arXiv:2302.05782v1 [math.RT] 11 Feb 2023

模特征 Soergel 双模、Harish-Chandra 双模与 O 类

伊万·洛谢夫

Abstract. 本文继续研究由 Bezrukavnikov 和 Riche 开创的模特征 Harish-Chandra 双模范畴，并研究 BGG O 类的模版本。我们证明了 Bezrukavnikov-Mirkovic-Rumynin 局部化定理在 Harish-Chandra 双模和 O 类中的一个版本。我们还在 Bezrukavnikov 和 Riche 先前工作的基础上，将 Harish-Chandra 双模范畴与仿射 Hecke 范畴联系起来。

Contents

1. 引言 2 1.1. 仿射 Hecke 范畴 2 1.2. Harish-Chandra 双模 3 1.3. O 类 ^{cl} 41.4. 非交换 Springer 解消 4 2. 预备知识：局部化定理 5 2.1. 导出局部化 5 2.2. 倾斜丛与非交换 Springer 解消 7 3. 预备知识：Soergel 与 Harish-Chandra 双模 8 3.1. 按照 [BR 2] 8的 Soergel 双模 3.2. 按照 [BR 2] 11的 Harish-Chandra 双模 4. 模 Harish-Chandra 双模的进一步研究 15 4.1. Harish-Chandra 双模的导出局部化 15 4.2. Grothendieck 群 17 4.3. 对偶函子 18 4.4. HC-倾斜双模 18 4.5. 反常双模 19 5. 与 Soergel 型 O 类的等价 20 5.1. 范畴 O_{R} 与 O 20 5.2. 范畴 O 的对偶性 22 5.3. 等价 O $\xrightarrow{\sim}$ 周边层范畴$(\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U})_0)$ 23 5.4. 其他等价 25 6. 模 O 类 27 6.1. 定义及等价刻画 27 6.2. 主要等价 27 6.3. Verma 模的局部化 30 参考文献 32

1. Introduction

设 $\mathbb{F}$ 是特征为 p的代数闭域。设 G 是定义在 $\mathbb{F}$上的单代数群。本文中我们始终假设 p 大于 G的考克斯特数 h。

令 W 表示 G 的 Weyl 群，令 T 为一个极大环面。记 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数，记 $\mathfrak{h}$ 为 T的李代数。记 Λ_r 为根格，记 Λ 为 T的特征格，使得 $\Lambda_r \subset \Lambda$。考虑仿射 Weyl 群 W^a:$= W \ltimes \Lambda_r$以及扩张仿射群 W^{ea}:$= W \ltimes \Lambda$。回顾一下，$W^{ea} =(\Lambda/\Lambda_r) \ltimes W^a$，其中 Λ/Λ_r是所有长度为 0 的元素组成的子群。下文中，我们始终以这种方式将 Λ/Λ_r视为 W^{ea} 的子群。对于 $\lambda \in \Lambda$，记 t_λ 为W^{ea} 中的对应元素（或其在对应辫群 Br^{ea}中的自然提升）。

本文旨在联系若干与李代数 $\mathfrak{g}$相关的范畴（三角范畴、加性范畴和阿贝尔范畴）。这些范畴中的不可分解对象（在加性设置下）和简单对象（在阿贝尔设置下）由 W^{ea} 的元素标记。我们所关注的范畴包括仿射 Hecke 范畴、Harish-Chandra 双模范畴以及（经典模）O 类。

1.1. 仿射 Hecke 范畴。我们首先讨论 W^{ea} 的仿射 Hecke 范畴。群 W^{ea} 通过投影到 W 的方式作用于 $\mathfrak{h}^*$。对于这一实现，可以赋予 Elias 和 Williamson 意义下的（图示）Soergel 双模范畴，[EW]。请注意，本文讨论的是考克斯特系统的情形；我们所需处理的扩展情形可见 [E，第 3] 节。由此得到的范畴是一个 Karoubian 幺半范畴。

Abe 还给出了仿射 Hecke 范畴的另一种“代数”实现，[A]（对于 Coxeter 群，关于 W^{ea} 的一种修正可见 [BR2，第 2.2] 节）。Abe 的构造是 Soergel 经典构造的一种版本，例如参见 [S]。与 Soergel 最初的构造不同，Abe 的构造在正特征下也适用。我们将使用 [BR2] 的版本。将 Abe 关于 W^{ea} 的范畴记作 ASBim（“A”代表 Abe，“S”代表 Soergel，“Bim”代表双模）。ASBim 中的 Hom 空间是分次的 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]$-双模，由 W 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用图支撑；它们是有限生成的自由左 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]$-模，也是有限生成的自由右 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]$-模。因此，考虑 ASBim$^\wedge$ 的完备化版本是有意义的。在这个范畴中，对象保持不变。令 R 为 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]$ 在 0 处的完备化。对于两个对象 B、$B' \in \in$ASBim$^\wedge$，我们定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ASBim}^\wedge}(B, B') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ASBim}}(B, B') \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]} \mathsf{R}.$$

注意，右侧也与左侧的完备化一致。因此，ASBim$^\wedge$仍然是一个幺半范畴。可以证明，ASBim 中的不可分解对象（相差分次移位）与 ASBim$^\wedge$ 中的不可分解对象之间存在自然双射。它们都由 W^{ea} 的元素标记。范畴 ASBim$^\wedge$ 由 Bott-Samelson 对象 B_s^{AS}（其中 s 遍历简单仿射反射集合）以及标准对象 Δ_x^{AS}（对应于 $x \in \Lambda/\Lambda_r$）生成。这些对象将在第3.1节中回顾。

这是仿射 Hecke 范畴的加性版本。人们也可以（而且应该）考虑三角化版本，即 K^b(ASBim$^\wedge$)。此外，还存在阿贝尔版本。例如，有一个最高权范畴 O_R（将其称为“Soergel 型”O 类），它实际上已经出现在 [EL 的第 6] 节中。范畴 ASBim$^\wedge$ 被识别为 O_R 中的倾斜对象范畴。

模版本 Soergel 双模　　、Harish-Chandra 双模　　ES, 与 O 类 3

可以预期 ASBim 存在两类几何实现。其中有一个可构造实现，参见 [BR3，定理 1.3、1.5]。

1.2. Harish-Chandra 双模。本文关注 ASBim$^\wedge$ 的一种相干实现。正如 [BR2], 所指出的，要得到这一实现，可以采用 Harish-Chandra 双模范畴的模版本（这是"通常的"，即特征零李代数表示论中的经典研究对象）。

令 $\mathcal{U} := U(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的包络代数。考虑 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 处的包络代数完备化版本，如 [BR2, 第 3.5] 节所述，其中取零 Harish-Chandra（简称 HC）特征。对于 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$，讨论 HC 双模是有意义的，参见 [BR2, 第 3.5] 节。这些是有限生成的 G-等变 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$-模，所得的 $\mathcal{U}$ 左作用经由 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 分解。将此范畴记为 HC$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$。其中，我们考虑"HC-倾斜"对象范畴，即形如 $T \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{U}^{\wedge_0}$ 的对象中的直 G-等变右 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$-模直和项，其中 T 是一个倾斜 G-模。将 HC-倾斜对象的全子范畴记为 HC-tilt$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$。注意，范畴 HC$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 是幺半范畴，而 HC-tilt$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 是幺半 Karoubian 加性子范畴。下面举例说明 [BR2] 中所考察的 HC-tilt$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 对象。有反射双模 B_s^{HC}，它们以简单仿射反射 s 为标记（张量化此类双模会得到经典反射函子，因此得名），以及标准双模 Δ_x^{HC}、$x \in \Lambda/\Lambda_r$（张量化它们会得到平移等价）。我们将在第 3.2 节详细讨论它们。

[BR2], 的主要结果主要针对 [BR2，定理 6.3], 可表述如下（我们将在第 3.2 节解释原因，参见命题 3.5）。

定理 1.1。存在一个幺半群范畴的全嵌入 ASBim$^\wedge \hookrightarrow$HC$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$。该嵌入将 B_s^{AS} 送到 B_s^{HC}（对所有简单仿射反射 s），并将 Δ_x^{AS} 送到 Δ_x^{HC}（对所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$）。

容易看出，这个嵌入的像包含在 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中。本文的目标之一是证明该定理的以下更强版本。

定理 1.2。定理 1.1 中的全嵌入 ASBim$^\wedge \hookrightarrow$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 是一个范畴等价。

下面给出定理 1.2 的一个导出版本。

定理 1.3。定理 1.2 中的等价 ASBim$^\wedge \xrightarrow{\sim}$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 可扩展为三角范畴之间的正合幺半等价 K^b(ASBim$^\wedge$) $\xrightarrow{\sim} D^b$(HC$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$)。

我们还将得到以下结果，该结果实际上在证明定理 1.2、1.3 中发挥重要作用。应将此结果视为 Harish-Chandra 双模的局部化定理（类似于[BMR]）。

定理 1.4。我们有三角范畴之间的幺半正合等价

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})).$$

这里，$G^{(1)}$ 表示 G 的 Frobenius 扭曲，而 $\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 是斯坦伯格簇的一个版本，其形式定义见第 2.1 节。

定理 1.3 和定理 1.4 合起来给出了一个等价

$$K^b(\mathrm{ASBim}^\wedge) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})).$$

This 是 Hecke范畴三角化版本的相干实现 .

定理 1.3 中的等价相对于偏 pervers t-结构是 t-正合的，参见 [B，定理 54,55]。为避免技术细节，我们只对特化范畴证明这一点。事实上，证明定理1.2和定理1.3时用到的正是这个结果。记 O 为最高权范畴 O_{R} 在 $\mathbb{F}$ 处的特化，该范畴在第1.1节中提及。另一方面，可以考虑 $\mathcal{U}$ 的中心约化 $\mathcal{U}_0$，以及左侧具有平凡中心特征的 HC $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_0$ 双模范畴。该范畴记作 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$。导出范畴 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 带有一种所谓的 perverse t-结构，将在第4.5节中回顾。记 $\mathrm{Perv}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 为该 t-结构的心。

定理1.5。定理 1.1 中的全嵌入给出阿贝尔范畴 $\mathsf{O} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Perv}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 之间的等价，以及三角范畴 $D^b(\mathsf{O}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 之间的等价。

我们注意到，上文提及的许多结果也由 Bezrukavnikov 和 Riche 独立获得， [BR4]。

1.3. O^{cl} 类。我们考虑的另一个范畴是经典 BGG O 类的模版本，记作 O^{cl}。根据定义，这是一个由有限生成的强 B-等变 $\mathcal{U}$-模构成的范畴，其中，照例， B 表示 G 的一个 Borel 子群。O^{cl} 类分解为若干块，记 $\mathsf{O}^{[0]}$ 为其中的主块。我们将在下文看到，$\mathsf{O}^{[0]}$ 类中的简单对象由 W^{ea} 的元素标记。$\mathsf{O}^{[0]}$ 类与 O 类和 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$ 范畴的一个重要区别在于，它具有“周期性”：对 Frobenius 扭曲 $B^{(1)}$ 的任意特征进行扭曲，都会给出 $\mathsf{O}^{[0]}$ 类的一个自等价。我们可以将 $B^{(1)}$ 的特征格视为格 $\Lambda \subset W^{ea}$。在简单对象标记的层面上，与 $\lambda \in \Lambda$ 对应的等价通过 t_λ 的右移作用于 W^{ea} 。

下面给出一个联系 $\mathsf{O}^{[0]}$ 与前几节提到的范畴的基本（且简单的）结果。

Pr命题1.6. 我们有一个导出等价 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{[0]})$.

由此命题和定理1.5，我们得到一个导出等价

$$D^b(\mathsf{O}^{[0]}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}). \tag{1.1}$$

1.4. 非交换 Springer 解消。若干结果证明中的一个重要要素（它本身也很有研究价值）是非交换 Springer 解消 [BM]。在我们的背景下，这是一个 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}] \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]^{G^{(1)}}}$ R-代数 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}}$ ，它为与 $\mathfrak{g}^{(1)}$的幂零锥相关的各种对象提供非交换分解。例如，我们可以考虑特化

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F},$$

这是一个定义在 $\mathbb{F}[\mathcal{N}_{(1)}]$, 上的代数，其中 $\mathcal{N}_{(1)}$ 是 $\mathfrak{g}^{*(1)}$中的幂零锥。令 $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ 为 $\mathcal{N}_{(1)}$的斯普林格解消。那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{N}^{(1)}$ 的一个非交换分解，这意味着存在一个 $\mathbb{F}[\mathcal{N}^{(1)}]$-线性导出等价 $D^b(\mathrm{Coh}(\tilde{\mathcal{N}}^{(1)})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}$-模)。

事实证明 $\mathfrak{g}^{*(1)}$ 表示 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$, $\mathsf{O}^{[0]}$ 同此，通过 $\mathcal{A}$ 来解释。令 π: $\mathcal{N}^{(1)} \to \mathcal{N}^{(1)}$ 等变代数层 $\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}$ over $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ ，并考虑范畴 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})$。

定理 1.7. 我们有阿贝尔范畴之间的等价

$$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}, \tag{1.2}$$

$$\mathsf{O}^{[0]} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}). \tag{1.3}$$

我们想指出，$\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})$ 的直接特征零类比此前已在论文 [BLin] 中出现。该论文证明，仿射 Hecke 范畴的三角化版本（ $D^b(\mathsf{O})$ 的特征零类比）上的相应 t-结构与 Frenkel 和 Gaitsgory 的“新”t-结构 [FG] 一致。等价 (1.3) 可用来为仿射 Hecke 范畴中新 t-结构的心赋予最高权结构。在后续论文中，我们计划利用这一事实，证明单位根处量子群上某个 O 类的“局部化定理”。

致谢。我谨向 Roman Bezrukavnikov、Gurbir Dhillon、Simon Riche 和 Geordie Williamson 致谢，感谢他们与我进行的启发性讨论。本工作的主要部分是在我参加 IAS 于 2021年春季举办的几何与模表示论专题年期间完成的，期间讨论了许多与本文相关的课题。感谢 IAS、项目组织者及参与者带来的宝贵经历。我的部分研究工作得到了美国国家科学基金会 DMS-2001139 号资助的支持。

2. Preliminaries: localization theorems

本节回顾 [BMR] 中的导出局部化定理，以及 [BM] 中的一些相关进展。

2.1. 导出局部化。令 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 表示 Grothendieck-Springer 解消

$$\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{h}} := \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathfrak{h}^*/W} \mathfrak{h}^*. \tag{2.1}$$

置 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}} := \tilde{\mathfrak{g}} \times_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathfrak{g}}$。我们还考虑其“完备化”版本

$$\mathsf{St}_{\mathsf{R}} := (\mathfrak{h}^*/W)^\wedge \times_{\mathfrak{h}^*/W} \mathsf{St}_{\mathfrak{h}} \tag{2.2}$$

（此处及下文，$\bullet^\wedge$ 表示在 0 处的完备化，例如在这个特定情形下，$(\mathfrak{h}^*/W)^\wedge = \mathrm{Spec}(\mathsf{R}^W)$）。注意，$G$ 自然作用于 $\tilde{\mathfrak{g}}$、$\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}$、$\mathsf{St}_{\mathsf{R}}$。另请注意，$\mathsf{St}_{\mathsf{R}}$ 带有一个到 $\mathfrak{h}^{*\wedge} \times_{\mathfrak{h}^{*\wedge}/W} \mathfrak{h}^{*\wedge}$ 的自然态射。

对前一段中的所有对象施加 Frobenius 扭曲，得到概形 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$、$\mathsf{St}^{(1)}_{\mathfrak{h}}$ 、$\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$。它们带有 $G^{(1)}$ 的作用。注意，Artin-Schreier 映射 $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^{*(1)}$ 是 étale 的，因此将 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]^{\wedge_0}$ 与 R 等同。特别地，$\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 仍然是 $\mathfrak{h}^{*\wedge} \times_{\mathfrak{h}^{*\wedge}/W} \mathfrak{h}^{*\wedge}$ 上的概形。

考虑范畴 $D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1)}_{\mathfrak{h}}))$ $D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}))$。这些范畴关于相干层的卷积构成幺半范畴。我们也可以考虑针对 $G^{(1)}$ 而非 G 的版本，例如 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}))$。我们有一个自然的 t-正合幺半函子

$$D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)}_{\mathsf{R}})) \to D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1)}_{\mathsf{R}}))$$

但它不是全忠实的（尽管其对默认 t-结构的心的限制是全忠实的）。我们有完备化（=拉回）函子

$$D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1)}_{\mathfrak{h}})) \to D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1)}_{\mathsf{R}})),$$

它是幺半的。

现在我们回顾一个定义在.....上的阿祖马亚代数

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_{\mathsf{R}} := \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}} \mathrm{Spec}(\mathsf{R}).$$

令 $U \subset B$ 为 G 的极大幺幂子群和 Borel 子群。我们将用 $\mathcal{B}$ 表示旗簇 G/B。考虑 G/U 上微分算子的层 $D_{G/U}$。令 $\eta\colon G/U \twoheadrightarrow G/B$ 为投影。考虑层 $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}} := (\eta_* D_{G/U})^T$。这是 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_{\mathfrak{h}} \times_{\mathfrak{h}^{*(1)}} \mathfrak{h}^*$ 上的阿祖马亚代数，参见例如 [BMR，第 2.3、3.1 节3]。对于 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，考虑完备化

$$\mathcal{D}^{\wedge_\mu} := \mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]^{\wedge_\mu} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]} \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}. \tag{2.3}$$

这个完备化可以视为 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 上的阿祖马亚代数。

Set

$$\mathcal{U}^{\wedge_\mu} := \mathbb{F}[\mathfrak{h}^*]^{\wedge_\mu} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]} \mathcal{U}, \tag{2.4}$$

其中，商是按 W 的点作用（即 ρ 平移作用）取的。根据 [BMR，命题 3.4.1]，$R\Gamma(\mathcal{D}^{\wedge_\mu}) = \mathcal{U}^{\wedge_\mu}$。若 μ 对点作用是正则的，则有一个范畴等价

$$R\Gamma : D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{\wedge_\mu})) \to D^b(\mathcal{U}^{\wedge_\mu}\text{-mod}), \tag{2.5}$$

这本质上就是 [BMR 定理 3.2]。

对于不同的 μ，只要它们之差为整数，相应的层 $\mathcal{D}^{\wedge_\mu}$ 就莫里田等价。现在选取由 T 的一个特征表示的 μ，并滥用记号，也用 μ 表示该特征。于是，我们有 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$ 与 $\mathcal{D}^{\wedge_\mu}$ 之间的莫里田等价，由下式给出:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \bullet : \mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{\wedge_0}) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{\wedge_\mu}). \tag{2.6}$$

我们还注意到，我们有一个代数同构:

$$\mathcal{D}^{\wedge_\mu} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu) \otimes \mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\mu). \tag{2.7}$$

˜我们需要考虑 $\mu = -\rho$ 的情形。存在 G 的一个覆盖 G （例如，单˜ ˜连通覆盖），使得 ρ 是 G 的极大环面 T 的一个权。由此得到的莫里田等价 (2.6) 提升为 G-等变范畴。

现在考虑代数 $\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$ 和层 $\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}$。[BMR 命题 5.2.1] 证明了，$\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$ 是 $\mathfrak{g}^{*(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 上的阿祖马亚代数，而 $\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}$ 是通过解消态射 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}{}_{\mathsf{R}} \to \mathfrak{g}^{*(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 下的拉回由 $\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$ 得到的。因此，$\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}})^{opp}$ 在 $\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}{}_{\mathsf{R}} \times \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 上的限制（记为 $\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}})^{opp}|_{\mathsf{St}}$）是 G-等变可分裂的，其分裂丛 $\mathcal{E}^{diag}_{-\rho}$ 是通过态射 $\mathsf{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}} \to \mathfrak{g}^{*(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 从 $\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$ 拉回得到的。现在注意到，$\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}})^{opp}$ 与 $\mathcal{D}^{\wedge_0} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}$ 通过下式莫里田等价:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}(\rho, -\rho) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}} \bullet : \mathrm{Coh}^G(\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}})^{opp}|_{\mathsf{St}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}^G(\mathcal{D}^{\wedge_0} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathsf{St}}). \tag{2.8}$$

虽然 ρ ma y 不是 T 的特征，但线丛 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}(\rho, -\rho)$ 是 G-等变的 .

