涉及完全椭圆积分三重乘积的新型克莱布施–戈登型积分

John M. Campbell

arXiv:2302.05819v1 [math.CA] 12 Feb 2023

摘要

与广义克莱布施–戈登（CG）积分相关的多重椭圆积分在物理学和特殊函数理论的许多领域都具有重要意义。Zhou 引入并应用了基于勒让德函数的技巧，证明了涉及完全椭圆积分表达式二重乘积和三重乘积的 CG 形式积分的符号求值，其中包括 Zhou 对 Wan 提出的一个未决问题所作的卓越证明。上述研究促使本文提出相关结果：我们证明了涉及完全椭圆积分 K 和 E 三重乘积的新型 CG 型积分的闭式求值。我们的方法基于分数阶导数算子的运用，并采用一种我们此前称为半分部积分的技巧变体。

关键词：多重椭圆积分；完全椭圆积分；克莱布施–戈登积分；闭式

1 引言

多重椭圆积分是指被积函数中含有第一类完全椭圆积分因子的积分

$$\mathbf{K}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - k^2 \sin^2\theta\right)^{-1/2} \, d\theta \tag{1}$$

或第二类完全椭圆积分因子的积分

$$\mathbf{E}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} \, d\theta, \tag{2}$$

（至多相差一次变量替换）。多重椭圆积分研究的许多内容，源于这类数学对象会自然地出现在物理学的诸多不同领域中 [16]。例如，如 [13]，所述，关于三维晶格的实际问题常常会产生可化简为以下形式的三重积分

$$\int_\alpha^\beta F(\mu)\mathbf{K}(\mu) \, d\mu \tag{3}$$

对于一个初等函数 F [13]，以及如式 (3) 所示、涉及完全椭圆积分表达式的二重乘积 [14,24] 和三重乘积 [24] 的积分，也以类似方式

应用于格的研究。Zhou 关于多重椭圆积分的 2014 年文章 [28], 中，Zhou 解决了证明这些公式这一未决问题

$$\int_0^1 \mathbf{K}^3\left(\sqrt{1-k^2}\right)\,dk = 6\int_0^1 \mathbf{K}^2(k)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right)k\,dk = \frac{\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^2} \tag{4}$$

Wan 猜想了 2012 [23], 在物理学的许多不同领域中引用了形如（3）的表达式的应用，这也是本文引入多重椭圆积分的主要动机来源。（4）中展示的定积分求值有一个显著特点：这些积分涉及完全椭圆积分表达式的三重乘积；相比之下，关于多重椭圆积分的标准参考文献 [4, §4.21.1–4.22.14],中记录的许多章节里，被积函数包含的都是 K 和／或 E 表达式的一重或二重乘积。值得注意的是， [4]中没有任何积分涉及椭圆积分的三重乘积；与一重或二重情形相比，关于此类三重乘积积分的研究鲜有成果。在本文中，我们给出许多新的定积分求值，它们与（4）中 Wan 的积分相似，涉及完全椭圆积分表达式的三重乘积；据我们所知，这些求值尚未以任何等价形式见于相关文献。与 Zhou 在 [28], 中引入的基于勒让德函数的技巧不同，我们转而采用 Caputo 算子，并以 [5, 8]中的近期工作为基础。

Zhou 在 [28] 中提出的基于勒让德多项式的方法，被用于证明以下以克莱布施–戈登（CG）形式表示的所谓多重椭圆积分的闭式 [5, 28], 。该闭式在 [28], 的推论3.2中得到了重点介绍，此前也已收录于之前提及的多重椭圆积分标准参考文献 [4, 第278]页：

$$2\int_0^1 \mathbf{K}\left(\sqrt{x}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-x}\right)\,dx = \frac{\pi^3}{4}. \tag{5}$$

式（5）中的闭式公式后来在 [5] 中得到了证明和推广，所用的是 [8] 中提出的一种基于分数阶微积分的恒等式，并称为半分部积分（SIBP）[8]。我们再次强调，Wan 在（4）中的积分所含的是完全椭圆函数的三重乘积，这与（5）中被积函数里的二重乘积形成对比。如果（3）中的F因子是初等函数，那么通常可以利用富比尼型换序，通过按照（1）重写 K 因子来计算（3）；这说明，相较于（4）所示 Wan 积分中的三重乘积，这种单重情形容易处理得多。类似的论证也可以解释，为何含有完全椭圆积分二重乘积的被积函数（例如（5）中的 CG 型积分）相较于（4）中那类棘手的积分也较易处理。值得注意的是，Wan 和 Zucker 在 [24]中也讨论了（4）中积分的难点。上述考量强烈促使我们探索如何改进或以其他方式调整[5, 8] 中的基于分数阶微积分的方法，使其能够应用于涉及 K 和/或 E 三重乘积的积分。这正是本文的主要目的。对此，我们已成功运用新方法证明了下文第 1.1 节重点介绍的新结果。

1.1 新的多重椭圆积分

本文的主要结果体现在我们如何推广了[8], 中的 SIBP 定理，以及如何应用这一推广，如下文重点介绍的新闭式所示。Zhou [28] 阐述并探讨了将涉及三个或更多完全椭圆积分的积分表示为基本数学常数时所面临的分析难题，这强烈促使我们得出（6）–（17）中重点介绍的新结果。关于我们在（7）中的新符号求值，我们用$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$表示卡塔兰常数；对于（8）中的新结果，我们用 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 表示黄金比例常数。

$$\frac{\pi^3(1+4\ln(2))}{32} = \int_0^1 \mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}}\right)dx, \tag{6}$$

$$\frac{\pi^2(4G+2+\pi\ln(2))}{16\sqrt{2}} = \int_0^1 \mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}\right)dx, \tag{7}$$

