arXiv:2302.05821v1 [math.CA] 12 Feb 2023

关于不连续微分方程与解区域方法

豪尔赫·罗德´里格斯–洛´佩斯

统计学、数学分析与优化系，数学研究所，圣地亚哥-德孔波斯特拉大学，15782，数学学院，Vida校区，圣地亚哥，西班牙。电子邮箱：jorgerodriguez.lopez@usc.es

摘要。我们调整了解区域方法，以证明不连续微分方程组的新存在性与局部化结果。我们放宽了关于解区域定义的若干假设，从而扩大了该方法的适用范围，即使在 Carath´eodory 非线性的情形下也同样适用。文中给出了若干例子以说明这一理论。

2010年数学主题分类：34A36；34
A12。

关键词和短　　语。不连续微分方程；解区域；上解和下解　　ns.

1 引言

本文　　讨论初值问题的绝对连续解的存在性

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{for a.a. } t \in I = [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

其中 $T > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 是固定的，函数 $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 不必是连续的。

众所周知，如果 f 关于第二个变量不连续，问题 (1.1) 可能不存在绝对连续解。因此，我们需要对 f 在其不连续点处施加某种假设。该假设的灵感来自 Bressan 和 Shen 提出的全局横截条件 [6]，该条件最近在 [13] 中得到了改进。

在这里，这一技巧与 Frigon 提出的解区域方法相结合 [8]（另见 [9,14]），从而使我们能够将解限制在给定的紧集 $R \subset I \times \mathbb{R}^n$中。集合 R 将称为问题 (1.1) 的解区域。作为特例，它可以是有序下解与上解之间的集合，

也可以是由解管给出的集合，见 [8]。通过这种方式，为了获得存在性结果，无需对 f 施加单调性或增长条件。

我们的结果扩大了解区域方法的适用范围，即使对于具有连续非线性项的初值问题也是如此。我们注意到，定义解区域所必需的容许对和弱可容许对这两个概念中的一项基本假设可以完全去除（请将下文定义 2.2 和定义 2.3 与定义 2.4 作比较）。

本文结构如下。第2节介绍可行区域的概念，并回顾一些关于微分包含的结果；我们将利用这些结果建立问题 (1.1) 的存在性结果。第3节陈述并证明本文的主要结果：初值问题 (1.1) 的一个存在性结果，它还给出了解区域中的局部化。最后，第4节通过若干有意义的例子说明该理论的适用性。我们重点讨论解在球内的局部化以及下解与上解方法，并允许它们为分段连续函数。

2 预备知识

2.1 可容许区域、弱可容许区域与可行区域

首先，我们引入 Carathéodory 函数的概念。

DEFINITION 2.1 映射 $f\colon D \subset I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 Carathéodory 函数，当且仅当

(i) $f(t,\cdot)$ 在 $D_t = \{x : (t,x) \in D\}$ 上连续，对几乎处处的 $t \in I$ 成立；(ii) $f(\cdot,x)$ 对所有 $x \in \bigcup_{t\in I} D_t$ 都是可测的；

(iii) 对所有 $k > 0$，存在 $\psi_k \in L^1(I,\mathbb{R})$，使得对几乎处处的 t 以及满足 $\|x\| \le k$ 且 $(t,x) \in D$ 的每个 x，都有 $\|f(t,x)\| \le \psi_k(t)$。

如果对于每个紧集 $A \subset D$，映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ 都是 Carath´eodory 函数，则称其为局部 Carath´eodory 函数。

现在，我们回顾分别在 [8] 和 [14], 中引入的可容许区域和弱可容许区域的概念。

DEFINITION 2.2 如果存在两个连续映射 $h\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $p = (p_1, p_2)\colon I \times \mathbb{R}^n \to I \times \mathbb{R}^n$，满足以下条件，则称集合 $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ 为可容许区域：

(i) $R = \{(t,x)\colon h(t,x) \le 0\}$ 有界，且对每个 $t \in I$,

$$R_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in R\} \neq \emptyset;$$

(ii) 映射 h 在几乎处处的 t 及每个满足 $(t,x) \in R^c := (I\times\mathbb{R}^n)\backslash R$ 的 x 处，在 (t,x) 有偏导数；并且 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 和 $\nabla_x h$ 是 R^c 上局部 Carath´eodory 映射；

