arXiv:2302.05770v1 [math.DG] 11 Feb 2023

六阶 GJMS 方程奇异解的紧性

JO ˜AO HENRIQUE ANDRADE、JO ˜AO MARCOS DO ´O、Jesse Ratzkin 和 Juncheng Wei

Abstract. 我们研究有限穿孔球面上具有常正六阶 Q-曲率的共形平坦奇异度量集合的紧性性质。基于近期对孤立奇点附近局部渐近行为的分类，我们为模空间中的这些度量引入颈尺寸的概念，并用其刻画紧性。更确切地说，我们证明，若穿孔点彼此间距保持分离，且沿一列度量，每个穿孔点处的颈尺寸均有正下界，则存在一个子序列相对于戈罗夫–豪斯多夫度量收敛。我们的证明依赖于一项上界估计，该估计通过移动平面法和爆破论证得出。此外，我们还结合了一项由可去奇点定理推得的下界估计。我们还引入了一个同调不变量，这一不变量或许对未来的研究具有独立意义。

1. Introduction

近年来，亚马贝问题及其奇异对应问题的类似问题得到了广泛研究。在这些问题中，我们寻求共形类的一个代表元，使其具有某种类型的常曲率：经典情形下是标量曲率，而较新的例子中则是某种 σ_k-曲率或 Branson 的某种 Q^{2m}-曲率。共形不变性（或更一般地说，协变性）往往使这些问题变得复杂，导致出现奇异解以及解空间缺乏紧性。因此，明确解空间中的哪些几何性质能够保证紧性，总是很有意义的。

本文研究有限穿孔球面上具有常数六阶 Q^6-曲率的完备共形平坦度量的模空间。我们的主要结果推广了 Pollack [25] 在标量曲率情形下的一个定理。该定理指出，只要穿孔点彼此分离，且某些几何颈部尺寸有正下界，模空间中相应的子集就在戈罗夫–豪斯多夫拓扑下是紧的。

令 $n \geqslant 7$，并用 $\mathbb{S}^n$表示 n 维球面。对于 $N \in \mathbb{N}$，我们令 $\Lambda = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{S}^n$为有限子集，并在 $\Omega := \mathbb{S}^n \backslash \Lambda$ 上寻求形如 $g = U^{4/n-6} g_0$的完备度量，其中 g_0是标准圆度量。 g 在 Ω 上完备这一事实迫使对每个 $i = 1$，都有 $\liminf_{p \to p_i} U(p) = \infty$，……，$N$。此外，我们规定所得度量具有常数 Q^6曲率，并将其规范化为

$$Q_n = Q^6(g_0) = \frac{n(n^4 - 20n^2 + 64)}{2^5}. \tag{1.1}$$

我们定义 Q^6（g）定义A.3 中的量，该定义适用于任意光滑度量。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35J60、35B09、35J30、35B40。*Key words and phrases.* 三重拉普拉斯算子、临界指数、六阶方程、局部渐近行为、Emden–Fowler解。本研究部分获得圣保罗研究基金会（FAPESP）#2020/07566-3 和 #2021/15139-0、帕拉伊巴州研究基金会（FAPESQ）#3034/2021、国家科学技术发展委员会（CNPq）#312340/2021-4 和 #429285/2016-7，以及加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的资助。

Q-曲率 Q^6 在度量的共形变换下具有良好的性质。更确切地说， $g = U^{4/(n-6)}g_0$ 满足 $Q^6(g) = Q_n$ 在 $\Omega = \mathbb{S}^n \backslash \Lambda$ 上的条件等价于偏微分方程

$$P^6_{g_0} U = c_n U^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{on} \quad \Omega, \tag{$\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$}$$

其中 $c_n = \frac{n-6}{2} Q_n$ 是一个归一化常数。左侧的算子是球面上的六阶GJMS算子，其定义为

$$P^6_{g_0} = \left(-\Delta_{g_0} + \frac{(n-6)(n+4)}{4}\right)\left(-\Delta_{g_0} + \frac{(n-4)(n+2)}{4}\right)\left(-\Delta_{g_0} + \frac{n(n-2)}{4}\right), \tag{1.2}$$

在度量经过共形变换 $g = U^{4/n-6} g_0$后，它变换为

$$P^6_g \phi = U^{-\frac{n+6}{n-6}} P^6_{g_0}(U\phi) \quad \text{for all} \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

有关这一主题的更多详情，请参阅 [7, 10, 12, 19]。

在[14] ，Graham、Jenne、Mason和Sparling在紧的 n维黎曼流形(M^n, g)上，为任意 $m \in \mathbb{N}$构造了共形协变微分算子 P^{2m}_g，其首项为P^{2m}_g的$(-\Delta_g)^m$。于是可以通过 $Q^{2m}_g = P^{2m}_{g_0}(1)$ 构造相应的 Q阶曲率 $2m$ 。在特殊情形 $m = 1$下，可得到共形拉普拉斯算子

$$P^2_g = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g \quad \text{with} \quad Q^2_g = \frac{n-2}{4(n-1)} R_g,$$

其中 Δ_g 是 g 的拉普拉斯-贝尔特拉米算子， R_g 是其标量曲率。随后，Grahan和Zworski [15] 以及Chang和Gonz´alez [8] 将这些定义推广到背景度量为球面上的圆度量的情形，从而得到任意阶 $\sigma \in (0, n/2)$的（非局部）算子$P^\sigma_{g_0}$ ，以及相应的 σ阶 Q-曲率。同样，$P^\sigma_{g_0}$ 的首阶部分为$(-\Delta_{g_0})^\sigma$，可理解为奇异积分算子的柯西主值。我们在定义A.2和A.4中明确写出了 P^2_g、 P^4_g和 P^6_g的公式。然而，对于一般的 $\sigma \in \mathbb{R}_+$， P^σ_g和 Q^σ_g 的表达式则更为复杂（例如参见[11]）。

我们注意到，($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$)右端的非线性项相对于索об列夫嵌入 $W^{3,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^\#}(\mathbb{R}^n)$具有临界增长，其中$2^\# = \frac{2n}{n-6}$。众所周知，这种嵌入并不紧，这反映了偏微分方程($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$)的共形不变性。

将偏微分方程（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$）转移到欧几里得空间会很方便，这可以通过标准的立体投影来实现（北极位于 Ω 中，因此是我们所考虑的所有度量的正则点）。经过立体投影后，我们可以写成

$$g_0 = u_{\text{sph}}^{\frac{4}{n-6}} \delta, \qquad u_{\text{sph}}(x) = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{\frac{6-n}{2}},$$

其中 δ 是欧几里得度量。在这些坐标下，我们的共形度量具有如下形式：$g = U^{4/(n-6)} g_0 = (U \cdot u_{\text{sph}})^{4/(n-6)}\delta$。因此，由 $u = U \cdot u_{\text{sph}}$ 给出的 $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ 是变换后的方程的一个正奇异解

$$(-\Delta)^3 u = c_n u^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \tag{$\mathcal{Q}_{6,\delta,N}$}$$

其中 Δ 是通常的平直拉普拉斯算子， Γ 是奇异集 Λ 在立体投影下的像。为简化记号，我们约定，U 表示将度量 g 与圆度量联系起来的共形因子，即 $g = U^{4/(n-6)} g_0$；而 u 表示将度量 g 与欧几里得度量联系起来的共形因子，即 $g = u^{4/(n-6)}\delta$，二者之间的关系为 $u = U u_{\text{sph}}$。

注 1.1。在此欧几里得情形中，变换律（1.3）尤其蕴含了（$\mathcal{Q}_{6,\ \delta,\ N}$）的缩放律，即若 u 是（$\mathcal{Q}_{6,\ \delta,\ N}$）的解，那么对于任意$\lambda > 0$， $u_\lambda(x) := \lambda^{\frac{n-6}{2}} u(\lambda x)$ 也是解。

我们研究可容许的常数六阶 Q-曲率度量的无标记模空间和标记模空间的紧性性质。我们将无标记模空间定义为

$$\mathcal{M}_N^6 = \left\{ g \in [g_0] : g \text{ is complete on } \mathbb{S}^n \setminus \Lambda \text{ with } \#\Lambda = N,\ Q_g^6 \equiv Q_n \right\}, \tag{1.4}$$

以及标记模空间为

$$\mathcal{M}_\Lambda^6 = \left\{ g \in [g_0] : g \text{ is complete on } \mathbb{S}^n \setminus \Lambda,\ Q_g^6 \equiv Q_n \right\}.$$

直观地说，在无标记模空间中，我们只固定穿孔的数量，而在标记模空间中，我们固定穿孔本身。我们在标记模空间和无标记模空间上都赋予戈罗夫–豪斯多夫拓扑。

理解标记模空间 $\mathcal{M}_N^6$ 性质的第一步，是研究共形平坦方程

$$(-\Delta)^3 u = c_n u^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{B}_R^*, \tag{$\mathcal{P}_{6,R}$}$$

其中 $\mathbb{B}_R^* := \{x \in \mathbb{R}^n :\ 0 < |x| < R\}$ 是 $R < +\infty$ 的穿孔球。令 $R \to +\infty$ 次 ($\mathcal{P}_{6,\ R}$) 后，可将其转化为穿孔空间上的以下偏微分方程

$$(-\Delta)^3 u = c_n u^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{$\mathcal{P}_{6,\infty}$}$$

关于这一主题，$\mathcal{P}_{6,\ \infty}$的非奇异解分类见 [29]。后来，在 [18] 中证明了爆破极限解确实存在。最近，基于拓扑射击法，第一作者和最后一位作者对这一极限方程的所有可能解进行了分类 [3]。

可以将这些分类结果合并为以下陈述

定理 A. 设 u是 ($\mathcal{P}_{6,\infty}$) 的一个正解。假设

(a) 原点是一个可去奇点，则存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$，使得 u 关于 x_0 径向对称，并且除一个常数因子外，可表示为

$$u_{x_0,\varepsilon}(x) = \left(\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-6}{2}}. \tag{1.5}$$

这些解称为（六阶）球面解（或泡）。

(b) 原点是一个不可去奇点，则 u 关于原点径向对称。此外，存在 $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_n^*]$ 和 $T \in (0, T_{\varepsilon_0}]$，使得

$$u_{\varepsilon,T}(x) = |x|^{\frac{6-n}{2}} v_\varepsilon(\ln |x| + T). \tag{1.6}$$