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{20}+\frac{3\ln(\phi)}{2}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4+x}}{4}}\right)dx, \tag{8}$$

$$\pi^2\left(\frac{17}{30}-\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}}}{\sqrt{2}}}\right)}{\sqrt[4]{2\sqrt{1-x}-x+2}}dx, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{47\pi^2}{160}-\frac{\pi^3}{16\sqrt{3}}\right) = \int_0^1 \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{6}\sqrt{\frac{\sqrt{16x+9}-3}{x}}}}{2\sqrt{2}}\right)}{\sqrt[4]{8x+3\sqrt{16x+9}+9}}dx, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2^{7/4}}\left(\frac{71\pi^2}{60}-\frac{\pi^3}{8}\right) = \int_0^1 \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{8x+1}-1}{x}}}\right)}{\sqrt[4]{4x+\sqrt{8x+1}+1}}dx, \tag{11}$$

$$\frac{\pi^2\left(143-\frac{20\pi}{\sqrt{3}}\right)}{480\sqrt[4]{2}}=\int_0^1\frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{48x+1}-1}{x}}}{4\sqrt{6}}}\right)}{\sqrt[4]{24x+\sqrt{48x+1}+1}}\,dx, \tag{12}$$

$$\frac{\pi^2(104-45\ln(3))}{180\sqrt{3}}=\int_0^1\frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{3-2\sqrt{\frac{6-3\sqrt{4-3x}}{x}}}}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt[4]{4\sqrt{4-3x}-3x+8}}\,dx. \tag{13}$$

我们还引入了（13）的一个闭式推广无限族。我们的方法使我们能够得到如下新的求值结果：

$$\frac{\pi^3}{64}(1-4\ln(2))=\int_0^1 x\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{2}}\right)d\mathbf{E}\left(\sqrt{x}\right), \tag{14}$$

通过改写成等价形式，可以再次得到完全椭圆积分表达式的三重乘积；回顾微分关系，有 $^{d}{}_{\mathbf{E}(k)\ dk}\ =\ {}_{\mathbf{E}(k)-\mathbf{K}(k)\ k}$。类似地，相较于（14），我们的方法使我们能够证明以下结果：

$$\frac{\pi^2}{8}\left(3\ln(\phi)-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\pi^2}{10}\right)=\int_0^1 x\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{4}+1}}{2}}\right)d\mathbf{E}\left(\sqrt{x}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{13}{15}\right)=\int_0^1\frac{x\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x}+1}}}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,d\mathbf{E}\left(\sqrt{x}\right), \tag{16}$$

$$\frac{\pi^2\left(2\ln(3)-\frac{152}{45}\right)}{16\sqrt{3}}=\int_0^1\frac{x\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}}}{\sqrt{3}}}\right)}{\sqrt[4]{3x+4\sqrt{3x+1}+5}}\,d\mathbf{E}\left(\sqrt{x}\right). \tag{17}$$

Wan 和 Zucker [24] 为形式如（6）–（17）所示的积分给出了一系列卓越的求值结果，即满足以下性质的定积分：

1. 定积分的积分区间为 0 到 1；
2. 被积函数包含一个由完全椭圆积分表达式构成的三重乘积因子；并且
3. 其余被积函数因子均为代数函数。

本文的主要目的是对满足上述条件的数学对象进行闭式求值。Wan 和 Zucker [24] 在格点和研究背景下，给出了此类积分的一个非凡求值，其中包含形如 2E(k) −K(k) 的被积函数因子。受[24]的启发，我们在第3.2节中介绍满足上述条件且包含形如 2E(k) −K(k) 因子的积分的新闭式。

2 克莱布施–戈尔丹理论

CG 系数通常通过角动量耦合这一现象来定义。按照 [1], ，我们表达如下恒等式，它适用于磁量子数为零的 CG 系数:

$$\left(C_{i0b0}^{c0}\right)^2 = \frac{2c+1}{2}\int_{-1}^{1} P_i(x)P_b(x)P_c(x)\,dx, \tag{18}$$

将正交的勒让德多项式族按惯例记作.....勒让德多项式的一种常见定义是通过如下所示的二项式求和给出： $P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x+1)^k(x-1)^{n-k}$。鉴于式 (18)，并仿照 Zhou 的文章 [28] （该文是我们新结果的主要研究动机），我们可将广义克莱布施–戈登积分定义为以下形式

$$\int_{-1}^{1} P_\mu(x)P_\nu(x)P_\nu(-x)\,dx \tag{19}$$

其中 μ 和 ν 属于 $\mathbb{C}$; 这一术语也用于文章 [10] ，该文与我们的许多工作相关。

CG 系数自然出现在将两个球谐函数的乘积分解为球谐函数的过程中；等价地，它们也出现在将勒让德多项式的乘积分解为勒让德多项式的过程中 [12]。因此，对三个勒让德多项式求积时，根据后一种分解，CG 系数自然会出现。根据球谐函数 $Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta,\varphi)$ 关于勒让德多项式的乘积公式，我们可以写成

$$P_{\ell_1}^{m_1}(x)P_{\ell_2}^{m_2}(x) = \tag{20}$$

$$\sqrt{\frac{(\ell_1+m_1)!(\ell_2+m_2)!}{(\ell_1-m_1)!(\ell_2-m_2)!}}\sum_{\ell_{12}}\sqrt{\frac{(\ell_{12}-m_{12})!}{(\ell_{12}+m_{12})!}}C_{m_1,m_2,m_{12}}^{\ell_1,\ell_2,\ell_{12}}C_{0,0,0}^{\ell_1,\ell_2,\ell_{12}}P_{\ell_{12}}^{m_{12}}(x), \tag{21}$$

