arXiv:2302.05784v1 [math.GR] 11 Feb 2023

有限群的循环子群图的边数

Marius T˘arn˘auceanu

2023年1月31日

摘要

本文证明，在给定阶的有限幂零群中，或给定奇数阶的有限群中，该阶的循环群的循环子群图具有最少的边数。我们还猜想，这一结论对任意有限群都成立。

MSC2000：主分类号 20D60；次分类号 20D15、05C07。关键词：循环子群图、有限群、元素阶。

1 引言

近年来，数学家通过不同的方法构造了许多与群相关的图（例如参见 [4]）。其中之一是群 G 的子群图$L(G)^*$，其顶点为 G 的子群；两个顶点 H_1 和 H_2 之间有边相连，当且仅当 $H_1 \leq H_2$ 且不存在子群 $K \leq G$ 使得 $H_1 < K < H_2$。Starr 和 Turner [14]、Bohanon 和 Reid [3], 以及 Schmidt [13] 已对具有平面子群图的有限群进行了分类。此外，Lucchini [10] 还研究了 $L(G)^*$ 的亏格。

在这篇短文中，我们将聚焦于 $L(G)^*$的一个引人注目的子图，即 $C(G)^*$ of G的循环子群图。其顶点集是 G 的循环子群构成的偏序集$C(G)$；类似地，当且仅当对于 G的任意循环子群 K， $H_1 \leq H_2$ 和 $H_1 < K < H_2$ 时，两个顶点 H_1 和 H_2 之间才有一条边。注意，群 G 的（循环）子群图是 G的（循环）子群偏序集的哈斯图，并将其视为简单无向图。

我们将证明，若 G是阶为 n 的幂零群，或是阶为 n的奇数阶群，则 $C(G)^*$ 的边数最小值在循环群 $\mathbb{Z}_n$ 上取得。这一事实在某种程度上是意料之中的，因为有限群论中有许多在循环群上取得最小值或最大值的函数，例如元素阶之和函数 [1], 、（循环）子群个数函数 [12, 6, 7] ，以及（有向）幂图的边数函数 [5]。

我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 G 是一个阶为 n的有限群。若 G 是幂零的，或 n 是奇数，则

$$|E(C(G)^*)| \geq |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|.$$

此外，当且仅当 $G \cong \mathbb{Z}_n$时，等号成立。

证明定理 1.1 需要以下定理。

定理. 设 G 是一个阶为 n的有限群。则存在一个双射$f: G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ ，使得对所有 $a \in G$， $o(a)$ 整除 $o(f(a))$。

Isaacs 曾将此表述为一个问题（见[11]中的问题 18.1），而 Ladisch 已证明该结论对可解群成立 [9]。最近，Amiri 提出了一个适用于任意群的证明 [2]。我们指出，对于我们的论证，只需要在奇数阶群的情形下使用这个双射，而这些群都是可解群。

我们猜想，不等式 $|E(C(G)^*)| \geq |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|$ 对任意偶数阶群 G 也成立 n。注意，在这种情况下，存在一些阶为 n 、满足 $|E(C(G)^*)| = |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|$ 的非循环群 G ，例如

$$|E(C(A_4)^*)| = |E(C(\mathrm{Dic}_3)^*)| = |E(C(\mathbb{Z}_{12})^*| = 7.$$

我们所用的大部分记号都是标准的，通常不再赘述。关于群的基本概念和结果，请读者参见 [8]。

2 主要结果的证明

我们首先证明一些辅助结果。

引理 2.1. 设 G_i, $i = 1, ..., k$, 是阶互素的有限群，且$G = G_1 \times \cdots \times G_k$。那么

$$|E(C(G)^*)| = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{|E(C(G_i)^*)|}{|C(G_i)|} \right) \prod_{i=1}^{k} |C(G_i)|. \tag{1}$$

特别地，若 $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$是 $n \in \mathbb{N}^*$ 分解为素因子乘积的形式，则

$$|E(C(\mathbb{Z}_n)^*)| = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n_i + 1} \right) \prod_{i=1}^{k} (n_i + 1). \tag{2}$$

