arXiv:2302.05758v1 [math.FA] 11 Feb 2023

关于连续贪婪及其他类贪婪基。

MIGUEL BERASATEGUI、PABLO M. BERNÁ 和 HÙNG VIÊ. T CHU

摘要。我们继续研究阈值贪婪算法，并将逼近中涉及的向量限制为支撑在 $\mathbb{N}$ 的区间上或具有常系数。我们引入并刻画了所谓的连续贪婪基，并给出了几乎贪婪基和挤压对称 Schauder 基的新刻画。此外，我们考察了若干具有常数 1 的类贪婪性质的情形，并研究了相关的性质（A, τ）概念。

1. 引言

在非线性逼近领域，目标之一是寻找自然的算法来逼近给定空间中的元素。形式上，给定某个空间 $\mathbb{X}$ 的一个（Markushevich）基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$，我们将每个元素 $x \in \mathbb{X}$ 与形式级数$\sum_n a_n \boldsymbol{e}_n$相关联，其中 a_n 是标量，称为 x 的系数。这类表示的例子包括泰勒展开或傅里叶级数。随后，我们用有限和 $\sum_{n\in A(x)} b_n \boldsymbol{e}_n$ 来逼近 f，其中集合 $A(x)$（取决于x）和标量 b_n（可能与 a_n 不同）适当选取。

过去二十年来，一种备受关注的算法是阈值贪婪算法（G_m）$_m$（TGA），它选取 x 中模最大的系数；也就是说，若（a_1，a_2，...）是 $x \in \mathbb{X}$的系数序列，我们按系数的大小重新排列，使得 $|a_{\pi(1)}| \geqslant |a_{\pi(2)}| \geqslant \cdots$，并令$G_m$（$x$）$= \sum_{n=1}^{m} a_{\pi(n)} \boldsymbol{e}_{n}$。

我们想知道 TGA 何时能给出最佳逼近，也就是说，何时

$$\|x - G_m(x)\| \approx \sigma_m(x), \tag{1.1}$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，其中 $\sigma_m(x) := \inf_y \|x-y\|$，且 y是由基向量构成的任意线性组合，满足 $|\mathrm{supp}(y)| \leqslant m$。在 [KT99], 中，作者提出了贪婪基的概念，即满足 (1.1) 的基。此后，许多作者研究了贪婪算法，并提出了不同的贪婪型基，例如几乎贪婪基、部分贪婪基和半贪婪基。其中，部分贪婪基尤为重要，因为它们比较了非线性的贪婪逼近与标准线性逼近。特别地，当一个基满足以下条件时，它是部分贪婪的

$$\|x - G_m(x)\| \lesssim \|x - S_m(x)\|,$$

2020年数学主题分类。41A65；46B15。关键词与短语：阈值贪婪算法；连续贪婪基；压缩对称基。

其中 $S_m(x)$ 是由部分和构成的线性算法序列。受线性与非线性之间差异的启发，并且延续 [BBC22], 中开始的研究，本文提出对误差 $\sigma_m(x)$ 作如下修改：我们考虑误差 $\sigma_m^{con}(x) := \inf_y \|x-y\|$，其中 y 由基向量生成，且其支撑位于一个连续自然数区间上，该区间的长度为 m。令人惊讶的是，如果我们考虑满足以下条件的基

$$\|x - G_m(x)\| \lesssim \sigma_m^{con}(x),$$

我们并未得到最佳逼近，但基于几乎贪婪基的概念，实现了收敛；对于这类基，贪婪算法（TGA）通过投影给出最佳逼近。在本研究中，我们还证明了一些新的等价关系，涉及最大系数对称性（亦称性质（A））和挤压对称性。这两个概念在贪婪逼近理论中备受关注，并已在该领域的多篇论文中得到研究。

2. 背景与记号

设 $\mathbb{X}$ 是域 $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的可分无限维 p-巴拿赫空间（$0 < p \leqslant 1$）。设 $\mathbb{X}^*$ 为 $\mathbb{X}$ 的对偶空间。所谓基，是指满足以下条件的序列 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$：

(1) $\mathbb{X} = \overline{[\boldsymbol{e}_n : \ n \in \mathbb{N}]}$，其中 $[\boldsymbol{e}_n : \ n \in \mathbb{N}]$ 表示 $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的张成空间；(2) 存在唯一的序列 $\mathcal{B}^* = (\boldsymbol{e}_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}^*$，使得 $\boldsymbol{e}_j^*(\boldsymbol{e}_k) = \delta_{j,\ k}$ 对所有 j、$k \in \mathbb{N}$ 均成立；(3) 存在 c_1、$c_2 > 0$，使得

$$0 \ < \ c_1 := \inf_n\{\|\boldsymbol{e}_n\|, \|\boldsymbol{e}_n^*\|\} \ \leqslant \ \sup_n\{\|\boldsymbol{e}_n\|, \|\boldsymbol{e}_n^*\|\} \ =: \ c_2 \ < \ \infty.$$

若 $\mathcal{B}$ 还满足

(4) $\mathbb{X}^* = \overline{[\boldsymbol{e}_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{w^*}$，

则 $\mathcal{B}$ 是一个 Markushevich 基。此外，若部分和算子 $S_m(x) = \sum_{n=1}^m \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n$ 在 $m \in \mathbb{N}$ 上是一致有界的，即存在常数 $\mathbf{C} > 0$ 使得

(5) $\|S_m(x)\| \leqslant \mathbf{C}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$,

则 $\mathcal{B}$ 是一个 Schauder 基（特别地，也称为 C-绍德尔基）。使上述条件成立的最小 C 称为基常数，记作 $\mathbf{K}_b$。

若 $\mathcal{B}$ 满足更强的条件，即不等式

$$\left\| P_A(x) \ := \ \sum_{n\in A} \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n \right\| \ \leqslant \ \mathbf{C}\|x\|$$

对某个固定的 $\mathbf{C} > 0$、所有 $x \in \mathbb{X}$ 及有限的 $A \subset \mathbb{N}$均一致成立，则称 $\mathcal{B}$为 C-抑制无条件的。对于无条件基，令 $\mathbf{K}_{su} > 0$ 为使下式成立的最小常数：

$$\|x - P_A(x)\| \ \leqslant \ \mathbf{K}_{su}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall \text{ finite } A \subset \mathbb{N},$$

并称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbf{K}_{su}$-抑制无条件的。两处都应使用“抑制”，或者都不使用。下文中，$\mathcal{B}$ 总表示 p- 巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基。

对于每个 $x \in \mathbb{X}$，我们希望有一种高效的算法，从形式级数 $\sum_{n=1}^\infty \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n$ 中提取有限和，并考察这些有限和对向量 x的逼近效果。在

1999年，Konyagin 和 Temlyakov [KT99] 提出了阈值贪婪算法（TGA），该算法按模选择 x 中最大的系数，即选择最大的 $|e_n^*(x)|$纳入有限和。本文将采用 Temlyakov [T98]最先研究的一种较弱且更一般的算法版本（WTGA）。WTGA 在构造有限和时更为灵活，允许选择不超过某个常数倍的最大系数。具体而言，给定 $0 < \tau \leqslant 1$ 和 $x \in \mathbb{X}$，如果 $A \subset \mathbb{N}$ 且

$$\min_{n\in A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)| \geqslant \tau \max_{n\notin A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)|.$$

在 $\tau = 1$ 的情况下，WTGA 与 TGA 一致；此时，我们称 A 为 x 的 m 阶贪婪集；x 的所有 τ-贪婪集组成的集合记为 $G(x, m, \tau)$，而 x 的所有有限贪婪集组成的集合记为 $G(x)$。相应的和为 $\sum_{n\in A} \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n$。值得注意的是，对于 $\tau < 1$，WTGA 比 TGA 更灵活；然而，这种灵活性对逼近效率的影响很小（参见 [T08，第 1.5] 节。）

在 [KT99], 中，作者引入了贪婪基和拟贪婪基，并给出了前者是无条件且民主的关键刻画。后来， [AABW21] 证明，这一刻画对 p-巴拿赫空间同样成立。

定义 2.1。若基 $\mathcal{B}$ 是常数为 $\mathbf{C} > 0$ 的拟贪婪基（或称 C-拟贪婪），则

$$\|P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall A \in G(x, m, 1).$$

定义 2.2。若基 $\mathcal{B}$ 是常数为 $\mathbf{C} > 0$ 的贪婪基（或称 C-贪婪），则

$$\|x - P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\sigma_m(x), \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall A \in G(x, m, 1), \tag{2.1}$$

其中 σ_m（x）是最佳 m 项逼近误差，定义为

$$\sigma_m(x) = \inf_{\substack{y\in\mathbb{X} \\ |\operatorname{supp}(y)|\leqslant m}} \|x - y\|,$$

而 $\operatorname{supp}(y) := \{n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{e}_n^*(y) \neq 0\}$ 是 y（相对于 $\mathcal{B}$）的支撑。

上述定义将效率要求概念化。具体而言，对于拟贪婪基，贪婪算法生成的级数收敛于待逼近向量（[AABW21，定理 4.1], [W00]），这是合理算法的最低要求；对于贪婪基，贪婪算法生成的结果在一个常数因子的范围内，本质上是最佳逼近。