定义 2.1. 将 (2.8) 应用于 $\mathcal{E}^{diag}_{-\rho}$，我们得到限制 $\mathcal{D}^{\wedge_0} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathsf{St}}$ 的一个 G-等变分裂丛，记作 $\mathcal{E}^{diag}$。

现在考虑概形

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]]) \times_{\mathfrak{g}^{(1)*}} \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_{\mathsf{R}}. \tag{2.9}$$

$\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$到 $\mathfrak{g}^{*(1),\wedge_{\mathfrak{g}}}\mathsf{R}$的拉回分裂。注意，$\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$的所有分裂丛都是同构的（因为它是完备局部环上的分裂阿祖马亚代数）。令 $\mathcal{E}'_{-\rho}$ 表示这个分裂丛到 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}}$的拉回。它是 $\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}$到 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}}$的拉回$\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho},\mathfrak{g}}$的一个分裂丛。对 $\mathcal{E}'_{-\rho}$应用类似于(2.6)的莫里田等价，我们得到 $\mathcal{D}^{\wedge,0}$ 的一个分裂丛，记作 $\mathcal{E}'$。

注记 2.2。根据构造，$\mathcal{E}_{diag}$和 $\mathcal{E}'\boxtimes\mathcal{E}'^{*}$的限制

$$\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)}\cap(\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}}\times\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}})$$

是同构的。

接下来我们讨论导出等价。若 μ是正则的（对于点作用），那么

$$R\Gamma: D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{D}^{\wedge_\mu}))\to D^b(\mathcal{U}^{\wedge_\mu}\text{-mod})$$

是一个范畴等价，这本质上是 [BMR 定理 3.2]。例如，我们可以取 $\mu=0$。这便得到以下等价:

$$R\Gamma(\mathcal{E}'\otimes\bullet): D^b(\mathrm{Coh}(\tilde{\mathfrak{g}}^{(1),\wedge_{\mathfrak{g}}}))\xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}^{\wedge_0,\mathfrak{g}}\text{-mod}), \tag{2.10}$$

$$R\Gamma: D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}))\xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}^{\wedge_0}\otimes(\mathcal{U}^{\wedge_0})^{opp}\text{-mod}^G). \tag{2.11}$$

在 (2.10) 中，我们设定 $\mathcal{U}^{\wedge_0,\mathfrak{g}}:=\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]]\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]}\mathcal{U}$。

Set

$$\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^{\wedge}:=\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]^W}\mathbb{F}[[\mathfrak{h}^{(1)*}]]^W. \tag{2.12}$$

这个代数是 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 的中心；这是由关于 $\mathcal{U}$ 中心的费尔德坎普定理直接推出的。由于 $\mathcal{U}$ 在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]$ 上平坦，且 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}^{(1)}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}\times\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ 中的完全交，(2.11) 给出了一个等价

$$R\Gamma: D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathsf{St}}))\xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}^{\wedge_0}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^{\wedge}}(\mathcal{U}^{\wedge_0})^{opp}\text{-mod}^G), \tag{2.13}$$

参见 [BM 第 1.3–1.5] 节关于精确纤维积和基变换的讨论。因此我们有一个等价

$$R\Gamma(\mathcal{E}_{diag}\otimes\bullet): D^b(\mathrm{Coh}^G\,\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})\xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}^{\wedge_0}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^{\wedge}}(\mathcal{U}^{\wedge_0})^{opp}\text{-mod}^G). \tag{2.14}$$

我们注意到，(2.14) 是一个 R-双线性幺半等价（相对于双模的卷积与张量积而言）。

注 2.3。考虑 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 到 R 的闭点的特化 $\mathcal{U}_0$，以及斯坦伯格簇 $\mathsf{St}:=\mathsf{St}_{\mathsf{R}}\times_{\mathrm{Spec}(\mathsf{R})}\mathsf{pt}$。出于与 (2.14) 相同的理由，我们有

$$R\Gamma(\mathcal{E}_{diag}\otimes\bullet): D^b(\mathrm{Coh}^G\,\mathsf{St}^{(1)})\xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]}\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G). \tag{2.15}$$

我们注意到，这是 (2.14) 中等价的幺半范畴上的左模范畴之间的等价。

2.2. 倾斜丛与非交换 Springer 解消。我们需要构造一个定义在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ 上的倾斜丛，该倾斜丛来自 [BM]。在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ 上，我们有一个 $G^{(1)}\times\mathbb{G}_m$-等变向量丛 $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$，它是一个倾斜生成元，也就是说，满足以下两个条件:

- $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{T}_{\mathfrak{h}},\mathcal{T}_{\mathfrak{h}})=0$ 对于 $i>0$,
- 且代数 $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}:=\mathrm{End}(\mathcal{T}_{\mathfrak{h}})$ 具有有限同调维数。

该向量丛构造于 [BM], 参见 [BM，定理1.5。1]以了解相关陈述，并参见[BM，第2节。5] 以了解 $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$的构造。更准确地说， [BM] 在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ 上引入了一个向量丛，在该文中记作 $\mathcal{E}$。这两个向量丛之间的关系如下： $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}} = \mathcal{E}^*$。

函子 $R\Gamma(\mathcal{T}_{\mathfrak{h}} \otimes \bullet)$ 是一个等价 $D^b(\mathrm{Coh}(\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}\text{-mod})$，参见 [BM，第 1.5 节。3]

考虑这些代数

$$\mathcal{A}_{\mathsf{R}} := \mathcal{A}_{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \mathsf{R}, \quad \mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag} := \mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]^\wedge} \mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{opp},$$

群 $G^{(1)}$ 作用在 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}}, \mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$ 上，其作用由 R-代数自同构给出。注意，与 (2.14) 类似，我们有等价

$$D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}} \mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag}\text{-mod}^{G^{(1)}}), \quad D^b(\mathrm{Coh}^{G} \mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag}\text{-mod}^{G}) \tag{2.16}$$

由 $R\Gamma([\mathcal{T}_{\mathsf{R}} \boxtimes \mathcal{T}^*{}_{\mathsf{R}}]|_{\mathsf{St}} \otimes \bullet)$ 给出，其中我们用 $\mathcal{T}_{\mathsf{R}}$ 表示 $\mathcal{T} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \mathsf{R}$。注意，范畴 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}\text{-mod}^{G^{(1)}}$ 和 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}\text{-mod}^{G}$ 关于函子 $\bullet \otimes_{\mathcal{A}_{\mathsf{R}}} \bullet$ 构成幺半范畴。等价 (2.16) 是幺半的。它们也是 R- 双线性的。

我们需要将 $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$ 与由 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$ 导出的分裂丛联系起来。以下结果已在 [BM] 中证明（证明略含蓄，详见 [BLo，引理 4.7] ，其中给出了明确的证明）。

引理 2.4。$\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}^{\wedge_{\mathfrak{g}}}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$ 限制到 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}, {}^{\wedge_{\mathfrak{g}}}$上的丛，它与 $\mathcal{E}'$具有相同的不可分解直和项。

置 $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}$。类似于备注 2.3，我们有一个导出等价

$$D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}} \mathsf{St}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}). \tag{2.17}$$

3. Preliminaries: Soergel and Harish-Chandra bimodules

本节主要回顾 [BR2]中的构造和结果。我们还将讨论它们与上一节构造之间的联系。

3.1. 遵循 [BR2]的 Soergel 双模。 [BR2]中引入的一族范畴与 Abe 构造 Soergel 双模范畴有关。首先介绍一些记号。对于右 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模 M ，我们记

$$M_{loc} := M \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \mathbb{F}(\mathfrak{h}^{(1)*}), M^\wedge := M \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \mathsf{R}, \tag{3.1}$$

其中，回忆一下，R 表示 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{*(1)}]$ 在零点处的完备化。

沿用 [BR2，第 2.2], 节，我们考虑范畴 C'_{ext} ，其对象是由以下部分组成的对：

(i) 分次 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-双模 B 以及

(ii) 分解

$$B_{loc} = \bigoplus_{x \in W^{ea}} B_{loc}^x,$$

到 $\mathbb{F}(\mathfrak{h}^{(1)*})$-子空间的直和中，使得只有有限多个非零直和项，并且对所有 $b \in B_{loc}^x$ 和 $r \in \mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$, $br = x(r)b$ 。

模论 Soergel 双模　　MO、Harish-Chandra 双模　　，与 O 类 9

C'_{ext} 中的态射是分次双模同态 $\varphi: B \to B'$，使得对所有 $x \in W^{ea}$，$\varphi_{loc}(B^x_{loc}) \subset B'^x_{loc}$。在 C'_{ext} 中，我们考虑全子范畴 C_{ext}，其对象均作为双模有限生成，并且作为右$\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模是平坦的。与 [A 类似，引理 2.6], 表明，C_{ext} 中的对象既作为左 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模有限生成，也作为右 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模有限生成。特别地，它们作为右 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模是自由的。范畴 C'_{ext} 具有提升 $\bullet \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \bullet$的自然幺半结构。子范畴 C_{ext} 是一个加性幺半 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{*(1)}]$-双线性子范畴。还要注意，我们有 C'_{ext} 的分次移位自函子，记作 $\langle 1\rangle$，它保持 C_{ext}不变。

我们需要 C_{ext} 中的两族对象。首先是标准对象，$\Delta_x, x \in W^{ea}$。每个 Δ_x 都是秩为一的自由右 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-模（生成元位于次数 0），其左作用通过与 x 扭曲引入，从而使得 $\Delta_{x,\ loc} = \Delta^x_{x,\ loc}$。对于简单仿射反射 $s \in W^a$，我们还有 Bott-Samelson 对象 B_s，其底层分次双模为 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}] \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]^s} \mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$，并具有局部化双模的自然分解。令 ASBim 表示由 Δ_x、$x \in \Lambda/\Lambda_r$ 和 B_s 生成的 C_{ext} 的全子范畴，其中 s 遍历简单仿射反射集合，并对张量积、直和/直和项及分次移位运算封闭。众所周知，这一结果本质上可追溯至 Abe A]（参见 [A，定理 1.1]，其中情形为 $W^{ea} = W^a$），ASBim 中的不可分解对象由 W^{ea} 的元素标记。具体而言，对于 $w \in W^{ea}$，我们可以写出约化表达式 $w = xs_1 \dots s_k$，其中 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 和 s_i 均为简单仿射反射。于是，不可分解对象 B_w 是以下对象的一个直和项

$$\Delta_x \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} B_{s_1} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} B_{s_2} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} \dots \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]} B_{s_k}$$

而所有其他直和项都具有 B_u 的形式，其中 $u < w$ 按 Bruhat 序排列（并带有某些分次移位）。

我们将不使用 ASBim、C_{ext} 和 C'_{ext}，而使用它们的完备化（以及非分次版本）。具体而言，我们考虑范畴 $\mathsf{C}'^{\wedge}_{ext}$，它由具有如上文 (ii) 中附加结构的 $\mathbb{F}[[\mathfrak{h}^{(1)*}]]$-双模组成。其中有一个全子范畴 $\mathsf{C}^{\wedge}_{ext} \subset \mathsf{C}'^{\wedge}_{ext}$，其定义方式类似于 C_{ext}。注意，根据 (3.1)，我们有完备化函子 $\bullet^{\wedge}: \mathsf{C}'_{ext} \to \mathsf{C}'^{\wedge}_{ext}$。它是正合的且幺半的。它将 C_{ext} 送到 $\mathsf{C}^{\wedge}_{ext}$。我们将 ASBim$^{\wedge}$ 定义为 $\mathsf{C}^{\wedge}_{ext}$ 的全子范畴，由简单仿射反射 s 所对应的 $B^{\wedge}_s$ 以及对于 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 的 $\Delta^{\wedge}_x$ 生成。下文中，我们将把 $B^{\wedge}_s$ 记作 B^{AS}_s，并把 $\Delta^{\wedge}_x$ 记作 Δ^{AS}_x（对所有 $x \in W^{ea}$）。

下面的引理描述了 ASBim$^{\wedge}$ 范畴的基本性质　　.

引理 3.1。以下断言成立：

(1) 对于 $B_1, B_2 \in \mathsf{C}_{ext}$，我们有

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{ext}}(B_1, B_2\langle i\rangle)\right)^{\wedge} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\wedge}_{ext}}(B^{\wedge}_1, B^{\wedge}_2).$$

(2) 不可　分解对象在 ASBim$^{\wedge}$ 中恰好是对象 $B^{\wedge}_x$，其中 $x \in W^{ea}$。

证明。注意，$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{ext}}(B_1, B_2\langle i\rangle)$嵌入 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]\text{-双模}}(B_1, B_2)$ 中，其像由所有满足 φ 且 φ_{loc} 保持上述 (ii) 中分解的元素组成。由于B_1 作为一个 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]$-双模是有限生成的，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]\text{-bimod}}(B_1, B_2)^{\wedge} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[[\mathfrak{h}^{(1)*}]]\text{-bimod}}(B^{\wedge}_1, B^{\wedge}_2).$$

我们需要证明，该同构交织了所有满足 φ 且 φ_{loc} 交织了类似于 (ii) 中分解的映射所构成的子双模。包含关系

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{ext}}(B_1, B_2\langle i\rangle)\right)^{\wedge} \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\wedge}_{ext}}(B_1^{\wedge}, B_2^{\wedge}). \tag{3.2}$$

这可由如下观察得出：函子 $\bullet \otimes_{\mathbb{F}(\mathfrak{h}^{(1)*})} \mathbb{F}((\mathfrak{h}^{(1)*}))$ 保持与 (ii) 中类似的分解。另一方面，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\wedge}_{ext}}(B_1^{\wedge}, B_2^{\wedge}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[[\mathfrak{h}^{(1)*}]]\text{-bimod}}(B_1^{\wedge}, B_2^{\wedge})$$

在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^{(1)*}]\text{-双模}}(B_1, B_2)$ 中，原像由保持 (ii) 中分解的映射构成。因此，(3.2) 是一个等式。

(2) 的证明与 [EL, 引理 6.9] 完全相同。 □

为了将 ASBim（或 ASBim$^{\wedge}$）与 Harish-Chandra 双模范畴（将在下一节说明）联系起来，我们需要一个在 [BR2] 中讨论的中间几何范畴。定义概形

$$Y := \mathfrak{h}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{h}^{(1)*}. \tag{3.3}$$

在 [BR2 第 2.3] 节中引入了一个仿射群概形 $\mathfrak{J}$ over Y。具体来说，令 $\mathfrak{g}^{(1)*,reg}$ 表示$\mathfrak{g}^{(1)*}$中正则（不一定是半单）元素的轨迹。在 $\mathfrak{g}^{(1)*,reg}$ 中有 Kostant-Slodowy 切片 $S^{(1)}$。商态射$\mathfrak{g}^{(1)*} \to \mathfrak{g}^{(1)*}//G^{(1)} \cong \mathfrak{h}^{(1)*}/W$ 限制为一个同构 $S^{(1)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{(1)*}/W$。在 $\mathfrak{g}^{(1)*,reg}$上有泛中心化子群概形，此处记为 $\mathfrak{C}^{(1)}$。在 $s \in S^{(1)}$上， $\mathfrak{C}^{(1)}$ 的纤维是 $G^{(1)}$中 s 的稳定子。我们可以将 $\mathfrak{C}^{(1)}$ 视为$S^{(1)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{(1)*}/W$上的群概形。于是令

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{h}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{C}^{(1)} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{h}^{(1)*}.$$

注意，根据 $\mathfrak{J}$ 的构造，乘法群 $\mathbb{F}^{\times}$ 通过自同构作用于 $\mathfrak{J}$，且与 $\mathfrak{h}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{h}^{(1)*}$ 上的膨胀作用相容。因此，考虑 Y 上的 $\mathbb{F}^{\times} \ltimes \mathfrak{J}$-等变相干层范畴 $\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}^{\times}}_{fl}(\mathfrak{J})$ 是有意义的，这些层在第二个 $\mathfrak{h}^{(1)*}$ 副本上是平坦的。正如 [BR2 第 2.3], 节所述，$\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}^{\times}}_{fl}(\mathfrak{J})$ 是一个幺半范畴。

我们需要这个范畴的完备化版本。考虑概形 $Y^{\wedge} := Y \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}} \mathfrak{h}^{*\wedge} = \mathfrak{h}^{*\wedge} \times_{\mathfrak{h}^{*\wedge}/W} \mathfrak{h}^{*\wedge}$（这里我们将 $\mathfrak{h}^{*\wedge}$ 写作 Spec(R) $\cong$ Spec($\mathbb{F}[[\mathfrak{h}^{(1)*}]]$)）以及 $\mathfrak{J}$ 到 $Y^{\wedge}$ 的拉回 $\mathfrak{J}^{\wedge}$。因此，我们可以考虑范畴 Rep$^{fl}(\mathfrak{J}^{\wedge})$。与 [BR2 第 2.3] 节类似，它是幺半的。我们有如下定义的完备化函子 $\bullet^{\wedge} : \mathrm{Rep}^{\mathbb{F}^{\times}}_{fl}(\mathfrak{J}) \to \mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{J}^{\wedge})$。

引理 3.2. 我们有一个幺半群 R-双线性全嵌入 ASBim$^{\wedge} \hookrightarrow$Rep$^{fl}(\mathfrak{J}^{\wedge})$.