详情请参阅 [12]。

形式如（19）所示的勒让德多项式三重乘积积分，与经典恒等式（18）类似，也出现在 CG 系数的求值过程中。因此，鉴于（20）–（21）所示的乘积恒等式，将由（18）和（19）中的积分所产生或与之直接相关的级数及积分求值称为 CG 型，是恰当的，尤其是

从如下傅里叶–勒让德展开可以看出，

$$\mathbf{K}\left(\sqrt{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}P_n\left(2x-1\right), \tag{22}$$

完全椭圆型表达式乘积的积分通常会通过类似于 (20)–(21) 中的恒等式导出 CG 系数。

3 分部半积分的新应用

如上所述，Zhou 于 2014 年发表的文章 [28] 是我们当前工作的主要灵感来源。当前工作也受到许多引用 Zhou 文章[28], 或与之相关的参考文献的启发
[2, 9, 10, 15, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32], 其中包括若干文章，研究从 0 到 1 的定积分，其被积函数包含两个完全椭圆积分表达式的乘积 [2, 9, 10, 15, 27, 29] 或三个此类表达式的乘积[21, 24, 30]。这些参考文献进一步激发了我们对第 1.1 节中强调并在本节中证明的多重椭圆积分的兴趣。

分数阶微积分领域中的一个基本对象是黎曼–刘维尔分数阶导数，它满足

$$\begin{aligned}D^{\alpha}f(x)&=\frac{d^n}{dx^n}\left(D^{-(n-\alpha)}f(x)\right)\\&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_0^x\left(x-t\right)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt\right),\end{aligned}$$

令 $n-1\le\alpha\le n$ 和 $n\in\mathbb{N}$。在这方面，根据 [5, 8], 半阶导数算子 $D^{1/2}$ 满足

$$D^{1/2}x^{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

而半阶原函数算子 $D^{-1/2}$ 满足

$$D^{-1/2}x^{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}x^{\alpha+\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

我们将这些算子 $D^{\pm1/2}$ 称为 Caputo算子。正如 [8], 所述， [8] 中涉及（23）和（24）式算子的技巧之所以引人关注，粗略地说，是因为将 $D^{\pm1/2}$ 应用于含有中心二项式系数幂的级数时，根据勒让德倍增公式，可以使该幂降低一阶；这通常有助于简化含有较高次幂 $\binom{2n}{n}$ 的级数，适用于 $n\in\mathbb{N}_0$。 [5, 8] 通过以下变换对此作了部分形式化。

定理 1.（半分部积分）：等式

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \left(D^{1/2}\tau\right) f, \left(\tau D^{-1/2}\right) g\right\rangle \tag{25}$$

只要两边都有定义，该式就成立；其中 τ 将函数 $h(x)$ 映射为 $h(1-x)$ *[5, 8]*。

根据麦克劳林级数展开

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, k^2\right]$$

and

$$\mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, k^2\right], \tag{26}$$

将 Caputo 算子逐项作用于 $\mathbf{K}(\sqrt{k})$ 和 $\mathbf{E}(\sqrt{k})$ 的幂级数，可得初等函数；正如 [5], 中所探讨的，这通常有助于计算和推广式 (5) 中 CG 形式的积分。鉴于幂级数展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3 x^n = \frac{4\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-64x}}}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^2} \tag{27}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^2\binom{4n}{2n}x^n = \frac{4\sqrt{2}\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-256x}}}{16\sqrt{2}}}\right)}{\pi^2\sqrt[4]{-256x+2\sqrt{1-256x}+2}}, \tag{28}$$

我们因此考虑一种与 [8], “相反”的策略，具体而言：我们不使用分数阶导数来尝试降低给定级数中中心二项式系数的幂次，而是希望通过分数阶导数来提高 $\binom{2n}{n}$ 的幂次，这与定理 1 完全类似。下面我们用定理 2 将这一想法形式化。

定理 2。（解析函数的 SIBP 变体）：对于数列 $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ 和 $(b_n : n \in \mathbb{N}_0)$，我们记 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\frac{1}{2}} a_n$ 和 $\mathfrak{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\frac{1}{2}} b_n$。内积

$$\langle f(x), \mathfrak{g}(1-x)\rangle \tag{29}$$

于是可写为

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}(1-x)^n a_n, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+2\right)}x^{n+1}b_n\right\rangle, \tag{30}$$

在假设可以交换对 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 的应用与无限求和在 (29) 和 (30) 中的次序时（参见 *[5]*）。

证明。在给定的交换性假设下，只需考虑以下情形：对于固定的 ℓ、$m \in \mathbb{N}_0$，$a_n = \delta_{n,\,\ell}$ 且 $b_n = \delta_{n,\,m}$，并按通常方式记克罗内克δ函数。因此，只需证明

$$\int_0^1 x^{\ell+\frac{1}{2}}(1-x)^{m+\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^{\ell}\Gamma\left(\ell+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\ell+1)}\right)\left(\frac{x^{m+1}\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}\right)dx.$$