这里，$\varepsilon_n^* = K_0^{(n-6)/6}$，$T_\varepsilon \in \mathbb{R}$ 是以下六阶初值问题中唯一的 T-周期有界解 v_T 的基本周期，

$$\begin{cases} v^{(6)} - K_4 v^{(4)} + K_2 v^{(2)} - K_0 v = c_n v^{\frac{n+6}{n-6}} \\ v(0) = \varepsilon_0,\ v^{(2)}(0) = \varepsilon_2,\ v^{(4)}(0) = \varepsilon_4,\ v^{(1)}(0) = v^{(3)}(0) = v^{(5)}(0) = 0, \end{cases}$$

其中 K_4，K_2，K_0，ε_n^*是有量纲常数 $\varepsilon_0 \in (0,\ \varepsilon_n^*]$ (见 (2.2))。这些称为(六阶) Emden–Fowler解。

在 [18], 中，证明了满足 的方程 ($\mathcal{P}_{6,\ R}$) 的解在孤立奇点附近满足先验界，这意味着它们在孤立奇点附近的行为类似于极限方程的解

定理 B。设 u 是 ($\mathcal{P}_{6,\ R}$) 的一个正奇异解。假设 $-\Delta u \geqslant 0$ 且 $\Delta^2 u \geqslant 0$。那么

$$u(x) = (1 + o(1)) u_{\varepsilon,T}(|x|) \quad \text{as} \quad x \to 0, \tag{1.7}$$

其中 $u_{\varepsilon,\ T}$ 属于族 (1.6)。

结合这两个结果，我们引出如下定义

定义1.2。设 $g \in \mathcal{M}_N$ 具有奇异集 $\Lambda \subset \mathbb{S}^n$，$\#\Lambda = N$，并设 $p_j \in \Lambda$。令 $g = U^{4/(n-6)} g_0 = u^{4/(n-6)}\delta$ 其中我们选择以 p_j为中心的立体投影坐标。由 (1.7) 我们知道 $u(x) = u_{\varepsilon_j,\ T_j}(|x|)(1 + o(|x|))$，其中某个 $\varepsilon_j \in (0, \varepsilon_n^*]$。这$\varepsilon_j$是穿孔点 p_j 处度量 g 的渐近颈部大小。

现在我们具备了陈述无标记模空间紧性主定理的条件。定理1.3。设 $N \geqslant 3$，且设 $0 < \delta_1$、$\delta_2 < 1$ 为正实数。那么集合

$$\mathcal{Q}^6_{\delta_1,\delta_2} = \left\{ g \in \mathcal{M}^6_N : \mathrm{d}_{g_0}(p_j, p_\ell) \geqslant \delta_1 \text{ for each } j \neq \ell \text{ and } \varepsilon_j(g) \geqslant \delta_2 \right\}.$$

关于格罗莫夫–豪斯多夫拓扑是序列紧的。

注 1.4. 注意，由定理 A (a) 可知，$\mathcal{M}_1 = \varnothing$。此外，由定理 A (b) 可得，$\mathcal{M}_{p_1,\ p_2} = (0, \varepsilon_n^*]$ 对任意 $p_1 \neq p_2$，其中 $\varepsilon_n^* \in (0, 1)$。此外，还可得 $\mathcal{M}_2 = (0, \varepsilon_n^*] \times ((\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \setminus \mathrm{diag})/SO(n+1, 1))$，其中共形变换群 $SO(n+1,1)$ 同时作用于每个 $\mathbb{S}^n$ 因子。这些度量称为 Delaunay 度量。此外，它们都对应于一个双穿孔球面，并且是旋转不变的。

注 1.5. 现在值得描述序列 $\mathcal{M}^6_N$ 中度量可能出现的退化。设 $\{g_k = (U_k)^{4/n-6} g_0\} \in \mathcal{M}^6_N$ 是一个离开所有紧子集的序列。我们将 g_k 的奇异集记为 $\Lambda_k = \{p_{1,k}, \ldots, p_{N,k}\}$，并将 g_k 在穿孔点 p_j, $_k$ 处的渐近颈部大小记为 $\varepsilon_{j,k}$。那么，要么对于某个 j，有 $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{j,k} = 0$；要么对于某个 $j \neq j'$，有 $\lim_{k\to\infty} p_{j,k} = \lim_{k\to\infty} p_{j',k}$。我们在图 1 中示意这两种退化。（这两种退化可能同时发生。）无论哪种情况，极限中都会得到某个$N' < N$对应的度量 $g_\infty \in \mathcal{M}^6_{N'}$。这样，我们可以通过将 $\mathcal{M}^6_{N'}$ 的副本（对于$N' < N$）粘合到 $\partial\mathcal{M}^6_N$，来紧化模空间 $\mathcal{M}^6_N$。我们推测，这种紧化不会得到带边界光滑流形，而是 $\partial\mathcal{M}^6_N$ 通常为分层空间。

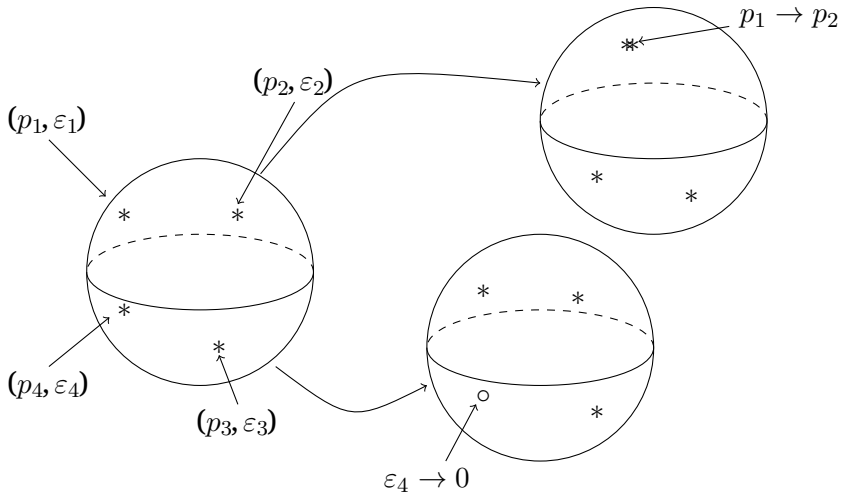

FIGURE 1. 模空间 $\mathcal{M}^6_4$ 中的两种可能退化。

让我们将主要结果与二阶和四阶类似物进行比较。与我们的主要结果精神相同，文献 [25] 和 [2] 证明了以下模集

$$\mathcal{Q}^2_{\delta_1,\delta_2} \subset \mathcal{M}^2_N = \left\{ g \in [g_0] : g \text{ is complete and } R_g \equiv 2^{-1}(n-4) \right\}. \tag{1.8}$$

and

$$\mathcal{Q}^4_{\delta_1,\delta_2} \subset \mathcal{M}^4_N = \left\{ g \in [g_0] : \text{g is complete, } R_g \geqslant 0, \text{ and } Q^4_g \equiv 2^{-3} n(n^2-4) \right\}. \tag{1.9}$$

也具有序列紧性。

根据定理 A和定理 B等分类结果，关于（1.8）和（1.9）中的模空间，我们已经有了更多了解。事实上，在 Mazzeo 和 Pacard 的一些经典著作中， [21] 他们运用粘接技术证明了（1.8）中存在一族解。此外，Mazzeo、Pollack和Uhlenbeck [22], 指出，这个空间是一个带有自然拉格朗日结构的有限维解析子流形。对于模空间（1.9），人们所知较少；它是否非空尚未得到证明。文献 [1] 中的一些作者证明，在对外尔张量的消失施加适当假设的情况下，这一性质对非退化流形成立。然而，标准圆球面并不属于这一类。

受文献 [25], 中论证的启发，定理 1.3 的证明分为以下三个部分。首先，我们需要引入所谓的六阶几何Pohozaev不变量，它与极限常微分方程的哈密顿能量有关 [24, 27]。其次，我们对（先验上界和正奇异解的估计$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$），通过结合滑动法、爆破论证和Harnack不等式得到这些估计。由此，我们获得某些H¨older范数的一致有界性；利用紧性，我们可以提取一个子序列，从而得到极限。第三，我们利用六阶GJMS算子的格林函数在极点附近的一阶渐近展开，并结合颈部尺寸远离零这一事实，证明该极限非平凡。最后，应用可去奇点定理即可完成证明。

本文其余部分安排如下。在第2节，我们定义对数柱面变量变换，并利用穿孔空间与圆柱之间的共形不变性，将 ($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$) 转化为圆柱上的偏微分方程。在第3节，我们描述双穿孔球面上的所有奇异解。这些 Delaunay 度量尤为重要，因为它们为 $\mathcal{M}^6_N$ 中给定穿孔点附近的度量提供了渐近模型。在第4节，我们定义与 ($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$) 相关的六阶 Pohozaev 不变量。在第5节，我们证明正奇异解 ($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$) 的先验上下界估计。在第6节，我们证明定理1.3中的紧性结论。

注 1.6。以下若干辅助结果可推广至 Paneitz 算子以及 Q任意阶曲率 $\sigma \in (0, n/2)$，至少在共形平坦情形下如此。具体而言，引理*5.1* 的凸性结果和命题*5.2* 的上界均可推广，且可能具有独立研究价值。另一方面，定理*1.3* 证明中的某些部分无法推广。具体来说，目前我们尚不能分类球面上的所有双端常 Q^σ曲率度量，而这对我们的证明至关重要。

2. Cylindrical coordinates

本节旨在构造一种变量变换，将局部奇异偏微分方程（$\mathcal{P}_{6,\ R}$）问题转化为一个系数为常数的良好常微分方程问题。这是与（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$）相关的共形平坦问题。

定义 2.1. 我们如下定义六阶自治 Emden-Fowler 变量变换。设 $R > 0$ and $T = -\ln R$ and $\mathcal{C}_T = (T, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$。然后定义

$$\mathfrak{F} : \mathcal{C}^\infty(B^*_R) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}_T), \qquad \mathfrak{F}(u)(t,\theta) = e^{-\gamma_n t} u(e^{-t}\theta) = v(t,\theta), \tag{2.1}$$