证明。证明与 [BR2, 定理 2.10] 的证明非常相似。具体而言， [BR2, 命题 2.7], 我们有一个全忠实幺半群嵌入

$$\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}^{\times}}_{fl}(\mathfrak{J}) \hookrightarrow \mathsf{C}_{ext}. \tag{3.4}$$

我们断言，它给出了一个全幺半群嵌入

$$\mathrm{Rep}_{fl}(\mathfrak{J}^{\wedge}) \hookrightarrow \mathsf{C}^{\wedge}_{ext}. \tag{3.5}$$

该函子的构造与证明 [BR2，命题 2.7], 类似；它是幺半的。为证明它是满的，我们需要关联范畴 $\mathrm{Rep}_{fl}^{\mathbb{F}^\times}(\mathfrak{J})$、$\mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{J}^\wedge)$ 中的 Hom，以及 $\mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{J})$ 中的 Hom。它们分别记作 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^\times,\mathfrak{J}}$、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}^\wedge}$、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}$。具体而言，得益于引理 3.1 的 (1) 和 [BR2，命题 2.7], ，只需证明

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^\times,\mathfrak{J}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\langle i\rangle)\right)^\wedge \xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}^\wedge}(\mathcal{F}_1^\wedge,\mathcal{F}_2^\wedge) \tag{3.6}$$

对于所有 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\in\mathrm{Rep}_{fl}^{\mathbb{F}^\times}(\mathfrak{J})$。注意，(3.6) 左侧的直和无非就是 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$。与引理 3.1 的 (1) 的证明一样，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)^\wedge\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y^\wedge)}(\mathcal{F}_1^\wedge,\mathcal{F}_2^\wedge).$$

我们需要证明，这个同构交织 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)^\wedge$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}^\wedge}(\mathcal{F}_1^\wedge,\mathcal{F}_2^\wedge)$。

注意，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是有限线性方程组的解构成的 $\mathbb{F}[Y]$-子模，其系数属于 $\mathbb{F}[Y]$。事实上，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Coh}(Y)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是一个 $\mathfrak{J}$-模，等价地说，是一个 $\mathbb{F}[\mathfrak{J}]$-余模。若 $\epsilon:\mathbb{F}[Y]\to\mathbb{F}[\mathfrak{J}]$ 表示单位映射，并且

$$\alpha:\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)\otimes_{\mathbb{F}[Y]}\mathbb{F}[\mathfrak{J}]$$

是余作用映射，那么

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=\{\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)|\alpha(\varphi)=\varphi\otimes\epsilon\}.$$

右侧的方程可转化为一个有限的线性方程组，其系数属于 $\mathbb{F}[Y]$，从而证明了本段开头的断言。现在注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}^\wedge}(\mathcal{F}_1^\wedge,\mathcal{F}_2^\wedge)\subset\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(Y^\wedge)}(\mathcal{F}_1^\wedge,\mathcal{F}_2^\wedge)$$

由相同的方程指定。由此完成了 (3.6) 的证明，也完成了 (3.5) 的构造。

要证明 $\mathrm{ASBim}^\wedge\hookrightarrow\mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{J}^\wedge)$ 是全嵌入，只需证明 (3.5) 的本质像包含 $\mathrm{ASBim}^\wedge$。这由 [BR2, 引理 2.9] 得出。□

注 3.3. 我们将需要一个遵循 [BR2, 命题 2.7] 证明的 (3.5) 的构造。它本质上是一个（部分）遗忘函子。$\mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{J}^\wedge)$ 中的对象 $\mathcal{F}$，特别是一个关于第二个 R 的副本平坦的 R-双模。将 $\mathcal{F}$ 局部化到 $\mathfrak{h}^{(1)*\wedge}/W$ 中的正则轨上后，其上带有 T 的作用。Y 中相应的轨分解为由 W 索引的连通分支的不交并。这两种结构给出了本节开头 (ii) 中所述的 $\mathcal{F}_{loc}$ 的分解。

3.2. 沿用 [BR2] 的 Harish-Chandra 双模。这里我们回顾沿用 [BR2] 的模 HC 双模范畴，并说明 [BR2] 的主要结果的一个版本。

我们先回顾沿用 [BR2 第 3] 节的基础知识。回顾一下，$\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 表示在 Harish-Chandra 中心特征 0 处对 $\mathcal{U}$ 的部分完备化：

$$\mathcal{U}^{\wedge_0}=\mathcal{U}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]}\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]^{\wedge_0}.$$

这是一个带有 G 作用的 R-代数。$\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 的中心是 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge$，见第 2.1 节。

考虑 $\mathcal{U}^{\wedge_0,\,opp}$-模^{G}范畴，其中的对象是（弱）$G$-等变右 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$-模。这种模自然带有一个左 $\mathcal{U}$-作用，该作用与右 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$-作用交换，并且可由以下条件唯一确定：伴随函子 $\mathfrak{g}$-作用与 G-作用的微分相一致（这个条件可以表述为我们得到强

G-等变 $\mathcal{U}$-双模）。$\mathcal{U}^\wedge{}_0$, ^{opp}-模^{G}中的对象将被称为 Harish-Chandra 双模。

对于 $\mu \in \Lambda$，令 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_\mu\text{-}\,\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 表示由所有满足左作用 $\mathcal{U}$ 可经由 $\mathcal{U}^\wedge{}_\mu$ 分解的对象构成的全子范畴 $\mathcal{U}^\wedge{}_0$, ^{opp}-模^G。我们有如下分解，参见例如 [BR2, (3.13)]

$$\mathcal{U}^\wedge{}_0{}^{,opp}\text{-mod}^G = \bigoplus_\mu \mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_\mu\text{-}\mathcal{U}^\wedge{}_0), \tag{3.7}$$

其中求和遍历 $\mathfrak{h}^*$ 中 $\mathbb{F}_p$-点的所有轨道 W。我们主要关注范畴 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0) := \mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0\text{-}\mathcal{U}^\wedge{}_0)$。它关于 $\bullet \otimes_{\mathcal{U}^\wedge{}_0} \bullet$ 是 R- 双线性且幺半的。我们将 pr_0 记为从 $\mathcal{U}^\wedge{}_0$, ^{opp}- 模 ^{G} 到 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 的投影函子。

下面介绍 [BR2] 中研究的一类特殊双模。若 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 中的一个对象是某个有限维表示 V 的直和项 $V \otimes \mathcal{U}^\wedge{}_0$，其中 V 是 G 的有限维表示，则称该对象为对角诱导的。这是 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 的一个幺半子范畴，记为 $\mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$。

在本质上，[BR2]已证明 $\mathrm{ASBim}^\wedge$ 到 $\mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 存在一个全嵌入。对于所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 以及所有简单仿射反射 s，都可以描述 $\Delta^{AS}_x, B^{AS}_s \in \mathrm{ASBim}$ 在 $\mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$ 中的像。首先，对于所有简单仿射反射 s，有反射双模$B^{HC}_s \in \mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$；按照 [BR2] 中的记号，它们是这些对象

$$\mathsf{P}^{0,\mu_s} \widehat{\otimes}_{\mathcal{U}\mathfrak{g}} \mathsf{P}^{\mu_s,0}.$$

在左侧与 B^{HC}_s 张量化，得到与s对应的经典反射函子，记作 Θ_s。对于 $x \in \Lambda/\Lambda_r$，我们考虑$x \in \Lambda/\Lambda_r$的标准对象 Δ^{HC}_x，即从 0 到 $x^{-1}\cdot 0$ 的平移双模（这里我们写作 $\cdot$，表示 W^{ea} 在 Λ上的p-缩放作用；注意，$x \in \Lambda/\Lambda_r$这一条件等价于 $x^{-1}\cdot 0$与 0 位于同一个房中）。在本质上构造于 [BR2] 中的全嵌入 $\mathrm{ASBim}^\wedge \hookrightarrow \mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$（最终构造见其中第 6 节）将 B^{AS}_s映为 B^{HC}_s，并将 Δ^{AS}_x映为 Δ^{HC}_x。

回顾全嵌入的构造。回想第3.1节中的概形 $Y, Y^\wedge$，以及 Y 上的群概形 $\mathfrak{J}$ 和它到 $Y^\wedge$ 的限制 $\mathfrak{J}^\wedge$。考虑另一个群概形 $\mathfrak{I}$，它定义在 Y 上，其定义方式与 $\mathfrak{J}$ 类似，但所依据的是 G 对 $\mathfrak{g}^{(1)*}$ 的作用，而非 $G^{(1)}$ 的作用（在 [BR2]中，这个群概形记作 $\mathbb{I}$）。我们有一个自然满射 $\mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$，其核是 Y 上的常值群概形，纤维为 G_1，即第一 Frobenius 核。令 $\mathfrak{I}^\wedge$ 表示将 $\mathfrak{I}$ 拉回到 $Y^\wedge$ 所得的概形。我们可以考虑与 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{J}^\wedge)$ 类似定义的范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$。我们有一个全嵌入 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{J}^\wedge) \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$，由经由 $\mathfrak{I}^\wedge \twoheadrightarrow \mathfrak{J}^\wedge$ 的拉回给出。

我们还需要扩充 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$。按定义，我们需要的扩充范畴由所有 G-等变的 $\mathcal{U}^\wedge{}_0$-双模组成，其中 p中心 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge$的左作用与右作用一致。将此范畴记为 $\overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$。由于每个 HC 双模上 p中心的左作用与右作用一致，因此存在一个 R-双线性满单体嵌入 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0) \hookrightarrow \overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$, 另见 [BR2, (3.6)]。

[BR2] 中的构造始于构造一个函子

$$\overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge) \tag{3.8}$$

该函子限制后给出一个全忠实嵌入 $\mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^\wedge_0) \hookrightarrow \mathrm{Rep}^{fl}(\mathfrak{I}^\wedge)$。构造如下。考虑轨迹

$$\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1),reg} := \mathfrak{g}^{(1)*,reg} \times_{\mathfrak{g}^{(1)*}} \mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)} \subset \mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)}$$

注意，射影态射的限制

$$\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)} \to \mathrm{Spec}(\mathsf{R}) \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{g}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathrm{Spec}(\mathsf{R})$$

到 $\mathsf{St}^{(1),\ reg}{}_{\mathsf{R}}$ 是一个开嵌入。我们可以将 $\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathcal{U}^{\wedge_0,\ opp}$ 视为 $\mathrm{Spec}(\mathsf{R}) \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathfrak{g}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{(1)*}/W} \mathrm{Spec}(\mathsf{R})$ 上的代数层。其到 $\mathsf{St}^{(1),\ reg}{}_{\mathsf{R}}$ 的限制，记作 $\left(\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathcal{U}^{\wedge_0,\ opp}\right)^{reg}$，与 $\mathcal{D}^{\wedge_0} \boxtimes (\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathsf{St}}$ 的限制一致。特别地，$\left(\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathcal{U}^{\wedge_0,\ opp}\right)^{reg}$ 是一个 G-等变阿祖马亚代数，带有一个 G-等变分裂丛 $\mathcal{E}^{reg}_{diag}$，它是第 2.1 节中引入的分裂丛 $\mathcal{E}_{diag}$ 到 $\mathsf{St}^{(1),\ reg}{}_{\mathsf{R}}$ 的限制。

函子 (3.8) 的构造如下。首先取 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 中的一个对象，并将其限制到 $\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}}$。利用分裂丛 $\mathcal{E}^{reg}_{diag}$ 所给出的等价，我们得到 $\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}}$ 上的一个 G-等变相干层。注意，$Y^\wedge$ 嵌入 $\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}}$，这个嵌入由 S 到 $\mathfrak{g}^{(1)*}$ 的嵌入诱导。因此，我们可以将 $\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}}$ 上的一个 G- 等变相干层限制到 $Y^\wedge$，从而得到一个 $\mathfrak{I}^\wedge$- 等变相干层。对于 (3.8)，我们取由此得到的复合函子：

$$\overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^\wedge_0) \to \mathrm{Coh}^G\left(\left(\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathcal{U}^{\wedge_0,opp}\right)^{reg}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1),reg}) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge). \tag{3.9}$$

事实上，稍后我们将看到，$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 在 $\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}})$ 中的像属于 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1),reg}{}_{\mathsf{R}})$。

我们注意到，这样构造的函子 (3.8) 与 [BR2, (3.18)] 以及等价 $\mathcal{L}_{0,0}$ 在 [BR2, 推论 4.8] 中的逆函子的复合相同。事实上，要从 $\mathrm{Coh}^G\left(\left(\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathcal{U}^{\wedge_0,opp}\right)^{reg}\right)$ 得到 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$，我们先应用分裂丛给出的等价，然后限制到 $Y^\wedge$。Bezrukavnikov 和 Riche 则先限制到 $Y^\wedge$，再应用 [BR2, 定理 4.3] 中构造的分裂丛所给出的等价。要证明我们的构造与 [BR2] 中的构造一致，还需证明以下引理。

引理 3.4。来自 [BR2、定理 4.3] 的分裂丛与 $\mathcal{E}_{diag}$ 到 $Y^\wedge$ 的限制相同。

证明。我们用 $L(\rho)$ 表示最高权为 ρ 的不可约 G-模。按照 [BR2], 的记号，其分裂丛由 $\mathrm{P}^{0,\ -\rho} \widehat{\otimes}_{\mathcal{U}} \mathrm{P}^{-\rho,\ 0}$ 限制到 $Y^\wedge$ 给出，其中 $\mathrm{P}^{0,\ -\rho}$ 是将 $\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes L(\rho)$ 投影到 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge_0\text{-}\ \mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}})$ 得到的（其中 $\mathcal{U}^\wedge_0$ 在此双模上从左侧的作用方式与其在 $\dim L(\rho)$ 个正则模的直和上的作用方式相同）。类似地，$\mathrm{P}^{-\rho,\ 0}$ 是将 $L(\rho) \otimes \mathcal{U}^\wedge_0$ 投影到 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}\text{-}\ \mathcal{U}^\wedge_0)$ 得到的。

注意，$\mathcal{U}^\wedge_0 \otimes L(\rho) = \Gamma(\mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes L(\rho))$。我们将 $\mathcal{M} := \mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes L(\rho)$ 视为弱 G-等变左 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$-模（因此也视为左 $\mathcal{U}^\wedge_0$-模）。因此，它带有一个与左 $\mathcal{U}^\wedge_0$-作用相交换的 $\mathcal{U}$右作用：对于该层的局部截面 α，以及$\xi \in \mathfrak{g}$，我们定义 $\alpha\xi = \xi\alpha - \xi_{\mathcal{M}}\alpha$，其中 $\xi_{\mathcal{M}}$ 表示由 G-作用在 $\mathcal{M}$ 上所诱导的算子。特别地，$\mathcal{U}$ 的中心通过自同态作用于弱 G-等变左 $\mathcal{U}$-模 $\mathcal{M}$。中心的右作用也与 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$的左作用相交换。这是因为 $\mathcal{M}$ 上R 的相干层是局部自由的，并且 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$ 和

$\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 在 $\mathfrak{g}^{*(1),reg}$ 上重合。令 $\mathcal{M}^{-\rho}$ 表示 $\mathcal{M}$的极大子层，其中 $\mathcal{U}^G \cong \mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]$ 的作用通过 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]^{\wedge_{-\rho}}$分解。

We 将证明存在一个 G-等变的 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$-模同构

$$\mathcal{M}^{-\rho} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\rho) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}. \tag{3.10}$$