因此，根据贝塔积分的 Γ-函数求值，所需结果便立即成立。

□

通常，为验证定理 2 中规定的极限运算交换所需的条件，可以运用实分析中的基本结果，处理无穷级数的逐项积分 [3, §5.3]；对于我们在第3.1节中的应用，所需的逐项积分可以用常规方法加以证明，但从 (29) 得到闭式可能相当复杂，而且在少数情况下或许需要一定的巧思：当 a-和 b-数列使得 (30) 可以表示为完全椭圆积分的三重乘积时，情况便是如此；下文第3.1节将对此作出说明。

3.1 应用

Zhou 在 [28], 中将下文给出的积分表达式称为 CG 形式的多重椭圆积分，而以下由 Zhou [28] 得到的求值结果则作为 [28]中的推论2.2 加以重点介绍。以下 CG 形式的积分均涉及完全椭圆积分的三重乘积，与我们在第 1.1 节列出的新结果相同；下列 Zhou 的公式，以及 Zhou 的许多同等质量的结果，都是我们在第 1.1 节所述研究结果的主要灵感来源：

$$4\int_0^1 \frac{(1-t)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{1-t}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{t}\right)}{(1+t)^{3/2}}\,dt = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{8}\right)}{24}, \tag{31}$$

$$\frac{27}{4}\int_0^1 \frac{t(1-t)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{1-t}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{t}\right)}{(1-t+t^2)^{7/4}}\,dt = \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\sqrt{3}}}. \tag{32}$$

我们目前的工作也受到 Zhou 对这一猜想公式的证明 [30] 的启发

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{K}^2\left(\sqrt{1-k^2}\right)\mathbf{K}(k)}{\sqrt{k}\left(1-k^2\right)^{3/4}}\,dk = \frac{\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{32\sqrt{2}\pi^2} \tag{33}$$

该公式由 Rogers等人 [21] 在研究类似于以下公式时通过实验发现

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{K}^3\left(\sqrt{1-k^2}\right)}{\sqrt{k}\left(1-k^2\right)^{3/4}}\,dk = \frac{3\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{32\sqrt{2}\pi^2}, \tag{34}$$

如 [21] 中所介绍。鉴于我们在第 1 节中的讨论，Zhou 等人给出的上述结果（见式 (31)–(34)）促使我们提出以下关于定理 2 中所表述的 SIBP 变体的第一个推论：

正如我们稍后将要解释的，以下推论中强调的三个积分公式是“特殊的”且“并非任意的”，因为这些特定公式依赖于目前已知的极少数二对数函数闭式。

推论 1。(6)–(8) 中的 CG 型积分求值成立。

证明。首先，在定理 2 给出的 SIBP 变体中设定 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ 和 $b_n = \frac{16^{-n}}{2n+1}(n+1\ \binom{2n}{n}^2)$（）。根据指定的输入参数应用定理 2，可得等式

$$\int_0^1 \frac{1}{12}\sqrt{x}\left(12\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, 1-x\right] + {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\\ 2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\, 1-x\right] - x\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\\ 2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\, 1-x\right]\right) dx$$

and

$$\int_0^1 \frac{2\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-x}}{2}}\right)}{\pi^2}\,dx, \tag{35}$$

其中，应用了 (26) 和 (27) 中的麦克劳林级数，通过定理 2 得到了 (35) 中的积分。对上述涉及 ${}_3F_2$-级数的表达式进行逐项积分，可得 (35) 等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{3}{2(2n+3)} - \frac{1}{2n+5}\right)\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

展开上述被加数，所得级数是经典上已知的，从而得到 (35) 的一个等价于 (6) 的闭式。将上述方法应用于 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ 和 $b_n = \frac{(n+1)\ \left(\binom{2n}{n}\ -\frac{1}{64}\ ^n\right)^2}{2n+1}$（）的情形，可用于证明 (8) 中的 CG 型积分求值。同样地，设定 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ 和 $b_n = \frac{(n+1)\ \left(\binom{2n}{n}\ \frac{1}{32}\ ^n\right)^2}{2n+1}$（）可用于证明 (7)。

□

在定理 2 中令自由参数 α 取值为 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ 和 $b_n = \frac{16^{-n}}{2n+1}(n+1)\left(\binom{2n}{n}^2\alpha^n\right)$，仿照推论 1 的证明，我们可以证明

$$\int_0^1 \mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha x}}\right)dx \tag{36}$$

可表示为初等函数、闭式以及两项对数积分组合的组合

$$\mathrm{Li}_2\left(-\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{-\alpha}\right) - \mathrm{Li}_2\left(-\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{-\alpha}+1\right). \tag{37}$$

因此，当且仅当式 (37) 中的 Li_2 组合存在闭式时，式 (36) 中的 CG 型积分才有闭式。我们建立了 CG 理论相关积分与二对数表达式闭式求值之间的新联系，而据我们所知，这类联系鲜有研究。此外，过去关于式 [7, 17, 19, 20, 22] 中二项二对数组合闭式求值的研究，也促使我们关注所引入的式 (36) 与式 (37) 之间的关系。通过系统地令式 (37) 中两个 Li_2 表达式各自的参数等于八个已知实数值 x，使得 $\mathrm{Li}_2(x)$ 和 x 均有闭式 [18, （第 4、6–7], 页），可知在式 (37) 中，唯一能使实数参数对应闭式的 α 值是 $\alpha = -\frac{1}{4}$。类似的论证可以解释 $\alpha = \frac{1}{2}$ 情形的唯一性。类似的唯一性性质也适用于下文推论2中强调的结果，后文将作进一步说明。