对于接下来的定义，我们使用以下记号：

- $\mathbb{N}^{<\infty}$ 表示 $\mathbb{N}$的所有有限子集构成的集合，而 $\mathbb{N}_{(m)}$ 表示 $\mathbb{N}$ 中基数为 m的子集构成的集合。
- $\mathcal{E} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |a_n| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ 表示符号集合。
- 给定 $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，记作

$$\mathbf{1}_A := \sum_{n\in A} \boldsymbol{e}_n \text{ and } \mathbf{1}_{\varepsilon,A} := \sum_{n\in A} \varepsilon_n \boldsymbol{e}_n$$

- 给定 $x \in \mathbb{X}$，记作

$$\varepsilon(x) := (\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_n(x)))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E},$$

其中 $\operatorname{sgn}(0) = 1$。

定义 2.3. 设 C >0。若基 $\mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其为 C-超民主的：

$$\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|\mathbf{1}_{\delta,B}\|, \forall A, B \in \mathbb{N}^{<\infty} \text{ with } |A| \leqslant |B|, \forall \varepsilon, \delta \in \mathcal{E},$$

并且当上述条件对所有 n 都满足 $\varepsilon_n = \delta_n = 1$ 时，它是 C-民主的。

定理 2.4. [AABW21，推论 7.3], [KT99] 一个基 $\mathcal{B}$ 是贪婪的，当且仅当它是无条件的且（超）民主的。

拟贪婪基与贪婪基之间还有几乎贪婪基，它由 Dilworth、Kalton、Kutzarova 和 Temlyakov 在 [DKKT03] 中引入。其核心思想是，将贪婪算法（TGA）所得和式的逼近效率与所有可能的投影进行比较，而不像贪婪基的定义那样与所有可能的线性组合进行比较。因此，几乎贪婪性质比贪婪性质弱得多，也常见得多（[DKK03，注 7.7]。）形式上，

定义 2.5. 若一个基 $\mathcal{B}$ 的常数为 C >0，则称其为几乎贪婪基（或 C-几乎贪婪），如果

$$\|x - P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\widetilde{\sigma}_m(x), \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall A \in G(x, m, 1),$$

其中，$\widetilde{\sigma}_m(x)$ 是通过投影得到的最佳 m 项逼近误差，定义如下：

$$\widetilde{\sigma}_m(x) = \inf_{A \in \mathbb{N}^{(m)}} \|x - P_A(x)\|. \tag{2.2}$$

拟贪婪基的刻画与贪婪基的刻画相近，只需将无条件性替换为准贪婪性。该刻画已在 [DKKT03] 中针对巴拿赫空间得到证明，并在 [AABW21] 中推广至 p-巴拿赫空间。

定理 2.6. [AABW21，命题 6.6], [DKKT03，定理 3.3] 基 $\mathcal{B}$ 是几乎贪婪的，当且仅当它是拟贪婪且（超）民主的。

自贪婪算法（TGA）及上述基问世以来，它们与其他贪婪类基一样，已在文献中得到广泛研究（参见 [AA16、AA17、AABW21、DKK03、DKKT03、T08、W00]）。关于这一主题的更多背景资料，见 [AABW21、T08、T11]。

本文继续研究贪婪算法针对受限于支撑于区间上的向量以及具有常系数的向量的逼近性能：[BBC22, 定理 1.7] 指出，如果将 (2.2) 中的逼近限制在 $\mathbb{N}$的区间上，我们仍能得到几乎贪婪基。这一结果出乎意料，因为连续限制取决于基的顺序，而几乎贪婪性质与顺序无关。尽管如此，这种限制仍能刻画几乎贪婪性质。在同一篇论文中，受 [BB17, BC22, DK19], 中的结果启发，我们利用具有常系数且限制在 $\mathbb{N}$ 区间上的向量所给出的逼近，刻画了几乎贪婪基（[BBC22, 命题 1.14]）。

本文旨在研究贪婪基定义中所出现的逼近的类似限制。与几乎贪婪性质的情形不同，这些限制并不能导出贪婪性质的等价刻画。此外，我们还研究了这一背景下自然出现的其他性质。特别地，第 3 节定义了连续贪婪基，并以经典方式对其进行刻画。第 4 节利用所谓的性质（A,τ）给出了连续贪婪基的其他刻画（该性质在 [C22] 中作为性质（A）的推广首次提出，

见 [AW06]）。我们还刻画了常数为 1 的连续贪婪基。在第 5 节中，我们更深入地研究性质（A, τ）。首先，我们优化了 [C22，推论 5.5] 中的常数。其次，我们对 [C22，问题 7.3] 给出肯定回答，证明只要对某个 $\tau \in (0,1]$，有性质（A, τ），那么对所有 $\tau' \in (0,1]$ 都有性质（A, τ'）。证明运用了 [AAB22] 中的一项近期结果。在第 6 节中，我们研究了类贪婪算法，其中将（2.1）两侧的逼近限制为相对于基 $\mathcal{B}$ 的常系数向量。最后，在附录中，我们考察了作用于贪婪（或类贪婪）集合一侧的类连续逼近。

3. 连续贪婪基

本节介绍并刻画连续贪婪基。我们将使用以下记号。

- $\mathcal{I}$ 表示 $\mathbb{N}$的所有区间的集合。
- 对于每个 $m \in \mathbb{N}_0$， $\mathcal{I}_{(m)}$ 表示 $\mathbb{N}$ 中长度为 m的所有区间的集合。
- τ 是$(0,1]$中的任意实数。
- 对于 $x \in \mathbb{X}$，令 $G_m^\tau(x) = P_A(x)$，其中某个 $A \in G(x,m,\tau)$。

我们先给出一个定义，其灵感来自[BBC22] 中的连续几乎贪婪基，但它考虑的是 WTGA，以及用任意向量而非投影进行的逼近。

定义 3.1. 若存在某个常数 $C \geqslant 1$，使得基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 满足以下条件，则称其为 (C, τ)-连续贪婪基：

$$\|x - G_m^\tau(x)\| \leqslant C\sigma_m^{con}(x), \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall G_m^\tau(x),$$

其中

$$\sigma_m^{con} = \inf\left\{\left\|x - \sum_{n\in I} a_n \boldsymbol{e}_n\right\| : a_n \in \mathbb{F}, I \in \mathcal{I}^{(m)}\right\}.$$

在这种情况下，最小常数记为 $C_{g\,\tau}^{con}$。当 $\tau = 1$ 时，我们称 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 为连续贪婪基。

在 [BB17 的推论 1.8]，中，作者证明，若存在常数 $C > 0$，使得当 $\sigma_m(x)$ 被替换为以下表达式时，(2.1) 成立

$$\mathcal{D}_m(x) = \inf_{\substack{A\in\mathbb{N}^{(m)}\\ \lambda\in\mathbb{F}}} \|x - \lambda \mathbf{1}_A\|.$$

正如我们将看到的，对于连续贪婪基也存在相应的刻画。首先，我们定义一种在形式上弱于连续贪心性的性质。

定义 3.2. 对于某个常数 $C \geqslant 1$，如果满足以下条件，则称基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 对常系数多项式具有 (C, τ)-连续贪婪性：

$$\|x - G_m^\tau(x)\| \leqslant C\mathcal{D}_m^{con}(x), \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall G_m^\tau(x),$$

其中

$$\mathcal{D}_m^{con}(x) = \inf_{\substack{I\in\mathcal{I}^{(m)}\\ \lambda\in\mathbb{F}}} \|x - \lambda \mathbf{1}_I\|.$$

在这种情况下，最小常数记为 $\mathrm{P}_{g\,\tau,}^{con}$。当 $\tau = 1$ 时，我们称 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是常系数多项式的连续贪婪（CGPCC）。

为证明连续贪婪基与 CGPCC 基之间的等价性，以及它们用众所周知的性质刻画的等价性，我们将使用以下准贪婪性的等价变体。

定义 3.3. 若基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 满足某个常数 $\mathrm{C} \geqslant 1$ 下的 C-抑制 τ-拟贪婪性，则称其为 C-抑制 τ-拟贪婪基。

$$\|x - G_m^\tau(x)\| \leqslant \mathbf{C}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall G_m^\tau(x).$$

在这种情况下，最小常数记为 $\mathrm{C}_{\ell,\tau}$。当 $\tau = 1$ 时，我们就简称基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 为抑制拟贪婪基。

注3.4. 根据 Konyagin 和 Temlyakov 的一项结果 [KT02],，若基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 对某个 τ 和 C 满足 C-抑制τ-拟贪婪性，则对所有$\tau' \in (0,1]$，它都满足 (D, τ')-抑制 τ'-拟贪婪性，其中 D 可能依赖于 τ'。

我们还需要截断准贪婪基这一概念，它自然地出现在对贪婪算法 [AABBL21, AABW21, DKKT03] 的研究中。

定义 3.5. 若存在某个常数 $\mathrm{C} \geqslant 1$，使得$\boldsymbol{e}_n$基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是 C-截断准贪婪的，则称之为 C-截断准贪婪基。

$$\min_{n\in A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)|\|1_{\varepsilon(x),A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall A \in G(x).$$