考虑 $\mathcal{U}^0$ 上的层 $\mathcal{B}$，如 [BB 第 2], 节所述，它由 $\mathfrak{g}$ （作为李代数）和 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$（作为代数层）生成，并满足交叉关系 $[\xi, f] = \xi.f$，其中采用对 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 的通常 $\mathfrak{g}$-作用。它映到 $\mathcal{D}^{\wedge_\mu}$，对所有 μ 都成立。然而，该映射不是满态射；不过，由其像生成的 R-子模与 $\mathcal{D}^{\wedge_\mu}$ 相同。这是因为映射 $\mathcal{U}^0 \to \mathcal{D}^{\wedge_\mu}$ 与投影 $\mathcal{D}^{\wedge_\mu} \twoheadrightarrow \mathcal{D}^{\wedge_\mu} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F} = D^\mu_{\mathcal{B}}$ 的复合是满射， $\mathcal{D}^{\wedge_\mu}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ R 上的相干层，并且 $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ R 上每个相干层的支撑都与零纤维 $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ 相交。如 [BB 的 (ii)] 所述， $\mathcal{M}$ 由形如 $\mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes \mathcal{O}(\nu)$ 的 G- 等变 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$- 模过滤，其中 ν 是 $L(\rho)$ 的一个权。根据 (2.7)，后一个张量积是右 $\mathcal{D}^{\wedge_{-\nu}}$- 模。因此，从右侧看， $\mathcal{U}^G \cong \mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]$ 在 $\mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes \mathcal{O}(\nu)$ 上的作用是通过 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]^{\wedge_{-\nu}}$ 给出的。条件 $\mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]^{\wedge_{-\nu}} = \mathbb{F}[\mathfrak{h}^*/(W,\cdot)]^{\wedge_{-\rho}}$ 意味着 $\nu + \rho \in p\Lambda$。我们声称这意味着 $\nu = -\rho$。事实上，设 $w \in W$ 满足 $w(\nu+\rho)$ 是支配的（在 $p\Lambda$ 中）。我们有 $0 \leqslant w(\nu+\rho) \leqslant 2\rho$，其中第一个不等式为等式当且仅当 $\nu = -\rho$。特别地，对于每个单余根 $\alpha^\vee$，都有 $0 \leqslant \langle w(\nu+\rho)\ \alpha^\vee\rangle \leqslant 2$。由此可知，只有当 $\nu = -\rho$ 时， $w(\nu+\rho)$ 才成立。

得益于 $\mathcal{M}$上的这一滤过，子层 $\mathcal{M}^{-\rho}$ 是 $\mathcal{M}$的直和项。权 $-\rho$ 的重数为 1，因此

$$\mathcal{M}^{-\rho} \cong \mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\rho).$$

根据 (2.7)，右侧作为强 G-等变 $\mathcal{D}^{\wedge_0} - \mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}$-双模，与 (3.10) 的右侧相同。

我们得出

$$\mathsf{P}^{0,-\rho} \cong \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\rho) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}}),$$

一个强 G-等变 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$-$\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$-模之间的同构。完全类似的论证表明

$$\mathsf{P}^{-\rho,0} \cong \Gamma(\mathcal{D}^{\wedge_{-\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\rho)).$$

由分裂丛 $\mathcal{E}$的构造（见定义 2.1）可知，在 $\mathfrak{g}^{*(1),reg}_{\mathfrak{h}}$ 上（此处 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$与 $\mathcal{D}^{\wedge_0}$重合），丛 $\mathcal{E}$与 $\mathsf{P}^{0,-\rho} \widehat{\otimes}_{\mathcal{U}} \mathsf{P}^{-\rho,0}$重合。证明至此完成。

□

我们断言，(3.9) 中的第三个函子是一个全忠实嵌入。与证明 [BR2 命题 3.7], 时相同，限制函子 $\mathsf{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1),reg}) \to \mathsf{Rep}(\mathfrak{I})$ 是一个范畴等价。(3.9) 中的第三个函子由这一等价通过将基底变更为 Spec(R) 得到。仿照证明 [BR2 命题 3.7]（或引理 3.2）的方法，可知它是全忠实的（它也是一个等价，但我们不需要这一点）。由 [BR2 命题 3.7], 可知，(3.8) 在 $\mathsf{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 上是全忠实的。

下面给出本节的主要结果，这是对 [BR2, 定理 6.3] 的略微修改版本。

命题 3.5。存在一个全 R-双线性幺半嵌入 $\mathsf{ASBim}^\wedge \hookrightarrow \mathsf{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$，对所有简单仿射反射 s，将 B^{AS}_s映至 B^{HC}_s；并对所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$，将 Δ^{AS}_x映至 Δ^{HC}_x。

证明。由引理 3.2 可知，我们有一个全嵌入 $\mathrm{ASBim}^\wedge \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\mathfrak{J}^\wedge)$，因而有 $\mathrm{ASBim}^\wedge \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$。根据本节在 (3.8) 之后回顾的结果，我们还得到一个全嵌入 $\mathrm{HC}^G_{diag}(\mathcal{U}^{\wedge_0}) \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$。由 BR2 命题 6.6]，，$\mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^\wedge)$ 中 B_s^{AS} 和 B_s^{HC} 的像对所有简单仿射反射 s 都相同。由 BR2 引理 6.8]，，Δ_x^{AS} 和 Δ_x^{HC} 的像对所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 都相同。证明完毕。□

4. Further study of modular Harish-Chandra bimodules

本节将确立 Harish-Chandra 双模的若干范畴的更多性质。

4.1. Harish-Chandra 双模的导出局部化。本节的目标是证明以下定理（即引言中的定理 1.4）。

定理 4.1. 我们有一个三角范畴之间的幺半精确 R-双线性等价

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})).$$

证明。回忆等价关系 (2.14)，用第 3.2 节的记号表示为

$$D^b(\overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})). \tag{4.1}$$

另外，回忆 (2.16) 中的第二个等价关系：

$$D^b(\mathrm{Coh}^G \mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag}\text{-}\mathrm{mod}^G). \tag{4.2}$$

我们将证明

(I) (4.2) 与 (4.1) 的复合

$$D^b(\overline{\mathrm{HC}}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag}\text{-}\mathrm{mod}^G) \tag{4.3}$$

是 t-正合的，

(II) 且由此得到的等价关系 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-模^{G}限制为

$$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\mathsf{R}}^{diag}\text{-}\mathrm{mod}^{G^{(1)}}. \tag{4.4}$$

(II) 将给出一个等价 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-模$^{G^{(1)}})$。将此与 (2.16) 中的第一个等价结合起来，将得到一个等价

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1)})). \tag{4.5}$$

由于所有中间等价都是 R-双线性且幺半的，因此 (4.5) 也是如此。于是，(I) 和 (II) 完成了该定理的证明。

(I) 的证明：我们注意到.....中的支撑

$$\mathfrak{g}^{(1)*} \times_{\mathfrak{h}^{*(1)}/W} \mathrm{Spec}(\mathsf{R}^W) \tag{4.6}$$

任意 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中对象的（幂零锥的一个“足够小的邻域”）都会与 $\overline{\mathrm{Spec}}(\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]])$ 相交，因为 $G^{(1)}$ 在幂零锥中只有有限多个轨道，且零点是唯一的闭轨道。$\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-$\mathrm{mod}^G$ 中的对象也具有同样性质。因此，只需在将基底从 (4.6) 作基变换为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]])$ 后验证 t-正合性这一断言即可。我们用上标 $\bullet^{\wedge_{\mathfrak{g}}}$ 标记相应的对象，例如

$$\mathsf{St}^{(1)\wedge_{\mathfrak{g}}} := \mathsf{St}^{(1)} \times_{\mathfrak{g}^{*(1)}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]]), \mathcal{D}^{\wedge_0,\mathfrak{g}} := \mathcal{D}^{\wedge_0} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]^\wedge} \mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]].$$

回顾注记 2.2， $\mathcal{E}^{diag,\ \wedge_{\mathfrak{g}}}$ 与 $\mathcal{E}'\boxtimes\mathcal{E}'^{*}$ 到 $\mathrm{St}^{\wedge_{\mathfrak{g}}}$ 的限制相一致。根据引理 2.4， $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}^{\wedge_{\mathfrak{g}}}$ 与 $\mathcal{E}'$ 具有相同的不可分解直和项。因此，(4.3) 到 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mathfrak{g}^{(1)*}]])$ 的基变换是 t-正合的这一断言得证。于是 (4.3) 本身也是 t-正合的。

（II）的证明：首先，我们注意到，在这两个范畴 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-$\mathrm{mod}^{G^{(1)}}$ 和 $\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中，每个对象都是一个在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]$ 上平坦的模的商。

在范畴 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-$\mathrm{mod}^{G^{(1)}}$ 中，我们可以取形如 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}\otimes V'$ 的对象，其中 V' 是 $G^{(1)}$ 的有限维有理表示。它们平坦的原因是 $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}$ 在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]$ 上平坦，见 [BM，第 2 节。5], 因此 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$ 在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]$ 上平坦。

在范畴 $\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中，我们可以取形如 $\mathrm{pr}_0(V\otimes\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 的对象，其中 V 是 G 的有限维有理表示。

范畴 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-$\mathrm{mod}^{G}$ 中一个在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]$ 上平坦的对象属于 $\mathcal{A}^{diag}{}_{\mathsf{R}}$-$\mathrm{mod}^{G^{(1)}}$，当且仅当 G 在将该对象限制到 $\mathfrak{g}^{*(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 中任意一个非空开子概形后，其作用都经由 $G^{(1)}$ 分解。对于 $\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U}^{\wedge_0})\subset\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$，类似的断言也成立：它由强 G-等变对象构成。因此，只需证明（II）的断言在限制到 $\mathfrak{g}^{*(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 中一个非空开子概形之后仍成立，例如限制到 $\mathfrak{g}^{*(1)^{reg}}{}_{\mathsf{R}}$。

在后一个轨迹上，等价 (4.1) 和 (4.2) 是 t-正合的。对于 λ,μ 在 G （或其覆盖）的权格中，讨论 $\mathrm{Coh}^{G}(\mathcal{D}^{\wedge_\mu}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_\lambda})^{opp}|_{\mathrm{St}^{reg}})$ 中的强 G-等变对象是有意义的。

因此，我们需要证明，对于 $\mathcal{F}\in\mathrm{Coh}^{G}(\mathrm{St}^{(1),\ reg}{}_{\mathsf{R}})$，以下两个条件等价：

(i) G 在 $\mathcal{F}$ 上的作用经由 $G^{(1)}$ 分解；(ii) $\mathcal{E}^{diag}\otimes\mathcal{F}$ 是强 G-等变的。

将 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathrm{St}^{(1),\ reg}{}_{\mathsf{R}})$ 中的一个对象与 $\mathrm{Coh}^{G}(\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathrm{St}^{reg}})$ 中的一个强等变对象张量化，会得到 $\mathrm{Coh}^{G}(\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathrm{St}^{reg}})$ 中的一个强等变对象。另请注意，如果 $\mathrm{Coh}^{G}(\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathrm{St}^{reg}})$ 中的两个对象都是强等变的，那么它们在 Hom（关于 $\mathcal{D}^{\wedge_0}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_0})^{opp}|_{\mathrm{St}^{reg}}$）上的 G-作用会经由 $G^{(1)}$ 分解。因此，只需验证 $\mathcal{E}^{diag}$ 是强等变的，便可推出 (i) 和 (ii) 等价。请注意，与 $\mathcal{B}$ 上的线丛进行扭曲会保持强等变性。这是因为

$$\mathcal{D}^{\wedge_\mu}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu-\lambda)\in\mathrm{Coh}^{G}(\mathcal{D}^{\wedge_\mu}\boxtimes(\mathcal{D}^{\wedge_\lambda})^{opp})$$

是强等变的。

另一方面，正则 $\mathcal{U}^{\wedge_{-\rho}}$-双模是强等变的，因此它向 $\mathrm{St}^{(1)}{}_{\mathsf{R}}$ 的拉回也是强等变的。由 (I) 的证明中 $\mathcal{E}^{diag}$ 的构造可知， $\mathcal{E}^{diag}$ 满足 HC条件，从而完成 (II) 的证明。□

注4.2。我们将需要定理 4.1 中这些等价的不同版本。考虑全子范畴 $\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U})_0$，其包含 $\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中所有满足以下条件的对象：右侧的 R 作用通过剩余域分解；等价地， $\mathcal{U}^{\wedge_0}$ 的作用通过$\mathcal{U}_0$分解。换言之，$\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U})_0$ 中的对象恰好是有限生成的强G-等变 $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_0$-双模。由于 (4.4) 是 R-双线性的，它限制为一个等价

$$\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U})_0\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}_{\mathsf{R}}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]}\mathcal{A}^{opp}\text{-}\mathrm{mod}^{G^{(1)}}\tag{4.7}$$

注意，这就是定理 1.7 中的 (1.2)。

将 (4.7) 与 (2.17) 结合起来，我们得到

$$D^{b}(\mathrm{HC}^{G}(\mathcal{U})_0)\xrightarrow{\sim}D^{b}(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathrm{St}^{(1)}).\tag{4.8}$$

现在令 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}_0)$ 表示 HC $\mathcal{U}_0$-双模范畴。与 (4.7) 类似，我们得到一个等价

$$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}. \tag{4.9}$$

由于 (4.4) 是幺半的，因此它也是幺半的。而 (4.7) 则成为双模范畴之间的等价，其中左侧由 (4.4) 中的等价幺半范畴作用，右侧由 (4.9) 作用。

4.2. Grothendieck 群。本节的目标是利用定理 4.1 研究$K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$。

我们有一个作用于 $K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 上的 W^{ea}经典作用，它来自反射函子：对所有简单仿射反射，张量化 B_s^{HC}（在左侧）对应于算子 $1+s$；而张量化 Δ_x^{HC} 对应于所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$的 x。

我们的目标是证明以下结果。

命题 4.3。我们有一个 W^{ea}-等变同构 $\mathbb{Z}W^{ea} \xrightarrow{\sim} K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$，它将 $1 \in \mathbb{Z}W^{ea}$ 映射到 $\mathcal{U}_0$ 的类。

证明。由 (4.8)，我们有

$$K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) \xrightarrow{\sim} K_0^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)}).$$

根据 [CG，定理 7.2。2], 我们有一个同构

$$\mathbb{Z}W^{ea} \xrightarrow{\sim} K_0^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)}). \tag{4.10}$$

构造如下。取一个满足 $w \in W$ 的元素 $wt_\lambda \in W^{ea}$，$\lambda \in \Lambda$。考虑 W in$\mathsf{St}^{(1),rs}_{\mathfrak{h}}$ 的图，其中上标“rs”表示“正则半单”。注意到

$$\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}^{(1),rs} \cong G^{(1)} \times^{N_{G^{(1)}}(T^{(1)})} (\mathfrak{h}^{*(1),reg} \times_{\mathfrak{h}^{*(1),reg}/W} \mathfrak{h}^{*(1),reg})$$

所涉及的图为

$$\Lambda_w^{reg} := G^{(1)} \times^{N_{G^{(1)}}(T^{(1)})} \{(wx, x), x \in \mathfrak{h}^{*(1),reg}\}$$

令 Λ_w 为 Λ_w^{reg} 在 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}^{(1)}$ 中的闭包与其约化子概形 $\mathsf{St}^{(1)}$ 的概形理论交。我们用 $\mathcal{O}_{\Lambda_w}(\lambda)$ 表示 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}}(\lambda)$ 在投影到第二个因子下的拉回。于是，同构 (4.10) 将 wt_λ 映射到 $\mathcal{O}_{\Lambda_w}(\lambda)$ 的类。我们注意到，$K_0^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)})$ 通过卷积具有代数结构，而 (4.10) 是一个代数同构。我们还要指出，尽管 [CG，定理 7.2。2] 是在 $\mathbb{C}$ 上表述的，但其证明原封不动地适用于我们的情形。

还需证明这一识别是 W^{ea}-等变的。令 $\mathsf{St}^{(1),rs}_{\mathsf{R}}$ 表示 $\mathsf{St}^{(1),rs}_{\mathfrak{h}}$ 与 $\mathsf{St}^{(1)}_{\mathsf{R}}$ 的交。我们有一个从 ASBim$^\wedge$ 到

$$\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}_{\mathsf{R}}^{(1),rs}) \cong \mathrm{Coh}^{N_{G^{(1)}}(T^{(1)})}(\mathrm{Spec}(\mathsf{R})^{reg} \times_{\mathrm{Spec}(\mathsf{R}^W)} \mathrm{Spec}(\mathsf{R})^{reg}) \tag{4.11}$$

通过局部化到正则轨。注意，根据对象Δ_x^{AS}、$B_s^{AS} \in$ ASBim$^\wedge$的构造，它们在 (4.11) 右侧的像分别是 x的图，以及由图 1 对图 s的扩张（对所有简单仿射反射 s及所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$均如此）。另一方面，借助定理 4.1，或等价地借助第 3.2 节中的构造，我们还有一个从 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 到 $\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}^{(1),rs}_{\mathsf{R}})$ 的函子。该函子交织了 $K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 与 $\cong K_0(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathsf{St}^{(1)}))$ 上的作用。多亏

了命题 3.5 的证明，B_s^{HC}、Δ_x^{HC}在 $\mathrm{Coh}^G(\mathrm{St}^{(1),\ rs}{}_{\mathsf{R}})$ 中的像与 B_s^{AS}、Δ_x^{AS}的像重合。结合前一段的构造，这意味着识别 $\mathbb{Z}W^{ea} \xrightarrow{\sim} K_0(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathrm{St}^{(1)}))$ 是 W^{ea}-等变的。□

4.3. 对偶函子。命题 4.3 对研究 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$上的对偶函子有重要应用。现在我们回顾一下该函子的定义。与第 3.2 节类似，$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$是范畴 $\mathcal{U}_0^{opp}$-模^{G}中的一个直和项，由所有左侧具有广义中心特征 0 的双模组成。类似于 $\mathcal{U}_0$-模^G，我们可以考虑范畴 $\mathcal{U}_0$-模^G。