推论2。(9)–(12)中的 CG 型积分求值成立。

证明。在定理 2 中，我们令 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ 和 $b_n = \frac{64^{-n}}{(n+1)\binom{2n}{n}\binom{4n}{2n}2n+1}$。利用（28），定理 2 随即给出以下等式：

$$\int_0^1 \frac{1}{16}\sqrt{x}\left(16\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\\ 1,\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right] + {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4}\\ 2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right] - x\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4}\\ 2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right]\right)dx$$

and

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}}}{\sqrt{2}}}\right)}{\pi^2\sqrt[4]{-x+2\sqrt{1-x}+2}}\,dx. \tag{38}$$

对上述涉及 ${}_3F_2$-级数的表达式逐项积分后，我们发现（38）中的多重椭圆积分等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{33}{16(2n+1)} - \frac{15}{4(2n+3)^2} + \frac{6}{2n+3} - \frac{63}{16(2n+5)}\right)\binom{4n}{2n}4^{-2n-1}.$$

通过经典已知级数展开，这可化简为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{-2n}\binom{4n}{2n}}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{15\;4^{-2-2n}\binom{4n}{2n}}{(2n+3)^2} - \frac{3}{10\sqrt{2}}.$$

因此，接下来需要计算

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1\right] \quad \text{and} \quad {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1\right]. \tag{39}$$

对于前一种情况，我们可以将此 ${}_3F_2(1)$ 级数改写为

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2u^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2u^2}}\,dt\,du,$$

相应的原函数可表示为初等形式。至于 ${}_4F_3(1)$ 级数，可以采用同样的论证并重新编排求和指标。

我们接下来设

$$a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n} \quad \text{and} \quad b_n = \frac{64^{-n}(n+1)\binom{2n}{n}\binom{4n}{2n}\alpha^n}{2n+1} \tag{40}$$

在定理 2 中。对于 $\alpha = -\frac{16}{9}$ 情形，我们可以仿照上面的证明来证明 (10)。对于$\alpha = -8$ 情形，我们可以再次仿照上面的证明来证明 (11)。对于 $\alpha = -48$ 情形，我们还可以再一次仿照上面的证明来证明 (12)。 □

令 $\alpha = \frac{3}{4}$ 可用于证明 (13)。 $\alpha = \frac{3}{4}$ 情形使我们发现了一个关于反双曲正切函数的复分析性质，可用于证明下文给出的闭式求值；该求值适用于 (13) 的一个无限族推广，如下文的推论 3 所示。

推论 3。CG 型积分

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\alpha x}}{\alpha x}}}{\sqrt{2}}}\right)}{\sqrt[4]{+2\sqrt{1-\alpha x}-\alpha x+2}}\,dx \tag{41}$$

等于

$$\frac{\pi^2\left(36\alpha+2\sqrt{1-\alpha}-15\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}\alpha\coth^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}}\right)-2\right)}{60\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}\alpha}$$

对于正值 α。

证明。我们再次将 a和 b数列设为式（40）中的形式。仿照推论2的证明，我们可以证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n+1)^2}+\frac{-32-\alpha}{16(2n+1)}-\frac{15\alpha}{4(2n+3)^2}+\frac{2(1+2\alpha)}{2n+3}-\frac{63\alpha}{16(2n+5)}\right)\binom{4n}{2n}2^{-2-4n}\alpha^n$$

等于

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\alpha x}}{\alpha x}}}{\sqrt{2}}}\right)}{\pi^2\sqrt[4]{\alpha(-x)+2\sqrt{1-\alpha x}+2}}\,dx \tag{42}$$

对于实数值 $\alpha_\circ$ 通过直接类比我们对式 (39) 中 ${}_3F_2$-级数的证明，可以证明

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\alpha\right]=\frac{i\pi}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}-\frac{2\sqrt{2}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}+i\left(\sqrt{1-\alpha}+1\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}\right)}{\sqrt{\alpha}}\right) $$

对于实数 $\alpha_\circ$ 这可用于证明，(42) 等于以下 Mathematica 输出给出的表达式

```
((-240*I)*Pi*Sqrt[1 + Sqrt[1 - \[Alpha]]]*Sqrt[\[Alpha]] -
524*Sqrt[2]*\[Alpha] - 524*Sqrt[2 - 2*\[Alpha]]*\[Alpha] - 9*Sqrt[1 +
Sqrt[1 - \[Alpha]]]*(-(Sqrt[2]*Sqrt[1 + Sqrt[1 - \[Alpha]]]) +
2*Sqrt[2]*Sqrt[1 + Sqrt[1 - \[Alpha]]]*Sqrt[1 - \[Alpha]])*(2 + 2*Sqrt[1 -
\[Alpha]] - \[Alpha])*\[Alpha] + (120*I)*Pi*Sqrt[1 + Sqrt[1 -
\[Alpha]]]*\[Alpha]^(3/2) + 225*Sqrt[2]*\[Alpha]^2 - 45*Sqrt[2 -
2*\[Alpha]]*\[Alpha]^2 + 18*Sqrt[2]*\[Alpha]^3 - (240*I)*Pi*Sqrt[1 +
Sqrt[1 - \[Alpha]]]*Sqrt[-((-1 + \[Alpha])*\[Alpha])] - 480*Sqrt[1 +
Sqrt[1 - \[Alpha]]]*(-2*Sqrt[\[Alpha]] + \[Alpha]^(3/2) - 2*Sqrt[-((-1 +
\[Alpha])*\[Alpha])])*ArcTanh[(I*(1 + Sqrt[1 - \[Alpha]]) +
Sqrt[\[Alpha]])/(Sqrt[2]*Sqrt[1 + Sqrt[1 - \[Alpha]]])])/(240*(-1 + Sqrt[1 -
\[Alpha]])*(1 + Sqrt[1 - \[Alpha]])^(7/2))
```