其中 $\gamma_n = \frac{n-6}{2}$ 。

容易证明，逆变换为

$$\mathfrak{F}^{-1}:\mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}_T)\to\mathcal{C}^\infty(B_R^*),\qquad \mathfrak{F}^{-1}(v)(x)=|x|^{-\gamma_n}v(-\ln|x|,x/|x|)=u(x).$$

利用 $\mathfrak{F}$ 并经过冗长的计算，我们得到定义在 $\mathcal{C}_T$上的以下六阶非线性偏微分方程：

$$-P^6_{\mathrm{cyl}}v=c_nv^{\frac{n+6}{n-6}}\quad\text{on}\quad\mathcal{C}_T. \tag{$\mathcal{C}_T$}$$

这里， P^6_{cyl} 是与 $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$上的柱面度量 $g_{\mathrm{cyl}}=dt^2+d\theta^2$相关的六阶GJMS算子，其表达式为

$$P^6_{\mathrm{cyl}}:=P^6_{\mathrm{rad}}+P^6_{\mathrm{ang}},$$

其中

$$P^6_{\mathrm{rad}}:=\partial_t^{(6)}-K_4\partial_t^{(4)}+K_2\partial_t^{(2)}-K_0$$

and

$$P^6_{\mathrm{ang}}:=2\partial_t^{(4)}\Delta_\theta-J_3\partial_t^{(3)}\Delta_\theta+J_2\partial_t^{(2)}\Delta_\theta-J_1\partial_t\Delta_\theta+J_0\Delta_\theta+3\partial_t^{(2)}\Delta_\theta^2-L_0\Delta_\theta^2+\Delta_\theta^3$$

with

$$\begin{aligned}
K_0&=2^{-8}(n-6)^2(n-2)^2(n+2)^2\\
K_2&=2^{-4}(3n^4-24n^3+72n^2-96n+304)\\
K_4&=2^{-2}(3n^2-12n+44)\\
J_0&=2^{-3}(3n^4-18n^3-192n^2+1864n-3952)\\
J_1&=2^{-1}(3n^3+3n^2-244n+620)\\
J_2&=2n^2+13n-68\\
J_3&=2(n+1)\\
L_0&=2^{-2}(3n^2-12n-20)
\end{aligned}\tag{2.2}$$

有量纲常数。

注2.2. 以下分解成立

$$P^6_{\mathrm{rad}}=L_{\lambda_1}\circ L_{\lambda_2}\circ L_{\lambda_3},$$

其中 $L_{\lambda_j}:=-\partial_t^2+\lambda_j$对于 $j=1,\ 2,\ 3,$ 且

$$\lambda_1=\frac{n-6}{2},\quad \lambda_2=\frac{n-2}{2},\quad\text{and}\quad \lambda_3=\frac{n+2}{2}.$$

证明请参见[3, 命题 2。 7] 。

3. Spherical and Delaunay metrics

本节介绍模空间上的一些特殊模型度量。设 $p_1,\ p_2\in\mathbb{S}^n$不失一般性，可选取使得 $p_1=\mathbf{e}_n$ 为北极，而 $p_2=-p_1$为南极。共形因子 $U:\ \mathbb{S}^n\backslash\{p_1,p_2\}\to(0,\ \infty)$确定一个度量$g\in\mathcal{M}_{p_1,\ p_2}$经过立体投影后，它对应于方程（$\mathcal{P}_{6,\ \infty}$）的一个奇异解

对该偏微分方程依次应用柱面变换（2.1）可得 s

$$-P^6_{\mathrm{cyl}}v=c_nv^{\frac{n+6}{n-6}}\quad\text{on}\quad\mathcal{C}_\infty:=\mathbb{R}\times\mathbb{S}^n.$$

接下来，利用关于原点径向对称的解（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$），($\mathcal{C}_T$) 可化为一个六阶常微分方程问题

$$-v^{(6)}+K_4v^{(4)}-K_2v^{(2)}+K_0v=c_nv^{\frac{n+6}{n-6}}\quad\text{in}\quad\mathbb{R}. \tag{$\mathcal{O}_{6,\infty}$}$$

由这一最后的表述，我们可以迅速求出柱面解

$$v_{\mathrm{cyl}}(t)=\left(\frac{K_0}{c_n}\right)^{\frac{12}{n-6}}=\left(\frac{K_0}{c_n}\right)^{\frac{6}{\gamma_n}}=\varepsilon_n^*>0,$$

它是唯一的常数解。从圆柱变换回 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$，我们看到

$$u_{\mathrm{cyl}}(x)=\mathfrak{F}^{-1}(v_{\mathrm{cyl}})=\left(\frac{K_0}{c_n}\right)^{\frac{12}{n-6}}|x|^{-\gamma_n},\quad g_{\mathrm{cyl}}=u_{\mathrm{cyl}}^{\frac{4}{n-6}}\delta.$$

我们已经见过球面解，其表达式为

$$u_{\mathrm{sph}}(x)=\left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{-\gamma_n}\quad\text{and}\quad g_{\mathrm{sph}}=u_{\mathrm{sph}}^{4/(n-6)}\delta, \tag{3.1}$$

它是（1.5）在 $\epsilon=1$ 且 $x_0=0$时的特例。对 u_{sph} 应用 Emden-Fowler 变量变换，可得

$$v_{\mathrm{sph}}(t,\theta)=\mathfrak{F}(u_{\mathrm{sph}})(t,\theta)=(\cosh t)^{-\gamma_n}.$$

在此情形下，定理 A 根据颈尺寸 $v_{\varepsilon_0}\in\mathcal{C}^6(\mathbb{R})$ 对（$\mathcal{O}_{6,\ \infty}$）的所有正解进行分类，其中 $\varepsilon_0\in(0,\ \varepsilon_n^*]$，且 $\varepsilon_0=$最小值$_{\mathbb{R}}\,v\in(0,\ \varepsilon_n^*]$。将参数 ε 从其最大值 ε_n^* 逐渐减小至 0，可以看到定理 A（b）中的 Delaunay 解在柱面解 v_{cyl} 与球面解 v_{sph}之间连续变化。我们将 v_ε 的最小周期记为 T_ε。

定义 3.1. 对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_n^*]$，颈尺寸为 ε 的 Delaunay 度量为

$$g_\varepsilon=v_\varepsilon^{\frac{4}{n-6}}(\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\theta^2)=u_\varepsilon^{\frac{4}{n-6}}\delta,$$

其中 $u_\varepsilon=\mathfrak{F}^{-1}(v_\varepsilon)$。注意，我们等价地将 g_ε 定义为 $\mathcal{C}_{-\infty}$ 上的度量，以 v_ε 为共形因子；也将其定义为 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的度量，以 $u_\varepsilon=\mathfrak{F}^{-1}(v_\varepsilon)$ 为共形因子。

我们可以将展开式（1.7）改写为

命题 3.2. 设 $g\in\mathcal{M}_N^6$ 的奇异集为 Λ，且 $p\in\Lambda$。则存在一个 Delaunay 解 u_ε，使得以 p 为中心的立体投影坐标下，其渐近展开为

$$g=((1+\mathrm{o}(|x|))u_{\varepsilon,R}(x))^{\frac{4}{n-6}}\delta,\qquad u_{\varepsilon,R}(x)=u_\varepsilon(Rx).$$

我们可以将这一渐近展开改写为

$$g\ =\ ((1+\mathrm{o}(|x|))\mathfrak{F}^{-1}(v_\varepsilon(\cdot+T))(x))^{\frac{4}{n-6}}\delta=((1+\mathrm{o}(e^{-t}))v_\varepsilon(t+T))^{\frac{4}{n-6}}(\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\theta^2).$$

换言之，任意容许度量在穿孔点附近都渐近于某个平移的德洛奈度量。在上述公式中，R与 T之间的关系为 $R=-\ln T$。

4. Pohozaev invariants

现在我们来讨论方程（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$）的解的一族同调积分不变量的存在性及其具体形式。S. 泊左耶夫 [24], 以最简单的形式发现了这些同调不变量，随后 R. Schoen [27] 将其推广到黎曼几何背景。作为起点，我们将能量 $\mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}$ 定义为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(v) := \mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(v) + \mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(v) + F(v), \tag{4.1}$$

其中

$$\mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(v) := \frac{1}{2}v^{(3)^2} + \frac{K_4}{2}v^{(2)^2} + \frac{K_2}{2}v^{(1)^2} - \frac{K_0}{2}v^2 + v^{(5)}v^{(1)} - v^{(4)}v^{(2)} - K_4 v^{(3)}v^{(1)},$$

是径向部分，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(v) := &-J_4\left(\partial_t^{(3)}\nabla_\theta v\partial_t\nabla_\theta v - |\partial_t^{(2)}\nabla_\theta v|^2\right) - \frac{J_2}{2}|\partial_t^{(2)}\nabla_\theta v|^2 - \frac{J_1}{2}|\partial_t^{(2)}\nabla_\theta v|^2\\ &- \frac{J_0}{2}|\nabla_\theta v|^2 + \frac{L_2}{2}|\partial_t^{(2)}\Delta_\theta v|^2 + \frac{L_0}{2}|\partial_t^{(2)}\Delta_\theta v|^2 + \frac{1}{2}|\Delta_\theta v|^2.\end{aligned}$$

是角向部分，且

$$F(v) := \frac{c_n(n-6)}{2n}|v|^{\frac{2n}{n-6}}$$

是非线性项。

计算导数后，可以很容易验证 $\mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(v)$ 对偏微分方程（ v ）的任意解 $\mathcal{C}_T$都是常数。我们还注意到，最后一项 F 在（4.1）中是 $\frac{2n}{n-6}$ 次齐次的，而其余各项都是 2 次齐次的。

定义 4.1. 设 $v \in \mathcal{C}^6(\mathcal{C}_T)$ 是方程（$\mathcal{C}_T$）的一个正解。定义其柱面泊左耶夫不变量为

$$\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}(v) := \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(v)\mathrm{d}\theta$$

对任意 $t > T$。注意，这个积分实际上不依赖于 t。

根据定义 2.1中的柱面变换，我们可以用球坐标定义这个不变量

定义 4.2. 设 $u \in \mathcal{C}^6(\mathbb{B}^*_R)$ 是方程（$\mathcal{P}_{6,\ R}$）的一个正解。定义其球面泊左耶夫不变量为

$$\mathcal{P}_{\mathrm{sph}}(u) := (\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}} \circ \mathfrak{F}^{-1})(u) = \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(\mathfrak{F}^{-1}(u))\mathrm{d}\theta.$$