注意，$\mathcal{U}_0$ 是一个 Gorenstein 代数，因为它的伴随分次 $\mathbb{F}[\mathcal{N}]$也是如此。因此，函子 $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_0^{opp}}(\bullet,\mathcal{U}_0)$ 是一个等价 $D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-模}^G) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{U}_0\text{-模}^G)^{opp}$。设 θ表示 G的 Cartan 对合：在李代数上，它将 Cartan 生成元 e_i映射为 f_i，反之亦然。它诱导出一个等价 $\mathcal{U}_0$-模$^G \to \mathcal{U}_0^{opp}$-模^G，该等价通过反自同态 $x \mapsto -\theta(x)$ 扭曲 $\mathfrak{g}$ 的作用（因此，$\mathcal{U}_0$ 的右作用产生了 $\mathcal{U}_0$ 的左作用，因为 $-\theta$ 在中心上的作用是平凡的），并通过 θ扭曲 G的作用。将该等价 $\mathcal{U}_0^{opp}$-模$^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_0$-模^{G}记为 $M \mapsto {}^{\theta}M$。

考虑 $D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 上的反变自等价 $\mathbb{D} := {}^{\theta}R\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_0}(\bullet,\mathcal{U}_0)$。

另一方面，扩展仿射辫群 Br^{ea} on$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 通过跨墙函子作用：长度为零的元素 x acts by $\Delta_x^{HC} \otimes_{\mathcal{U}^{\wedge_0}} \bullet$，而对于简单仿射反射 s，相应的生成元 T_s acts by 与 Id $\to \Theta_s$ 的锥做张量化，其中 Θ_s 是经典反射函子。

以下是这个等价的基本性质。它们都是标准的。

引理 4.4. 以下断言成立：

(1) 等价 $\mathbb{D}$ 限制为 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 的反变自等价。此外，$\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{id}$。(2) 对于 $M \in D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 和 G 的有限维有理表示 V，我们有 $\mathbb{D}(V \otimes M) \xrightarrow{\sim} V^\vee \otimes \mathbb{D}(M)$，其中 $V^\vee := {}^{\theta}V^*$。(3) 对于 $x \in W^{ea}$，我们有 $T_x \circ \mathbb{D} \cong \mathbb{D} \circ T_{x^{-1}}$。这里我们用 T_x 表示 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 中对应于 $x \in W^{ea}$ 的跨墙等价。

推论 4.5。函子 $\mathbb{D}$ 在 $K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}_0))$ 上给出恒等函子。

证明。我们有 $\mathbb{D}(\mathcal{U}_0) \cong \mathcal{U}_0$。根据引理 4.4 的 (3)，我们看到 $\mathbb{D}$ 通过一个 W^{ea}-等变映射作用于$K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 上。现在由命题 4.3 即得结论。□

注 4.6。将 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 视为 $D^b(\mathcal{U}^{\wedge_0,opp}\text{-模}^G)$ 的一个直和项。这使我们能够定义 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 上的反变自等价 $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}$，其定义为

$$\mathbb{D}_{\mathsf{R}} := {}^{\theta}R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{\wedge_0}}(\bullet,\mathcal{U}^{\wedge_0})$$

对于 $M \in \mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$，我们有 $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}(M) = \mathbb{D}(M)$[维 $\mathfrak{h}$]，因为 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$在 R 上是平坦的。我们还注意到，$\mathbb{D}_{\mathsf{R}}$ 满足引理 4.4 的直接类似结论。

4.4. HC-倾斜双模。这里我们在 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 以及 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$ 中定义 HC-倾斜双模的一个全子范畴。

定义 4.7。$\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中的一个对象称为 HC-倾斜的，若它是某个倾斜 G-模 T 在$T \otimes \mathcal{U}^{\wedge_0}$ 中的直和项。

类似地，可以定义 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$ 中的 HC-倾斜对象。令 HC-tilt$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 和 HC-tilt$^G(\mathcal{U})_0$ 表示相应范畴中 HC-倾斜双模的全子范畴。

下面的引理描述了 HC-倾斜双模的基本性质。证明是标准的，故略去。

引理 4.8。以下断言成立：

(1) HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 是 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 的 Karoubian 幺半群子范畴。(2) 子范畴 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$、HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$分别在对偶函子 $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}$、$\mathbb{D}$ 下稳定。(3) 对所有简单仿射反射 s和所有$x \in \Lambda/\Lambda_r$，我们有 $B_s^{HC}, \Delta_x^{HC} \in$HC-倾斜模范畴$^G($ $\mathcal{U}^\wedge_0)$。特别地，命题 3.5 中全嵌入的像包含于 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 中。

以下是另一个重要性质。

命题 4 .9. 对于 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_{0,}$，它们在 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$ 中的高阶 Ext 群消失.

证明。回想一下，HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$中的每个对象都是 $T \otimes \mathcal{U}_0$ 中的一个直和项，其中 T是 G 的一个倾斜表示。还要回想一下，范畴 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$ 是 $\mathcal{U}_0^{opp}$-模^G 中的一个直和项。因此，只需证明对于 G 的所有倾斜表示 T_1, T_2，我们有

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}_0,G}(T_1 \otimes \mathcal{U}_0, T_2 \otimes \mathcal{U}_0) = 0, \forall i > 0, \tag{4.12}$$

其中 Ext 是在范畴 $\mathcal{U}_0^{opp}$ -mod^G 中计算的。

倾斜对象的对偶和张量积仍然是倾斜对象，张量积的情形参见 [J，命题 4.19] 。并且每个倾斜对象都是 Weyl 滤过的（即由 Weyl 模滤过）。因此只需证明

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}_0,G}(V \otimes \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) = 0$$

对 G 的所有 Weyl 滤过表示 V，

注意，左边是 $\mathrm{Ext}^i_G(V, \mathcal{U}_0)$。作为一个 G-模， $\mathcal{U}_0$ 有一个分解（从左侧取），其各项是若干个 G-模 $\mathcal{U}$ 的直和。后者是余标准滤过的，这可由 [J，第 4.21] 节推出。因此，对所有 $i > 0$，$\mathrm{Ext}^i_G(V, \mathcal{U}_0) = 0$ 。这就证明了该命题。□

这个命题有一个标准推论。

推论 4.10。以下结论成立：

(1) 对于 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$，我们有 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 在 R 上是平坦的，并且 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_1 \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}, \mathcal{B}_2 \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}$。(2) 函子 $\bullet \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}$ 在 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 与 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$中的不可分解对象之间定义了一个双射。(3) 对于 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$，它们在 $\mathrm{HC}(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 中的高阶 Ext 群均为零。

4.5. 反常双模。这里我们回顾 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 上的一个 t-结构，称为反常 t-结构，参见 [AB]。对于这个 t-结构，我们有

$$\begin{aligned} {}^pD^{b,\leqslant 0}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) &= \{M \in D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) | \dim \mathrm{Supp}\, H^i(M) \leqslant \dim \mathcal{N} - 2i\}, \\ {}^pD^{b,\geqslant 0}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) &= \mathbb{D}({}^pD^{b,\leqslant 0}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)). \end{aligned} \tag{4.13}$$

证明这确实是一个 t-结构的论证，照搬了 $\mathbb{F}[\mathcal{N}]$ 而非 $\mathcal{U}_0$ 在 [AB 第 3] 节中的论证。这个结构的心记作 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$)，其中的对象称为反常双模。

例 4.11. 设 V 是一个有限维有理表示。那么 pr$_0(V\otimes\mathcal{U}_0)$ 是一个偏 pervers 双模。事实上，该对象属于 ${}^pD^{b,\leqslant 0}$，其对偶由引理 4.4 的 (2) 得到，为 pr$_0(V^\vee\otimes\mathcal{U}_0)$。

引理 4.12. Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 中的所有对象都有有限长度。

证明. 考虑包含映射 $\mathbb{F}[\mathcal{N}^{(1)}]\hookrightarrow\mathcal{U}_0$。它给出拉回函子

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)\to D^b(\mathbb{F}[\mathcal{N}^{(1)}]\text{-mod}^G).$$

与 [BLo，命题 6.10]，的证明类似，这个函子关于偏 pervers t-结构是 t-正合的。此外，对心的限制是忠实的。根据 [AB，推论 4.13]，Perv($\mathbb{F}[\mathcal{N}_{(1)}]$-mod^G) 中的每个对象都有有限长度。由于 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 存在一个忠实 t-正合函子，映至一个每个对象都具有有限长度的范畴，因此 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 中的每个对象也都有有限长度。□

注意到 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 在 $\mathbb{D}$ 下保持不变，因此 $\mathbb{D}$ 是 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 的 t-正合反变对偶函子。

以下是本节的主要结果。

命题 4.13。以下断言成立：

(1) 我们有一个 W^{ea}-等变同构 $\mathbb{Z}W^{ea}\xrightarrow{\sim}K_0$(Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$))（阿贝尔群之间），它将 $1\in\mathbb{Z}W^{ea}$ 发送到 $\mathcal{U}_0$ 的类（其中，目标上的 W^{ea}-作用来自反射函子）。(2) 对于每个简单对象 $L\in$ Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$)，我们有 $\mathbb{D}L\cong L$。

证明。我们首先证明 (1)。我们注意到，偏 pervers t-结构是同调有限的：D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 中的每个对象都只有有限多个非零反常上同调群。这由以下两个观察得出：首先，${}^pD^{b,\leqslant 0}\subset D^{b,\leqslant\dim\mathcal{N}/2}$ 其次，偏 pervers t-结构是自对偶的。由同调有限性，我们得到一个识别

$$K_0(\mathrm{Perv}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)\xrightarrow{\sim}K_0(D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0))(=K_0(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)). \tag{4.14}$$

（1）由（4.14）和命题 4.3 得出。

现在我们证明（2）。根据（4.14）和推论 4.5，$\mathbb{D}$ 在 K_0(Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$)) 上的作用为 1。于是（2）由引理 4.12 得出。□

5. 与 Soergel 型 O 类的等价

5.1. 范畴 O_R 和 O。回顾完备范畴 ASBim$^\wedge$。存在一个定义在 R 上、偏序集为 W^{ea}（相对于 Bruhat 序）的最高权范畴 O_R，其倾斜对象范畴可识别为 ASBim$^\wedge$。我们将沿用 [EL 第 6] 节中的构造，其中讨论了 Coxeter 群的情形。

在 [EL 的第 6.6 节中，作者和 Elias 引入了范畴 ${}^I\mathcal{O}^-_{\mathcal{R},J}(W^a)$（请注意，在该论文的记号中，我们考虑的是一般魏尔群）。我们需要考虑 $I=J=\varnothing$ 的情形。在这种情况下，环 $\mathcal{R}$ 是仿射 Cartan 上以 p-进系数构成的形式幂级数代数。因此，R 是一个 $\mathcal{R}$ 上的代数。令

$$\mathsf{O}_\mathsf{R}(W^a):=({}_\varnothing\mathcal{O}^-_{\mathcal{R},\varnothing}(W^a))^{opp}\otimes_{\mathcal{R}}\mathsf{R}. \tag{5.1}$$

更准确地说，$_{\varnothing}\mathcal{O}_{\mathcal{R}}^{-}$，$_{\varnothing}(W^a)^{opp}$ 是由具有离散拓扑的模构成的范畴，这些模定义在由 $\mathcal{R}$-代数构成的逆极限上，而这些代数是自由有限生成的 $\mathcal{R}$-模（参见 [EL，第 6.1 节3]）。随后，我们将这个拓扑代数从 $\mathcal{R}$ 基变换到 R，并取 $\mathsf{O}_R(W^a)$ 上具有离散拓扑的模所构成的范畴。

O 类$_R(W^a)$ 按照 [EL 第 6.1 节3] 的意义，是 R 上的理想有限最高权范畴。其最高权偏序集为 W^a，并配备 Bruhat 序。我们分别用$T_R(x)$、 $\Delta_R(x)$ 和 $\nabla_R(x)$ 表示由 x 标记的不可分解倾斜对象、标准对象和余标准对象（根据定义， $T_R(x)$ 是唯一存在到 $\nabla_R(x)$ 的满态射的不可分解倾斜对象）。根据构造，$\mathsf{O}_R(W^a)$-倾斜对象范畴 $\mathsf{O}_R(W^a)$-tilt 与 ASBim$^\wedge(W^a)$ 相同，并保持标记。

感谢 [EL，引理 6.30]，，我们可以归纳地如下构造 $\mathsf{O}_R(W^a)$ 中的余标准对象。余标准对象 $\nabla_R(1)$ 是不可分解倾斜对象 $T_R(1)$。设 $x \in W^a$ 和简单仿射反射 s 满足：在 Bruhat 序中有 $sx > x$。假设我们已经构造出了对象 $\nabla_R(x)$。令 Θ_s 表示 O_R 的反射自函子，它由 $B_s \in$ASBim$^\wedge$ 给出，并且带有一个从恒等自函子出发的特定态射。那么根据 [EL 引理 6.30] 的 (2)，我们看到 $\Theta_s\nabla_R(x)$ 具有由 $\nabla_R(x)$ 和 $\nabla_R(sx)$ 构成的滤过。由于在最高权序中有 $sx > x$，因此 $\nabla_R(sx)$ 可构造为 $\nabla_R(x)$ 到 $\to \Theta_s\nabla_R(x)$ 的态射的余核。特别地，该余核在 R 上是平坦的。

下面的引理描述了 $\mathsf{O}_R(W^a)$ 中的标准对象。注意，存在一个函子态射 $\Theta_s \to$id。

引理 5.1. 我们有 $\Delta_R(1) = T_R(1)$。此外，若 $x \in W^a$ 和一个简单仿射反射s 满足 $sx > x$，则 $\Theta_s\Delta_R(x) \to \Delta_R(x)$ 是一个满态射，而 $\Delta_R(sx)$ 是它的核。

证明. $\Delta_R(1) = T_R(1)$ 是标准对象这一断言是显然的。

由于 Θ_s 是一个与其左伴随函子同构的函子，并且保持由余标准滤过对象构成的子范畴 $\mathsf{O}_R(W^a)^\nabla$，它也保持由标准滤过对象构成的子范畴 $\mathsf{O}_R(W^a)^\Delta$。此外，正合范畴 $K_0(\mathsf{O}_R(W^a)^\Delta) \times K_0(\mathsf{O}_R(W^a)^\nabla) \to \mathbb{Z}$ 的 Grothendieck 群之间存在一个完美配对，它将一对对象 (M, N) 映到 Hom(M, N) 的秩。根据本节上文回顾的余标准对象的构造， $K_0(\mathsf{O}_R(W^a)^\nabla)$ 被识别为 $\mathbb{Z}W^a$。Hom 配对将$K_0(\mathsf{O}_R(W^a)^\Delta)$ 识别为 $\mathbb{Z}W^a$ 的受限对偶（所有满足以下条件的函数 f：仅对有限多个元素 $x \in W^a$， $f(x) \neq 0$）。这个模可自然地识别为 $\mathbb{Z}W^a$。回忆一下， Θ_s 与其左伴随函子同构。因此，识别 $K_0(\mathsf{O}_R(W^a)^\Delta) \xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}W^a$ 是 W^a-等变的，所以对所有 x， $\Delta_R(x)$ 对应于 x。于是， $\Theta_s\Delta_R(x)$ 由$\Delta_R(x)$ 和 $\Delta_R(sx)$ 滤过。由于 $sx > x$ 在最高权序中，我们看到 $\Theta_s\Delta_R(x) \to\Delta_R(x)$ 是一个满态射，而 $\Delta_R(sx)$ 是它的核。□

我们还需要另一个引理。

引理 5.2。以下两个结论成立：

(1) 我们有一个等价 K^b(ASBim$^\wedge(W^a)) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}_R(W^a))$。(2) ASBim$^\wedge(W^a)$ 通过 t-正合函子作用于 K^b(ASBim$^\wedge(W^a)$)。

证明。（1）是相当标准的。回顾一下，ASBim$^\wedge(W^a) \xrightarrow{\sim}\mathsf{O}_R(W^a)$ -tilt。我们有一个全嵌入 $K^b(\mathsf{O}_R(W^a)$ -tilt) $\hookrightarrow D^b(\mathsf{O}_R(W^a))$，因为倾斜对象之间没有高阶自扩张

。$\mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a)$ 中的每个对象都存在一个由标准滤过对象构成的有限分解（从左侧）。每个标准滤过对象都属于 $K^b(\mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a)\text{-tilt})$。因此，$K^b(\mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a)\text{-tilt}) \hookrightarrow D^b(\mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a))$ 是本质满的。（1）得证。

现在我们证明 (2)。根据引理 5.1，$\mathsf{ASBim}^\wedge(W^a)$ 的作用保持标准滤过对象构成的子范畴。由于 $\mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a)$ 中的每个对象都有一个由标准滤过对象构成的分解，因此 $\mathsf{ASBim}^\wedge(W^a)$ 通过右 t-正合函子作用。但由 $\mathsf{ASBim}^\wedge(W^a)$ 得到的函子在取伴随函子后仍封闭，因此它们也是左 t-正合的。这就完成了 (2) 的证明。□

现在我们说明如何为群 W^{ea} 定义 O_{R}。为此，注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ASBim}^\wedge}(B_x^{AS}, B_y^{AS}) = 0 \text{ if } xy^{-1} \notin W^a.$$

因此，$\mathsf{ASBim}^\wedge$ 分解为由 $\Lambda/\Lambda_r = W^{ea}/W^a$ 标记的子范畴的直和。对于 $x \in \Lambda/\Lambda_r$，对象 Δ_x^{AS} 是可逆的。此外，我们有一个从 Λ/Λ_r 到 $\mathsf{ASBim}^\wedge$ 中可逆对象的（同构类）群的群同态，该同态由 $x \mapsto \Delta_x^{AS}$ 给出。