上述最小常数记为 C_{tq}。

注 3.6. [DKKT03, 引理 2.2] 和 [AABW21, 定理 4.13]证明了拟贪婪基是截断准贪婪的。

现在我们陈述第一个主要结果。

定理 3.7. 设 $\mathcal{B}$ 是一个基。以下结论成立

i) 若 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathrm{C}_{g\,\tau,}^{con}, \tau)$-连续贪婪的，则它是 $(\mathrm{C}_{g\,\tau,}^{con})^2$-超民主的，且是 $(\mathrm{C}_{g\,\tau,}^{con}, \tau)$-CGPCC。ii) 若 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathrm{P}_{g\,\tau,}^{con}, \tau)$-CGPCC，则它是 $\mathrm{P}_{g\,\tau,}^{con}$-抑制 τ-拟贪婪的、$(\mathrm{P}_{g\,\tau,}^{con})^2$-民主的，且是 $\mathrm{P}_{g\,\tau,}^{con}$-Schauder 基。iii) 若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathrm{C}_{\ell,\,\tau}$-抑制 τ-拟贪婪的、K_b-Schauder 基、C_{tq}-截断拟贪婪的，且是 Δ_{sd}-超民主的，则 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathrm{C}_{g\,\tau,}^{con}, \tau)$- 连续贪婪的，且

$$\mathbf{C}_{g,\tau}^{con} \leqslant \left((1 + 2\mathbf{K}_b^p)\left(2 + \mathbf{C}_{\ell,\tau}^p\right) + \left(\tau^{-1} A_p \Delta_{sd} \mathbf{C}_{tq}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在 $p = 1$ 的情况下，我们还有

$$\mathbf{C}_{g,\tau}^{con} \leqslant (1 + 2\mathbf{K}_b)(2 + \mathbf{C}_{\ell,\tau}) + 2\tau^{-1}\Delta_{sd}\mathbf{C}_{\ell,1}.$$

推论 3.8. 设 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是一个 Schauder 基。那么 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 几乎贪婪，当且仅当它是连续贪婪的。

证明。若 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是几乎贪婪的，则定理 2.6 表明 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是拟贪婪且超民主的。现在应用注 3.6 和定理 3.7 的 iii)。反过来，若 $(\boldsymbol{e}_n)_n$是连续贪婪的，则由定理 3.7 的 i) 和 ii)，$(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是超民主且拟贪婪的。应用定理 2.6 即完成证明。□

注 3.9。请注意，任何条件几乎贪婪 Schauder 基都是连续贪婪的，但不是贪婪的；文献中可以找到许多这类基的例子（参见[AABBL21、AK16、DKK03、KT99、T08、T11、W00], 等。）

在证明定理 3.7 之前，我们需要一个辅助引理，其中用到以下来自 [AABW21] 的定义。

- 对于 $0 < p \leqslant 1$，令 $A_p := (2^p - 1)^{-\frac{1}{p}}$ 以及 $B_p = (2\kappa)^{\frac{1}{p}} A_p$，其中若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则 $\kappa = 1$；若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则 $\kappa = 2$。
- 对于 $u > 0$，令

$$\eta_p(u) := \min_{0<t<1} (1 - t^p)^{-\frac{1}{p}} (1 - (1 + A_p^{-1} u^{-1} t)^{-p})^{-\frac{1}{p}}.$$

引理 3.10。若 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是 C-抑制准贪婪的，则它是 C_p-截断准贪婪的，其中

$$\mathbf{C}_p := \begin{cases} 2\mathbf{C} & \text{if } p = 1; \\ \mathbf{C}^2 \eta_p(\mathbf{C}) & \text{if } 0 < p < 1. \end{cases}$$

证明。$0 < p < 1$ 的情形可由 [AABW21，定理 4.13 (i)] 得出。$p = 1$的情形可由 [BBG17，引理 2.3] 得出。下面我们给出另一种证明，对于 $p = 1$ 的情形，该证明仅涉及基变换，而不涉及积分。若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则结论可由 [DKKT03，引理 2.2] 的证明得出。设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$。取一个具有有限支撑的 $x \in \mathbb{X}$，$m \in \mathbb{N}$，以及 $A \in G(x, m, 1)$。

选取符号 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得若 $\boldsymbol{f}_n^* = \varepsilon_n^{-1} \boldsymbol{e}_n^*$，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\boldsymbol{f}_n^*(x) \geqslant 0$。令 $\boldsymbol{f}_n = \varepsilon_n \boldsymbol{e}_n$（$n \in \mathbb{N}$），并令 $\mathbb{Y}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的巴拿赫空间，它是以下空间的完备化：

$$\mathbb{Z} := \left\{ \sum_{n=1}^{k} a_n \boldsymbol{f}_n : k \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

其范数为 $\mathbb{X}$ 的范数在 $\mathbb{Z}$ 上的限制。对每个 $z \in \mathbb{Z}$，令$\delta(z) := (\operatorname{sgn}(\boldsymbol{f}_n^*(z)))_n$。

显然，我们可以假设 $A \subset \operatorname{supp}(x)$。将每个 $\boldsymbol{f}_n^*$ 与其在$\mathbb{Z}^*$中的对应元素等同。由于 $x \in \mathbb{Z}$ 且 $(\boldsymbol{f}_n)_n$ 也是 C-抑制准贪婪的，对$\mathbb{F} = \mathbb{R}$应用该结果，我们得到

$$\begin{aligned} \min_{n\in A} |e_n^*(x)| \|\mathbf{1}_{\varepsilon(x),A}\|_{\mathbb{X}} &= \min_{n\in A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)| \left\| \sum_{n\in A} \frac{\boldsymbol{e}_n^*(x)}{|\boldsymbol{e}_n^*(x)|} \boldsymbol{e}_n \right\|_{\mathbb{X}} \\ &= \min_{n\in A} |\boldsymbol{f}_n^*(x)| \left\| \sum_{n\in A} \frac{\delta_n(x)}{\varepsilon_n} \boldsymbol{f}_n \right\|_{\mathbb{Z}} = \min_{n\in A} |\boldsymbol{f}_n^*(x)| \|\mathbf{1}_{\delta',A}\|_{\mathbb{Z}} \\ &\leqslant 2\mathbf{C}\|x\|_{\mathbb{Z}} = 2\mathbf{C}\|x\|_{\mathbb{X}}, \end{aligned}$$

其中，对所有 $n \in A$，$\delta_n' = \delta_n(x)/\varepsilon_n \in \mathbb{R}$。对无限支撑的 x，结论由标准的稠密性论证得出。□

定理 3.7 的证明。i) 我们只需证明超民主性：设 $I_1 \in \mathcal{I}$ 为一个包含 A 的区间，并选取一个满足 $|I_2| = |B|$的区间 $I_2 > I_1 \cup B$。我们

have

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| &= \|(\mathbf{1}_{\varepsilon,A}+\mathbf{1}_{I_2}+\mathbf{1}_{I_1\setminus A})-(\mathbf{1}_{I_2}+\mathbf{1}_{I_1\setminus A})\|\\ &\leqslant \mathbf{C}_{g,\tau}^{con}\|(\mathbf{1}_{\varepsilon,A}+\mathbf{1}_{I_2}+\mathbf{1}_{I_1\setminus A})-(\mathbf{1}_{\varepsilon,A}+\mathbf{1}_{I_1\setminus A})\|\\ &= \mathbf{C}_{g,\tau}^{con}\|1_{I_2}\|,\end{aligned}$$

and

$$\|\mathbf{1}_{I_2}\| = \|(\mathbf{1}_{I_2}+\mathbf{1}_{\delta,B})-\mathbf{1}_{\delta,B}\| \leqslant \mathbf{C}_{g,\tau}^{con}\|\mathbf{1}_{\delta,B}\|.$$

现在，结合上述估计即可得到结论。

ii) 由于对所有 $x\in\mathbb{X}$ 都有 $\sigma_m^{con}(x)\leqslant\|x\|$，$(e_n)_n$ 是 $\mathrm{P}_{g\,\tau}^{con,}$ -抑制的 τ-拟贪婪。民主性的证明与 i) 中超民主性的证明相同，但去掉符号。为证明 Schauder条件，取具有有限支撑的 $x\in\mathbb{X}\setminus\{0\}$ 和 $m\in\mathbb{N}$。令 $I:=\{1,\dots,m\}$，并令 $n:=\max(\mathrm{supp}(x))$。如果 $n\leqslant m$，则 $P_I(x)=x$，无需再证明。否则，令 $I_2:=\{m+1,\dots,n\}$，并选取充分大的 $\alpha>0$，使得若 $y=x+\alpha\mathbf{1}_{I_2}$，则 $I_2\in G(y,|I_2|,\tau)$。我们有

$$\|P_I(x)\| = \|y-P_{I_2}(y)\| \leqslant \mathbf{P}_{g,\tau}^{con}\|y-\alpha\mathbf{1}_{I_2}\| = \mathbf{P}_{g,\tau}^{con}\|x\|.$$

iii) 令 $x\in\mathbb{X}$, $m\in\mathbb{N}$, $\Lambda\in G(x,m,\tau)$，以及 $I\in\mathcal{I}^{(m)}$。给定标量 $(a_n)_{n\in I}$，令 $y:=x-\sum_{n\in I}a_ne_n$。我们有

$$\|x-P_\Lambda(x)\|^p \leqslant \|x-P_I(x)\|^p+\|P_{I\setminus\Lambda}(x)\|^p+\|P_{\Lambda\setminus I}(x)\|^p. \tag{3.1}$$