最后，用共形度量的术语来说，我们有如下与模空间中的度量相关的不变量定义。

定义 4.3. 设 $g \in \mathcal{M}^6_N$ 和 $p_j \in \Lambda$。我们定义其在穿孔点 p_j 处的径向（或膨胀）Pohozaev不变量如下。选取将 p_j 映至原点的立体投影坐标，并在这些坐标中写出$_4g = u^{\overline{n-6}}\delta$。然后定义

$$\mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g, p_j) := \mathcal{P}_{\mathrm{sph}}(u) = \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(\mathfrak{F}^{-1}(u))\mathrm{d}\theta.$$

本节最重要的结果指出，径向 Pohozaev不变量远离零有界，当且仅当 Delaunay 渐近解的颈部尺寸远离零有界。

命题 4.4. 设 $g \in \mathcal{M}_N^6$ 和 $p_j \in \Lambda$。则 $\mathcal{P}_{rad}(g,p_j)$ 定义良好且为负，并且仅依赖于 $p_j \in \Lambda$ 处 Delaunay 渐近解的颈尺寸 ε_j 。此外，减小 ε_j 会增大 $\mathcal{P}_{rad}(g,p_j)$，并且如果 $\varepsilon_j \searrow 0$，则 $\mathcal{P}_{rad}(g,p_j) \nearrow 0$。

证明。根据构造，定义 $\mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g,p_j$的积分与我们选择哪个球面 $\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}$无关，只要 t 足够大，因此 $\mathcal{P}_{\mathrm{rad}}$ 定义良好。根据定理B 中的渐近性质，我们知道共形因子渐近于一个 Delaunay 解 u_ε，因此令 $t\to\infty$ 即可得到

$$\mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g,p_j)=\lim_{t\to\infty}\int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(\mathfrak{F}^{-1}(u))\mathrm{d}\theta=\lim_{t\to\infty}\int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{H}_{\mathrm{cyl}}(v_\varepsilon)\mathrm{d}\theta<0.$$

其余性质可直接由引理[3, 414]中所述的 Delaunay 解的能量排序推出。□

注 4.5。几何变分问题中常会出现积分不变量。关于一类一般的高阶共形不变局部守恒张量的更多细节，请参见[13]。这些不变量源自($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$)的共形不变性，这是由诺特著名的守恒定理得到的。

为了后续应用，我们需要对命题4.4作稍微加强。

命题 4.6. 设 $v\in\mathcal{C}^6(\mathcal{C}_T)$ 是下列重标度方程的一个正解

$$-P^6_{\mathrm{cyl}}v=Av^{\frac{n+6}{n-6}}$$

对某个常数 A ，并设

$$\mathcal{H}^A_{\mathrm{cyl}}(v)=\mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(v)+\mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(v)+\frac{(n-6)A}{2n}|v|^{\frac{2n}{n-6}}.$$

Then

$$\int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{H}^A_{\mathrm{cyl}}(v)\mathrm{d}\theta$$

与 t 无关。

证明。对 t 求导并分部积分即可得到该命题。□

5. Uniform estimates

本节旨在证明方程（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$）的正奇异解在奇异集附近的一致上下界估计。

我们首先引用 Ngˆo 和 Ye 关于超调和性的一个结果[23]。此外，我们还指出 Ao 等人针对相关积分方程给出了类似的超调和性结果 [4]。

命题 A. 令 $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$ 是方程 ($\mathcal{Q}_{6,\delta,N}$) 的正解。此外， $-\Delta u\geqslant 0$且 $\Delta^2u\geqslant 0$ 属于 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$。

证明. 根据 [23, 命题 1.5] 可知 u 在 $\mathbb{R}^n$中既是弱超调和的，也是弱超双调和的。换言之，对于一个 ϕ 紧支撑于$\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$中的光滑测试函数，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(-\Delta)\phi\mathrm{d}x\geqslant 0\quad\text{and}\quad\int_{\mathbb{R}^n}u(-\Delta)^2\phi\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

随后，标准椭圆正则性表明， u 在其光滑区域内，即在 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$中，是超调和且超双调和的。□

第一步是凸性结果的六阶版本 [26, 命题 1]，，其证明采用了Alexandrov移动平面法（另见[9, 定理 4。1] 了解四阶版本）。

引理5.1. 设 $g = U^{4/(n-6)}g_0$ 是 $\Omega = \mathbb{S}^n\backslash\Lambda$ 上与圆度量共形的完备度量，且 Q_g^6 是正常数。那么 Ω 中任意（球面）圆球的边界相对于 g 都具有半正定的第二基本形式。

证明。令 $\mathcal{B}$ 为关于圆度量的测地球，满足$\overline{\mathcal{B}} \subset\Omega$，并选取一个立体投影，将 $\mathcal{B}$ 映到半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 < 0\}$。与之前一样，我们用 Γ表示奇异集 Λ 在该立体投影下的像。关于这些立体投影坐标，度量可写为 $g = u^{4/(n-6)}\delta$ 其中 $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ 满足 ($\mathcal{Q}_{6,\ \delta,\ N}$)，即 $u : \ \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \to (0, \infty)$ 满足

$$(-\Delta)^3 u = c_n u^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Gamma.$$

此外，我们的圆球边界为 $\partial\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 = 0\}$，其方向由指向内侧的单位法向量 $\eta_g = u^{-2/(n-6)}\partial_{x_1}$确定。因此， $\partial\mathcal{B}$ 的第二基本形式 II 和平均曲率 H 为

$$II_{ij} = -\langle\nabla_{\partial x_j}\eta, \partial_{x_i}\rangle = \frac{2}{n-6}\delta_{ij}u^{\frac{8-n}{n-6}}\partial_{x_1}u, \quad H = \frac{2n}{n-6}u^{\frac{8-n}{n-6}}\partial_{x_1}u.$$

因此，只要证明 $\partial\mathcal{B}$，就能得出其（弱）凸性 $\partial_{x_1}u \geqslant 0$ 沿着超平面 $\{x_1 = 0\}$成立。根据命题A，我们有

$$-\Delta u \geqslant 0 \quad \text{and} \quad (-\Delta)^2 u \geqslant 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Gamma.$$

现在，我们将（$\mathcal{Q}_{6,\ \delta,\ N}$）改写为一个二阶系统，令

$$\mathrm{u}_0 = u, \quad \mathrm{u}_1 = -\Delta u \quad \text{and} \quad \mathrm{u}_2 = (-\Delta)^2 u.$$

于是，对于满足下式的 $i = 0,\ 1,\ 2$，我们得到 $\mathrm{u}_i : \ \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \to (0, \ \infty)$

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{u}_0 &= \mathrm{u}_1 \geqslant 0 \\ -\Delta \mathrm{u}_1 &= \mathrm{u}_2 \geqslant 0 \\ -\Delta \mathrm{u}_2 &= c_n u_0^{\frac{n+6}{n-6}} \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

由 [28, 定理 27] 可知，奇异集的牛顿容量为零，即$\mathrm{cap}(\Gamma) = 0$。因此，可以找到 $a_0 > 0$ 和 $a_j \in \mathbb{R}$，对于 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ n$ 使得

$$\begin{cases} \mathrm{u}_0(x) &= a_0|x|^{6-n} + \sum_{j=1}^n a_j x_j |x|^{4-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{4-n}\right) \\ \partial_{x_i}u_0(x) &= -(n-6)a_0 x_i |x|^{4-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{4-n}\right) \\ \partial^2_{x_i x_j}u_0(x) &= \mathcal{O}\left(|x|^{4-n}\right), \end{cases} \tag{5.2}$$

进一步求导可得

$$\begin{cases} \mathrm{u}_1(x) &= b_0|x|^{4-n} + \sum_{j=1}^n b_j x_j |x|^{2-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{2-n}\right) \\ \partial_{x_i}\mathrm{u}_1(x) &= -(n-4)b_0 x_i |x|^{-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{2-n}\right) \\ \partial^{(2)}_{x_i x_j}\mathrm{u}_1(x) &= \mathcal{O}\left(|x|^{2-n}\right) \end{cases} \tag{5.3}$$

and

$$\begin{cases} \mathrm{u}_2(x) &= c_0|x|^{2-n} + \sum_{j=1}^n c_j x_j |x|^{-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{-n}\right) \\ \partial_{x_i}\mathrm{u}_2(x) &= -(n-2)c_0 x_i |x|^{-n} + \mathcal{O}\left(|x|^{2-n}\right) \\ \partial^{(2)}_{x_i x_j}\mathrm{u}_2(x) &= \mathcal{O}\left(|x|^{-n}\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $|x| \to 0$，当 b_0、$c_0 > 0$ 且 b_j、$c_j \in \mathbb{R}$ 时，对于 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ n$。

现在，我们准备对函数三元组 (u_0,u_1,u_2) 应用移动平面法。对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 $\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$，并令 $T_\lambda = \partial\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \lambda\}$。此外，令 $\Sigma'_\lambda = \Sigma_\lambda \setminus \Gamma$。对于任意 $x \in \Sigma'_\lambda$，令

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$$

是 x 关于超平面 $T_\lambda = \{x_1 = \lambda\}$ 的反射。最后，移动平面法的目标是证明，对于任意 $\lambda \leqslant 0$ 和 $i = 0$, 1、2，均有

$$w_i^\lambda(x) > 0 \quad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, \tag{5.5}$$

其中 $w_i^\lambda{:}\Sigma'_\lambda \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$w_i^\lambda(x) = u_i(x) - u_i(x^\lambda).$$

一旦我们证明了（5.5），令 $\lambda \nearrow 0$ 第一个不等式便推出 $u_{x_1} \geqslant 0$ 在 $T_0 = \partial\mathcal{B}$上成立，从而完成证明。

注意，展开式（5.4）表明 u_2 并非恒等于零。因此，利用强最大值原理和（5.1）中的最后一个方程，我们得到 $u_2 > 0$ 在 $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma$上成立。反向推理，不等式 $u_2 > 0$ 以及相同的推理表明 $u_1 > 0$ 在 $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma$上成立，进而得到 $u_0 > 0$ 在 $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma$上成立。