我们记

$$\mathsf{O}_{\mathsf{R}} := \bigoplus_{x\in\Lambda/\Lambda_r} \mathsf{O}_{\mathsf{R}}(W^a). \tag{5.2}$$

这一分解产生了 O_{R}-倾斜对象与 $\widetilde{\to}\ \mathsf{ASBim}^\wedge$ 之间的一个对应。这进而给出了 $\mathsf{ASBim}^\wedge$ 在 O_{R} 上的作用。对象 Δ_x^{AS} 对于 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 通过范畴等价作用，从而置换（5.2）中的直和项。相应的函子分别将 $T_{\mathsf{R}}(y)$ $\nabla_{\mathsf{R}}(y)$ $\Delta_{\mathsf{R}}(y)$ 送到 $T_{\mathsf{R}}(xy)$ $\nabla_{\mathsf{R}}(xy)$ $\Delta_{\mathsf{R}}(xy)$。B_s^{AS} 的作用（记作 Θ_s）在余标准对象和标准对象上的作用如上所述。引理 5.2 的直接类似结论成立。

范畴 O_{R} 是 R-线性的。因此我们可以考虑其特化

$$\mathsf{O} := \mathsf{O}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F} \tag{5.3}$$

这是一个 $\mathbb{F}$-线性的最高权范畴，具有相同的偏序集 W^{ea}。我们记

$$T(x), \Delta(x), \nabla(x), L(x)$$

分别表示由 $x \in W^{ea}$ 标记的不可分解倾斜对象、标准对象、余标准对象和简单对象。注意，$\mathsf{ASBim}^\wedge$ 仍然通过正合函子作用于 O。

5.2. 范畴 O 的对偶性。本节旨在定义 O_{R}、O 的对偶函子。我们从 $\mathsf{ASBim}^\wedge(=\mathsf{O}_{\mathsf{R}}\text{-tilt})$ 的对偶函子开始。回顾一下 $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}(\mathcal{U}^{\wedge_0}\text{-mod})$ 的对偶函子 D^b，见注 4.6。注意，它保留 $\mathsf{HC}\text{-tilt}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$，见引理 4.4 的 (2) 和注 4.6。此外，回顾一下 $\mathsf{ASBim}^\wedge$ 全嵌入 $\mathsf{HC}\text{-tilt}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$，见命题 3.5。

引理 5.3。$\mathsf{ASBim}^\wedge$ 在 $\mathsf{Hilt}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中的像在 $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}$ 下封闭。此外，对于所有 $x \in W^{ea}$，不可分解对象 B_x^{AS} 在 $\mathsf{Hilt}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中的像都是自对偶的。

证明。 B_1的像是 $\mathcal{U}^{\wedge_0}$，它是自对偶的。另请回忆注 4.6： $\mathbb{D}_{\mathsf{R}}$交织了 $D^b(\mathsf{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$中形如 $\mathrm{pr}_0(V \otimes \bullet)$ 的自函子，其中 V是 G 的自对偶表示（例如简单表示或倾斜模）。函子 Θ_s 以及与Δ_x^{HC}的张量化都属于这种形式。因此，$\mathsf{Hilt}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$中每个 Bott-Samelson 双模 $\mathrm{BS}_{\underline{w}}^{AS}$ （对应于单词 $\underline{w} = (x, s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$ ）的像都是自对偶的。回忆一下，若 $\underline{w}$是 w 的一个约化表达式，则 B_w^{AS}在 $\mathrm{BS}_{\underline{w}}^{AS}$ 中出现的重数为 1，而所有其他

B_y^{AS}在 $\mathrm{BS}_{\underline{w}}^{AS}$ 中出现时都具有 $y < w$。现在，通过关于 Bruhat 序对 w 作归纳法（利用 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$是 Krull–Schmidt 范畴这一观察），即可证明 B_w^{AS}的像是自对偶的。特别地，$\mathrm{ASBim}^\wedge$的像是自对偶的。□

因此，我们得到 O_R-倾斜范畴的一个反变 R-线性自等价，仍记作$\mathbb{D}_\mathsf{R}$。该函子扩张到 K^b(O_R-倾斜范畴)，根据引理 5.2，它与 $D^b(\mathsf{O}_\mathsf{R})$ 等同。

Lemma 5.4. K^b(O_R-倾斜范畴)的自等价 $\mathbb{D}_\mathsf{R}$ 具有以下性质 .

(1) 对所有 $x \in W^a$，都有 $\mathbb{D}_\mathsf{R}(T_\mathsf{R}(x)) \cong T_\mathsf{R}(x)$。(2) 对所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$，都有 $\mathbb{D}_\mathsf{R} \circ \Theta_s \cong \Theta_s \circ \mathbb{D}_\mathsf{R}$ 且 $\mathbb{D}_\mathsf{R}(\Delta_x^{AS} \otimes \bullet) \cong \Delta_x^{AS} \otimes \mathbb{D}_\mathsf{R}(\bullet)$。(3) 有 $\mathbb{D}_\mathsf{R}(\nabla_\mathsf{R}(x)) \cong \Delta_\mathsf{R}(x)$。

证明。（1）直接由引理 5.3 得出。（2）由 $\mathbb{D}_\mathsf{R}$ 的构造得出，参见引理 5.3 的证明。我们通过关于 Bruhat 序对 x 作归纳法来证明（3）。基底情形 $x \in \Lambda/\Lambda_r$ 由（1）得出。为完成归纳步骤，注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{O}_\mathsf{R}}(\nabla_\mathsf{R}(x), \Theta_s\nabla_\mathsf{R}(x)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}. \tag{5.4}$$

将可逆元 $\varphi \in \mathsf{R}$ 视为一个同态时，φ 是单态射，而 φ 的余核是 $\nabla_\mathsf{R}(sx)$；这由第 5.1 节中的提醒可知。函子 $\mathbb{D}$ 将此余核映为 R-模 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{O}_\mathsf{R}}(\Theta_s\Delta_\mathsf{R}(x)\ \Delta_\mathsf{R}(x))$ 中任意生成元的核。后者与 $\Delta_\mathsf{R}(sx)$ 相同，见引理 5.1。由此完成（3）的证明。□

接下来讨论 O 类的对偶函子。注意，由于我们有一个 R-线性同构 $\mathbb{D}_\mathsf{R}(T_\mathsf{R}(x)) \cong T_\mathsf{R}(x)$，因此得到 $\mathbb{D}_\mathsf{R}(T(x)) \cong T(x)[-\dim \mathfrak{h}]$。所以我们有一个对偶函子 $\mathbb{D} := \mathbb{D}_\mathsf{R}[\dim \mathfrak{h}]$，其定义在 O-tilt 上。随后将 $\mathbb{D}$ 延拓至 $K^b(\text{O-tilt}) \cong D^b(\mathsf{O})$。

引理 5.5。以下结论成立：

(1) 对所有简单仿射反射 s 和所有 $x \in \Lambda/\Lambda_r$，我们有 $\Theta_s \circ \mathbb{D} \cong \mathbb{D} \circ \Theta_s$ and $\Delta_x^{AS} \otimes \mathbb{D}(\bullet) \cong \mathbb{D}(\Delta_x^{AS} \otimes \bullet)$。(2) 对所有 $x \in W^a$，我们有 $\mathbb{D}(\Delta(x)) \cong \nabla(x)$。(3) 函子 $\mathbb{D}$ 是 t-正合的。(4) 我们有 $\mathbb{D}(L(x)) \cong L(x)$。

证明。(1) 和 (2) 由引理 5.4 的 (2) 和 (3) 得出。O 中的每个对象都有一个分解 $0 \to M_k \to \ldots \to M_0$，其中所有 M_i 都是标准滤过的；并且有一个分解 $N_0 \to \ldots \to N_\ell \to 0$，其中所有 N_j 都是余标准滤过的。现在，(3) 由 (2) 结合 $\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{id}$ 得出。由于 $L(x)$ 是唯一（相差一个缩放因子）的同态 $\Delta(x) \to \nabla(x)$ 的像，(4) 由 (2) 和 (3) 得出。□

5.3. 等价 $\mathsf{O} \xrightarrow{\sim}$ 周边层范畴$(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$。这是本文的主要章节。在此我们构造一个等价 $\mathsf{O} \xrightarrow{\sim}$ 周边层范畴$(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$。下面说明该构造及证明的四个主要步骤。

(i) 我们利用 $\mathrm{ASBim}^\wedge \hookrightarrow$HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge_0)$ 构造一个满的 $\mathrm{ASBim}^\wedge$-等变嵌入 O -倾斜模范畴 $\hookrightarrow$ HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$，使其与对偶函子相交织。(ii) 我们证明 O -倾斜模范畴 $\hookrightarrow$ HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$ 可扩张为一个 $\mathrm{ASBim}^\wedge$-等变的全嵌入 $D^b(\mathsf{O}) \hookrightarrow D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$，使其与对偶函子相交织。

(iii) 我们知道，Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 的对偶函子固定所有单对象。我们利用这一点以及 D^b(O) $\hookrightarrow$ D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 是与对偶函子相交织的全嵌入这一事实，证明该全嵌入是 t-正合的，并将单对象映到单对象（右侧考虑偏 pervers t-结构）。(iv) 我们通过考察 Grothendieck 群之间诱导的映射，证明所得的全嵌入 O $\hookrightarrow$ Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 是一个等价。

我们从 (i) 开始。我们可以将 O-倾斜模范畴视为 K^b(O$_\mathsf{R}$-倾斜模范畴)中的一个全子范畴：将$T(x)$送到对应于 $\mathfrak{h}$ 在 $T_\mathsf{R}(x)$上的作用的 Koszul复形。类似地，HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$ 嵌入到 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$)中。回想一下，O$_\mathsf{R}$-倾斜模范畴 $\cong$ASBim$^\wedge$。显然，全嵌入K^b(O$_\mathsf{R}$-倾斜模范畴) $\hookrightarrow$ K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^\wedge{}_0)$)（它是 ASBim$^\wedge$-等变的，并交织对偶函子）诱导出一个全嵌入 O-倾斜模范畴 $\hookrightarrow$ HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$。根据构造，此嵌入是 ASBim$^\wedge$-等变的，并交织对偶函子。这就完成了上面的 (i)。

(ii) 是下面这个引理。

引理5.6。全嵌入 O-倾斜模范畴 $\hookrightarrow$ HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$ 唯一地扩张为一个正合函子 φ : D^b(O) $\hookrightarrow$ D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$)。此扩张是全嵌入，且是 ASBim$^\wedge$-等变的，并交织对偶函子。

证明。全嵌入 O -倾斜模范畴 $\hookrightarrow$ HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$ 唯一地延拓为全嵌入K^b(O -倾斜模范畴) $\hookrightarrow$ K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$)。由于 O 是理想有限最高权范畴，源范畴为 D^b(O)。由于 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$,中的对象之间不存在更高阶 Ext，见命题 4.9，自然函子 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$) $\to$ D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 是一个全嵌入。其余断言（等变性以及与对偶性的相容性）由构造可得。□

下面的命题正是上述策略中的 (iii)。

命题 5.7。全嵌入 φ : D^b(O) $\hookrightarrow$ D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 是 t-正合的（相对于目标上的偏 pervers t-结构），并将简单对象映为简单对象。

回顾一下，$\mathbb{D}$ 固定 Perv(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 中的所有单对象，见命题 4.13（在 O 中则见引理 5.5）。由于嵌入 D^b(O) $\hookrightarrow$ D^b(HC$^G(\mathcal{U})_0$) 交织了对偶函子，命题 5.7 随即由下一个引理推出。

引理 5.8。设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是赋有同调有限 t-结构的三角范畴，其心分别为 $\mathcal{C}^\heartsuit$、$\mathcal{D}^\heartsuit$，并分别带有 t-正合对偶函子 $\mathbb{D}_\mathcal{C}$、$\mathbb{D}_\mathcal{D}$。设 φ : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个正合全嵌入，满足 $\varphi \circ \mathbb{D}_\mathcal{C} \cong \mathbb{D}_\mathcal{D} \circ \varphi$。进一步假设，$\mathcal{C}^\heartsuit$、$\mathcal{D}^\heartsuit$ 中的所有对象都具有有限长度，且 $\mathcal{D}^\heartsuit$ 中的所有单对象都被 $\mathbb{D}_\mathcal{D}$ 固定。则 φ 是 t-正合的，并将单对象映为单对象。

我们将在证明中看到，$\mathcal{C}^\heartsuit$ 中所有对象都具有有限长度这一条件，可以由引理的其他条件推出。

引理 5.8 的证明。证明分为若干步。

步骤 1。首先，请注意，对于每个 $M \in \mathcal{D}^\heartsuit$ 以及每个满足 $M \twoheadrightarrow L$ 的简单 L，我们都有一个复合态射 κ_L : $M \twoheadrightarrow L \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_\mathcal{D} L \hookrightarrow \mathbb{D}_\mathcal{D} M$。它非零，因为其像非零。

步骤 2. 假设 φ不是 t-正合的。这意味着存在 $M' \in \mathcal{C}^\heartsuit$，使得对某个 $i \neq 0$, $H^i(\varphi M') \neq 0$。如有必要，将 M'替换为 $\mathbb{D}_\mathcal{C} M'$，我们可以假设 $i > 0$。此外，由于 $\mathcal{D}$ 上的 t-结构同调有限，我们可以假设对于 $j > i$， $H^j(\varphi M') = 0$ 。

。取一个满足 $H^i(\varphi M') \twoheadrightarrow L$的简单对象 L。那么 $L \cong \mathbb{D}_{\mathcal{D}}L \hookrightarrow \mathbb{D}_{\mathcal{D}}(H^i(\varphi M')) \cong H^{-i}(\varphi(\mathbb{D}_{\mathcal{C}}M'))$。因此我们得到一个非零态射 $H^i(\varphi M') \to H^{-i}(\varphi(\mathbb{D}_{\mathcal{C}}M'))$。由此可知，存在一个非零态射 $\varphi M'[i] \to \varphi(\mathbb{D}_{\mathcal{C}}M')[-i]$。由于 φ是全嵌入，这意味着我们有一个非零态射 $M'[i] \to \mathbb{D}_{\mathcal{C}}M'[-i]$。由于 M'、$\mathbb{D}_{\mathcal{C}}M'$都属于 t-结构的心，且 $i > 0$，于是得到矛盾。这证明了φ是 t-正合的。

步骤 3。现在我们证明，φ 将简单对象映射为简单对象。设 $L' \in \mathcal{C}^{\heartsuit}$ 为简单对象。假设 $\varphi L'$ 不是简单对象。设 L 为 $\mathcal{D}^{\heartsuit}$ 中的一个简单对象，使得 $\varphi L' \twoheadrightarrow L$。考虑与步骤 1 中的 L 相关联的非零态射 $\kappa_L : \varphi L' \to \mathbb{D}_{\mathcal{D}}\varphi L' \cong \varphi\mathbb{D}_{\mathcal{C}}L'$ 。由于φ 是全嵌入，κ_L 来自一个非零态射 $\kappa'_L : L' \to \mathbb{D}_{\mathcal{C}}L'.$ 。由于 $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}L'$也是简单对象，我们得出结论，$\kappa'_L$ 是一个同构。因此，κ_L 是一个同构。由此可得 $\varphi L' \xrightarrow{\sim} L$。这与 $\varphi L'$ 不是简单对象这一假设矛盾，从而完成引理的证明。□

最后，我们继续进行上述构造的步骤 (iv)。

定理 5.9. 全嵌入 $D^b(\mathsf{O}) \hookrightarrow D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 是一个 t-正合的范畴等价。

证明. 由于我们已经知道 φ 是一个全嵌入，因此需要证明的是，Perv(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$) 中的每个单对象都来自 O 中的一个单对象。回想一下，φ: O $\to$Perv(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$) 将 $T(1) = L(1)$ 映到 $\mathcal{U}_0$，并且是 ASBim$^\wedge$-等变的。还要回想，根据命题 4.13，$\mathcal{U}_0$ 的类在 K_0(ASBim$^\wedge$) 的作用下生成 K_0(Perv(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$))。由此可得，φ 诱导出一个满态射 K_0(O) $\twoheadrightarrow K_0$ (Perv(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$))。由于 φ 将单对象映到单对象，我们推知 Perv(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$) 中的所有单对象都在 φ 的像中。证明完毕。□

5.4. 其 他等价。这里我们从定理 5. 9.

回顾命题 3.5，我们有一个幺半满嵌入 ASBim$^\wedge$ $\hookrightarrow$HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$)。将其记为 φ_{R}。下面的结果证明引言中的定理 1.2。

定理 5 .10。全嵌入 φ_{R}: ASBim$^\wedge$ $\hookrightarrow$HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$) 是一个等价 .

证明。回顾命题 5.7 中的 φ: K^b(O -倾斜) $\cong D^b$(O) $\hookrightarrow D^b$(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$) 是一个等价（定理 5.9），且其经过全子范畴 K^b(HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}$)$_0$) $\subset D^b$(HC^G($\mathcal{U}$)$_0$) 分解。因此 K^b(O -倾斜) $\xrightarrow{\sim} K^b$(HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}$)$_0$)。回顾后一个函子是由全嵌入 O -倾斜 $\hookrightarrow$HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}$)$_0$ 诱导的。由此可知，该全嵌入是一个等价。

现在设 T_{R} 是 HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$) 中的一个不可分解对象。那么 T:= $T_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}$ 也是不可分解的，这由推论 4.10 的 (1) 得出。因此，我们自动得到一个不可分解的对象 $T'_{\mathsf{R}} \in \mathsf{O}_{\mathsf{R}}$ -倾斜模，使得 $\varphi(T'_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathsf{R}} \mathbb{F}) \cong T$。于是 $\varphi_{\mathsf{R}}(T'_{\mathsf{R}}) \cong T_{\mathsf{R}}$。因此，全嵌入 φ_{R}: O_{R}-倾斜模 $\to$HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$) 是本质满的，因而是一个等价。□

We a还具有如下导出范畴之间的等价，定理 1 .3.