一方面，由于 $(e_n)_n$ 是 Schauder，

$$\|x-P_I(x)\|^p = \|y-P_I(y)\|^p \leqslant (1+2\mathbf{K}_b^p)\,\|y\|^p\,. \tag{3.2}$$

另一方面，由于 $\Lambda\setminus I$是 τ-弱贪婪集 $x-P_I(x)$，我们知道

$$\|P_{\Lambda\setminus I}(x)\|^p = \|P_{\Lambda\setminus I}(x-P_I(x))\|^p \leqslant (\mathbf{C}_{\ell,\tau}^p+1)\|x-P_I(x)\|^p. \tag{3.3}$$

最后，令 $A=\{n:\,|e_n^*(y)|\geqslant\min_{n\in\Lambda\setminus I}|e_n^*(y)|\}$。我们有

$$\begin{aligned}\|P_{I\setminus\Lambda}(x)\| &\leqslant A_p\max_{n\in I\setminus\Lambda}|e_n^*(x)|\sup_\delta\|\mathbf{1}_{\delta,(I\setminus\Lambda)}\| \leqslant A_p\tau^{-1}\min_{n\in\Lambda\setminus I}|e_n^*(y)|\sup_\delta\|\mathbf{1}_{\delta,(I\setminus\Lambda)}\|\\ &\leqslant \tau^{-1}A_p\Delta_{sd}\min_{n\in\Lambda\setminus I}|e_n^*(y)|\|\mathbf{1}_{\varepsilon(y),A}\| = \tau^{-1}A_p\Delta_{sd}\min_{n\in A}|e_n^*(y)|\|\mathbf{1}_{\varepsilon(y),A}\|\\ &\leqslant \tau^{-1}A_p\Delta_{sd}\mathbf{C}_{tq}\|y\| \text{ by Lemma 3.10.}\end{aligned} \tag{3.4}$$

由 (3.1)、(3.2)、(3.3) 和 (3.4)，我们得到

$$\|x-P_\Lambda(x)\| \leqslant \left((1+2\mathbf{K}_b^p)\left(2+\mathbf{C}_{\ell,\tau}^p\right)+\left(\tau^{-1}A_p\Delta_{sd}\mathbf{C}_{tq}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\|y\|.$$

因此，若 $p=1$，由引理 3.10 可得

$$\|x-P_\Lambda(x)\| \leqslant \left((1+2\mathbf{K}_b)\,(2+\mathbf{C}_{\ell,\tau})+2\tau^{-1}\Delta_{sd}\mathbf{C}_{\ell,1}\right)\|y\|.$$

由于 $I\in\mathcal{I}$ 和 $(a_n)_{n\in I}$ 是任意的，因此得证。 □

注3.11. 定理 3.7 和注3.4 表明，如果 $\mathcal{B}$ 对某个 $\tau\in(0,1]$ 且某个 $\mathsf{C}\geqslant1$）是 (C, τ)-连续贪婪的，那么对于所有 $\tau'\in(0,1]$，以及某个可能取决于 τ' 的 D，$(e_n)_n$ 都是 (D, τ')-连续贪婪的。

4. 涉及性质（A, τ）的连续贪婪基与1-连续贪婪基的刻画

除了定理 2.4 和 2.6 的经典刻画之外，贪婪基和几乎贪婪基还可以分别刻画为具有性质（A）且无条件的基，或具有性质（A）且拟贪婪的基（见 [DKOSZ14，定理 2] 和 [BDKOW19，定理 4.1 和 4.3]）。类似地，我们将使用 [C22] 中引入的性质（A）的扩展，给出连续贪婪基的另一种刻画。对于集合族 $(A_i)_{i\in I}$，记 $\sqcup_{i\in I} A_i$，意指这些 A_i 两两不相交。

定义 4.1. 若存在常数 $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\tau) \geqslant 1$ 使得

$$\|\tau x + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|,$$

对于所有满足 $\|x\|_\infty \leqslant 1/\tau$ 的 $x \in \mathbb{X}$，对于所有满足 $|A| \leqslant |B|$ 且 $\mathrm{supp}(x) \sqcup A \sqcup B$ 的有限集 $A, B \subset \mathbb{N}$，以及所有符号 ε, δ，若 $\tau = 1$，则称 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 具有性质（A）。此外，若常数 C 对所有 $\tau \in (0, 1]$，都一致，则称 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 具有一致性质（A）。

我们陈述一个针对巴拿赫空间证明的结果，但该结果很容易推广到p-巴拿赫空间。

命题 4.2. *[命题 5.4 在 [C22] 中针对 p-巴拿赫空间的重述]* 若一个拟贪婪基对某个 $\tau \in (0, 1]$ 具有性质（A, τ），则它具有一致性质（A）。

推论 4.3. 设 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是一个 p-巴拿赫空间的基。以下条件等价：

i) $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是连续贪婪的。ii) $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是拟贪婪的、Schauder 的且超民主的。iii) $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 既是拟贪婪的又是 Schauder 的，并且具有一致性质（A）。iv) $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 既是 Schauder 的又是拟贪婪的，并且对（某个）所有$\tau \in (0, 1]$具有性质（A, τ）。

证明。i) $\iff$ ii) 由定理 3.7 得出，而 iii) $\implies$ iv) 是显然的。此外，命题 4.2 表明 iv) $\implies$ iii)。

为证明 ii) $\implies$ iii)，我们首先利用定理 2.6 得出，满足 ii) 的基是几乎贪婪的。根据 [DKOSZ14，定理 2]，，该基具有性质（A, 1）。现在利用命题 4.2 得出，该基具有一致性质（A）。

最后，iii) $\implies$ ii) 显然成立，因为性质（A）蕴含超民主性，例如参见 [BDKOW19，命题 3.8]。□

在巴拿赫空间中，文献已研究过 1-贪婪、1-几乎贪婪和 1-拟贪婪基 [AA16、AA17、AW06]。接下来，我们要为 1-连续贪婪基寻找类似的刻画。首先，我们需要一个关于基是 Schauder 基的等价刻画。

定义 4.4. 若存在常数 $\mathbf{C} \geqslant 1$，使得基 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 满足以下条件，则称其为连续无条件基：

$$\|x - P_I(x)\| \leqslant \mathbf{C}\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall I \in \mathcal{I}.$$

在这种情况下，我们称 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是 C-抑制连续无条件的。

备注 4.5。容易看出，一个基是连续无条件的，当且仅当它是 Schauder 基。此外，1-抑制连续无条件基是双调的：事实上，给定 $x \in \mathbb{X}$ 及其有限支撑 n、$m \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}\|S_{n+m}(x) - S_n(x)\| &= \|S_{n+m}(x) - S_n(S_{n+m}(x))\| \leqslant \|S_{n+m}(x)\| \\ &= \|x - P_I(x)\| \leqslant \|x\|,\end{aligned}$$

其中，当 $S_{n+m}(x) \neq x$ 时，$I = \{n+m+1, \ldots, \max(\mathrm{supp}(x))\}$。另一方面，双调基不一定是 1-抑制连续无条件的。考虑下面的例子。设 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是空间 $\mathbb{X}$ 的典范基，而该空间是在以下范数下对 c_{00} 完备化得到的：对于 $x = (x_1, x_2, \ldots)$，

$$\|x\| = \sup_{M \geqslant N \geqslant 1} \left| \sum_{n=N}^{M} x_n \right|.$$

那么该基是双调的，但不是 1-抑制连续无条件的。要看出这一点，只需注意到 $\|(3, -1, 3, 0, 0, \ldots)\| = 5$，而 $\|(3, 0, 3, 0, 0, \ldots)\| = 6$。

我们的下一个结果是 [AW06 定理 3.4] 中关于贪婪基的结果在连续贪婪基情形下的对应结论。该结果利用 1-性质 (A) 对巴拿赫空间中的 1-连续贪婪基进行刻画，并以 1-抑制连续无条件性取代 1-抑制无条件性。

Theo定理 4.6. 设 $\mathcal{B}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基。以下条件等价：

i) $\mathcal{B}$ 是 1-连续贪婪的。ii) $\mathcal{B}$ 是 1-CGPCC。iii) $\mathcal{B}$ 具有 1-性质 (A)，且是 1-抑制连续无条件的。

为了证明定理 4.6，我们首先需要一个有用的引理。

引理 4.7. 如果基 $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有 C-性质 (A)，那么

$$\|x\| \leqslant A_p \mathbf{C} \|x - P_A(x) + \mathbf{1}_{\varepsilon B}\|, \tag{4.1}$$

对于所有满足 $\|x\|_\infty \leqslant 1$ 的 $x \in \mathbb{X}$，对于所有满足 $|A| \leqslant |B|$ 且 $(\mathrm{supp}(x - P_A(x)) \cup A) \sqcup B$ 的有限集 $A, B \subset \mathbb{N}$，以及对于所有 $\varepsilon, \delta \in \mathcal{E}$。

证明。令 x、A、B、ε 如（4.1）中所选。由 [AABW21，推论 2.3] 以及 C-性质（A），我们有

$$\begin{aligned}\|x\| = \left\| x - P_A(x) + \sum_{n\in A} \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n \right\| &\leqslant A_p \sup_\delta \|x - P_A(x) + \mathbf{1}_{\delta A}\| \\ &\leqslant A_p \mathbf{C} \|x - P_A(x) + \mathbf{1}_{\varepsilon, B}\|.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