奇异集 Γ 是紧的，因此存在 $R_0 > 0$ 使得 $\Gamma \subset \mathbb{B}_{R_0}(0)$。我们利用广义最大值原理 [20, 定理3。4] 得出存在 $\delta > 0$，其取决于 $R > R_0$，使得

$$u_0|_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\Gamma} \geqslant \delta, \quad u_1|_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\Gamma} \geqslant \delta, \quad \text{and} \quad u_2|_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\Gamma} \geqslant \delta. \tag{5.6}$$

结合我们的展开式（5.4）与 [5] 的引理2.3，可得存在 $R_1 > 0$ 和 $\lambda_1 \leqslant \lambda_0$ 使得对每个 $\lambda < \lambda_1$，都有

$$w_0^\lambda(x) > 0, \quad w_1^\lambda(x) > 0, \quad \text{and} \quad w_2^\lambda(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \in \Sigma_\lambda \quad \text{and} \quad |x| > R.$$

利用这一点 将该不等式与（5.6）结合，即可推出存在 $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ 使得

$$w_0^\lambda(x) > 0, \quad w_1^\lambda(x) > 0, \quad \text{and} \quad w_2^\lambda(x) > 0 \quad \text{on} \quad \Sigma'_\lambda \quad \text{for each} \quad \lambda \leqslant \lambda_2.$$

根据构造

$$\Delta w_2^\lambda(x) = c_n \left(u_0(x^\lambda)^{\frac{n+6}{n-6}} - u_0(x)^{\frac{n+6}{n-6}} \right) < 0 \quad \text{on} \quad \Sigma'_\lambda \quad \text{for each} \quad \lambda \leqslant \lambda_2. \tag{5.7}$$

另一方面，渐近展开式（5.4）表明

$$w_2^\lambda(x) \to 0 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty. \tag{5.8}$$

结合 (5.7)、(5.8) 和 $w_2^\lambda\big|_{T_\lambda} = 0$，由最大值原理可知，对每个 $x \in \Sigma'_\lambda$ 和 $\lambda \leqslant \lambda_2$，$w_2^\lambda(x) \geqslant 0$。然而，由于度量 g 在 Ω 上是完备的，我们知道 w_2^λ 在 Σ'_λ 上并非恒等于零，因此再次由最大值原理可知，对每个$x \in \Sigma'_\lambda$ 和 $\lambda \leqslant \lambda_2$，$w_2^\lambda(x) > 0$。同样，类似的论证表明，对每个$\lambda \leqslant \lambda_2$，$w_1^\lambda > 0$ 和 $w_0^\lambda > 0$ 在 Σ'_λ 上。

此时我们定义

$$\lambda^* = \sup\{\lambda \leqslant 0 : w_i^\mu(x) > 0 \text{ for each } \mu \leqslant \lambda \text{ and } i = 0, 1, 2\}$$

并证明 $\lambda^* = 0$。根据我们的定义，有

$$\Delta w_0^\lambda(x) = -\Delta u_0(x) + \Delta u_0(x^\lambda) < 0$$

对于每个 $x \in \Sigma'_\lambda$ 和 $\lambda < \lambda^*$，因此 $\Delta w_0^{\lambda^*} \leqslant 0$ 在 Σ'_{λ^*}上。通过类似的论证，我们还得到

$$\Delta w_1^{\lambda^*} \leqslant 0, \quad \Delta w_2^{\lambda^*} \leqslant 0 \text{ on } \Sigma'_{\lambda^*}.$$

现在假设 $\lambda^* < 0$，并令 $x^* \in \overline{\Sigma'_{\lambda^*}}$ 使得对于某个 $i = 0$，有 $\mathrm{w}_i^{\lambda^*}(x^*) = 0$，1、2。若 $x^{\lambda^*} \in \Sigma'_{\lambda^*}$ 是一个内点，则最大值原理意味着 $\mathrm{w}_i^{\lambda^*} \equiv 0$，进而意味着 u_i 关于超平面 T_{λ^*}对称。这是不可能的，因为奇异集 Γ 位于 T_{λ^*}的一侧。另一方面，若 $x^* \in T_{\lambda^*}$，则根据Hopf边界引理（并结合 $\mathrm{w}_i^{\lambda^*}$ 在 Σ'_{λ^*} 中可能不是常数这一事实），我们有

$$0 < \partial_{x_1} \mathrm{w}_i^{\lambda^*}(x^*) = 2\partial_{x_1} \mathrm{u}_i(x^*). \tag{5.9}$$

然而，渐近展开式（5.2）、（5.3）和（5.4）结合 $\lambda^* < 0$ 告诉我们

$$\mathrm{u}_i(x) - \mathrm{u}_i(x^{\lambda^*}) \geq \delta_3 \text{ for } |x| > R_2 \text{ and } x_1 = \lambda^* \tag{5.10}$$

对于某些正数 δ_3 和 R_2。结合（5.9）和（5.10）可知，不等式 w_i^{λ}在某个较小的值 $\lambda < \lambda^*$下仍然成立，这与 λ^* 的定义矛盾。□

首先，我们证明上界估计。我们的证明借鉴了 Pollack 在标量曲率情形下对相应上界的证明。

命题 5.2. 设 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 是方程（$\mathcal{Q}_{6,\ g_0,\ N}$）的一个正奇异解。存在一个仅依赖于 n 和 d 的 $C_1 > 0$，使得

$$u(x) \leqslant C_1 \mathrm{d}_{g_0}(x, \Lambda)^{-\gamma_n}.$$

证明。设 $p_0 \notin \Lambda$，且 $\rho > 0$ 满足 $\mathcal{B}_\rho(p_0) \subset \Omega$，其中 $\mathcal{B}_\rho(p_0)$ 是相对于圆度量的测地球。定义辅助函数 $\psi_\rho\colon\ \mathcal{B}_\rho(p_0) \to \mathbb{R}$ 为

$$\psi_\rho(x) = (\rho - \mathrm{d}_{g_0}(x, x_0))^{\gamma_n} u(x).$$

注意到选择 $\rho = \frac{1}{2}\mathrm{d}_{g_0}(x_0, \Lambda)$，可得

$$\psi_\rho(x_0) = \rho^{\gamma_n} u(x_0) = 2^{-\gamma_n} \mathrm{d}_{g_0}(x_0, \Lambda)^{\gamma_n} u(x_0).$$

我们断言，存在一个仅依赖于 n 的 $C > 0$，使得对于 λ、u、x_0 和 ρ 的所有可容许取值，$\psi_\rho(x) \leqslant C$。反设可以找到满足下列条件的可容许参数序列 $\{\Lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$、$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$、$\{p_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$：

$$M_k = \psi_\rho(p_{1,k}) = \sup_{x \in \mathcal{B}_{\rho_k}(p_{0,k})} \psi_\rho(x) \to +\infty.$$

此外，我们注意到 $\psi_\rho|_{\partial\mathcal{B}_{\rho_k}(p_{0,k})} = 0$，因此 $p_{1,k} \in$ 属于 $\mathrm{int}(\mathcal{B}_{\rho_k}(p_{0,k}))$。接下来，取 $r_k = \rho_k - \mathrm{d}_{g_0}(p_{1,k}, p_{0,k})$，并以 $p_{1,k}$ 为中心建立测地正规坐标，记为 y，然后定义

$$\lambda_k = 2u_k(p_{1,k})^{-\gamma_n}, \quad R_k = r_k\lambda_k^{-1} = 2^{-1} r_k (u_k(p_{1,k}))^{-\gamma_n} = 2^{-1} M_k^{1/\gamma_n}.$$

现在，对于某个 $\alpha \in (0, 1)$，我们通过 w_k 构造爆破序列 $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{6,\alpha}(\mathbb{B}_{R_k})$：$\mathbb{B}_{R_k}(0) \to \mathbb{R}$ 满足

$$w_k(y) = \lambda_k^{\gamma_n} u_k(\lambda y) \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}.$$

因此，利用注 1.1 中的共形不变性，可以验证函数 $w_k \in \mathcal{C}^{6,\alpha}(\mathbb{B}_{R_k})$ 满足

$$P^6_{\lambda g_k} w_k = c_n w_k^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{B}_{R_k}.$$

此外，根据构造可知

$$2^{\gamma_n} = w_k(0) = \sup_{\mathbb{B}_{R_k}(0)} w_k(x) \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N},$$

根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，这意味着存在一个在紧集上一致收敛的子序列。

此外，不难验证，重标度度量 λg_0 收敛于经典欧几里得度量 δ，当 $k \to \infty$时。因此，通过对爆破序列取极限，我们得到一个正函数 $w_\infty \in \mathcal{C}^{6,\alpha}(\mathbb{R}^n)$，满足 $w_\infty(0) = \sup w_\infty = 2^{\gamma_n}$ 以及

$$(-\Delta)^3 w_\infty = c_n w_\infty^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

由定理 A (a) 中的分类定理可知，我们必须有

$$w_\infty(x) := 2^{-\gamma_n} \left(1 + |x|^2\right)^{-\gamma_n} = 2^{-\gamma_n} u_{\mathrm{sph}}(x).$$

因此，当 $k \gg 1$ 足够大时，每个解 u_k 都有一个泡。换言之，对于足够大的 $k \gg 1$，$p_{1,k}$ 的一个小邻域在 $\mathcal{C}^{6,\alpha}$-范数意义下接近圆度量，因此具有凹边界。

我们通过显式计算测地球面的平均曲率来验证这一点。利用$g_0 = 4(1+|x|^2)^{-2}\delta$，直接计算可得，超曲面的平均曲率由 $H_\Sigma = -\operatorname{tr}_g \langle \nabla_{\partial_\ell} \nu_\Sigma, \partial_m \rangle$ 给出，其中 ν_Σ 是 Σ的单位内法向量。

以 $p = 0$ 为中心的测地球面与以原点为中心的欧几里得圆球面重合（半径不同），因此

$$\nu_\Sigma = -\left(\frac{1+|x|^2}{2|x|}\right) x^\ell \partial_{x_\ell}.$$

直接计算可得

$$H_\Sigma = -2n|x|(1+|x|^2) + \frac{n-1+n|x|^2}{|x|},$$

当 $|x| > 3$ 时为负。此外，由于

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - w_\infty\|_{\mathcal{C}^{6,\alpha}(B_{3R_k/4}(0))} = 0,$$