(iii) p 有界，并且对于每个 $(t,x) \in R$，满足 $p(t,x) = (t,x)$，且

$$\langle \nabla_x h(t,x), p_2(t,x) - x\rangle < 0 \quad \textit{for a.e. } t \textit{ and every } x \textit{ with } (t,x) \in R^c.$$

Definition 2.3 若存在两个连续映射 $h\colon I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $p = (p_1,p_2)\colon I\times\mathbb{R}^n \to I\times\mathbb{R}^n$，满足定义 2.2 的条件 (i) 和 (ii)，且

(iii^*) p 有界，并且对于每个 $(t,x) \in R$，满足 $p(t,x) = (t,x)$，且

$$\langle \nabla_x h(t,x), p_2(t,x) - x\rangle \le 0 \quad \textit{for a.e. } t \textit{ and every } x \textit{ with } (t,x) \in R^c.$$

基本上，这两个定义的区别在于条件 (iii) 和 (iii^*) 中的不等式；在弱概念中，这些不等式可以是非严格的。

我们将在此证明，这些不等式可以完全去除。为此，我们引入以下概念。

Definition 2.4 若存在两个连续映射$h\colon I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$和 $p\colon I\times\mathbb{R}^n \to I\times\mathbb{R}^n$，使得 $p(t,x) = (p_1(t)\ p_2(t,x))$，并满足定义 2.2 的条件 (i) 和 (ii)，且

(iii') p 有界，并且对于每个 $(t,x) \in R$，都有 $p(t,x) = (t,x)$。

我们称 (h,p) 为与 R 相关的可行对。

[14] 中已证明，任何满足如下条件的紧集 $R \subset I\times\mathbb{R}^n$：对每个 $t \in I$，都有 $R_t \neq \emptyset$，都是弱可容许区域，因此可行区域的定义非常一般。值得注意的是，在一些有意义的特殊情形下，映射 p 可以看作从 $I\times\mathbb{R}^n$ 到 R的收缩映射或投影。另一方面，若将 h 视为非负函数，则它可以度量点 (t,x) 与集合 R 之间的某种距离。

2.2 Krasovskij 解

与初值问题 (1.1) 相关联，我们考虑微分包含

$$x'(t) \in \mathcal{K}f(t,x(t)) \quad \text{for a.a. } t \in I, \quad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

其中多值映射 $\mathcal{K}f\colon I\times\mathbb{R}^n\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{K}f(t,x)=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}f\left(t,\overline{B}_\varepsilon(x)\right)\qquad\text{for every }(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n,\tag{2.3}$$

其中 $\overline{\mathrm{co}}$ 表示闭凸包，而 $\overline{B}_\varepsilon(x)$ 是以 x 为中心、半径为 $\varepsilon>0$ 的闭球。

(2.2) 的绝对连续解通常称为 (1.1) 的 Krasovskij 解。关于 Krasovskij 解的存在性，我们需要以下已知结果，参见 [7, 命题 2.1]。

Proposition 2.1 设 $f\colon I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足

(1) 存在 $M\in L^1(I)$，使得对几乎所有 $t\in I$ 以及所有 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|f(t,x)\|\le M(t)(1+\|x\|);$$

(2) 对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(\cdot,x)$ 都是可测的。

那么问题 (1.1) 至少有一个 Krasovskij 解。

3 存在性结果

我们的目标是证明 (1.1) 的解存在，并将其定位在一个可行区域 R 中。为此，我们引入以下概念，以联系微分问题 (1.1) 与该可行区域。

Definition 3.1 若集合 $R\subset I\times\mathbb{R}^n$ 是一个可行区域，且其对应的可行对 (h,p) 满足以下条件，则称其为 (1.1) 的一个解区域:

(i) 对几乎所有 t 以及所有满足 $(t,x)\notin R$ 的 x，均有

$$\langle\nabla h(t,x),(1,z)\rangle\le 0,\quad \textit{for all } z\in\mathcal{K}f(p(t,x));\tag{3.4}$$

