Ricci-布尔吉尼翁孤立子，且 Ψ 满足的泊松方程为

$$\Delta(\Psi)=\left[m\Lambda-\bar{R}\left(1-\frac{m\rho}{2}\right)\right]. \tag{7.3}$$

对于对偶情形，我们得到

定理 7.2. 设 $\psi:(\mathcal{M},\nabla^*,g) \longrightarrow (\mathcal{N}^*,\hat{\nabla},\hat{g})$ 是一个带有垂直势场 $V=grad(\Psi)$ 的统计浸没。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 是平行的，则该统计浸没 ψ 的任意纤维都存在梯度 Ricci-布尔吉尼翁孤立子，且 Ψ 满足的泊松方程为

$$\Delta^*(\Psi)=\left[m\Lambda-\bar{R}^*\left(1-\frac{m\rho}{2}\right)\right]. \tag{7.4}$$

现在，我们强调定理 7.1 的一些有用应用。

泊松方程在物理学中的重要性。泊松方程解的一般理论称为位势理论，而泊松方程的解是调和函数，它们在物理学的不同分支中都很重要，例如静电学、引力和流体动力学。在现代物理学中，当时已知的两种基本自然力，即重力和静电力，都可以用称为引力势和静电势的函数来描述，这两种势都满足拉普拉斯方程。例如，考虑以下现象：如果 Ψ 是引力场， ρ 是质量密度，G 是引力常数，那么高斯引力定律为

$$\nabla\Psi=-4\pi G\rho. \tag{7.5}$$

对于引力场， Ψ 是保守场，可以表示为引力势的负梯度，即 $\Psi = -grad(f)$。根据高斯引力定律，我们有

$$\nabla^2 f = 4\pi G\rho. \tag{7.6}$$

这一物理现象与定理 7.1、方程 (7.3) 及其相应的对偶形式完全相同；后者是一个以梯度型势向量场为势的泊松方程，即 $V = grad(\Psi)$。

若函数 $\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\Delta\Psi = 0$，其中 Δ 是 $\mathcal{M}$ [29] 中的拉普拉斯算子，则称其为调和函数。我们得到以下结果：

定理 7.3. 设 $\psi : (\mathcal{M}, \nabla, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是一个统计浸没，其垂直势向量场为 $V = grad(\Psi)$，且 Ψ 是一个调和函数。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 平行，则统计浸没 ψ的任意纤维均具有梯度Ricci-Bourguignon孤立子，分别为膨胀型、稳态型或收缩型，具体取决于 $\frac{\rho}{2} > \frac{1}{m}$、 $\frac{\rho}{2} = \frac{1}{m}$和 $\frac{\rho}{2} < \frac{1}{m}$。

此外，对其对偶情形也同样成立。

定理 7.4. 设 $\psi : (\mathcal{M}, \nabla^*, g) \longrightarrow (\mathcal{N}, \hat{\nabla}^*, \hat{g})$ 是一个统计浸没，其垂直势场为 $V = grad(\Psi)$，且 Ψ 为调和函数。若垂直分布 $\mathcal{V}$ 是平行的，则统计浸没 ψ 的任意纤维均分别在 $\frac{\rho}{2} > \frac{1}{m}$、 $\frac{\rho}{2} = \frac{1}{m}$ 和 $\frac{\rho}{2} < \frac{1}{m}$ 的相应条件下，容许膨胀型、稳态型或收缩型梯度Ricci-Bourguignon孤立子。

例 7.5. 设 $\psi : (\mathbb{R}^6, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^3, \hat{\nabla}, \hat{g})$ 是例 (4.7) 中所述统计流形之间的一个统计浸没，其定义为

$$\psi(x_1, ..., x_6) = (y_1, y_2, y_3),$$

其中

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}},\ y_2 = \frac{x_3 + x_4}{\sqrt{2}} \quad and \quad y_3 = \frac{x_5 + x_6}{\sqrt{2}}.$$

于是， ψ 的雅可比矩阵如下

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

由于矩阵的秩为 3，等于目标空间（$\mathbb{R}^3$、$\hat{\nabla}$、$\hat{g}$）的维数。另一方面，我们很容易看出， ψ 满足统计浸没的条件。这意味着 ψ 是一个统计浸没。直接计算可得