命题 4.8。 [AA17，命题 2.5] 设 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一组基。若 $(\boldsymbol{e}_n)_n$ 具有 1-性质 (A)，则该基是 1-抑制拟贪婪的。

定理 4.6 的证明。由定义可直接得到 i) $\Longrightarrow$ ii)。

下面证明 ii) $\Longrightarrow$ iii)。固定 $x \in \mathbb{X}$，满足 $\|x\|_\infty \leqslant 1$，并选取互不相同的自然数 $i, j \notin \mathrm{supp}(x)$ 以及符号 $\varepsilon_j, \varepsilon_i$。我们有

$$\|x + \varepsilon_i \boldsymbol{e}_i\| = \|(x + \varepsilon_i \boldsymbol{e}_i + \varepsilon_j \boldsymbol{e}_j) - \varepsilon_j \boldsymbol{e}_j\| \leqslant \|(x + \varepsilon_i \boldsymbol{e}_i + \varepsilon_j \boldsymbol{e}_j) - \varepsilon_i \boldsymbol{e}_i\| = \|x + \varepsilon_j \boldsymbol{e}_j\|.$$

由归纳法可知，$(\boldsymbol{e}_n)_n$ 具有 1-性质 (A)。为证明该基是 1-抑制连续无条件的，令 $x \in \mathbb{X}$ 和 $I \in \mathcal{I}$。选取充分大的 $\alpha > 0$，使得若$y = \sum_{n\in I}(\alpha + \boldsymbol{e}_n^*(x))\boldsymbol{e}_n + \sum_{n\notin I} \boldsymbol{e}_n^*(x)\boldsymbol{e}_n$，则 I 是 y的贪婪和。我们有

$$\|x - P_I(x)\| \;=\; \|y - P_I(y)\| \;\leqslant\; \mathcal{D}_{|I|}^{con}(y) \;\leqslant\; \|y - \alpha \mathbf{1}_I\| \;=\; \|x\|.$$

因此，$(\boldsymbol{e}_n)_n$ 是1-抑制连续无条件的。

最后，我们证明 iii) $\Longrightarrow$ i)。令 $x \in \mathbb{X}, m \in \mathbb{N}, \Lambda \in G(x, m, 1)$，且 $I \in \mathcal{I}^{(m)}$。任意选取 $(a_n)_{n\in I} \subset \mathbb{F}$。我们需要证明

$$\|x - P_\Lambda(x)\| \;\leqslant\; \left\| x - \sum_{n\in I} a_n \boldsymbol{e}_n \right\|.$$

令 $\alpha := \min_{n\in\Lambda} |\boldsymbol{e}_n^*(x)|$，且 $\varepsilon = (\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_n^*(x)))$。于是 $\|x - P_\Lambda(x)\|_\infty \leqslant \alpha$，因此我们有

$$\begin{aligned}
&\|x - P_\Lambda(x)\| \\
&\leqslant \|x - P_\Lambda(x) - P_{I\setminus\Lambda}(x) + \alpha \mathbf{1}_{\varepsilon(\Lambda\setminus I)}\| \text{ by Lemma 4.7} \\
&= \|x - P_{\Lambda\cup I}(x) + \alpha \mathbf{1}_{\varepsilon(\Lambda\setminus I)}\| \\
&\leqslant \|x - P_{\Lambda\cup I}(x) + P_{\Lambda\setminus I}(x)\| \text{ by Proposition 4.8 and [BBG17, Lemma 2.5]} \\
&= \|x - P_I(x)\| \;\leqslant\; \left\| x - \sum_{n\in I} a_n \boldsymbol{e}_n \right\| \text{ by 1-consecutive unconditionality.}
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

5. 关于性质 (A, τ) 的更多内容

在定理 4.6 中，等价关系涉及 1-性质 (A)，但根据推论 4.3，我们知道该基对所有 $0 < \tau < 1$ 也具有性质 (A, τ)。因此，自然会问，对于所有此类 τ，该常数是否仍为 1。下面的结果肯定地回答了这个问题：事实上，要从 1-性质 (A) 推出 1- 性质 (A, τ)，我们甚至不需要假设 1- 连续贪婪性。

命题 5.1. 设 $\mathcal{B}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基。若 $\mathcal{B}$ 具有 1-性质 (A)，则

$$\|u + y\| \;\leqslant\; \|au + z\| \tag{5.1}$$

对每个满足 $|a| \geqslant 1$ 的 $a \in \mathbb{F}$，以及满足以下条件的每个 u、y、$z \in \mathbb{X}$：

- $\operatorname{supp}(u) \cap (\operatorname{supp}(y) \cup \operatorname{supp}(z)) = \emptyset$.
- $|\operatorname{supp}(y)| \leqslant |\operatorname{supp}(z)| < \infty$.
- $\|u + y\|_\infty \leqslant 1$。
- $\min_{n\in\operatorname{supp}(z)} |\boldsymbol{e}_n^*(z)| \geqslant 1$.

特别地，

$$\|\tau x + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \;\leqslant\; \|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\| \tag{5.2}$$

对于所有 $0 < \tau \leqslant 1$，对于所有满足 $\|x\|_\infty \leqslant \tau^{-1}$ 的 $x \in \mathbb{X}$，对于所有满足 $|A| \leqslant |B|$ 且 $\operatorname{supp}(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$ 的有限集 A、$B \subset \mathbb{N}$，以及对于所有 ε、$\delta \in \mathcal{E}$。

证明。首先，我们证明 (5.1)：选取 $\theta \in \mathbb{F}$，使得 $|\theta| = 1$，从而 $|a| = a\theta$，并令 $z_1 := \theta z$, $A := \operatorname{supp}(y)$，以及 $B := \operatorname{supp}(z_1)$。由凸性，存在 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，使得

$$\|u + y\| \;\leqslant\; \|u + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|. \tag{5.3}$$

对所有 $n \in B$，令 $\delta_n := \operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_n^*(z_1))$。由 1-性质 (A)，

$$\|u + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \|u + \mathbf{1}_{\delta,B}\|. \tag{5.4}$$

由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^* \in \mathbb{X}^*$，使得 $\|x^*\| = 1$，于是

$$x^*(u + \mathbf{1}_{\delta,B}) = \|u + \mathbf{1}_{\delta,B}\|.$$

对每个 $n \in B$，取 δ_n'，使得 $|\delta_n'| = 1$，从而 $\delta_n'\delta_n x^*(\boldsymbol{e}_n) = |x^*(\boldsymbol{e}_n)|$，并选取 $\gamma \in \mathbb{F}$，使得 $|\gamma| = 1$，从而 $\gamma x^*(u) = |x^*(u)|$。我们有

$$\begin{aligned} x^*(u) + \sum_{n\in B} \delta_n x^*(\boldsymbol{e}_n) &= \|u + \mathbf{1}_{\delta,B}\| = \|\gamma u + \mathbf{1}_{\delta'\delta,B}\| \geqslant |x^*(\gamma u + \mathbf{1}_{\delta'\delta,B})| \\ &= |x^*(u)| + \sum_{n\in B} |x^*(\boldsymbol{e}_n)|, \end{aligned}$$

其中第二个等式由 1-性质 (A) 得出。因此，对所有 $n \in B$，$x^*(u) = |x^*(u)|$ 且 $\delta_n x^*(\boldsymbol{e}_n) = |x^*(\boldsymbol{e}_n)|$。于是，

$$\begin{aligned} \|au + z\| &= \||a|u + z_1\| \geqslant |x^*(|a|u + z_1)| \\ &= \left| |a|x^*(u) + \sum_{n\in B} \boldsymbol{e}_n^*(z_1)x^*(\boldsymbol{e}_n) \right| = |a||x^*(u)| + \sum_{n\in B} |\boldsymbol{e}_n^*(z_1)||x^*(\boldsymbol{e}_n)| \\ &\geqslant |x^*(u)| + \sum_{n\in B} |x^*(\boldsymbol{e}_n)| = \|u + \mathbf{1}_{\delta,B}\|. \end{aligned}$$

将上述结果与 (5.3) 和 (5.4) 结合，可得 (5.1)。

最后，通过取 $u = \tau x$、$a = \tau^{-1}$、$y = \mathbf{1}_{\varepsilon、A}$ 以及 $z = \mathbf{1}_{\delta、B}$，由 (5.1) 可得 (5.2)。□

接下来，我们回答 [C22，第 7 个问题。3], 该问题询问：对于某个 $\tau(\tau \in , 0, 1]$ 若其具有性质 (A, t)，是否对所有 $t \in (0, 1]$ 均具有性质 (A, t)（常数可能不同）。证明利用了 [AAB22], 中的一项近期结果，该结果揭示了所谓的最大系数拟贪婪与近似无条件性之间令人意外的等价关系。我们回顾这些定义以及 [AAB22]中的一个主要结果。

定义 5.2。 [AABW21，定义 4。6] 在 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的一个基 $\mathcal{B}$，如果存在常数 C $\geqslant 1$ 使得，则称其为最大系数拟贪婪（QGLC）基。

$$\|1_{\varepsilon A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x + 1_{\varepsilon A}\|,$$