成立 $\partial B_{3R_k/4}(0)$ 关于度量 $\hat{}g_k \in \mathrm{Met}^\infty(B_{3R_k/4}(0))$ 也是平均凹的，该度量定义为 $\hat{}g_k = w_k^{4/(n-6)} \delta_{\ell m}$，这进而意味着 $\partial \mathbb{B}_{3|p_{1,\,k}|/8}(p_{1,\,k})$ 关于度量 $g_k \in \mathrm{Met}^\infty(\Omega)$ 也是平均凹的，该度量由 $\hat{}g_k = u_k^{4/(n-6)} \delta_{\ell m}$给出。这与引理 5.1矛盾，从而证明了该结论。 □

其次，我们得到一个下界估计。

命题 5.3. 设 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 是方程 ($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$) 的一个正奇异解。存在一个仅依赖于 u 的 $C_2 > 0$，满足

$$C_2 \min_{j \in I_N} \mathrm{d}_{g_0}(x, p_j)^{-\gamma_n} \leqslant u(x).$$

证明。 事实上，注意到应用 [17, 定理 1.3] 在柱坐标 $v = \mathfrak{F}(u$中，可得 $\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}(v) \leqslant 0$，当且仅当

$$\liminf_{t\to\infty} v(t,\theta) = \limsup_{t\to\infty} v(t,\theta) = \lim_{t\to\infty} v(t,\theta) = 0.$$

否则，若 $\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}(v) < 0$，则存在依赖于解 v 的 $C_2 > 0$，使得$v(t,\theta) \geqslant C_2$。命题得证。□

第三，我们针对当前情形得到了一个Harnack不等式版本，这对证明我们的主要结果至关重要。

命题 5.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 且 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$。假设 $-\Delta u \geqslant 0$、 $\Delta^2 u \geqslant 0$，以及

$$(-\Delta)^3 u = f(u),$$

其中 f 或者是线性的，或者是超线性的，且 $f(0) = 0$。那么，存在 $\rho_0 > 0$ ，使得对于$\rho \in (0, \rho_0]$，以及仅依赖于 Ω、 f 和 ρ 的 $C_3 > 0$，有

$$\sup_{\mathcal{B}_\rho(0)} u \leqslant C_3 \inf_{\mathcal{B}_\rho(0)} u.$$

证明。 证明只需对 [6, 定理 36] 作直接改编。 □

6. Compactness result

本节中，我们证明本文的主要结果。

在进行证明之前，我们需要证明圆球面上的六阶 GJMS 算子存在一个正格林函数，其在极点附近具有预设的渐近速率，该速率由平直空间三重拉普拉斯算子的基本解给出。

命题 6.1。设 $p \in \Lambda \subset (\mathbb{S}^n, g_0)$ 是标准圆球面上的一点。存在一个以 p 为极点的格林函数，记为 G_p: $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to (0, \infty)$，满足

$$P_{g_0} G_p = \delta_p,$$

其中 P_{g_0} 是由下式给出的圆度量的六阶GJMS算子 (1.2)，且 δ_p 是集中于 p的狄拉克函数。此外，存在 $C_n > 0$ ，其仅依赖于 n ，使得

$$G_p(x) = C_n \mathrm{d}_{g_0}(x, p)^{6-n} + \mathcal{O}(1) \tag{6.1}$$

在共形正规坐标中。

证明。这是 [10，命题 21] 针对标准圆球面（$\mathbb{S}^n$， g_0）的直接应用。□

定理 *1.3* 的证明。设 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(U_k)^{4/n-6} g_0\} \subset \mathcal{M}_N^6$ 是一列容许度量，其中每一个都是 $\Omega_k = \mathbb{S}^n \backslash \Lambda_k$ 上的完备共形平坦度量，并且满足 $Q_{g_k}^6 \equiv Q_n = {}^{n}{}_{(n^4-20n^2+64)\ 32}$。记 g_k ~~的穿孔为~~

$$\Lambda_k := \mathrm{sing}(U_k) = \{p_{1,k}, \ldots, p_{N,k}\} \subset \mathbb{S}^n.$$

证明将分为一系列步骤。

第一步将简化我们后续的分析，因为它允许我们假设奇点是固定的。

步骤 1. 取一个子序列后，不妨设当 $k \gg 1$ 充分大时，每个 U_k在集合 $K_1 := \mathbb{S}^n \setminus (\cup_{i=1}^N \mathcal{B}_{\delta_1/2}(p_{j,\ i}))$ 上均为非奇异。

事实上，当 $0 < \delta_1$ 足够小时，该集合

$$(\mathbb{S}^n)^N \setminus \left\{(q_1, \ldots, q_k) \in (\mathbb{S}^n)^N : \mathrm{d}_{g_0}(q_j, q_\ell) \geqslant \delta_1 \text{ for each } j \neq \ell\right\}$$

是紧集，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$都包含每个奇异集 Λ_k。因此，存在 $\{p_{1,\infty}, \ldots, p_{N,\infty}\} \subset \mathbb{S}^n$以及一个收敛子序列，使得 $p_{j,\ k} \to p_{j,\ \infty}$ 当 $k \to +\infty$时成立，从而证明步骤 1。

为便于记号，我们定义紧集

$$K_\ell := \mathbb{S}^n \setminus \left(\cup_{j=1}^N \mathcal{B}_{2^{-\ell}\delta_1}(p_{j,\infty})\right) \quad \text{for each} \quad \ell \in \mathbb{N}$$

注意，由构造可知，族 $\{K_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是极限奇异集的紧穷竭

$$\Omega_\infty := \mathbb{S}^n \setminus \Lambda_\infty, \quad \text{where} \quad \Lambda_\infty := \{p_{1,\infty} \ldots, p_{k,\infty}\}.$$

此外，由于当 $k \to +\infty$ 时 $p_{j,k} \to p_{j,\infty}$ 收敛，对于每个固定的 $\ell \in \mathbb{N}$ ，存在 $k_0 \gg 1$，使得 $k \geqslant k_0$ 蕴含 U_k 在 K_ℓ 中是光滑的。

第二步基于一致上界，并说明我们可以提取一个极限。步骤 2。 存在 $U_\infty \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\infty)$ 满足方程 ($\mathcal{Q}_{6,g_0,N}$)，使得

$$\lim_{k\to+\infty} \|U_\infty - U_k\|_{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega_\infty)} = 0. \tag{6.2}$$

事实上，利用命题 5.2中的上界，对于每个紧子集 $K \subset\subset \Omega_\infty$，存在 $\alpha \in (0,1)$ 以及 $C_1 > 0$，它们仅依赖于 n、Ω 和 α，使得

$$\|U_k\|_{\mathcal{C}6,\alpha(K)} \leqslant C_1 \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}.$$

因此，根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，可以找到极限 $U_\infty \in \mathcal{C}^{6,\ \alpha}(K)$，以及一个收敛子序列（仍记作原序列），使得

$$\lim_{k\to+\infty} \|U_\infty - U_k\|_{\mathcal{C}^{6,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_\infty)} = 0.$$

此外，应用标准的椭圆正则性理论，可直接得到 (6.2) 成立，因此步骤 2 得证。

下一步是证明这个极限非平凡。

步骤 3. $U_\infty > 0$ 在 Ω 上。

如果这一步不成立，则存在 $p_* \in\Omega_\infty$，使得

$$0 = U_\infty(p_*) = \lim_{k\to+\infty} U_k(p_*).$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 $\varepsilon_k = U_k(p_*)$ 以及重标度函数 $U_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_k)$，如下所示

$$\widehat{U}_k(x) = \varepsilon_k{}^{-1} U_k(x) \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}.$$

由注记 1.1 可知

$$P_{g_0}\widehat{U}_k = \varepsilon_k^{\frac{12}{n-6}} c_n \widehat{U}_k^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \Omega_k \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}.$$

此外，根据构造，序列 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足归一化条件

$$\widehat{U}_k(p_*) = 1 \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.3}$$

由引理 5.4 中的 Harnack不等式，存在一个正常数 C_1 仅依赖于n 和 ℓ，使得

$$\sup_{K_\ell} |u_{\mathrm{sph}}\widehat{U}_k| \leqslant C_1. \tag{6.4}$$

然而，还存在另一个正数常数 C_2，同样只依赖于 n 和 ℓ，使得

$$C_2 \leqslant u_{\mathrm{sph}} \leqslant 2^{\gamma_n}. \tag{6.5}$$

结合（6.4）和（6.5，存在一个一致常数 C_3 使得

$$\sup_{K_\ell} \widehat{U}_k \leq C_3,$$

因此，由阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们可以取一个子序列 U_k，它在 Ω 的紧子集上一致收敛到一个光滑函数 U_∞。

这个极限函数 $U_\infty : \Omega_\infty \to \mathbb{R}$ 满足

$$P_{g_0}\widehat{U}_\infty = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\infty$$

因此它具有如下形式

$$\widehat{U}_\infty = \sum_{j=1}^{N} \beta_j G_{p_{j,\infty}}$$

对于某些实数的集合 β_1、……、β_N。归一化条件（6.3）意味着系数 β_{j_0} 中的一个为正，因此在必要时重新标记穿孔点后，我们可以假设 $\beta_1 > 0$。

现在我们选取一个立体投影，将p_1、∞ 映到原点，并进行定义2.1中的 Emden-Fowler 坐标变换，从而得到函数

$$v_k := \mathfrak{F}(u_{\mathrm{sph}} U_k) \quad \text{and} \quad \widehat{v}_k := \mathfrak{F}(u_{\mathrm{sph}} \widehat{U}_k)$$

及其相应的极限

$$v_\infty := \mathfrak{F}(u_{\mathrm{sph}} U_\infty) \quad \text{and} \quad \widehat{v}_\infty := \mathfrak{F}(u_{\mathrm{sph}} \widehat{U}_\infty).$$

展开式（6.1）意味着

$$\widehat{v}_\infty(t,\theta) = e^{-\gamma_n t}(\cosh t)^{-\gamma_n}(C_n e^{-\gamma_n t} + \mathcal{O}(1)) = C_n + \mathcal{O}(e^{(6-n)t}) \quad \text{as} \quad t \to +\infty. \tag{6.6}$$