(ii) $h(0,x_0)\le 0$。

Remark 3.1 若 $f(t,\cdot)$ 在 x 处连续，则 $\mathcal{K}f(t,x)=\{f(t,x)\}$，参见 [3]。因此，如果 f 关于第二个变量连续，则不等式 (3.4) 等价于

$$\langle\nabla h(t,x),(1,f(p(t,x)))\rangle\le 0,\tag{3.5}$$

正如 [8, 9, 14] 中定义(1.1)的解区域所要求的那样。

条件（3.5）类似于 Gaines 和 Mawhin [10]提出的相对于（1.1）的有界集概念中的条件。注意，与 [10], 不同， h 在集合 K 的内部不一定为负。事实上， K 的内部可能为空。

以下关于测度论的技术性结果至关重要。它可直接由 [5, 引理 5.8.13] 得出。

LEMMA 3.1 令 a、 $b \in \mathbb{R}$、 $a < b$。

如果 $\varphi\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，则对于任意零测集 $A \subset \mathbb{R}$，存在一个零测集 $B \subset \varphi^{-1}(A)$，使得

$$\varphi'(t) = 0 \quad \textit{for all } t \in \varphi^{-1}(A) \setminus B.$$

现在我们可以建立关于（1.1）的主要存在性和局部化结果。

THEOREM 3.1 假设存在 R （1.1）的一个解区域。

令 $f\colon\ I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足

(H_1) 对每个 $\mu \geq 0$，存在 $M_\mu \in L^1(I)$，使得对于几乎处处的 $t \in I$ 以及所有满足 $\|x\| \leq \mu$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$，都有

$$\|f(t,x)\| \leq M_\mu(t);$$

(H_2) 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$, $f(p(\cdot,x))$ 均可测；

(H_3) 存在可数个连续可微函数 $\tau_n\colon\ I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，以及可数个零测集 $A_n \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$，使得对几乎所有 $t \in I$,

$$f(t,x) \textit{ is continuous in } x \textit{ for each } (t,x) \in R \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n^{-1}(A_n)$$

并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $(t,x) \in \tau_n^{-1}(A_n) \cap R$，都有

$$\langle \nabla \tau_n(t,x), (1,z) \rangle \neq 0 \quad \textit{for all } z \in \mathcal{K} f(t,x). \tag{3.6}$$

那么，问题 (1.1) 至少有一个绝对连续解 x，使得对每个 $t \in I$，均有 $(t, x(t)) \in R$。

证明。考虑辅助问题

$$x'(t) \in \mathcal{K}\tilde{f}(t,x(t)) \quad \text{for a.a. } t \in I, \quad x(0) = x_0, \tag{3.7}$$

˜其中，对每个 $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$，有 $\tilde{f}(t,x) = f(p(t,x))$。

由于 p 有界，且 f 满足条件（H_1），因此存在 $\tilde{M} \in L^1(I)$，使得对于几乎处处的 $t \in I$ 及所有 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\left\| \tilde{f}(t,x) \right\| \leq \tilde{M}(t).$$

˜此外，假设（H_2）意味着对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$， $f(\cdot, x)$ 都是可测的。因此，命题 2.1 保证修正问题 (3.7) 至少有一个绝对连续解。

现在，我们将证明分为两个步骤。

步骤 1. 若 x 是问题 (3.7) 的解，则对于每个 $t \in I$，$(t, x(t)) \in R$。

反设结论不成立。于是，由定义 3.1 (ii)，$h(0, x(0)) = h(0, x_0) \leq 0$，存在 $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$，使得对于所有 $t \in (t_1, t_2)$，$h(t_1, x(t_1)) = 0$ 且 $h(t, x(t)) > 0$。由链式法则可知，在 (t_1, t_2) 上几乎处处有

$$\frac{dh}{dt}(t, x(t)) = \langle \nabla h(t, x(t)), (1, x'(t)) \rangle = \langle \nabla h(t, x(t)), (1, z) \rangle,$$

其中 $z \in \mathcal{K}f(t, x(t))$。由于 $\mathcal{K}f(t, x(t)) \subset \mathcal{K}f(p(t, x(t)))$，由定义 3.1 中的条件 (i) 可得，在 (t_1, t_2) 上几乎处处，

$$\frac{dh}{dt}(t, x(t)) \leq 0.$$

The因此，对于所有 $t \in [t_1, t_2]$，$h(t, x(t)) \leq 0$，这就产生了矛盾。于是，对于所有 $t \in I$，$(t, x(t)) \in R$.