证明。等号 (1) 可由对 k 进行归纳法立即得到。对于等号 (2)，只需注意到 $|C(\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})| = n_i + 1$ 和 $|E(C(\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})^*)| = n_i$，对所有 $i = 1, \ldots, k$。□

下面的引理给出了一种简单方法，用于计算有限群的循环子群图中的边数。

引理 2.2. 设 G 是一个有限群。则

$$|E(C(G)^*)| = \sum_{a \in G} \frac{\omega(o(a))}{\varphi(o(a))}, \tag{3}$$

其中，$\omega(d)$ 表示整除 $d \in \mathbb{N}^*$ 的不同素数的个数，φ 是欧拉函数。

证明。我们有

$$|E(C(G)^*)| = \sum_{H \in C(G)} |\mathrm{Max}(H)|,$$

其中，$\mathrm{Max}(H)$ 表示 $H \in C(G)$ 的极大子群集合。显然，这就得到 (3)，因为 G 的一个循环子群 $H = \langle a \rangle$ 有 $\omega(o(a))$ 个极大子群和 $\varphi(o(a))$ 个生成元。□

下一个引理表明，式 (3) 右侧的函数在奇正整数集合上关于整除关系递减。

引理 2.3. 设 d 和 d' 是两个奇正整数，且 $d \mid d'$ 和 $d \geq 3$。那么

$$\frac{\omega(d)}{\varphi(d)} \geq \frac{\omega(d')}{\varphi(d')}. \tag{4}$$

此外，当且仅当 $d = d'$ 或 d 是满足 $p \geq 5$ 和 $d' = 3d$的素数幂p^α 时，等号成立。

证明。设 $d = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$和 $d' = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r} p_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdots p_s^{\beta_s}$，其中对所有 $i = 1, ..., r$ 均有 $1 \leq \alpha_i \leq \beta_i$，且 $r \leq s$。于是（4）变为

$$p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots p_r^{\beta_r - \alpha_r} p_{r+1}^{\beta_{r+1} - 1} \cdots p_s^{\beta_s - 1} (p_{r+1} - 1) \cdots (p_s - 1) \geq \frac{s}{r},$$

这对 $s = r$ 成立。因此，我们可以假设 $s \geq r + 1$。我们指出，只需证明

$$(p_{r+1} - 1) \cdots (p_s - 1) \geq \frac{s}{r}.$$

由于每个 p_i 都是奇数，我们得到

$$(p_{r+1} - 1) \cdots (p_s - 1) \geq 2^{s-r}.$$

另一方面，我们很容易看出，函数 $f(x) = 2^{x-r} - \frac{x}{r}$ 对于 $x \geq r + 1$ 是递增的。因此

$$2^{s-r} - \frac{s}{r} \geq 2 - \frac{r+1}{r} \geq 0,$$

如所需。

注意，等号在 (4) 中成立，当且仅当

$$r = s \text{ and } \alpha_i = \beta_i, \forall\, i = 1, ..., r$$

or

$$r = 1, s = 2, \alpha_1 = \beta_1, \beta_2 = 1 \text{ and } p_2 = 3,$$

也就是说，当且仅当 $d = d'$ 或 $d = p_1^{\alpha_1}$，且 $p_1 \geq 5$ 和 $d' = 3d$。证毕。 □

我们指出，当 d' 为偶数时，不等式 (4) 不成立。例如，对于奇数的 d 和 $d' = 2d$，我们有

$$\frac{\omega(d)}{\varphi(d)} < \frac{\omega(d) + 1}{\varphi(d)} = \frac{\omega(d')}{\varphi(d')}.$$

现在我们可以证明主要结果。

定理 1.1 的证明。首先假设 G 是幂零群，并令 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ 为其西罗子群的直积表示。记 $|G_i| = p_i^{n_i}$, $i = 1, ..., k$。由 [7], 的定理 2.5 可得

$$|C(G_i)| \geq |C(\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})| = n_i + 1,$$

当且仅当 $G_i \cong \mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ 时等号成立。利用引理 2.2，可得

$$|E(C(G_i)^*)| = \sum_{H \in C(G_i)} |\mathrm{Max}(H)| = \sum_{H \in C(G_i)\setminus 1} 1 = |C(G_i)| - 1$$
$$\geq |C(\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})| - 1 = |E(C(\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})^*)| = n_i.$$