对于任意有限的 $A \subset \mathbb{N}$、符号 ε，以及满足 $\|x\|_\infty \leqslant 1$ 且 $\operatorname{supp}(x) \sqcup A$ 的 $x \in \mathbb{X}$。

定义 5.3. [E78]： p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的基 $\mathcal{B}$ 是近似无条件的，如果对于每个 $t \in (0, 1],)$，都存在一个常数 $\phi(t) \geqslant 1$，使得

$$\|P_A(x)\| \leqslant \phi(t)\|x\|,$$

对所有满足 $\|x\|_\infty \leqslant 1$ 的 $x \in \mathbb{X}$，以及满足 $\min_{n\in A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)| \geqslant t$ 的 $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$，

定理 5.4. [AAB22，定理 2.6]: p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的基 $\mathcal{B}$ 是最大系数拟贪婪，当且仅当它是近似无条件的。

我们现在可以证明本节的第二个主要结果了。

命题 5.5. 设 $0 < \tau$、$p \leqslant 1$ 和 $\mathcal{B}$ 是 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基。若 $\mathcal{B}$ 具有 C-性质（A，τ），则对每个 $0 < t \leqslant 1$，存在 D(t) $\geqslant 1$，使得 $\mathcal{B}$ 具有 D(t)-性质（A，t）。

证明。由 [C22，命题 5.3]，$\mathcal{B}$ 具有（C/t）-性质（A）。因此，由 [AABW21，命题 5.3]，$\mathcal{B}$ 是最大系数拟贪婪的。由定理 5.4，$\mathcal{B}$ 是近似无条件的。设 $\phi : (0, 1] \to [1, \infty)$ 为其近似无条件性函数，并固定满足性质（A, t）定义中条件的 A、B、ε、δ 和 x。我们有

$$\begin{aligned}\|tx\|^p \leqslant \|tx + t\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p + \|t\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p &\leqslant \|tx + t\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p + \phi^p(t)\|t\mathbf{1}_{\delta,B} + tx\|^p \\ &= t^p(1 + \phi^p(t))\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|^p.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \frac{\mathbf{C}}{\tau t}\|t\mathbf{1}_{\delta,B}\| \leqslant \frac{\mathbf{C}}{\tau t}\phi(t)\|t\mathbf{1}_{\delta,B} + tx\| = \frac{\mathbf{C}}{\tau}\phi(t)\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|.$$

因此，p-凸性给出

$$\|tx + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \left(t^p + t^p\phi^p(t) + \frac{\mathbf{C}^p}{\tau^p}\phi^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|,$$

证明完毕。 □

我们以一条关于一致性质（A）的观察结束本节。我们已经考虑过一致界为 1 且空间局部凸的情形，但尚未考虑一般情形。事实证明，一致性质（A）等价于从性质（A）中去掉对 ℓ_∞ 的范数及 x 的限制后所得到的性质。更准确地说，我们有以下结果。

Lem引理 5.6. 设 $\mathcal{B}$ 是 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基。以下条件等价。

i) $\mathcal{B}$ 具有一致性质（A）。ii) 存在常数 C $\geqslant 1$，使得

$$\|x + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|,$$

对所有 $x \in \mathbb{X}$ 以及所有满足 $|A| \leqslant |B|$ 且 supp(x) $\sqcup A \sqcup B$ 的有限集 $A, B \subset \mathbb{N}$，并且对所有符号 ε, δ。

证明。i) $\Longrightarrow$ ii) 令 C $\geqslant 1$ 为性质 (A,τ) 常数的一致上界。假设 $\|x\|_\infty > 1$ 并取 $\tau < 1/\|x\|_\infty$。于是

$$\|\tau x + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|.$$

令 τ 趋于零，我们得到 $\|\mathbf{1}_{\varepsilon,\ A}\| \leqslant$ C$\|x + \mathbf{1}_{\delta,\ B}\|$。因此，

$$\begin{aligned}\|x + \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p &\leqslant \|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|^p + \|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p + \|\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p \\ &\leqslant \|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|^p + \|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p + \mathbf{C}^p\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p \\ &\leqslant (1 + \mathbf{C}^p + \mathbf{C}^{2p})\|x + \mathbf{1}_{\delta,B}\|^p.\end{aligned}$$

ii) $\Longrightarrow$ i)。固定如定义 4.1 中的 $x, A, B, \varepsilon, \delta$。若 $\|\tau x\| \geqslant 2^{\frac{1}{p}}C\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|$，则

$$\|\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p \leqslant \mathbf{C}^p\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p \leqslant \frac{\|\tau x\|^p}{2},$$

so

$$\|x+\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p \geqslant \|x\|^p - \|\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p \geqslant \frac{\|x\|^p}{2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|\tau x+\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p &\leqslant \|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p + \|\tau x\|^p \\ &\leqslant \tau^p\left(1+\frac{1}{2\mathbf{C}^p}\right)\|x\|^p \leqslant 2\tau^p\left(1+\frac{1}{2\mathbf{C}^p}\right)\|x+\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p.\end{aligned}$$

另一方面，如果 $\|\tau x\| \leqslant 2^{\frac{1}{p}}\mathbf{C}\|\mathbf{1}_{\varepsilon,\ A}\|$，那么

$$\begin{aligned}\|\tau x+\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p &\leqslant \|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p + \|\tau x\|^p \leqslant (2\mathbf{C}^p+1)\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p \\ &\leqslant (2\mathbf{C}^p+1)\,2^{1-p}\max\{\|x+\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p, \|x-\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\|^p\} \\ &\leqslant (2\mathbf{C}^p+1)\,2^{1-p}\mathbf{C}^p\|x+\mathbf{1}_{\delta,B}\|^p.\end{aligned}$$

比较上界并合并后，我们得到

$$\|\tau x+\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant (2\mathbf{C}^p+1)^{\frac{1}{p}}\,2^{\frac{1}{p}-1}\mathbf{C}\|x+\mathbf{1}_{\delta,B}\|.$$

□

6. 关于挤压对称基

在定义 3.2 中，我们将不等式右侧的逼近元限制为相对于某个基具有常系数的向量，而定理 3.7 表明，由此得到的定义等价于定义 3.1。此前，[BBC22、BB17], 研究过这类逼近，并给出了对一些常见类贪婪性质的刻画。鉴于这些结果，我们想知道，如果将不等式两侧的逼近都限制为这类向量，会产生什么结果。我们是否仍能得到一种常见的类贪婪性质？更确切地说，我们研究若干条件，在这些条件下存在常数 $\mathbf{C} > 0$ 使得

$$\|x-\lambda\mathbf{1}_A\| \leqslant \mathbf{C}\|x-\lambda\mathbf{1}_B\| \tag{6.1}$$

对于每个 $x \in \mathbb{X}$、$A \in G(x)$ 以及某些集合 B（将在后文说明）。事实证明，对于 Schauder 基（或局部凸空间中的 Markushevich 基），我们可以利用（6.1）刻画挤压对称基；这类基介于具有等价基本函数的对称基之间（见 [AABBL21、AAB21、AABW21]）。就我们的目的而言，使用下面这个等价表述十分方便；它由 [AABW21，第 9.4 命题和第 9.14] 定理推出。

引理 6.1. p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个基 $\mathcal{B}$ 是挤压对称基，当且仅当存在一个 $\mathbf{C} > 0$ 使得

$$\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x\| \tag{6.2}$$

对于所有有限的 $A \subset \mathbb{N}$ finite、所有 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 以及所有满足下式的 $x \in \mathbb{X}$

$$|\{n \in \mathbb{N} : |e_n^*(x)| \geqslant 1\}| \geqslant |A|.$$

使（6.2）成立的最小 $\mathbf{C}$ 记为 $\mathbf{C}^{sqs}$。

为了证明我们的结果，我们需要以下引理，它由 [BL21，命题 3.11] 推出。

引理 6.2. 设 $\mathcal{B}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的 Markushevich 基。存在一个 $\mathbf{M} > 0$，使得对于每个有限集 $F \subset \mathbb{N}$ 和每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $E \subset \mathbb{N}$，使得 $E > F$、$|E| = m$，并且

$$\|x\| \leqslant \mathbf{M}\|x + y\|, \forall x \in [\boldsymbol{e}_n : n \in F], \forall y \in [\boldsymbol{e}_n : n \in E]. \tag{6.3}$$

现在，我们可以用一维子空间逼近来刻画挤压对称 Schauder 基。此外，对于 $p = 1$，我们还给出了一个同样适用于 Markushevich 基的刻画。

命题 6.3. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的基。考虑以下命题。

i) $\mathcal{B}$ 是挤压对称的。

ii) 存在 $\mathbf{C} > 0$，使得

$$\begin{aligned}&\|x + \lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}\|x + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B}\|,\\ &\forall x \in \mathbb{X}, A \in G(x), B \subset \mathbb{N} : |B| \geqslant |A|, |B \cap \operatorname{supp}(x)| \leqslant |A|,\\ &\forall \varepsilon, \delta \in \mathcal{E} : \varepsilon_n = \delta_n, \forall n \in A \cap B,\\ &\forall \lambda \in \mathbb{F}.\end{aligned}$$

iii) 存在 $\mathbf{C} > 0$，使得，

$$\begin{aligned}&\|x - \mathbf{1}_A\| \leqslant \mathbf{C}\|x - \mathbf{1}_{\varepsilon,B}\|\\ &\forall x \in \mathbb{X}, A \in G(x), B \subset \operatorname{supp}(x), |B| = |A|, A \cap B = \emptyset, \varepsilon \in \mathcal{E}.\end{aligned}$$