定理 5.11。定理 5.10 中的等价 φ_{R} 延拓为

$$D^b(\mathsf{O}_{\mathsf{R}}) \cong K^b(\mathrm{ASBim}^\wedge) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})).$$

证明。由命题 3.5 和引理 4.8 的 (3)，我们得到一个全嵌入 ASBim$^\wedge$ $\hookrightarrow$HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$)。它扩展为 $D^b(\mathsf{O}_{\mathsf{R}}) \xrightarrow{\sim} K^b$(HC-倾斜模范畴^G($\mathcal{U}^{\wedge_0}$))。并且由于

推论 4.10 的 (3)，我们得到一个全嵌入 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \hookrightarrow D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$。将复合全嵌入 $D^b(\mathsf{O}_\mathsf{R}) \hookrightarrow D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 也记为 φ_R。

因此，我们需要证明每个对象 $M_\mathsf{R} \in \mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 都属于像；根据定理 5.10，这等价于证明它属于全子范畴 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \subset D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$。令 $f_1, \ldots, f_k$ 表示 R 的参数，即 $\mathsf{R} = \mathbb{F}[[f_1, \ldots, f_k]]$。我们将对 i 使用升链归纳法，证明任何被 $f_1, \ldots, f_{k-i}$ 消去的 $M \in \mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 都属于K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$。注意，由于 φ_R 是全嵌入，其像在取锥运算下封闭。

基底情形为 $i = 0$。此时 $M \in \mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$。根据定理 5.9，存在一个对象$M' \in K^b$(O -倾斜模范畴)，满足 $\varphi(M') \cong M$。我们可以将 M' 提升为 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 中的一个对象，方法是用 Koszul 分解替换复形 M' 中的每一项。将所得的 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 中的对象记为 $\tilde{M'}$。$\tilde{M'}$ 和 M' 在 $D^b(\mathsf{O}_\mathsf{R})$ 中的像是同构的。˜由此可得 $\varphi_\mathsf{R}(M') \cong M$。

现在假设我们知道，任何被 $f_1, \ldots, f_{k-i}$ 湮灭的 HC 双模都属于 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 的像。由于 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 的像在取锥运算下封闭，因此 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中所有被 $f_1, \ldots, f_{k-i}$ 幂零作用的对象都属于该像。现在设 M 是 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})$ 中一个被 $f_1, \ldots, f_{k-i-1}$ 湮灭的对象。我们要证明它属于 K^b(HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 的像。令 $f := f_{k-i}$。M 的 f- 挠部分属于 K^b(HC- 倾斜模范畴 $^G(\mathcal{U}^{\wedge_0}))$ 的像。因此，我们可以假设 M 是关于 $\mathbb{F}[f]$ 无挠的。

对于有限偏序集理想 $I \subset W^{ea}$，我们用 $\mathsf{O}_\mathsf{R}(I)$ 表示由 $T_\mathsf{R}(y)$（其中 $y \in I$）生成的 O_R 的全子范畴。这是一个最高权子范畴。根据归纳假设，M/Mf 属于 K^b(O_R -倾斜模范畴) 的像，因此我们可以找到 I，使得 M/Mf 属于 $K^b(\mathsf{O}_\mathsf{R}(I)$-倾斜模范畴) 的像。我们将证明 M 实际上属于 $K^b(\mathsf{O}_\mathsf{R}(I)$-倾斜模范畴) 的像。

令 T 表示 HC-倾斜模范畴$^G(\mathcal{U})_0$ 中 $\mathsf{O}_\mathsf{R}(I)$-tilt 像里的所有不可分解倾斜对象的直和。设

$$\mathsf{A}_T := \mathrm{End}_{\mathsf{O}_\mathsf{R}}(T)^{opp}.$$

这个 R-代数是一个有限秩自由 R-模。由于 A_T-mod 是一个最高权范畴（其偏序集为 I^{opp}），它具有有限同调维数。我们有 R-线性函子$\mathcal{F} := R\mathrm{Hom}(T, \bullet) : D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^{\wedge_0})) \to D^b(\mathsf{A}_T\text{-mod})$。由于 A 具有有限同调维数，该函子 $\mathcal{F}$ 有左伴随和右逆 $\mathcal{G} := T \otimes^L_{\mathsf{A}_T} \bullet$。将伴随余单位作用于 M，并将所得态射补成一个正合三角

$$\mathcal{G}\mathcal{F}M \to M \to N \xrightarrow{+1}. \tag{5.5}$$

注意，由构造可知，我们有 $\mathcal{F}(N) = 0$。现在将 $\bullet \otimes^L_{\mathbb{F}[f]} \mathbb{F}$ 应用于 (5.5)。由于$\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$是 R-线性的，因而也是 $\mathbb{F}[f]$-线性的，并且 M 在 $\mathbb{F}[f]$ 上平坦，我们得到

$$\mathcal{G}\mathcal{F}(M/Mf) \to M/Mf \to N \otimes^L_{\mathbb{F}[f]} \mathbb{F} \xrightarrow{+1}.$$

根据我们的假设，M/Mf属于 $K^b(\mathsf{O}_\mathsf{R}(I)$ -tilt)的本质像，而该本质像与 $\mathcal{G}$的本质像重合。由此可得 $\mathcal{G}\mathcal{F}(M/Mf) \xrightarrow{\sim} M/Mf$。因此 $N \otimes^L_{\mathbb{F}[f]} \mathbb{F} = 0$。我们声称，最后一个等式蕴含 $N = 0$。事实上，设 j 是满足 $H^j(N) \neq \{0\}$的极大元。则 $H^j(N \otimes^L_{\mathbb{F}[f]} \mathbb{F}) = H^j(N)/H^j(N)f$。注意，$H^j(N)$是一个有限生成的$\mathcal{U}^{\wedge_0}$-模。它在中心的谱中的支撑是闭集，因此 $H^j(N)/H^j(N)f \neq \{0\}$。这与 $N \otimes^L_{\mathbb{F}[f]} \mathbb{F} = 0$ 矛盾，从而完成归纳步骤，进而完成证明。□

模特征 Soergel 双模 ，Harish-Chandra 双模 ，与 O 类 27

6. Modular categoryO 类

6.1. 定义及等价刻画。固定一个 Borel 子群 $B \subset G$。我们考虑 O^{cl} 范畴（“cl”来自“classical”（经典），以区别于第 5 节中的 Soergel 型范畴），它由所有具有强 B-等变结构的有限生成 $\mathfrak{g}$-模构成。

例如，对于每个 $\lambda \in \Lambda$，我们都有 Verma 模 $\Delta^{cl}(\lambda) \in \mathsf{O}^{cl}$。和通常一样，它定义为 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{F}_\lambda$，其中 B 通过特征 λ作用于一维空间 $\mathbb{F}_\lambda$，而在 $\Delta^{cl}(\lambda)$上则采用张量积作用。

我们指出， $\Delta^{cl}(\lambda)$具有无限长度，而对偶 Verma 模 $\nabla^{cl}(\lambda)$（按通常方式构造）不属于 O^{cl} ，而是属于其 ind-完备化：它是 $\Delta^{cl}(\lambda)$ 的有限维商的对偶的归纳极限。

如通常所见，O^{cl} 分解为无穷小块 $\bigoplus_{[\lambda]} \mathsf{O}^{[\lambda]}$之和，其中求和遍历 Λ 中的 W^{ea}-轨道（格部分的作用缩放了 p 倍）。$\mathsf{O}^{[\lambda]}$ 中的对象恰好是 O^{cl} 中具有模 p的广义中心特征 λ 的模。

下面给出一种等价的构造。回忆一下， $\mathcal{B}$ 表示旗簇 G/B。因此，我们可以考虑范畴 $\mathrm{Coh}^G(D_{\mathcal{B}})$，其对象是弱等变的 $D_{\mathcal{B}}$-模（它们在 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 上拟凝聚，且在 $D_{\mathcal{B}}$上局部有限生成）。以下结果是经典的。

引理 6.1. 取在 $1B \in \mathcal{B}$ 处的纤维定义了一个等价

$$\mathrm{Coh}^G(D_{\mathcal{B}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{O}^{cl}.$$

例如,xample, 正则模 $D_{\mathcal{B}}$ 对应于 Verma 模 $\Delta^{cl}(0)$。

我们将需要对这一等价作一处小小的修改。令 $K_{\mathcal{B}}$ 表示 $\mathcal{B}$ 上的典范丛，并赋予其自然的 G-等变结构。函子 $K_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \bullet$ 定义了 $\mathrm{Coh}^G(D_{\mathcal{B}})$ 与 $\mathrm{Coh}^G(D_{\mathcal{B}}^{opp})$ 之间的一个等价。因此我们得到一个等价

$$\mathrm{Coh}^G(D_{\mathcal{B}}^{opp}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{O}^{cl}.$$

在此等价下，正则右模 $D_{\mathcal{B}}$ 对应于 Verma 模 $\Delta^{cl}(-2\rho)$。

6.2. 主要等价。关于 $\mathsf{O}^{[0]}$ ，我们的主要结果如下。设 $\pi\colon \tilde{\mathcal{N}}^{(1)} \to \mathfrak{g}^{(1)*}$ 是 Springer 映射。回顾第 2.2 节，我们有由 $G^{(1)}$ 作用的 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]$-代数 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}}$。因此，我们可以考虑其拉回 $\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}$ 以及范畴 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})$。

定理 6.2. 我们有阿贝尔范畴 $\mathsf{O}^{[0]} \xrightarrow{\sim}$ 与 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})$ 之间的等价。

现在我们解释如何构造这个等价。首先，我们建立一个等价

$$D^b(\mathsf{O}^{[0]}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0). \tag{6.1}$$

同样已知——我们将回顾其原因——

$$D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})). \tag{6.2}$$

将 (6.1)、(4.7) 和 (6.2) 按从右到左的顺序复合，我们得到

$$D^b(\mathsf{O}^{[0]}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})). \tag{6.3}$$

最后一步将证明这个等价是 t-正合的。

下面的命题构造了（6.1）的拟逆（应将其视为特征 p 下经典的特征零 Bernstein-Gelfand 等价的一个版本）。它是命题1.6的一个更精确的版本。

Pro命题 6.3。函子 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \Delta^{cl}(-2\rho)$ 是一个范畴等价 ce

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{cl})$$

其限制到 $D^b(\mathsf{HC}(\mathcal{U})_0) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{[0]})$。

证明。由 [BMR 定理 3.2]（更确切地说，是其针对右模的直接类似版本），我们得到互为拟逆的等价

$$R\Gamma : D^b(\mathrm{Coh}(D^{opp}_{\mathcal{B}})) \rightleftarrows D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}) : \bullet \otimes^L_{\mathcal{U}_0} D_{\mathcal{B}}.$$

这些函子提升为弱等变模范畴之间的一对伴随函子，因而给出互为拟逆的等价

$$D^b(\mathrm{Coh}^G(D^{opp}_{\mathcal{B}})) \rightleftarrows D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G).$$

于是我们得到如下（t-正合）等价

$$D^b(\mathrm{Coh}^G(D^{opp}_{\mathcal{B}})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{cl})$$

限制到点 $1B$，见第 6.1 节。由于它将 $D_{\mathcal{B}}$ 送到 $\Delta^{cl}(-2\rho)$，复合

$$D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^G(D^{opp}_{\mathcal{B}})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{cl})$$

是 $\bullet \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \Delta^{cl}(-2\rho)$。这就证明了第一个断言。

为证明 $D^b(\mathsf{HC}^G(\mathcal{U})_0) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathsf{O}^{[0]})$，我们注意到，函子 $\bullet \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \Delta^{cl}(-2\rho)$ 将源对象映到目标对象，因为它保持广义中心特征不变。□

在下文中，我们始终利用引理中的等价，将 $D^b(\mathsf{O}^{[0]})$ 与 $D^b(\mathsf{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 视为相同。

现在回顾等价 (6.2)。我们有如下等价

$$R\pi_{1*}([\mathcal{T}_{\mathfrak{h}} \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}}]|_{\mathsf{St}} \otimes \bullet) : D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}} \mathsf{St}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}), \tag{6.4}$$

这里我们用 π_1 表示投影 $\mathsf{St}^{(1)} \to \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$，参见 [BLin，第 2.2] 节。借助等价 (2.17)，我们得到一个等价

$$R\Gamma(\mathcal{T}^* \otimes \bullet) : D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}). \tag{6.5}$$

这里我们将源范畴视为由 $G^{(1)}$-等变 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}}$-模构成的范畴，而与 $\mathcal{T}^*$ 张量化是在第 2 个因子上进行的。

因此我们得到复合等价 (6.3)。

定理 6.2 的证明。要证明该定理，尚需说明 (6.3) 关于典范t-结构是 t-正合的。等价地，我们需要证明由 (4.7) 诱导的导出等价交织

- t-结构的负部分 $D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{[0]})$ 在 $D^b(\mathsf{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 中的像，
- 以及 $D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^{G_{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 在 $D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G_{(1)}})$ 中的像。

这将分几个步骤完成。以下证明中，我们将所有涉及的导出范畴与 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 等同起来。

步骤 1. 固定一个严格占优权 λ（使得 $\mathcal{B}$ 上的层 $\mathcal{O}(\lambda)$ 丰沛）。我们断言，$D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{[0]})$ 和 $D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 在 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 中的像，都与由满足以下条件的所有对象 $\mathcal{F} \in D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 构成的全子范畴重合：

(♡) 存在 $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对所有 $n > n_0$，我们都有

$$\mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}(n\lambda) \in D^{b,\leqslant 0}(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}) = D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0).$$

我们将在下文看到，这一断言本质上就是 Serre 消失定理。

步骤 2。我们先证明这一断言：$D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 的像由满足 (♡) 的对象组成，因为这种情况下更容易处理。我们将 $\mathcal{H}^i$ 记作 i 次上同调层（针对 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 上的自然 t-结构）。取 $\mathcal{F} \in D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$。我们可以找到 $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对所有 $n > n_0$ 和 i，$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(n\lambda)$ 都没有高阶上同调，且由整体截面生成。由此可得，$\mathcal{F} \in D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 当且仅当

$$R\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{O}(n\lambda)) \in D^{b,\leqslant 0}(\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}}), \forall n > n_0.$$

现在，$D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}}))$ 的像由所有满足 (♡) 的对象组成，这一断言可由两个观察得出。首先，导出等价 (6.4) 和 (6.5) 的复合就是导出等价 (2.17)。其次，(6.4) 将源中的 $\pi_2^*(\mathcal{O}(n\lambda))$ 扭曲与目标中的 $\mathcal{O}(n\lambda)$ 扭曲交织起来。

步骤 3。现在我们来证明关于 $D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{[0]})$ 的像的断言：它由所有满足 (♡) 的对象组成。由于我们没有直接构造 $D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{[0]})$ 与 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 之间的等价，证明会稍微复杂一些。首先，注意到，类似于前一段中的论证可推出，其像

$$D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{cl}) = D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^G(D^{opp}_{G/B}))$$

在 $D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 中由 (♡) 的直接类似形式刻画，其中我们对某个 $n > n_1$ 使用 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(np\lambda)$ 扭曲。现在我们用 HC 双模来描述这一扭曲。注意，若 n 足够大，则 $R\Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(np\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} D_{\mathcal{B}})$ 集中在同调次数 0（同样，这是将 Serre 消失定理应用于簇 $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ 的结果）。此外，$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(np\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} D_{\mathcal{B}})$ 是 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}_0)$ 中的一个对象，记作 $\mathcal{M}_n$。我们注意到

$$R\Gamma(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(np\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} D_{\mathcal{B}})) \cong R\Gamma(\mathcal{F}) \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n. \tag{6.6}$$

事实上，令 $\mathcal{G} := R\Gamma(\mathcal{F})$，并记 Loc 为 $R\Gamma$（函子 $\bullet \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$）的拟逆。同构 (6.6) 等价于

$$\mathrm{Loc}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(np\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} D_{\mathcal{B}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n).$$

这两个函子在自由 $\mathcal{U}_0$-模范畴上的限制同构。因此，它们在 $D^-(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod})$ 上同构，进而在 $D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 上同构。

由于 (6.6)，$D^{b,\leqslant 0}(\mathrm{Coh}^G(D^{opp}_{G/B}))$ 在 $D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 中的像，与由所有满足 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F} \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n \in D^{b,\leqslant 0}(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 的对象构成的全子范畴重合。注意，$\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G$ 中的所有对象都存在由 HC 模构成的有限分解，且这些 HC 模是投射的 $\mathcal{U}_0^{opp}$ - 模（因为 $\mathcal{U}_0^{opp}$ 的同调维数有限，并且 $\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G$ 中的每个对象都存在一个来自形如 $V \otimes \mathcal{U}_0$ 的模的满态射，其中 V 是有限维的 G- 模）。由此可知，$D^b(\mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G)$ 上的自函子 $\bullet \otimes^L_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n$ 是 $\bullet \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n$ 的左导出函子。注意，$\bullet \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n$ 显然保持 $\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0$。

步骤 4。我们需要确定 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}$-模$^{G^{(1)}}$ 中与函子 $\bullet \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n$ 相对应的自函子，该对应关系由等价 (4.7) 给出。由于 (4.7) 是幺半群等价 (4.9) 的右模等价。

考虑等价

(6.7)
$$D^b(\mathcal{U}_0 \otimes^L_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]} \mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^G(\tilde{\mathcal{N}}^{(1)} \times^L_{\mathfrak{g}^{*(1)}} \tilde{\mathcal{N}}^{(1)})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A} \otimes^L_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^G),$$