那么，引理 2.1 中的等式 (1) 和 (2) 表明

$$|E(C(G)^*)| \geq |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|,$$

当且仅当 $G \cong \mathbb{Z}_n$ 时，等号成立。

接下来，假设 n 是奇数，并设 $f: G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ 是一个双射，使得对所有 $a \in G$，$o(a)$ 整除 $o(f(a))$。那么

$$\frac{\omega(o(a))}{\varphi(o(a))} \geq \frac{\omega(o(f(a)))}{\varphi(o(f(a)))}, \forall\, a \in G$$

由引理 2.3 可得，因此我们有

$$|E(C(G)^*)| = \sum_{a \in G} \frac{\omega(o(a))}{\varphi(o(a))} \geq \sum_{a \in G} \frac{\omega(o(f(a)))}{\varphi(o(f(a)))} = |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|.$$

最后，假设 $|E(C(G)^*)| = |E(C(\mathbb{Z}_n)^*)|$，但 G 不是循环的。那么

$$\frac{\omega(o(a))}{\varphi(o(a))} = \frac{\omega(o(f(a)))}{\varphi(o(f(a)))}, \forall\, a \in G.$$

设 $a_1, ..., a_{\varphi(n)} \in G$，其中对所有 i，$o(f(a_i)) = n$。由引理 2.3 可知，存在一个素数 p 和一个正整数 α，使得

$$n = 3p^\alpha \text{ and } o(a_i) = p^\alpha, \forall\, i = 1, ..., \varphi(n).$$

于是，根据西洛定理，我们推知 G有一个唯一的（正规）西洛p-子群。另一方面，由于 G至少包含 $\varphi(n) = 2\varphi(p^\alpha)$ 个阶为 p^α 的元素，因此它至少包含两个阶为 p^α 的循环子群，这与之矛盾。

定理 1.1 的证明至此完成。 □

致谢。作者感谢审稿人提出的评注，这些评注改进了本文的上一版本。

参考文献

[1] H. Amiri、S.M. Jafarian Amiri 和 I.M. Isaacs，有限群中的元素阶之和，《通讯代数》37 (2009)，2978-2980。[2] M. Amiri，具有元素阶整除性质的有限群到循环群的一个双射，arXiv:2002.11455v15，2022。[3] J.P. Bohanon 和 L. Reid，具有平面子群格的有限群，《代数组合杂志》23 (2006)，207-223。[4] P.J. Cameron，群上定义的图，arXiv:2102.11177v3，2021。[5] B. Curtin 和 G.R. Pourgholi，有限循环群幂图的边极大性，《代数组合杂志》40 (2014)，313-330。[6] M. Garonzi 和 I. Lima，关于有限群的循环子群数量，《巴西数学会通报》49 (2018)，515-530。[7] M.H. Jafari 和 A.R. Madadi，关于有限群的循环子群数量，《韩国数学会通报》54 (2017)，2141-2147。[8] I.M. Isaacs，《有限群论》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[9] F. Ladisch，从任意群到循环群的阶递增双射，http://mathoverflow.net/a/107395。[10] A. Lucchini，有限群子群图的亏格，《数学科学通报》11 (2021)，文章编号 2050010。[11]V.D. Mazurov 和 E.I. Khukhro，《库罗夫卡问题集：群论未解问题》，第18版，俄罗斯科学院数学研究所西伯利亚分部，新西伯利亚，arXiv:1401.0300v25，2014。[12] I.M. Richards，关于有限群的循环子群数量的一则评注，《美国数学月刊》91 (1984)，571–572。[13] R. Schmidt，平面子群格，《普遍代数》55 (2006)，3-12。

[14] C.L. Starr 和 G.E. Turner III，《平面群》，《代数组合杂志》19 (2004)，283-295。

Marius T˘arn˘auceanu
“Al.I. Cuza”大学数学系，
罗马尼亚 Ia¸si，电子邮件：
tarnauc@uaic.ro