以下蕴含关系成立：i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii)。此外，若 $p = 1$ 且 $\mathcal{B}$ 是 Markushevich 基，或者 $0 < p \leqslant 1$ 且 $\mathcal{B}$ 是 Schauder 基，则 iii) $\Longrightarrow$ i)。

证明。i) $\Longrightarrow$ ii)：令 $D := A \cap B$, $A_1 := A \setminus B$, $B_1 := B \setminus A$, $y := x + \lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,\ D}$，并令 $a := \min_{n \in A} |\boldsymbol{e}_n^*(x)|$。我们将证明

$$\|y + \lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,A_1}\| \leqslant (1 + 2^{p+1}\mathbf{C}_{sqs}^p)^{\frac{1}{p}}\|y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1}\|. \tag{6.4}$$

为此，我们假设 $\lambda \neq 0$，并考虑以下两种情形。

情形 1：若 $|\lambda| > 2a$，则

$$|\boldsymbol{e}_n^*(y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1})| \geqslant |\lambda| - a > \frac{|\lambda|}{2}, \forall n \in B_1.$$

因此，

$$|\{n \in \mathbb{N} : |\boldsymbol{e}_n^*(y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1})| \geqslant |\lambda|/2\}| \geqslant |B_1| \geqslant |A_1|.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|y + \lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,A_1}\|^p &\leqslant \|y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1}\|^p + 2^p\|2^{-1}\lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,A_1}\|^p + 2^p\|2^{-1}\lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1}\|^p\\ &\leqslant (1 + 2^{p+1}\mathbf{C}_{sqs}^p)\|y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1}\|^p \text{ by squeeze symmetry.}\end{aligned}$$

情况 2：若 $0 < |\lambda| \leqslant 2a$，则

$$|\boldsymbol{e}_n^*(y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1})| \geqslant |\lambda|/2, \forall n \in A_1 \sqcup (B_1 \setminus \operatorname{supp}(x)).$$

此外，由于 $|\lambda| > 0$，我们有 $A \subset \mathrm{supp}(x)$；结合假设$|\mathrm{supp}(x) \cap B| \leqslant |A|$，可推出 $|B_1 \cap \mathrm{supp}(x)| \leqslant |A_1|$。因此，

$$\begin{aligned}|\{n \in \mathbb{N} : |\boldsymbol{e}_n^*(y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1})| \geqslant |\lambda|/2\}| &\geqslant |A_1 \sqcup (B_1 \setminus \mathrm{supp}(x))| \\ &= |A_1| + |B_1 \setminus \mathrm{supp}(x)| \geqslant |B_1| \geqslant |A_1|.\end{aligned}$$

与情形 1 一样，我们得到

$$\|y + \lambda \mathbf{1}_{\varepsilon,A_1}\|^p \leqslant (1 + 2^{p+1}\mathbf{C}_{sqs}^p)\|y + \lambda \mathbf{1}_{\delta,B_1}\|^p.$$

我们已证明 iii)。

ii) $\Longrightarrow$ iii) 显然成立。

iii) $\Longrightarrow$ i)：我们借用了 [B19, 定理 1.10] 和 [BL21, 定理 4.2] 的证明中的论证。设 M 为基常数（若 $\mathcal{B}$ 是 Schauder 基），或为引理 6.2 中的常数（若 $p = 1$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Markushevich 基）。固定 $x \in \mathbb{X}$、$A \neq \emptyset$ 和 ε，如引理 6.1 所示。由稠密性和标准的扰动论证，我们可以假设 x 具有有限支撑。选取 $E > \mathrm{supp}(x) \cup A$，使得 $|E| = |A|$，从而 (6.3) 成立。由于 $E \in G(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + \mathbf{1}_E, |A|, 1)$，我们有

$$\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| = \|(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + \mathbf{1}_E) - \mathbf{1}_E\| \leqslant \mathbf{C}\|(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + \mathbf{1}_E) - \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| = \mathbf{C}\|\mathbf{1}_E\|. \tag{6.5}$$

现在取 $B \in G(x, |E|, 1)$。由于 $B \in G(x + \mathbf{1}_E, |E|, 1)$ 且 $B \cap E = \emptyset$，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_E\|^p &\leqslant \|x - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_E\|^p + \|x - \mathbf{1}_B\|^p \leqslant (1 + \mathbf{M}^p)\|x + \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_B\|^p \\ &\leqslant \mathbf{C}^p(1 + \mathbf{M}^p)\|x + \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_E\|^p = \mathbf{C}^p(1 + \mathbf{M}^p)\|x\|^p. \end{aligned}\tag{6.6}$$

结合 (6.5) 和 (6.6) 得到

$$\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\| \leqslant \mathbf{C}^2(1 + \mathbf{M}^p)^{\frac{1}{p}}\|x\|.$$

至此，证明完成。 □

推论 6.4. 若 $\mathcal{B}$ 是挤压对称基，则存在常数 $\mathbf{C} > 0$ 使得

$$\min_{\substack{B \subset A \\ \lambda_1 \in \mathbb{F}}} \|x - \lambda_1 \mathbf{1}_B\| \leqslant \mathbf{C} \inf_{\substack{D \in \mathbb{N}^{<\infty} \\ |D \cap \mathrm{supp}(x)| \leqslant |A| \\ \lambda_2 \in \mathbb{F}}} \|x - \lambda_2 \mathbf{1}_D\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall A \in G(x). \tag{6.7}$$

证明。令 $\mathbf{C}$ 为命题 6.3 ii) 项中的常数。固定 $x \in \mathbb{X}$, $A \in G(x)$, $\lambda_2 \in \mathbb{F}$以及一个非空有限集 $D \subset \mathbb{N}$，使得 $|D \cap \mathrm{supp}(x)| \leqslant |A|$。

若 $|D| \geqslant |A|$，则 $\|x - \lambda_2 \mathbf{1}_A\| \leqslant \mathbf{C}\|x - \lambda_2 \mathbf{1}_D\|$。

若 $|D| < |A|$，选择 $A_1 \subset A$ 使得 $A_1 \in G(x, |D|, 1)$，即可得到 $\|x - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_1}\| \leqslant \mathbf{C}\|x - \lambda_2 \mathbf{1}_D\|$。

由于 A 是一个有限集，(6.7) 中的最小值可以取到，证明完成。□

7. 附录：伪贪婪集的逼近

到目前为止，我们考虑了“连续”逼近，即使用在区间上的投影（[BBC22]）或支撑于区间上的向量（定义 3.1）进行逼近。或许有人会想，如果我们改用某种“连续”变体来替代贪婪集，会发生什么？在本附录中，我们考虑集合上贪心条件的一种自然弱化形式。

定义 7.1. 设 $\mathcal{B}$ 是 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一组基，且 $x \in \mathbb{X}$。如果对每个 $n \in \mathbb{N} \setminus A$，下列条件之一成立，则称集合 $A \subset \mathbb{N}$ 是 x 的伪贪婪集：

$$|\boldsymbol{e}_n^*(x)| \geqslant \sup_{k\in A} |\boldsymbol{e}_k^*(x)|,$$

or

$$|\boldsymbol{e}_n^*(x)| \leqslant \inf_{k\in A} |\boldsymbol{e}_k^*(x)|.$$

不难证明，一个集合是伪贪婪集，当且仅当它是两个贪婪集之差。

引理 7.2. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 p-巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的基，且 $\mathbf{C} > 0$。以下结论成立：i) 假设对每个 $x \in \mathbb{X}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都存在 x 的一个伪贪婪集 A，使得 $|A| = m$ 且

$$\|x - P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\sigma_m(x).$$

则 $\mathcal{B}$ 是 C-贪婪的。

ii) 假设对每个 $x \in \mathbb{X}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都存在 x 的一个伪贪婪集 A，使得 $|A| = m$ 且

$$\|x - P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\widetilde{\sigma}_m(x).$$

则 $\mathcal{B}$ 是 C-几乎贪婪的。

iii) 假设对于每个 $x \in \mathbb{X}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个 x 的伪贪婪集 A，使得 $|A| = m$ 并且

$$\|x - P_A(x)\| \leqslant \mathbf{C}\sigma_m^{con}(x).$$

那么 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathbf{C}^p + c_2^{2p})^{\frac{1}{p}}$-连续贪婪的。

证明。i) 和 ii) 的证明基本相同。我们证明后者。固定 $x \in \mathbb{X}$。根据稠密性论证，不妨设 $x \in [\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}]$，并且对于所有 m，$n \in \mathrm{supp}(x)$ $n \neq m$，都有 $|\boldsymbol{e}_m^*(x)| \neq |\boldsymbol{e}_n^*(x)|$。固定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $A \in G(x, m, 1)$。我们还可以假设 $x \neq P_A(x) \neq 0$。选取 $n_0 \notin \mathrm{supp}(x)$，并对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $y_k := k\boldsymbol{e}_{n_0} + x$。根据假设，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个 y_k 的伪贪婪集 A_k，使得 $|A_k| = m + 1$ 并且

$$\|y_k - P_{A_k}(y_k)\| \leqslant \mathbf{C}\widetilde{\sigma}_{m+1}(y_k) \leqslant \mathbf{C}\widetilde{\sigma}_m(x) \leqslant \mathbf{C}\|x\|.$$