因此，剩下的就是计算

$$ \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}+i\left(\sqrt{1-\alpha}+1\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}\right) \tag{43} $$

对于实变量 $\alpha_\circ$ 当 α 为正值时，根据反双曲正切函数在复数自变量上的常规扩展，可知 (43) 等于

$$ -\frac{1}{4}\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\alpha}+1\right)\right)+ $$

$$ \frac{1}{4}\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}+1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\alpha}+1\right)\right)+ $$

$$ i\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}\right)}\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}+1\right)}\right)\right) $$

对该表达式求导

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}\right)}\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}+1}{\alpha}}}+1\right)}\right)$$

可以用来证明上述表达式恒等于 $\frac{\pi}{4}$，由此得到所需的 $\alpha>0$ 情形的闭式。

□

若 $\alpha<0$，则从构造如推论2所示的闭式这一挑战来看，式 (43) 的求值更有意思。下面将对此进行形式化表述。暂且指出，推论 3 中的反双曲余切求值颇有意义，因为可以通过系统地寻找使推论 3 中反双曲余切的自变量化为 ln 2 等简单常数的 α 值，利用该求值为 CG 型积分导出简单的闭式。

例 1。令 $\alpha=\frac{576}{625}$，我们可以证明以下求值

$$\frac{\pi^2(551-400\ln(2))}{3840\sqrt{2}}=\int_0^1\frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{24-5\sqrt{\frac{50-2\sqrt{625-576x}}{x}}}}{4\sqrt{3}}\right)}{\sqrt[4]{50\left(\sqrt{625-576x}+25\right)-576x}}\,dx.$$

例 2。令 $\alpha=\frac{32}{81}$，我们可以证明以下求值

$$\pi^2\left(\frac{93}{640}-\frac{3\ln(2)}{32}\right)=\int_0^1\frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32x}}{x}}}\right)}{\sqrt[4]{18\left(\sqrt{81-32x}+9\right)-32x}}\,dx.$$

推论 4。对于 $\alpha<0$，当且仅当下式也可如此表示时，式 (41) 中的积分才能表示为代数表达式与一组已知常数的有限组合：

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\alpha}+\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\alpha}}}+1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1-\alpha}+1}}\right).\tag{44}$$

证明。根据推论 3 的证明中对 (42) 的求值可知，对于所有实数值 α，(41) 中所需的积分等于由代数表达式与 π^2 以及 (43) 组成的有限线性组合。对于负值 α，将反双曲正切函数通常地延拓到复数自变量后可知，(43) 等于虚数单位乘以 (44) 中的反正切表达式，因此所需结果得证。

□

推论 4 中的分类结果具有如下意义：若要为有理数值 α 下的 (41) 中 CG 型积分求得闭式，那么 (44) 只有在特殊情形下才会有闭式。进一步地，基于 $q \in \mathbb{Q}$ 下 $\tan(q\pi)$ 的代数值进行系统性计算机搜索表明，只有在特殊情形下，(44) 才能用 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 表示为闭式，这突显了 (9)–(12) 中 CG 型积分的独特性质。例如，令 $\alpha = -\frac{1}{3}$ 可得一个包含

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\sqrt{3}-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}\right),$$

这似乎无法化简为例如 π 的有理倍数，或以其他方式化简。$\alpha = -\frac{16}{9}$情形对应于闭式 $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$，(11) 和 (12) 的情形也类似。

第 1.1 节中列出的积分求值 (14)–(17) 可通过定理 2 以与推论 1–3 中大致相同的方式证明；为简洁起见，我们将验证工作留给读者。

3.2 受 Wan 和 Zucker 启发的新积分

涉及完全椭圆函数三重乘积的积分，如公式中所示

$$\frac{\pi^3}{6\sqrt{2}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}}\mathbf{K}^2\left(\sqrt{1-k^2}\right)(2\mathbf{E}(k)-\mathbf{K}(k))\,dk \tag{45}$$

and

$$\frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma^4\left(\frac{3}{8}\right)}{384\sqrt{2}\pi^2} = \int_0^1 \frac{(2+3k-k^2)\,\mathbf{K}^3(k)}{\sqrt{k+1}}\,dk \tag{46}$$

and

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{3/2}\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{128\sqrt{2}\pi^2} = \int_0^1 \sqrt[4]{k}\sqrt[4]{1-k^2}\mathbf{K}^3(k)\,dk \tag{47}$$

Wan 和 Zucker 在 [24] 中研究格点和时给出了这些积分，这启发了我们在下文介绍的新结果。这些结果与 (45) 中的 Wan–Zucker 公式相似：对于满足第 1.1 节所列三个条件，且被积函数包含 (45) 中最后一个被积函数因子的积分，我们给出了类似于 (45) 左侧的闭式。

推论 5. 以下 CG 型积分求值成立：

$$\frac{\pi^3(29+32\ln(2))}{2048} = \int_0^1 y\left(1-y^2\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\right)(2\mathbf{E}(y)-\mathbf{K}(y))\,dy,$$

$$\frac{\pi^2 G}{32\sqrt{2}} + \frac{7\pi^2}{64\sqrt{2}} - \frac{9\pi^3}{512\sqrt{2}} + \frac{\pi^3\ln(2)}{128\sqrt{2}} =$$

$$\int_0^1 y\left(1-y^2\right)\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}\sqrt{y^2+1}}}{2}\right)\left(2\mathbf{E}(y)-\mathbf{K}(y)\right)dy,$$

$$-\frac{57}{64}\pi^2\ln(\phi)+\frac{\pi^4}{320}+\frac{53\sqrt{5}\pi^2}{256}=$$
$$\int_0^1 y\left(1-y^2\right)\mathbf{K}^2\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{5-y^2}}}{2}\right)\left(2\mathbf{E}(y)-\mathbf{K}(y)\right)dy.$$