步骤 2. 问题 (3.7) 的所有解都是初值问题 (1.1) 的解。

由步骤 1，(3.7) 的解满足

$$x'(t) \in \mathcal{K}f(t, x(t)) \quad \text{for a.a. } t \in I, \quad x(0) = x_0,$$

因为它们位于 R 中，对于每个 $(t, x) \in R$，$p(t, x) = (t, x)$；并且对于每个 $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$，$\mathcal{K}f(t, x) \subset \mathcal{K}f(p(t, x))$。

设 x 是问题 (3.7) 的一个解。下面证明，对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$m\left(\{t \in I : \tau_n(t, x(t)) \in A_n\}\right) = 0,$$

（其中 m 表示勒贝格测度）。记 $J_n = \{t \in I : \text{对所有 } t \in I, \ \tau_n(t, x(t)) \in A_n\}$，且 $\varphi_n(t) = \tau_n(t, x(t))$。由于 $m(A_n) = 0$，由引理 3.1，存在 $B_n \subset \varphi_n^{-1}(A_n)$，满足 $m(B_n) = 0$，使得对每个 $t \in \varphi^{-1}(A_n) \setminus B_n$，都有

$$\frac{d\tau_n(t, x(t))}{dt} = 0.$$

因此,

$$\langle \nabla \tau_n(t, x(t)), (1, x'(t)) \rangle = 0 \quad \text{for all } t \in \varphi_i^{-1}(A_n) \setminus B_n.$$

现在，条件 (3.6) 表明 $\varphi_i^{-1}(A_n)$ 是一个零测集。

因此，若 x 是 (3.7) 的一个解，则对于几乎所有 $t \in I$，映射 $f(t, \cdot)$ 在 $x(t)$ 处连续，这意味着 $\mathcal{K}f(t, x(t)) = \{f(t, x(t))\}$ 对几乎所有 $t \in I$ 都成立。于是，$x'(t) \in \mathcal{K}f(t, x(t)) = \{f(t, x(t))\}$ 对几乎所有 $t \in I$ 都成立，因此 x 是 (1.1) 的一个绝对连续解。

□

REMARK 3.2 注意到，问题 (1.1) 的解区域这一概念仅在定理 3.1 证明的步骤 1 中用到。鉴于证明的这一部分，显然定义 3.1 中的条件 (i) 可以替换为以下条件：

(i^*) 对几乎处处的 t 以及所有满足 $(t,x) \notin R$ 的 x，均有

$$\langle \nabla h(t,x), (1,z) \rangle \leq 0, \quad for\ all\ z \in \mathcal{K}\tilde{f}(t,x).$$

REMARK 3.3 注意到，定理 3.1 中的条件 (H_3) 在以下情形中特别成立：函数 f 可以表示为

$$f(t,x) = F(t, g_1(\tau_1(t,x),x), g_2(\tau_2(t,x),x), \ldots, g_N(\tau_N(t,x),x)) \quad for\ some\ N \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

其中：

- 每个函数 $g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $(\mathbb{R} \setminus A_i) \times \mathbb{R}^n$中连续；
- 对于几乎所有的 $t \in I$， $F(t,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$中连续。

f 文献 *[12, 13]* 和更早的文献 *[6]*研究了由 (3.8) 给出的 f 特定形式。此外，横截条件 (3.6) 是 Bressan 和 Shen *[6]* 所提出条件的局部化版本。在不连续微分包含和周期问题的情形下，文献 *[1,2]* 中也分别可以找到类似条件。

不等式 (3.4) 和 (3.6) 给出的两个条件都可以视为 (1.1) 的解所满足的可行性条件。事实上，(3.4) 是确保修正问题 (3.7) 的解的图像位于 R 中的关键条件（见定理 3.1 证明的步骤 1）；而 (3.6) 对于保证 (3.7) 的解避开形如 $\tau_n(t,x) = c$ 且满足 $c \in A_n$ 的超曲面至关重要，因为函数 f 在这些超曲面上可能不连续（见定理 3.1 证明的步骤 2）。