此外，注意到 $\widehat{v}_k \in \mathcal{C}^6(\mathcal{C}_T)$ 满足偏微分方程

$$P^6_{\mathrm{cyl}} \widehat{v}_k = \varepsilon_k^{\frac{12}{n-6}} c_n \widehat{v}_k^{\frac{n+6}{n-6}} \quad \text{in} \quad \mathcal{C}_{T_k} \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N},$$

将其与（6.6）和命题4.6 以及收敛性 $\widehat{v}_k \to \widehat{v}_\infty$ 结合，可知当 t充分大时

$$\begin{aligned} \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}^{\varepsilon_k^{\frac{12}{n-6}} c_n}_{\mathrm{cyl}} \mathrm{d}\theta &= \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(\widehat{v}_k) + \mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(\widehat{v}_k) + \frac{n-6}{2n} \varepsilon^{\frac{12}{n-6}} c_n |\widehat{v}_k|^{\frac{2n}{n-6}} \mathrm{d}\theta \\ &= -\widetilde{C}_n \beta_1^2 + \mathcal{O}(e^{(6-n)t}). \end{aligned} \tag{6.7}$$

˜对某个 $C_n > 0$ 成立。另一方面，根据我们的构造，有

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}(v_k) &= \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(v_k) + \mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(v_k) + F(v_k)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon_k^2 \left(\mathcal{H}_{\mathrm{rad}}(\widehat{v}_k) + \mathcal{H}_{\mathrm{ang}}(\widehat{v}_k)\right) + \varepsilon_k^{\frac{2n}{n-6}} F(\widehat{v}_k)\mathrm{d}\theta \to 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

由（6.7）和（6.8），可得

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g_k, p_{1,k}) = 0,$$

结合命题 4.4，可推出 $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_1(g_k) = 0$. 这与颈部尺寸有正下界这一假设相矛盾，即 $\varepsilon_j(g_k) > \delta_1$ 对某个 $0 < \delta_1 \ll 1$ 成立。

最后，我们可以完成论证

₄步骤 4。 度量 $g_\infty = U_\infty^{\overline{n-6}} g_0$ 是 Ω 上的完备度量∞。事实上，反设 g_∞ 不完备。那么存在一个指标 $j \in \{1,\dots,N\}$ 使得 $\liminf_{x\to p_{j,\infty}} U_\infty(x) < \infty$。此时，命题 5.3 中的可去奇点结果意味着

$$\mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g_\infty, p_{j,\infty}) = 0.$$

然而，根据构造

$$0 = \mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g_\infty, p_{j,\infty}) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{rad}}(g_k, p_{j,k}) \geqslant \delta_2,$$

根据命题4.4可得 $\varepsilon_j(g_k) \geqslant \delta_2$，这与事实 $g_k \in \mathcal{Q}^6_{\delta_1,\ \delta_2}$矛盾。综合以上所有步骤，主定理得证。□

Appendix A. Higher order curvature tensors

设 (M^n, g) 是一个满足 $n \geqslant 2$ 的黎曼流形。下文中，我们始终采用爱因斯坦求和约定。在局部坐标标架 $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ 下，记 $\mathrm{Rm}_g \in \mathfrak{T}^3_1(M)$ 为黎曼曲率张量，$\mathring{\mathrm{Rm}}_g \in \mathfrak{T}^4_0(M)$ 为协变黎曼曲率张量，里奇曲率张量记为 $\mathrm{Ric}_g = \mathrm{tr}_g\ \mathring{\mathrm{Rm}}_g \in \mathfrak{T}^2_0(M)$，可表示为 $\mathrm{Ric}_{jk} = \mathring{\mathrm{Rm}}^i_{ijk} = g^{i\ell}\ \mathring{\mathrm{Rm}}_{ijk\ell}$。我们还考虑标量曲率 $R_g = \mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}_g \in \mathfrak{T}^0_0(M)$，其定义为 $R = g^{ij}\mathrm{Ric}_{ij}$，其中 $\mathfrak{T}^r_s(M)$ 表示 M 上 (r,s) 型张量的集合，$\mathrm{with}\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$，且 $\mathrm{tr}_g\colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-2}_s(M)$。此外，对于拉普拉斯–贝尔特拉米算子，我们简记为 $\Delta_g := g^{ij}\nabla_i\nabla_j$，其中 ∇_g 是与 g 相联系的列维-奇维塔联络。

此外，定义一些涉及两个张量的运算也很方便。

定义 A.1. 首先，我们引入叉积 $\times\colon \mathrm{Sym}_2(M) \times \mathrm{Sym}_2(M) \to \mathrm{Sym}_2(M)$，定义如下：

$$(h_1 \times h_2)_{ij} := g^{k\ell}h_{1,ik}h_{2,j\ell} = h^\ell_{1,i}h_{2,\ell j}.$$

其次，我们定义点积 $\times\colon \mathrm{Sym}_2(M) \times \mathrm{Sym}_2(M) \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$h_1 \cdot h_2 := \mathrm{tr}_g(h_1 \times h_2) = g^{ij}g^{k\ell}h_1^{ik}h_{2,j\ell} = h_1^{jk}h_{2,jk}.$$

第三，我们还回顾一下 Kulkarni–Nomizu积 $\owedge\colon \mathrm{Sym}_2(M) \times \mathrm{Sym}_2(M) \to \mathfrak{T}^4_0(M)$

$$(h_1 \owedge h_2)_{ijk\ell} := h_{1,i\ell}h_{2,jk} + h_{1,jk}h_{2,i\ell} - h_{1,ik}h_{2,j\ell} - h_{1,j\ell}h_{2,ik}.$$

最后，我们考察 $\cdot\colon \mathrm{Sym}_2(M) \to \mathrm{Sym}_2(M)$ 和 $\delta_g\colon \mathrm{Sym}_2(M) \to \mathbb{R}$，

$$(\mathring{\mathrm{Rm}} \cdot h)_{jk} := R_{ijk\ell}h^{i\ell} \quad and \quad (\delta_g h)_i := -(\mathrm{div}_g h)_i = -\nabla^j h_{ij},$$

其中 后者是李导数的 L^2-形式伴随算子（相差一个标量倍数）).

定义 A.2. 我们分别将舒滕张量、外尔张量、巴赫张量和无名张量定义为

$$\begin{aligned}
A_g &:= \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{1}{2(n-1)}R_g g\right)\\
W_g &:= \mathring{\mathrm{Rm}}_g - A_g \owedge g\\
B_g &:= \Delta_g A_g - \nabla_g^2 \mathrm{tr}_g A_g + 2\mathring{\mathrm{Rm}}_g \cdot A_g - (n-4)A_g \times A_g - |A_g|^2 g - 2(\mathrm{tr}_g A_g)A_g, A
\end{aligned}$$

这些表达式均以抽象无指标形式书写。

由此，我们引入以下张量

$$\begin{aligned}
T^2_g &:= (n-2)\sigma_1(A_g)g - 8A_g,\\
T^4_g &:= -\frac{3n^2-12n-4}{4}\sigma_1(A_g)^2 g + 4(n-4)|A|^2_g g + 8(n-2)\sigma_1(A_g)A_g\\
&\quad + (n-6)\Delta_g\sigma_1(A_g)g + 48A_g^2 - \frac{16}{n-4}B_g,\\
T^6_g &:= -\frac{1}{8}\sigma_3(A_g) - \frac{1}{24(n-4)}\langle B_g, A_g\rangle_g,
\end{aligned}$$

其中，对于每个 $k \in \mathbb{N}$， σ_k 是第 k 个初等对称函数。

基于这一记号，我们引入如下高阶曲率的概念

定义 A.3. 对于任意 $g \in \mathrm{Met}^{\infty}(\Omega)$，我们分别将 N 阶 Q-曲率 Q_g^N for$N = 2$、4、6 定义为

$$
\begin{aligned}
Q_g^2 &:= R_g \\
Q_g^4 &:= -\frac{1}{2(n-1)}\Delta R_g - \frac{2}{(n-2)^2}|\,\mathrm{Ric}_g\,|^2 + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}R_g^2, \\
Q_g^6 &:= -3!2^6 T_g^6 - \frac{n+2}{2}\Delta_g(\sigma_1(A_g)^2) + 4\Delta_g|A|_g^2 - 8\delta\left(A_g \mathrm{d}\sigma_1(A_g)\right) + \Delta_g^2\sigma_1(A_g) \\
&\quad - \frac{n-6}{2}\sigma_1(A_g)\,\Delta_g\sigma_1(A_g) - 4(n-6)\sigma_1(A_g)\,|A|_g^2 + \frac{(n-6)(n+6)}{4}\sigma_1(A_g)^3 .
\end{aligned}
$$

与 这些曲率相关联，我们有如下共形不变算子 s

定义 A.4. 对任意 $g \in \mathrm{Met}^{\infty}(\Omega)$，我们将 N 阶 GJMS 算子 $P_g^N$for$N = 2$ 分别定义为 4、6：

$$
\begin{aligned}
P_g^2 &:= -\Delta_g + \frac{n-2}{2}R_g \\
P_g^4 &:= \Delta_g^2 - \mathrm{div}\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}\,\mathrm{Ric}_g\right)\mathrm{d} + \frac{n-4}{2}Q_g^4 \\
P_g^6 &:= -\Delta_g^3 - \Delta_g\delta T_2\mathrm{d} - \delta T_2\mathrm{d}\Delta_g - \frac{n-2}{2}\Delta_g\left(\sigma_1(A_g)\,\Delta_g\right) - \delta T_4\mathrm{d} + \frac{n-6}{2}Q_g^6.
\end{aligned}
$$

当 $N = 2$ 时，算子 $P_g^2 = L_g$ 就是所谓的共形拉普拉斯算子。

Appendix B. Modica estimates

在本附录中，我们讨论正光滑解可能的逐点估计（$\mathcal{P}_{6,\ \infty}$）。这些估计对于相关的共形平坦度量具有重要的几何意义。

在 [16, 定理 1.4], 中，证明了以下方程的正光滑解

$$
\Delta^2 u = \frac{n(n-4)(n^2-4)}{16}u^{\frac{n+4}{n-4}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.
$$

满足以下逐点不等式

$$
-\Delta u - \frac{4}{n-2}\frac{|\nabla u|^2}{u} \geqslant \sqrt{\frac{n-4}{n}}u^{\frac{n}{n-4}} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.
$$