证明. 令

$$a_n=\frac{4^{-n}\binom{2n}{n}}{2n-1}\quad\text{and}\quad b_n=\frac{16^{-n}(n+1)\binom{2n}{n}^2}{2n+1} \tag{48}$$

在定理 2 中。这给出了以下等式

$$\int_0^1 -\frac{1}{12}(1-x)\sqrt{x}\left(12\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right]+\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\\2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right]-x\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\\2,\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,1-x\right]\right)dx$$

and

$$\int_0^1 -\frac{2x\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-x}}{2}}\right)\left(2\mathbf{E}\left(\sqrt{1-x}\right)-\mathbf{K}\left(\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi^2}dx.$$

在上述涉及 ${}_3F_2$-函数的表达式中交换积分与无限求和后，我们得到表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8(2n+1)^2}-\frac{1}{32(2n+1)}+\frac{1}{8(2n+3)^2}+\frac{3}{32(2n+3)}-\frac{11}{32(2n+5)}+\frac{9}{32(2n+7)}\right)\binom{2n}{n}2^{1-2n},$$

根据经典已知级数，该式可化简为 $\frac{1}{512}(-29\pi-32\pi\ln(2))$。因此，经过变量替换，我们得到所需的闭式

$$\int_0^1 y\left(1-y^2\right)\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}}\right)\left(2\mathbf{E}(y)-\mathbf{K}(y)\right)dy,$$

an类似地，也适用于正在考虑的推论中的其余积分 on. □

在定理 2 中令 $a_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ $b_n = 16^{-n}(n+1)\binom{2n}{n}^2$ α^n)( )，可以证明所得的 CG 型积分可化为初等函数与式 (37) 中相同的两项对数积分组合之和。因此，我们可以重复先前的论证，以说明推论 5 中闭式的唯一性。使用式 (48) 中输入数列的变体，我们可以得到许多涉及 2E(y) −K(y) 的进一步积分，并鼓励对此进行探索。

4 结论

我们最后简要探讨与上述内容相关的一些后续研究课题。

尽管本文主要研究涉及 K 和/或 E 的乘积三重乘积的积分，但仔细考察 Zhou 2014 年的文章 [28] ，并将其与本文的主要内容以及相关参考文献（如 [6, 9] ）中涉及 K 和/或 E 的积分内容联系起来，会发现关于涉及二重乘积、且与 Zhou 所称的拉马努金变换[28]相关的 CG 型积分的新结果。Zhou [28] 通过对拉马努金笔记中未经证明的公式进行“逆向工程”，证明了

$$\mathbf{K}^2\left(\sqrt{t}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{\mu}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\mu}\right)}{1-\mu t}\,d\mu \tag{49}$$

并且

$$\mathbf{K}^2\left(\sqrt{1-t}\right) = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{\mu}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\mu}\right)}{(1+\sqrt{t})^2-\mu(1-\sqrt{t})^2}\,d\mu, \tag{50}$$

这些受拉马努金启发的变换可用于推广式（5）中的 CG 型积分，具体如下，所用材料来自 [6, 9]。

闭式求值

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\binom{2i}{i}^2\binom{2j}{j}^2}{4^{2i+2j}(i+j+1)} = \frac{14\zeta(3)}{\pi^2} \tag{51}$$

引入 在 [6] 中引入的内容可证明等价于相应的求值结果

$$\frac{7\zeta(3)}{2} = \int_0^1 \mathbf{K}^2\left(\sqrt{t}\right)\,dt, \tag{52}$$

通过在 (22) 中使用傅里叶–勒让德展开实现；这一方法在 [6] 中通过使用勒让德多项式的矩公式得到了推广和探究。因此，根据 (52) 关于阿佩里常数的求值，对 (49) 两边应用算子 $\int_0^1 \cdot\, dt$，然后应用富比尼定理，可得下式的求值：

$$-\frac{7\pi\zeta(3)}{4} = \int_0^1 \frac{\ln(1-\mu)}{\mu}\mathbf{K}\left(\sqrt{\mu}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\mu}\right)\,d\mu, \tag{53}$$

Wan 在 [23]中以另一种方式证明了这一结果。模仿上述求 (54) 的方法，并利用 [6] 以及后续文章 [11] 中给出的、对 (51) 进行推广或与之相关的众多无穷族二重和；后者极大地推广了 [6], 中的技巧。这使我们得到了以下形式的 CG 型积分的新求值族:

$$\int_0^1 F(\mu)\mathbf{K}\left(\sqrt{\mu}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\mu}\right)\,d\mu \tag{54}$$

对于初等函数 $F(\mu)$，以及类似地，对于式 (50) 中的 Ramanujan变换。我们将对此进行全面探索的工作留待另行开展。

回顾一下，我们以定理 2 给出的 SIBP 变体涉及级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+\frac{1}{2}}a_n \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+\frac{1}{2}}b_n.$$