4 例子

4.1 将解局部化于球内

设 $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ 满足 $R = I \times \overline{B}_r$，其中 $\overline{B}_r$ 是以原点为中心、半径为 $r > 0$ 的闭球。显然， R 是一个可行区域，其对应的可行对 (h,p) 为

- $p(t,x) = (t, p_r(x))$，其中 $p_r : \mathbb{R}^n \to \overline{B}_r$ 是到球 $\overline{B}_r$ 的正交投影，即 ，

$$p_r(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in \overline{B}_r, \\ r\dfrac{x}{\|x\|}, & \text{if } x \notin \overline{B}_r. \end{cases}$$

- $h(t,x) = h(x) = \dfrac{1}{2}\|x - p_r(x)\|^2$.

注意， h 是一个连续可微函数，并且对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n$， $\nabla h(x) = x - p_r(x)$，参见 [14]。

设 $x_0 \in \overline{B}_r$。若对几乎处处的 $t \in I$ 和所有 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r$，有 R，则集合 R 将是具有数对 (h,p) 的方程 (1.1) 的解区域

$$\langle x - p_r(x), z\rangle \le 0, \quad \text{for all } z \in \mathcal{K}f(t, p_r(x)),$$

或者等价地，

$$\langle r\frac{x}{\|x\|}, z\rangle \le 0, \quad \text{for all } z \in \mathcal{K}f\left(t, r\frac{x}{\|x\|}\right).$$

换言之，若对几乎处处的 $t \in I$ 以及满足 $\|x\| = r$ 的所有 $x \in \mathbb{R}^n$，有 R，则 R 将是具有数对 (h,p) 的方程 (1.1) 的解区域

$$\langle x, z\rangle \le 0, \quad \text{for all } z \in \mathcal{K}f\,(t,x)\,. \tag{4.9}$$

因此，不等式 (4.9) 给出了一个简单的充分条件，以确保集合 $I \times \overline{B}_r$ 是初值问题 (1.1) 的解区域。

现在，我们通过以下例子说明存在性结果，其中解被限制在单位球内。

Example 4.1 考虑初值问题

$$\begin{cases} x' = x^3 + y - 3\,x + \phi(x^2 + y^2 + \alpha\,t), & t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \\ y' = y^3 - x - 3\,y\,e^{|x|}, & t \in [0,1], \quad y(0) = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且函数 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在无理数处连续，在每个有理数处不连续，并且满足对于所有 $s \in \mathbb{R}$, $0 < \phi(s) < 1$。

我们将证明，只要 $|\alpha|$ 足够大，(4.10) 在球 $\overline{B}_1$ 内至少有一个绝对连续解。

记 $g(x,y) = x^3 + y - 3\,x$ 和 $f = (f_1, f_2)$，其中 $f_1(t,x,y) = g(x,y) + \phi(x^2 + y^2 + \alpha\,t)$ and $f_2(t, x, y) = y^3 - x - 3\,y\,e^{|x|}$。

首先，我们来证明集合 $[0,1] \times \overline{B}_1$ 是初值问题 (4.10) 的解区域，其可行对 (h,p) 已如上给出。令 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$，其中 $\|(x,y)\| = 1$。由于 g 和 f_2 是连续函数，因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$x\,g_1(\bar{x},\bar{y}) + y\,f_2(\bar{x},\bar{y}) \le x\,g_1(x,y) + y\,f_2(x,y) + 1 \quad \textit{for every } (\bar{x},\bar{y}) \in B_\varepsilon((x,y)),$$

因此

$$x\,g_1(\bar{x},\bar{y}) + y\,f_2(\bar{x},\bar{y}) \le x^4 - 3\,x^2 + y^4 - 3\,y^2\,e^{|x|} + 1 \le (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -1,$$