因此，当 k 趋于无穷时，上述不等式的左边有界，故存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得$n_0 \in A_{k_0}$ 且 $k_0 > \|x\|_\infty$。根据伪贪婪集的定义，对于所有$n \notin A_{k_0}$，$|e_n^*(y_k)| \leqslant \inf_{j\in A_{k_0}} |e_j^*(x)|$。因此，$A_{k_0} \in G(y_{k_0}, m + 1, 1)$。由于 $G(x, m, 1) = \{A\}$，我们有 $G(y_{k_0}, m + 1, 1) = \{A \cup \{n_0\}\}$，这意味着$\|x - P_A(x)\| = \|y_k - P_{A_k}(y_k)\|$。证明完毕。

W证明 iii)。固定 $x \in \mathbb{X}$、$m \in \mathbb{N}$和 $A \in G(x, m, 1)$。和前面一样，我们假设

$$x \in [\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}]; \quad |\boldsymbol{e}_i^*(x)| \neq |\boldsymbol{e}_j^*(x)| \,\forall i \neq j; \quad x \neq P_A(x) \neq 0.$$

给定 $I \in \mathcal{I}^{(m)}$ 和 $y \in [\boldsymbol{e}_n : n \in I]$，若 $I \neq A$ 选择 $n_0 \in I \setminus A$ 和 $n_1 \in A \setminus I$。对于每个 k，令 $y_k := x + k\boldsymbol{e}_{n_0}$。如同 ii) 的证明所示，当 k 足够大时，唯一的

满足陈述条件且基数为 $m+1$ 的 y_k 的伪贪婪集是 $A_0 := A \cup \{n_0\} \in G(y_k,\ m+1,\ 1)$。因此，

$$\begin{aligned}\|x - P_A(x)\|^p &= \|y_k - P_{A_0}(y_k) + \boldsymbol{e}^*_{n_0}(x)\boldsymbol{e}_{n_0}\|^p \\ &\leqslant \left(\mathbf{C}\sigma^{con}_{m+1}(y_k)\right)^p + |\boldsymbol{e}^*_{n_0}(x)|^p\|\boldsymbol{e}_{n_0}\|^p \\ &\leqslant \mathbf{C}^p\|x-y\|^p + |\boldsymbol{e}^*_{n_1}(x-y)|^p\|\boldsymbol{e}_{n_0}\|^p \\ &\leqslant (\mathbf{C}^p + c_2^{2p})\|x-y\|^p.\end{aligned}$$

另一方面，如果 $I = A$，令 $n_0 := \max(A) + 1$，并且对于每个 k，令 $y_k := x + k\boldsymbol{e}_{n_0}$。如前所述，对于充分大的 k，满足该陈述条件且基数为 $m+1$ 的 y_k 的唯一伪贪婪集是 $A_0 := A \cup \{n_0\} \in G(y_k, m+1, 1)$。因此，

$$\begin{aligned}\|x - P_A(x)\|^p &= \|y_k - P_{A_0}(y_k) + \boldsymbol{e}^*_{n_0}(x)\boldsymbol{e}_{n_0}\|^p \\ &\leqslant \left(\mathbf{C}\sigma^{con}_{m+1}(y_k)\right)^p + |\boldsymbol{e}^*_{n_0}(x-y)|^p\|\boldsymbol{e}_{n_0}\|^p \\ &\leqslant (\mathbf{C}^p + c_2^{2p})\|x-y\|^p.\end{aligned}$$

我们的证明至此完成。 □

资助：第一作者获得了 CONICET PIP 0483 和 AN-PCyT PICT-2018-04104 的部分资助，并获得了欧盟“地平线 2020”研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第 777822 号的资助。第二作者获得了资助项目 PID2019-105599GB-I00（西班牙国家研究署，西班牙）的部分资助。

参考文献

[AA16] F. Albiac 和 J.L. Ansorena，《1-拟贪婪基的刻画》，《逼近理论杂志》201 (2016), 7–12.[AA17] F. Albiac 和 J.L. Ansorena，《1-几乎贪心基的刻画》，《Complutense数学评论》30 (2017), 13–24.[AAB22] F. Albiac、J.L. Ansorena 和 M. Berasategui，《Elton无条件性：一种无阈值的贪心形式》，预印本（2022）。网址：网址：https://arxiv.org/abs/2209.03445.[AABBL21] F. Albiac、J.L. Ansorena、M. Berasategui、P.M. Berná 和 S. Lassalle，《双民主基及其与其他贪婪型基的联系》，《构造性逼近》（2022）。网址：网址：https://doi.org/10.1007/s00365-022-09607-z.[AAB21] F. Albiac、J.L. Ansorena 和 P.M. Berná，《贪婪逼近中的新参数与Lebesgue型估计》，《数学论坛》10 (2022), 1–39。网址：doi:10.1017/fms.2022.102.[AABW21] F. Albiac、J.L. Ansorena、P.M. Berná 和 P. Wojtaszczyk，《拟Banach空间中双正交系统的贪婪逼近》，《数学论文集》560 (2021), 1–88.[AK16] F. Albiac 和 N. Kalton，《Banach空间理论专题》，第二版，ISBN 978-3-319-31555-3（2016）。[AW06] F. Albiac 和 P. Wojtaszscyk，《1-贪婪基的刻画》，《逼近理论杂志》201 (2006), 65–86.[B19] P. Berná，《几乎贪婪基与半贪婪基的等价性》，《应用数学与分析应用杂志》470 (2019), 218–225.[BL21] M. Berasategui 和 S. Lassalle，《弱贪心算法与半贪婪Markushevich 基和几乎贪婪Markushevich 基的等价性》，即将发表于《傅里叶分析与应用杂志》（2022）。网址：网址：https://arxiv.org/abs/2004.06849。

[BBC22] M. Berasategui、P. M. Berná 和 H. V. Chu，《若干贪婪型基的推广与刻画》，预印本（2022）。网址：https://arxiv.org/abs/2207.10136.[BB17] P. Berná 和 Ó. Blasco，《巴拿赫空间中贪婪基的刻画》，《逼近理论杂志》215 (2017), 28–39.[BBG17] P. M. Berná、O. Blasco 和 G. Garrigós，《一般基上贪婪算法的勒贝格不等式》，《Complutense数学评论》30 (2017), 369–392.[BC22] P. M. Berná 和 H. V. Chu，《关于贪婪型基的若干刻画》，《数学展望》40 (2022), 1135–1158.[BDKOW19] P. Berná、S. J. Dilworth、D. Kutzarova、T. Oikhberg 和 B. Wallis，《加权性质（A）与贪婪算法》，《逼近理论杂志》248 (2019), 1–18.[C22] H. V. Chu，《性质（A）常数的变化与弱阈值贪婪算法的Lebesgue型不等式》，《逼近理论杂志》285 (2023), 1–28.[DKK03] S. J. Dilworth、N. J. Kalton 和 D. Kutzarova，《巴拿赫空间中几乎贪婪基的存在性》，《数学研究》159 (2003), 67–101.[DKKT03] S. J. Dilworth、N. J. Kalton、D. Kutzarova 和 V. N. Temlyakov，《阈值贪婪算法、贪婪基与对偶性》，《构造性逼近》19 (2003), 575–597.[DK19] S. J. Dilworth 和 D. Khurana，《几乎贪婪基与部分贪婪基的刻画》，《哈恩逼近杂志》11 (2019), 115–137.[DKOSZ14] S. J. Dilworth、D. Kutzarova、E. Odell、Th. Schlumprecht 和 A. Zsák，《具有贪婪基的空间重赋范》，《逼近理论杂志》188 (2014), 39–56.[E78] J. H. Elton，《巴拿赫空间中的弱零归一化序列》，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1978年。博士学位论文——耶鲁大学。[KT99] S. V. Konyagin 和 V. N. Temlyakov，《关于巴拿赫空间中贪婪逼近的一则注记》，《东部逼近杂志》5 (1999), 365–379.[KT02] S. V. Konyagin 和 V. N. Temlyakov，《基与一般极小系统的贪婪逼近》，《塞尔迪卡数学杂志》28 (2002), 305–328.[T98] V. N. Temlyakov，《最佳 m 项逼近与贪婪算法》，《计算数学进展》8, 249–265.[T08] V. N. Temlyakov，《贪婪逼近》，《数值学报》17 (2008), 235–409.[T11] V. N. Temlyakov，《贪婪逼近》，第20卷，剑桥大学出版社，2011年。[W00] P. Wojtaszczyk，《一般双正交系统的贪婪算法》，《逼近理论杂志》107 (2000), 293–314。电子邮件地址：mberasategui@dm

.uba.ar

数学、物理与计算研究所 - 布宜诺斯艾利斯大学 - CONICET - PAB I，精确科学与自然科学学院，大学，布宜诺斯艾利斯（1428），布宜诺斯艾利斯，阿根廷

电子邮件地址：pablo.berna@cunef.edu

定量方法系，CUNEF大学，28040 马德里，西班牙

电子邮件地址：hungchu2@illinois.edu

伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校数学系，厄巴纳，伊利诺伊州 61820，美国