这尤其意味着，共形平坦度量 $g = u^{4/(n-4)}\delta$的标量曲率 Q_g^2 为正。这类结果在文献中称为莫迪卡型估计。

In 在我们的情形中，我们首先将度量 $g \in [g_0]$ 写为 $g = (u^{\frac{n-2}{n-6}})^{\frac{4}{n-2}}\delta$，于是得到

$$
Q_g^2 = -\frac{4(n-1)}{n-2}u^{\frac{-(n+2)}{n-6}}\Delta\left(u^{\frac{n-2}{n-6}}\right) = -\frac{4(n-1)}{n-6}u^{-\frac{n-2}{n-6}}\left(\Delta u + \frac{4}{n-6}\frac{|\nabla u|^2}{u}\right). \tag{B.1}
$$

and

$$
-\Delta\left(u^{\frac{n-2}{n-6}}\right) = -\Delta u - \frac{4}{n-6}\frac{|\nabla u|^2}{u}.
$$

由此我们得出，$Q_g^2 \geqslant 0$蕴含 $-\Delta u \geqslant 0$，事实上它是一个更强条件。类似地，写作 $g = (u^{\frac{n-4}{n-6}})^{\frac{4}{n-4}}\delta$，可得

$$
Q_g^4 = \frac{2}{n-4}u^{-\frac{n+4}{n-6}}\Delta^2\left(u^{\frac{n-4}{n-6}}\right). \tag{B.2}
$$

此外，经过冗长的计算可得

$$\begin{aligned}(-\Delta)^2\left(u^{\frac{n-4}{n-6}}\right) &= \frac{n-4}{n-6}u^{\frac{2}{n-6}}\Delta^2 u+\frac{8(n-4)}{(n-6)^2}u^{\frac{8-n}{n-6}}\langle\nabla u,\nabla\Delta u\rangle\\ &\quad+\frac{4(n-4)}{(n-6)^2}u^{\frac{8-n}{n-6}}|D^2u|^2+\frac{8(n-4)(8-n)}{(n-6)^3}u^{\frac{-2(n-7)}{n-6}}D^2u(\nabla u,\nabla u)\\ &\quad+\frac{4(n-4)(8-n)}{(n-6)^3}u^{\frac{-2(n-7)}{n-6}}|\nabla u|^2\Delta u+\frac{2(n-7)(n-8)}{(n-6)^4}u^{\frac{20-3n}{n-6}}|\nabla u|^4,\end{aligned}$$

其中

$$|D^2u|^2=\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2\quad\text{and}\quad D^2u(\nabla u,\nabla u)=\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}u_{x_i}u_{x_j}.$$

因此，条件 nditions $Q_g^2\geqslant 0$ 和 $Q_g^4\geqslant 0$ 还不足以直接保证 $\Delta^2u\geqslant 0$ y.

基于此，自然会问以下结果是否成立。

猜想 B.1. 设 $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 是 ($\mathcal{P}_{6,\infty}$) 的一个正解。则，由 给出的共形平坦度量满足以下逐点估计

$$Q_2(u)\geqslant\sqrt{\frac{n-6}{n}}u^{\frac{n}{n-6}}\quad\text{and}\quad Q_4(u)\geqslant\sqrt{\frac{n-6}{n}}u^{\frac{n}{n-6}}\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

其中

$$Q_2(u):=-\Delta u-\frac{4}{n-6}\frac{|\nabla u|^2}{u}.$$

and

$$\begin{aligned}Q_4(u):=\Delta^2u&-\frac{8}{(n-6)}u^{\frac{8-n}{2}}\langle\nabla u,\nabla\Delta u\rangle-\frac{4}{(n-6)}u^{\frac{8-n}{2}}|D^2u|^2-\frac{8(8-n)}{(n-6)^2}u^{7-n}D^2u(\nabla u,\nabla u)\\&-\frac{4(8-n)}{(n-6)^2}u^{7-n}|\nabla u|^2\Delta u-\frac{2(n-7)(n-8)}{(n-6)^3(n-4)}u^{\frac{20-3n}{2}}|\nabla u|^4.\end{aligned}$$

特别地，由此可知，与共形平坦度量$g=u^{4/(n-6)}\delta$ 相关的曲率 Q_g^2 和 Q_g^4 均为正。

References

[1] J. H. Andrade、R. Caju、J. M. do ´O、J. Ratzkin 和 A. Silva Santos，具有 Delaunay 端的常 Q-曲率度量：非退化情形， *to appear in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (2023)。[2] J. H. Andrade、J. M. do ´O 和 J. Ratzkin，球面上具有孤立奇点的完备常 Q-曲率度量空间中的紧性， *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2022** (2021) 17282–17302。[3] J. H. Andrade 和 J. Wei，临界六阶方程正奇异解的分类，*arXiv:2210.04376 [math.AP]* (2022)。[4] W. Ao、M. d. M. Gonz´alez、A. Hyder 和 J. Wei，某些分数阶拉普拉斯方程奇点的可去性与超调和性， *Indiana Univ. Math. J.* **71** (2022) 735–766。[5] L. A. Caffarelli、B. Gidas 和 J. Spruck，具有临界 Sobolev 增长的半线性椭圆方程的渐近对称性与局部行为， *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989) 271–297。[6] G. Caristi 和 E. Mitidieri，Harnack不等式及其在双调和方程解中的应用， *Partial differential equations and functional analysis Oper. Theory Adv. Appl.* 168, ¨ 2006 1 26 ，卷，Birkhauser，巴塞尔（ ）–。[7] J. S. Case 和 W. Luo，与六阶 GJMS 算子相关的边界算子， *Int. Math. Res.* ( ) –。*Not. IMRN* **21** 2021 10600 10653
[8] S. Y. Chang 和 M. M. Gonz´alez，共形几何中的分数阶拉普拉斯算子， *Adv. Math.* **226** (2011) 1410–1432。[9] S.-Y. Chang、Z.-C. Han 和 P. Yang，关于一类局部共形平坦度量几何的若干评述，*Progress in Mathematics* **333** (2020) 37–56。[10] X. Chen 和 F. Hou，关于六阶 GJMS 算子的评注， *Pacific J. Math.* **289** (2017) 35–70。

[11] A. DelaTorre、M. del Pino、M. d. M. Gonz´alez 和 J. Wei，分数阶Yamabe问题的 Delaunay型奇异解，
Math. Ann. **369** (2017) 597–626。[12] C. Fefferman 和 C. R. Graham，GJMS 算子的 Juhl公式及
Q *J. Amer. Math. Soc.* -曲
26 2013 1191 1207
率，( ) –。[13] A. R. Gover 和 B. Oersted，Kazdan-Warner 型与 Pohozaev-Schoen 型恒等式的普适原理，
Commun. Contemp. Math. **15** (2013) 1350002, 27。[14] C. R. Graham、R. Jenne、D. Mason 和 G. Sparling，拉普拉斯算子的共形不变幂 I：存在性，*J. London Math. Soc.* **46** (1992) 557–565。[15] C. R. Graham 和 M. Zworski，共形几何中的散射矩阵， *Invnt. Math.* **152** (2003) 89–118。[16] Z. Guo、X. Huang、L. Wang 和 J. Wei，关于具有临界指数的双调和椭圆方程的 Delaunay 解， *J. Anal. Math.* **140** (2020) 371–394。[17] X. Huang、Y. Li 和 H. Yang，孤立奇点附近高阶 Hardy-H´enon 方程解的超多调和性质与渐近行为， *arXiv:2210.04619 [math.AP]* (2022)。[18] T. Jin 和 J. Xiong，具有孤立奇点的高阶共形不变方程解的渐近对称性与局部行为，
Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (2020)。[19] A. Juhl，GJMS 算子与 Q-曲率的显式公式，
Geom. Funct. Anal. **23** (2013) 1278–1370。[20] N. S. Landkof， *Foundations of modern potential theory*，《数学科学基础》，第180卷，Springer-Verlag，纽约—海德堡（1972），A. P. Doohovskoy 从俄文译出。[21] R. Mazzeo 和 F. Pacard，利用渐近分析构造半线性椭圆方程的奇异解， *J. Differential Geom.* **44** (1996) 331–370。[22] R. Mazzeo、D. Pollack 和 K. K. Uhlenbeck，奇异Yamabe度量的模空间，
J. Amer. Math. Soc. ( ) –。
9 1996 303 344
[23] Q. A. Ng$\hat{}$o 和 D. Ye，重新探讨高阶 Hardy-H´enon 方程的存在性与不存在性结果，
J. Math. Pures Appl. (9) **163** (2022) 265–298。[24] S. I. Pohozhaev，关于方程 $\Delta u + \lambda f(u)$的特征函数 $= 0$，
Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965) 36–39。[25] D. Pollack，S^n子域上常正标量曲率完备度量的紧性结果，
Indiana Univ. Math. J. **42** (1993) 1441–1456。[26] R. Schoen，关于共形类中常标量曲率度量的数量，
Differential Geometry，
Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math. **52** 1991 311 320 ( ) –。
[27] R. Schoen，具有给定奇异行为的共形不变标量方程弱解的存在性， *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988) 317–392。[28] R. Schoen 和 S.-T. Yau，共形平坦流形、克莱因群与标量曲率， *Invent. Math.* **92** (1988) 47–71。[29] J. Wei 和 X. Xu，高阶共形不变方程解的分类， *Math. Ann.* **313** (1999) 207–228。

(J.H. Andrade) Department of Mathematics,
University of British ColumbiaV6T 1Z2, Vancouver-BC, Canadaand
Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo
05508-090, São Paulo-SP, Brazil*Email address*: andradejh@math.ubc.ca
Email address: andradejh@ime.usp.br

(J.M. do Ó) Department of Mathematics, Federal University of Paraíba
58051-900, João Pessoa-PB, Brazil
Email address: jmbo@pq.cnpq.br

(J. RATZKIN) Department of Mathematics, Universität Würzburg
97070, Würzburg-BA, Germany*Email address*:
jesse.ratzkin@mathematik.uni-wuerzburg.de

(J.Wei) Department of Mathematics, University of British Columbia
V6T 1Z2, Vancouver-BC, Canada*Email address*: jcwei@math.ubc.ca