与 (4.4) 类似。于是，(4.9) 是将 (6.7) 中的复合等价限制在心上得到的。双模 $\mathcal{M}_n$ 是线丛 $\mathcal{O}(n\lambda)$（带有其自然的 G-等变结构）在 $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ 的对角副本上经由 (6.7) 中第一个等价的拟逆所得的像。因此，$\mathcal{M}_n$ 在 (6.7) 中的复合等价下的像是 $\Gamma(\mathcal{E}nd(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{O}(n\lambda))$。我们的结论是，与 $\mathcal{U} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{U}_0^{opp}\text{-mod}^G$ 上的自函子 $\bullet \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{M}_n$ 相对应的 $\mathcal{A}_{\mathsf{R}} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^G$ 的自函子是

$$\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma(\mathcal{E}nd(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{O}(n\lambda)).$$

在导出等价下

$$D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\tilde{\mathcal{N}}^{(1)} \times^L_{\mathfrak{g}^{(1)*}} \tilde{\mathcal{N}}^{(1)})) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A} \otimes^L_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{(1)*}]} \mathcal{A}^{opp}\text{-mod}^{G^{(1)}})$$

双模 $\Gamma(\mathcal{E}nd(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{O}(n\lambda))$ 仍然对应于 $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ 的对角副本上的 $\mathcal{O}(n\lambda)$（带有其自然的 $G^{(1)}$-等变结构）。在右侧与该层进行卷积，即 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 上的一个自函子，等于第二个分量中的 $\mathcal{O}(n\lambda)$ 扭曲。

因此，在等价 $D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}_0)) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 下，函子 $\otimes^L_{\mathcal{U}_0}\mathcal{M}_n$ 变为第二个分量中带有 $\mathcal{O}(n\lambda)$ 的扭曲。由此可知，在等价 (4.8) 下，$D^{b,\leqslant 0}(\mathsf{O}^{[0]})$ 在 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)})$ 中的像由所有满足 (♡) 的对象构成。至此，定理的证明完成。□

注6.4. 注意，格 Λ 通过用 $B^{(1)}$ 的特征进行扭曲而作用于 $\mathsf{O}^{[0]}$，并通过用 $G^{(1)}$-等变线丛进行扭曲而作用于 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\pi^*\mathcal{A}_{\mathsf{R}})$。定理 6.2 中的等价交织了这些作用。具体而言，证明的步骤 4 表明，借助充分丰沛线丛的扭曲与借助充分支配特征的扭曲彼此交织。一般情形下的结论由此得出。

6.3。Verma 模的局部化。考虑导出等价

$$\mathcal{F} : D^b(\mathsf{O}^{[0]}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathsf{St}^{(1)}), \tag{6.8}$$

(6.4) 的拟逆与 (6.3) 的复合。本节的任务是计算 Verma 模 $\Delta^{cl}(\lambda) \in \mathsf{O}^{[0]}$ 在 $\mathcal{F}$ 下的像。注意，这些 Verma 模的最高权集合通过 $x \mapsto x^{-1} \cdot (-2\rho)$ 与 W^{ea} 相对应，因此对于 $x = wt_\lambda$，我们有 $x^{-1} \cdot (-2\rho) = -w^{-1}\rho - \rho - p\lambda$。

为陈述答案，我们需要回顾 [BR1] 中的辫群作用。第一步是构造一个同态，将扩展仿射辫群 Br^{ea} 映到 $D^b(\mathrm{Coh}^G(\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}))$ 中可逆对象同构类组成的群（当然，应用 Frobenius 扭曲后也同样成立）。该同态将 $\lambda \in \Lambda \subset \mathrm{Br}^{ea}$ 映到 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的对角副本上的层 $\mathcal{O}(-\lambda)$（记为 $\tilde{\mathfrak{g}}_\Delta$）。

有限辫群在 Br^{ea} 中的生成元 T_s 的像如下确定。令 $\mathfrak{g}^{*,\,rs}$ 表示正则半单元的轨迹，并令 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}^{rs}$ 为其在 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}$ 中的原像。对于简单反射 $s \in W$，考虑 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}^{rs}$ 中两个 Borel 子代数的相对位置为 s 的轨迹。将其记为 Z_s^{rs}。令 Z_s 表示 Z_s^{rs} 在 $\mathsf{St}_{\mathfrak{h}}$ 中的 Zariski 闭包。元素 T_s 被映为 $\mathcal{O}_{Z_s}$。

我们需要一个在 [BR1 第 1.10]节中得到的正合列。对于 W 中的简单反射s ，我们考虑按如下方式构造的概形 $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ 。令 $\mathcal{P}_s$ 表示部分旗簇，即 G除以与 s对应的极小抛物子群 P_s 所得的商。它是 $\mathfrak{g}^* \times \mathcal{P}_s$ 中的一个闭子概形，由所有满足以下条件的点对 $(\alpha, \mathcal{F})$ 构成：与 α 对应的 $\mathfrak{g}$ 中的元素（在由 Killing 型给出的同一识下）属于与 $\mathcal{F}$ 对应的抛物子代数。注意，我们有一个自然态射 $\tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_s$，因此可以构造纤维积$\tilde{\mathfrak{g}} \times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s} \tilde{\mathfrak{g}}$。由 [BR1，(1.10.1)], ，我们得到一个相干层的短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}_\Delta} \to \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}} \times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s} \tilde{\mathfrak{g}}} \to \mathcal{O}_{Z_s} \to 0. \tag{6.9}$$

注意， $D^b(\mathrm{Coh}^G \mathrm{St}_\mathfrak{h})$ 通过卷积作用于 $D^b(\mathrm{Coh}^G \mathrm{St})$。这给出了 Br^{ea} 在 $D^b(\mathrm{Coh}^G \mathrm{St})$ 上的第一个（左）作用。我们指出，在这一构造中，可以用 St_R（即 $\mathrm{St}_\mathfrak{h}$ 的完备化版本）替代 $\mathrm{St}_\mathfrak{h}$。

我们还有一个与之对易的右作用。考虑导出概形 $\tilde{\mathcal{N}} \times^L_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathcal{N}}$。在此概形上讨论 G-等变相干层的导出范畴是有意义的，记为 $D^b(\mathrm{Coh}^G \tilde{\mathcal{N}} \times^L_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathcal{N}})$。它通过从右侧进行卷积作用于 $D^b(\mathrm{Coh}^G \mathrm{St})$。仿照 [BR1], ，存在一个从 Br^{ea} 到 $D^b(\mathrm{Coh}^G \tilde{\mathcal{N}} \times^L_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathcal{N}})$ 中可逆对象群的同态。具体而言，注意到我们有一个从通常的纤维积 $\mathcal{N} \times_{\mathfrak{g}^*} \mathcal{N}$ 到导出张量积的自然态射˜ ˜。因此，我们可以将 $\mathrm{Coh}^G(\tilde{\mathcal{N}} \times_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathcal{N}})$ 中的对象视为 $D^b(\mathrm{Coh}^G \tilde{\mathcal{N}} \times^L_{\mathfrak{g}^*} \tilde{\mathcal{N}})$ 中的对象。

元素 $\lambda \in \Lambda \subset \mathrm{Br}^{ea}$ 被映射到 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_\Delta}(-\lambda)$，而 T_s 被映射到˜ ˜的结构层，即概形论交 $Z_s \cap \mathrm{St}$（实际上是 $\mathcal{N} \times_{\mathfrak{g}^*} \mathcal{N}$ 中的一个子概形）。

命题 6.5. 对于 $x = wt_\lambda$，我们有

$$\mathcal{F}\left(\Delta^{cl}(x^{-1} \cdot (-2\rho))\right) \cong T^{-1}_{w^{-1}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}_\Delta}(-\lambda).$$

证明。该命题的证明分为两个步骤。

步骤 1. 仿射辫群 Br^{ea} 通过经典越墙函子作用于 $D^b(\mathrm{O}^{[0]})$。我们断言， $\mathcal{F}$ 交织了有限辫群 Br_W 对 $D^b(\mathrm{O}^{[0]})$ 的作用，以及 Br_W 从左侧对 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathrm{St}^{(1)})$ 的作用（对于整个群 Br^{ea} ，该断言也应成立，但我们并不需要这一点）。

T_s 对 $D^b(\mathrm{O}^{[0]})$ 的作用是通过与 $1 \to \Theta_s$ 的锥进行张量化实现的，其中 1 表示幺半群单位元，而 Θ_s 是经典反射函子。函子 Θ_s 由与第 3.2 节中的 Harish-Chandra 双模 B_s^{HC} 进行张量化给出。 T_s 对 $D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathrm{St}^{(1)})$ 的作用是通过与下述对象的锥进行卷积实现的

$$1 \to \operatorname{Spec} \mathsf{R} \times_{\mathfrak{h}^{*(1)}} [\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} \times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s^{(1)}} \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}}],$$

与 (6.9) 比较。在 (2.16) 中的第一个等价下，目标层被送到

$$R\Gamma\left(\operatorname{Spec} \mathsf{R} \times_{\mathfrak{h}^{*(1)}} [\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} \times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s^{(1)}} \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}}], \mathcal{T}_\mathfrak{h} \otimes \mathcal{T}^*_\mathfrak{h}\right). \tag{6.10}$$

注意，根据 [BM], 中的构造，(6.10) 处于同调次数 0，并且作为右 $\mathcal{A}^{(1)}{}_\mathsf{R}$-模是平坦的（见 [BM 第 2.3 节中推论的 (c) 1]），因此作为 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)\wedge}]$-模也是平坦的。双模 B_s^{HC} 作为 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)\wedge}]$ 上的模同样是平坦的。

现在我们证明 (4.4) 将 B_s^{HC} 送到 (6.10)。由于两者在 $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)\wedge}]$ 上都是平坦的，只需证明在我们的

等价下，将限制到 $\mathfrak{g}^{*(1),\,reg}$ 后，前一个模会被送到后一个模。在该轨迹上，(4.4) 中的两个范畴都等价于 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathrm{St}^{(1)}_{\mathsf{R}})$，且这两个等价由 (4.4) 交织。此外，注意 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathrm{St}^{(1),\,reg}_{\mathsf{R}})$ 等价于第 3.1 节中考察的范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{Z}^\wedge)$。(6.10) 在 $\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}(\mathrm{St}^{(1),\,reg}_{\mathsf{R}})$ 中的像，是 $\mathrm{St}^{(1),\,reg}_{\mathsf{R}}$ 与 $(\tilde{\mathfrak{g}}\times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s}\tilde{\mathfrak{g}})^{(1)}$ 的交上的结构层。在与 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{Z}^\wedge)$ 的等价下（限制到 $S^{(1)}$），这个结构层对应于 B_s^{AS} 在引理 3.2 的全嵌入下的像。B_s^{HC} 的像也如此，见命题 3.5 的证明。因此，(4.4) 确实将 B_s^{HC} 送到 (6.10)。所以，在定理 4.1 的等价下，B_s^{HC} 对应于 $(\tilde{\mathfrak{g}}\times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s}\tilde{\mathfrak{g}})^{(1)}\cap\mathrm{St}^{(1)}_{\mathsf{R}}$ 的结构层。

接下来需要证明，在相同的等价下，$1\to B_s^{HC}$的锥映到

$$1\to\mathcal{O}_{(\tilde{\mathfrak{g}}\times_{\tilde{\mathfrak{g}}_s}\tilde{\mathfrak{g}})^{(1)}\cap\mathrm{St}^{(1)}_{\mathsf{R}}}.$$

只需验证以下内容即可：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HC}^G(\mathcal{U}^\wedge_0)}(1,B_s^{HC})\cong\mathsf{R},$$

因为伴随单位生成相应的 Hom R-模。注意，上述 Hom 中的两个对象都是 HC倾斜。因此，这个 Hom R-模与它们在等价范畴 $\mathrm{ASBim}^\wedge$ 中的像之间的 Hom R-模相同（该等价已在定理 5.10 中确立）。在该范畴中，这一点由定义可知。

步骤 1 的断言由此得证。

步骤 2. $\Delta^{cl}(-2\rho)$ 映到 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}^{(1)},\,\Delta}$ 这一断言，可由等价 $D^b(\mathrm{O}^{[0]})\xrightarrow{\sim}D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathrm{St}^{(1)})$ 的构造推出。事实上，在等价 $D^b(\mathrm{O}^{[0]})\xrightarrow{\sim}D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)$ 下，模 $\Delta^{cl}(-2\rho)$ 映到 $\mathcal{U}_0$，见命题 6.3。注 4.2 中的构造表明，在等价下

$$D^b(\mathrm{HC}^G(\mathcal{U})_0)\xrightarrow{\sim}D^b(\mathcal{A}_{\mathsf{R}}\otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{g}^{*(1)}]}\mathcal{A}^{opp}\text{-}\mathrm{mod}^{G^{(1)}})$$

双模 $\mathcal{U}_0$ 变为双模 $\mathcal{A}$。而该双模又变为 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}^{(1)},\,\Delta}\in D^b(\mathrm{Coh}^{G^{(1)}}\mathrm{St}^{(1)})$。

根据注6.4，等价 $\mathcal{F}$ 交织了 Λ 的作用。因此，只需在 $x=w\in W$ 时证明该命题的断言。步骤 1 结合前一段，将问题归结为验证 $\Delta^{cl}(w^{-1}\cdot(-2\rho))\cong T^{-1}_{w^{-1}}\Delta^{cl}(-2\rho)$。

为证明后一个同构，回忆一下，对于简单反射 $s\in W$，$D^b(\mathrm{O}^{[0]})$ 上的自函子 T_s^{-1} 由 $\Theta_s\to 1$ 的锥给出（源函子位于同调次数 0）。注意，对于 $u\in W$，我们有 $u^{-1}s\cdot(-2\rho)>u^{-1}\cdot(-2\rho)$，当且仅当 $u<su$ 在 Bruhat 序中。若此条件成立，则 $\Theta_s\Delta(w^{-1}\cdot(-2\rho))$ 属于一个短正合列

$$0\to\Delta^{cl}(u^{-1}s\cdot(-2\rho))\to\Theta_s\Delta^{cl}(u^{-1}\cdot(-2\rho))\to\Delta^{cl}(u^{-1}\cdot(-2\rho))\to 0$$

因此 $T_s^{-1}\Delta^{cl}(u^{-1}\cdot(-2\rho))\xrightarrow{\sim}\Delta^{cl}(u^{-1}s\cdot(-2\rho))$。由此可得 $T^{-1}_{w^{-1}}\Delta^{cl}(-2\rho)\cong\Delta^{cl}(w^{-1}\cdot(-2\rho))$。证明至此完成。□

References

[A] N. Abe, 《Hecke 范畴的双模描述》。《组合数学》157(2021)，第 10 期，2133–2159。[AB] D. Arinkin，R. Bezrukavnikov, 《反常相干层》。《莫斯科数学杂志》10（2010），第 1 期，3–29, 271。[BB] A. Beilinson，J. Bernstein, 《D-模的局部化》。（法语）C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math. 292（1981），第 1 期，15–18。

[B] R. Bezrukavnikov, 《仿射 Hecke 代数的两种几何实现》。《IHES 数学出版物》123（2016），1–67。[BLin]R. Bezrukavnikov，Q. Lin, 《临界级的最高权模与非交换 Springer 解消》。《代数群与量子群》，15–27，当代数学，565，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。[BLo] R. Bezrukavnikov，I. Losev, 《半单李代数的模不可约表示的维数》。arXiv:2005.10030。即将在 J. Amer. Math. Soc. 发表。[BM] R. Bezrukavnikov，I. Mirkovic, 《素特征下半单李代数的表示与非交换 Springer 解消》。《数学年刊》178（2013），第 3 期，835-919。[BMR] R. Bezrukavnikov，I. Mirkovic，D. Rumynin。《素特征下半单李代数的模的局部化》（附录由 R. Bezrukavnikov 和 S. Riche 撰写），《数学年刊》（第 2 辑）167（2008），第 3 期，945-991。[BR1] R. Bezrukavnikov, S. Riche, 《Springer 解消导出范畴上的仿射辫群作用》。《高等师范学院科学年刊》（第 4 辑）45（2012），第 4 期，535-599。[BR2] R. Bezrukavnikov，S. Riche, 《主块上的 Hecke 作用》。《组合数学》158（2022），第 5 期，953–1019。[BR3]R. Bezrukavnikov，S. Riche, 《模仿射 Hecke 范畴与正则中心化子》。arXiv:2206.03738。[BR4] R. Bezrukavnikov，S. Riche, 《仿射 Hecke 代数的两种模几何实现》。准备中。[CG] N. Chriss，V. Ginzburg, 《表示论与复几何》。Birkh¨auser 波士顿公司，波士顿，马萨诸塞州，1997。[E] B. Elias, 《通过图示 Hecke 范畴研究 Gaitsgory 中心层》。arXiv:1811.06188。[EL] B. Elias，I. Losev, 《通过 Soergel 双模研究 A 型模表示论》。arXiv:1701.00560。[EW] B. Elias 和 G. Williamson, 《Soergel 演算》，Represent. Theory 20（2016），295–374。[FG] E. Frenkel，D. Gaitsgory, 《仿射旗簇上的 D-模与仿射 Kac-Moody 代数的表示》。Represent. Theory 13（2009），470–608。[J] J.C. Jantzen, 《代数群的表示》，第 2 版。数学调查与专著，107。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[R] S. Riche, 《相干层导出范畴上的几何辫群作用》。Representation Theory，12（2008），131-169。[S] W. Soergel, 《多项式环上的 Kazhdan-Lusztig 多项式与不可分解双模》。《J. Inst. Math. Jussieu》6（2007），第 3 期，501–525。

Department of Mathematics, Yale University, New Haven CT USA电子
邮箱地址：ivan.loseu@gmail.com