对于每个 $(\bar{x},\bar{y}) \in B_\varepsilon((x,y))$。现在，由于 $0 < \phi(s) < 1$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$均成立，

$$x\,f_1(t,\bar{x},\bar{y}) + y\,f_2(\bar{x},\bar{y}) \le -1 + x\,\phi(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \alpha\,t) \le 0 \quad \textit{for every } (\bar{x},\bar{y}) \in B_\varepsilon((x,y)).$$

因此，有

$$\langle (x,y),(z_1,z_2)\rangle \le 0 \quad \textit{for all } z=(z_1,z_2)\in f(t,\overline{B}_\varepsilon((x,y))). \tag{4.11}$$

注意到 (4.11) 意味着

$$\langle (x,y),z\rangle \le 0 \quad \textit{for all } z\in \mathcal{K}f\,(t,(x,y))\subset \overline{\mathrm{co}}f(t,\overline{B}_\varepsilon((x,y))).$$

事实上，若 (4.11) 成立，则对于 $z,\bar z\in f(t,\overline{B}_\varepsilon((x,y)))$ 和 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\langle (x,y),\lambda z+(1-\lambda)\bar z\rangle = \lambda\langle (x,y),z\rangle + (1-\lambda)\langle (x,y),\bar z\rangle \le 0.$$

那么，集合 $R=[0,1]\times\overline{B}_1$ 是初值问题 (4.10) 的一个解区域。

最后，根据定理 3.1，可得初值问题 (4.10) 存在一个具有较大 $|\alpha|$ 的绝对连续解。显然， f 满足假设 (H_1) 和 (H_2)。对于条件 (H_3)，取函数 $\tau(t,x,y)=x^2+y^2+\alpha\,t$，并令 A 为所有有理数构成的集合。根据 ϕ 的定义， f 在 $R\setminus\tau^{-1}(A)$ 中连续。由于 f 在 R 中有界，因此 $\mathcal{K}f$ 也有界，从而存在 $M>0$ 使得

$$|x\,z_1+y\,z_2|\le M \quad \textit{for all } (z_1,z_2)\in\mathcal{K}f\,(t,(x,y)) \ \textit{ and every } (t,x,y)\in R.$$

因此，若 $|\alpha|>2\,M$，则对每个 $(t,x,y)\in R$，都有

$$\langle\nabla\tau(t,x,y),(1,z_1,z_2)\rangle=\alpha+2(x\,z_1+y\,z_2)\neq 0 \quad \textit{for all } (z_1,z_2)\in\mathcal{K}f\,(t,(x,y))\,.$$

总之，定理 3.1 保证问题 (4.10) 至少存在一个绝对连续解 (x,y)，使得对于所有 $t\in[0,1]$，只要 $|\alpha|>2\,M$，就有 $(x(t)\ y(t))\in\overline{B}_1$。

显然，在定义与R 相关联的可行对 (h,p) 时，函数 h 的选取并非唯一。对 h 的不同选取会导出关于 f 的不同条件，以便检验 R 是否为 (1.1) 的解区域。基于这一思路，我们可以给出以下存在性结果。

Proposition 4.1 假设存在 $r>0$ 和一个连续可微函数 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\overline{B}_r=h^{-1}((-\infty,0])$，并且对几乎处处的 $t\in I$ 以及所有满足 $\|x\|=r$ 的 $x\in\mathbb{R}^n$，都有

$$\langle\nabla h(\lambda\,x),z\rangle\le 0, \quad \textit{for all } z\in\mathcal{K}f\,(t,x) \ \textit{ and all } \lambda\ge 1.$$

此外，假设 $f:\ I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足条件 (H_1)、(H_2) 和 (H_3)。

那么，初值问题 (1.1) 至少存在一个绝对连续解 x，使得 $\|x(t)\|\le r$ 对所有 $t\in I$ 均成立，前提是 $x_0\in\overline{B}_r$。

据我们所知，对于 Carath´eodory 非线性项，即使在经典情形下，上述结果也是新的。

COROLLARY 4.1 设 $f:\ I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个 Carath´eodory 函数。

假设存在 $r>0$ 以及连续可微函数 $h:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\overline{B}_r=h^{-1}((-\infty,0])$，并且对于几乎处处的 $t\in I$ 及所有满足 $\|x\|=r$的 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\langle\nabla h(\lambda x),f(t,x)\rangle\le 0,\quad \textit{for all } \lambda\ge 1.$$