一个值得探索的研究方向，是基于将 $x_{n+\frac{1}{2}}$分别替换为 x^{n+h_1} 和 x^{n+h_2} ，从而得到适用于半整数参数 h_1 和 h_2的 $f(x)$ 和 $\mathfrak{g}(x)$ 展开式，并据此应用 SIBP 的其他变体。类似地，式 (25) 中的 SIBP公式也可以通过使用 $D^{\pm1/2}$ 以外的算子（例如 $D^{\pm1/4}$）加以推广。

致谢

作者非常感谢 Yajun Zhou博士，就本文介绍的结果进行了许多有益的讨论。

利益冲突声明

无须声明任何利益冲突。

参考文献

[1] Askey, R.：勒让德函数乘积的一个积分与一个克莱布希–戈丹和。Lett. Math. Phys. 6, 299–302 (1982)[2] Ausserlechner, U., Glasser, M. L., Zhou, Y.：与霍尔效应器件相关的某些二重积分的对称性。拉马努金杂志 53(1), 39–48 (2020)[3] Bressoud, D.M.：实分析的激进方法。第2版。美国数学协会，华盛顿特区 (2007)[4] Brychkov, Ya.：特殊函数手册。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿 (2008)[5] Campbell, J. M.：Caputo算子在求值克莱布希–戈丹型多重椭圆积分中的应用。Integral Transforms Spec. Funct. (2022)

[6] Campbell, J. M.：关于包含$1/\pi^2$的常数的新型二重超几何级数族。Ann. Pol. Math. 126(1), 1–20 (2021)[7] Campbell, J. M.：一些非平凡的二项二对数恒等式。爱尔兰数学会通报 88, 31–37 (2021)[8] Campbell, J. M., Cantarini, M., D'Aurizio, J.：借助傅里叶–勒让德展开和分数阶算子进行符号计算。Integral Transforms Spec. Funct. 33(2), 157–175 (2022)[9] Campbell, J. M., D'Aurizio, J., Sondow, J.：超几何函数、完全椭圆积分与傅里叶–勒让德展开之间的相互作用。J. Math. Anal. Appl. 479(1), 90–121 (2019)[10] Cantarini, M.：关于Clebsch–Gordan 积分、傅里叶–勒让德展开以及超几何级数闭式的一则短札。拉马努金杂志 59(2), 549–557 (2022)[11] Chu, W., Campbell, J. M.：勒让德多项式展开与无穷二重级数恒等式。拉马努金杂志 60(2), 317–353 (2023)[12] Dong, S.-H., Lemus, R.：三个缔合勒让德多项式的重叠积分。Appl. Math. Lett. 15(5), 541–546 (2002)[13] Glasser, M. L.：完全椭圆积分 K的定积分。J. Res. Natl. Stand. Sec. B 80B(2), 313–323 (1976)[14] Glasser, M. L., Guttmann, A. J.：四维超立方晶格在原点处的晶格格林函数。J. Phys. A, Math. Gen. 27(21), 7011–7014 (1994)[15] Glasser, M. L., Zhou, Y.：一个涉及椭圆积分的函数恒等式。拉马努金杂志 47(2), 243–251 (2018)[16] Kaplan, E. L.：多重椭圆积分。J. Math. Phys. 29, 69–75 (1950)[17] Khoi, V. T.：塞弗特体积与二对数恒等式。J. Knot Theory Ramifications 23(5), Article ID 1450025, 11 p. (2014)[18] Lewin, L.：多对数及相关函数。New Holland，纽约 (1981)[19] Lima, F. M. S.：新的定积分与一个二项二对数恒等式。Indag. Math., New Ser. 23(1-2), 1–9 (2012)[20] Lima, F. M. S.：关于涉及黄金比例的Khoi二对数恒等式的可及性。Vietnam J. Math. 45(4), 619–623 (2017)[21] Rogers, M., Wan, J. G., Zucker, I. J.：椭圆积分矩与临界 L值。拉马努金杂志 37(1), 113–130 (2015)

[22] Stewart, S. M.：Lima 的二对数恒等式的一些简单证明。爱尔兰数学会通报 89，43–49（2022年）[23] Wan, J. G.：椭圆积分乘积的矩。应用数学进展 48(1)，121–141（2012年）[24] Wan, J. G., Zucker, I. J.：格点和中的 K 和 E 积分。拉马努金杂志 40(2)，257–278（2016）[25] Zhou, Y.：某些贝塞尔矩的 $\mathbb{Q}$-线性依赖关系。拉马努金杂志 58(3)，723–746（2022年）[26] Zhou, Y.：自守格林函数的 Kontsevich–Zagier 积分。I. 拉马努金杂志 38(2)，227–329（2015）[27] Zhou, Y.：自守格林函数的 Kontsevich–Zagier 积分。II. 拉马努金杂志 42(3)，623–688（2017）[28] Zhou, Y.：勒让德函数、球面旋转与多重椭圆积分。拉马努金杂志 34(3)，373–428（2014 年）[29] Zhou, Y.：关于 Laporta 的四圈日出公式。拉马努金杂志 50(3)，465–503（2019）[30] Zhou, Y.：关于三个勒让德函数乘积上的一些积分。拉马努金杂志 35(2)，311–326（2014 年）[31] Zhou, Y.：Epstein ζ 函数的拉马努金级数。拉马努金杂志 40(2)，367–388（2016）[32] Zhou, Y.：涉及四个勒让德函数乘积的两个定积分。拉马努金杂志 45(2)，299–317（2018）

John M. Campbell 数学系 多伦多都会
大学 350 Victoria St, 多伦多, ON
M5B2K3

jmaxwellcampbell@gmail.com