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{M}) = span\Big\{ & V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial x_1 + \partial x_2), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial x_3 + \partial x_4), \\ & V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial x_5 + \partial x_6)\Big\}, \\ \mathcal{H}(\mathcal{M}) = span\Big\{ & H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_1 + \partial x_2), H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_3 + \partial x_4), \\ & H_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_5 + \partial x_6)\Big\}. \end{aligned}$$

同样，通过直接计算可得

$$\psi_*(H_1) = \partial y_1, \psi_*(H_2) = \partial y_2 \ and \ \psi_*(H_3) = \partial y_3.$$

因此，很容易看出

$$g_{\mathbb{R}^6}(H_i, H_i) = \hat{g}_{\mathbb{R}^3}(\psi_*(H_i), \psi_*(H_i)), \ i = 1, 2, 3.$$

因此， ψ 是一个统计浸没。

现在，我们证明纤维 ψ_*，即 $\mathcal{V}(\mathcal{M})$（垂直空间）存在里奇-布尔吉尼翁孤立子。因此，对于垂直空间，我们有

$$\bar{Rie}(V_1, V_2)V_1 = -2V_2, \quad \bar{Rie}(V_1, V_2)V_2 = 2V_1, \quad \bar{Rie}(V_1, V_3)V_1 = -2V_3$$
$$\bar{Rie}(V_1, V_2)V_3 = V_1, \quad \bar{Rie}(V_2, V_3)V_3 = V_2, \quad \bar{Rie}(V_2, V_3)V_2 = V_2.$$

$$\bar{Ric}(V_i, V_j) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\bar{R} = tr(\hat{Ric}) = 5.$$

利用（5.3），我们得到 $\lambda = 5\rho - 2$。因此，根据 $5\rho > 2$、 $5\rho < 2$ 或 $5\rho = 2$，$(\mathcal{V}(\mathcal{M}), \bar{\nabla}, \hat{g})$分别存在扩张型、收缩型或稳态型里奇-布尔吉尼翁孤立子。此外，对于 ρ 的特定取值，我们得到以下情形：

情形 1。对于 $\rho = \frac{1}{2}$，我们得到 $\lambda = \frac{1}{2}$。因此，$(\mathcal{V}(\mathcal{M}), \bar{\nabla}, \hat{g})$ 是一个膨胀型爱因斯坦孤立子。

情形 2。对于 $\rho =$ $\frac{1}{(2,-1)}$，我们得到 $\lambda = -1$。因此，$(\mathcal{V}(\mathcal{M}), \bar{\nabla}, \hat{g})$ 是一个收缩型肖滕孤立子。

情形 3。对于 $\rho = 0$，我们得到 $\lambda = -2$。因此，$(\mathcal{V}(\mathcal{M}), \nabla, \hat{g})$ 是一个收缩型里奇孤立子。

References

[1] N. Abe 和 K. Hasegawa，带有水平分布的仿射浸没及其应用， *Differential Geom. Appl.* **14** (2001年)，235–250。[2] T. Aubin，黎曼度量与曲率， *J. Differential Geometry* **4** (1970年)，383–424。[3] O. E. Barndorff-Nielson 和 P. E. Jupp，微分几何、剖面似然、 L-充分性与复合变换模型， *Ann. Statist.* **16** (1988年)，1009–1043。[4] A. M. Blaga，关于梯度 η爱因斯坦孤立子， *Kragujevac J. Math.* **42**(2) (2018)，229–237。[5] A. M. Blaga 和 B.-Y. Chen，统计流形上的梯度孤立子， *J. Geom. Phys.* **164** (2021 104195, 10 10 1016 2021 104195), 第 . DOI: . /j.geomphys.。[6] J. P. Bourguignon 和 H. B. Lawson，杨–米尔斯场的稳定性与孤立现象， *Commun. Math. Phys.* **79** (1981年)，189–230。[7] J. P. Bourguignon 和 H. B. Lawson，一位数学家对卡鲁扎–克莱因理论的考察，偏微分方程与几何会议（都灵，1988 *Rend. Sem. Mat.* ），， *Univ. Politec. Torino* 143 163 1990 特刊，– ()。[8] G. Catino、L. Cremaschi、Z. Djadli、C. Mantegazza 和 L. Mazzieri，Ricci-Bourguignon流， *Pacific J. Math.* **287** (2017年)，337–370。[9] G. Catino 和 L. Mazzieri，梯度爱因斯坦孤立子， *Nonlinear Anal.* **132** (2016年)，66–94。[10] S. K. Chaubey、M. D. Siddiqi、S. Yadav，黎曼浸没的浸没上的几乎 η里奇-布尔吉尼翁孤立子， *Balkan J. Geom. Appl.* **27**(1) (2022)，24–38。[11] B.-Y. Chen，关于极小子流形的若干夹逼与分类定理， *Arch. Math.* (巴塞尔) 60 (1993)，568–578。[12] B.-Y. Chen，伪黎曼几何、 δ-不变量及其应用，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2011年。