那么，初值问题 (1.1) 至少有一个绝对连续解 x，使得对于所有 $t\in I$，$\|x(t)\|\le r$，前提是 $x_0\in\overline{B}_r$。

4.2 不连续下解与上解

首先，我们引入标量情形下（即 $n=1$）问题 (1.1) 的绝对连续下解与上解的概念。

DEFINITION 4.1 若函数 $\alpha\in W^{1,1}(I,\mathbb{R})$ 满足：对于几乎处处的 $t\in I$，$\alpha'(t)\le f(t,\alpha(t))$，且 $\alpha(0)\le x_0$，则称其为 (1.1) 的下解。(1.1) 的上解定义类似，只需将上述不等式反向。

假设 α、$\beta\in W^{1,1}(I,\mathbb{R})$ 分别是满足 $\alpha\le\beta$ 的方程 (1.1) 的下解与上解。那么区域

$$R=\{(t,x)\in I\times\mathbb{R}:\alpha(t)\le x\le\beta(t)\}$$

是方程 (1.1) 的解区域。事实上，由下式给出的对 (h,p)

$$h(t,x)=\max\{x-\beta(t),\alpha(t)-x,0\},\qquad p(t,x)=(t,\max\{\min\{x,\beta(t)\},\alpha(t)\}),$$

是一个可行对，满足 $h(0,x_0)\le 0$ 以及注 3.2 中的条件 (i^*)。因此，[12]中的定理 2.5 可视为定理 3.1 的推论。对于 Carath´eodory 函数 f，详情可见 [9]。

一般来说，要为方程 (1.1) 找到下解与上解并不容易，因此在大多数情况下，我们只能考虑常值或线性函数。为此，可以放宽定义 4.1 中的正则性假设，以便考虑分段常值或线性函数。文献中有少数论文讨论了分段连续的下解与上解，参见 [4,11,15]。

下一个例子表明，在某些情况下，有序的不连续下解与上解之间的区域也会成为一个解区域，从而可直接由定理 3.1 得出解的存在性。该例子受 [15, 例 4.9] 的启发。

EXAMPLE 4.2 考虑初值问题

$$x'=-x^2-x+2t+1,\quad t\in[0,1],\quad x(0)=0. \tag{4.12}$$

集合 $R = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \alpha(t) \le x \le \beta(t)\}$，其中 $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\alpha(t) = t, \qquad \beta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in [0, 1/2), \\ 2, & \text{if } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

是 (4.12) 的一个解区域。事实上，定义映射 $h : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $p : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,1] \times \mathbb{R}$ 如下：

$$h(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{if } (t,x) \in R, \\ t - x, & \text{if } x < t, \\ (x-1)(1/2-t), & \text{if } 0 \le t < 1/2,\ 1 < x \le 2t+1, \\ (x-1)(1/2-t) + (x-2t-1)^2, & \text{if } 0 \le t < 1/2,\ 2t+1 < x, \\ (x-2)^2, & \text{if } 1/2 \le t \le 1,\ 2 < x, \end{cases}$$

and

$$p(t,x) = \begin{cases} (t,t), & \text{if } x < t, \\ (t,x), & \text{if } t \le x \le \min\{2t+1, 2\}, \\ (t, \min\{2t+1, 2\}), & \text{if } x > \min\{2t+1, 2\}. \end{cases}$$

映射 p 是连续的，并且对每个 $(t,x) \in R$，都有 $p(t,x) = (t,x)$； h 是一个非负连续函数，且 $h^{-1}(0) = R$。此外，$\frac{\partial h}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 是定义在 R^c 上的 Carath´eodory 映射。因此，(h,p) 是与 R 相关联的可行对。此外，容易验证，对几乎处处的 t 以及所有满足 $(t,x) \in R^c$ 的 x，

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial h}{\partial x}(t,x) f(p(t,x)) \le 0,$$

其中 $f(t,x) = -x^2 - x + 2t + 1$。因此， R 是 (4.12) 的一个解区域，并且由于 f 是连续的，定理 3.1 立即保证了 (4.12) 在 α 和 β 之间存在一个解。

注意，由于 β 不连续，因此它不可能是定义 4.1 意义下的上解。注意，常函数 $\gamma(t) = 1, t \in [0,1]$ 不是（4.12）的上解。即使定义为 $\beta(t) = \min\{2t+1, 2\}$ 的绝对˜连续函数显然是（4.12）的上解， β 对解的局部化也比 β 更精确。

另一方面，(h,p) 不是与 R 相关联的容许对，因为定义 2.2 中的假设 (iii) 不成立。事实上，在集合 $\{(t,x) \in [0,1/2) \times \mathbb{R}$ 上， $p_2(t,x) = x : \ 1 < x \le 2t+1\} \subset R^c$，这意味着

$$\langle \nabla_x h(t,x), p_2(t,x) - x \rangle = \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,(p_2(t,x) - x) = 0.$$

因此，此处不能将 *[8]* 中建立的理论应用于这一对 (h,p)。

最后请注意，若存在有序的分段连续下解与上解，且下解（上解）具有向下（向上）跳跃，则对于方程 (1.1)，存在一对更优的有序绝对连续下解与上解，正如 [4, 命题 4.2] 所证明的。因此，可以通过绝对连续下解与上解来定义解区域。由此， [11] 中的定理 2.1 也可以视为本文主要结果的推论。

致谢

作者谨向 Rodrigo L´opez Pouso 教授致谢，感谢他一直以来的鼓励和有益建议。作者部分受资助于加利西亚自治区政府（西班牙）项目 ED431C 2019/02，以及西班牙 AIE 和欧洲区域发展基金资助的项目 PID2020-113275GB-I00。

参考文献

[1] J. Andres、G. Gabor 和 L. G´orniewicz，关于多值渐近问题解集的拓扑结构，Z. Anal. Anwend., 19 1 (2000), 35–60。[2] J. Andres 和 L. J¨uttner，不连续微分系统的周期解，Nonlinear Anal. Forum, 6 2 (2001), 391–407。[3] J. P. Aubin 和 A. Cellina，微分包含，Springer (1984)。[4] D. C. Biles 和 R. L´opez Pouso，一阶奇异与不连续微分方程，Bound. Value Probl., 2009 (2009), 507671。[5] V. I. Bogachev，测度论，第 I 卷，Springer (2007)。[6] A. Bressan 和W. Shen，论不连续微分方程，微分包含与最优控制，J. Andres、L. Gorniewicz 和 P. Nistri 编，Julius Schauder中心, Lect. Notes Nonlinear Anal. 2 (1998), 73–87。[7] J. ´A. Cid 和 R. L´opez Pouso，具有时变不连续集的常微分方程与系统，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 134 4 (2004), 617–637。[8] M. Frigon，通过解区域方法研究一阶微分方程组的存在性与多重性结果，Adv. Nonlinear Stud., 18 3 (2018), 469–485。[9] M. Frigon、M. Tella 和 F. A. F. Tojo，通过解区域方法研究具有非线性边界条件的一阶微分系统，Bound. Value Prob. (2021), 2021:19, 第 18 页。[10] R. E. Gaines 和 J. Mawhin，具有非线性边界条件的常微分方程，J. Differential Equations, 26 (1977), 200–222。[11] E. Liz 和 R. L´opez Pouso，带“跳跃”的上解与下解，J. Math. Anal. Appl., 222 (1998), 484–493。

[12] R. L´opez Pouso、I. M´arquez Alb´es 和 J. Rodr´ıguez-L´opez，关于一阶不连续泛函微分方程解的存在性的横截条件，Topol. Methods Nonlinear Anal. 58 1 (2021), 1–17。[13] R. L´opez Pouso 和 J. Rodr´ıguez-L´opez，在局部化的 Bressan-Shen 横截条件下不连续微分方程组解的存在性与唯一性，J. Math. Anal. Appl. 492 (2020), 124425。[14] F. A. F. Tojo，解区域方法的构造性途径，J. Math. Anal. Appl., 472 2 (2019), 1803–1819。[15] K. A. Topolski，与不连续微分方程应用相关的上、下绝对连续函数，Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., No. 83 (2017), 1–12。