[13] S. Deshmukh，共形向量场与拉普拉斯算子的特征向量，
Math. Phy. ( )，–。
Anal. Geom. **15** 2012 163 172
[14] M. Falcitelli、S. Ianus 和 A. M. Pastore， *Riemannian submersions and related topics*，世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，2004年。[15] A. Gray，伪黎曼几乎乘积流形与浸没，
J. Math. Mech. **16** (1967年)，715–737。[16] R. S. Hamilton，曲面上的里奇流，数学与广义相对论（加利福尼亚州圣克鲁兹，1986年）， *Contemp. Math.* **71**，美国数学学会，(1998) 237–262。[17] Ş ¸ ¸ *An.* . E.
Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. **63** 3 2017 471 482
Meric、M. Gulbahar 和 E. Kılıc，黎曼浸没的一些不等式，(N.S.)，( ) ( )，–。[18] S¸. E. Meri¸c 和 E. Kılı¸c，其全流形具有里奇孤立子的黎曼浸没，*Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **16**(12) (2019)，1950196，共12页。[19] B. O'Neill，浸没的基本方程， *Michigan Math. J.* **13** (1966年)，459–469。[20] B. S
¸ *Cent.*
Eur. J. Math. **8** 3 2010 437 447
ahin，来自几乎厄米流形的反不变黎曼浸没，( ) ( )，–。[21] B. S
¸ *Riemannian submersions Riemannian maps in Hermitian geometry and their applications* 2017
ahin， , , , Elsevier/Academic Press，伦敦，。[22] M. D. Siddiqi，尘埃流体与黏性流体时空中的里奇 ρ孤立子及几何结构， *Bulg. J. Phys.* **46** (2019年)，163–173。[23] M. D. Siddiqi、A. H. Alkhaldi、M. A. Khan、A. N. Siddiqui，典范变分下黎曼浸没上的共形 η里奇孤立子， *Axioms* **11** (2022)，594。[24] A. N. Siddiqui、B.-Y. Chen 和 O. Bahadir，统计扭曲积子流形上的统计孤立子与不等式， *Mathematics* **7**(9) (2019)，论文编号797，共19页。DOI: 10 3390 7090797 。/
[25]
math A. N. Siddiqui 和 M. D. Siddiqi，相对论完美流体时空中的几乎里奇-布尔吉尼翁孤立子及几何结构， *Balkan J. Geom. Appl.* **26**(2) (2021)，126–138。[26] K. Takano，带有几乎复结构的统计流形及其统计浸没， *Tensor (N.S.)* **65**(2) (2004)，123–137。[27] K. Takano，统计模型上的统计浸没示例，
Tensor (N.S.)
65 2 2004 170 178
( ) ( )，–。[28] B. Watson，(G, G')-黎曼浸没与广义相对论的非线性规范场方程，载于：《全球分析——流形上的分析》，Teubner-Texte Math.，57，Teubner，莱比锡，1983年。[29] S. T. Yau，完备黎曼流形上的调和函数，
Comm. Pure. Appl. Math. ( )，–。
28 1975 201 228

Department of Mathematics College of Science Jazan University Jazan Kingdom of Saudi Arabia*Email address*: msiddiqi@jazanu.edu.saDivision of Mathematics, School of Basic & Applied Science, Galgotias UniversityGreater Noida 203201 Uttar Pradesh*Email address*: aliyanaazsiddiqui9@gmail.com
Department of Mathematics, Michigan State University 619 Red Cedar Road East Lansing, MI 48824-1027 USA*Email address*: chenb@msu.edu